



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1815A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Alberico Alessandro

MATERIA: Fondamenti di ingegneria nucleare (Teoria + esercizi) - prof. Ravetto

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FOONDAMENTI DI INGEGNERIA NUCLEARE

02/03

RADIOATTIVITÀ

DECADIMENTO NATURALE

In natura esistono elementi non stabili, con cioè una certa probabilità di cambiare la propria natura in seguito ad un'emissione di una particella o di un fotone:

- PARTICELLA α : è un nucleo di He ${}^4_2\text{He} \rightarrow 2 \text{ protoni} + 2 \text{ neutroni}$
- PARTICELLA β : è un elettrone (carica e^-) (un n diventa p⁺ emettendo e^-) ^{DECADIMENTO β}
- FOTONE γ
- FOTONE γ : molto più energetico del fotone α

LEGGI DI BECKEREL (sperimentale)

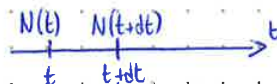
La probabilità che un nucleo decada è costante nel tempo, è indipendente dal numero di nuclei e dall'età del nucleo

N_0 : numero di nuclei radioattivi all'istante $t=0$

La probabilità, per un nucleo, per unità di tempo di decadere si esprime attraverso una densità temporale di probabilità di decadere $\lambda = [1/s]$

Quindi, la probabilità che un nucleo decada in un tempo dt è proporzionale a dt

λdt : è la probabilità di decadere fra t e $t+dt$



S: λ un bilancio tra t e $t+dt$ dei nuclei

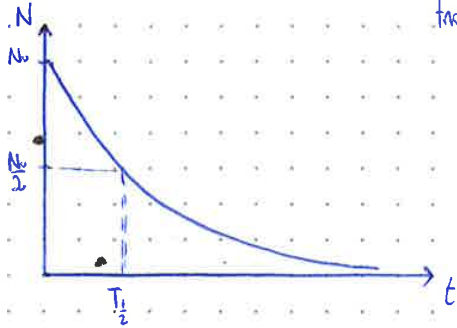
$$N(t) - N(t+dt) = \text{ n° di nuclei decadute}$$

$$N(t) - N(t+dt) = (\lambda dt) \cdot N(t)$$

$$-dN(t) = \lambda \cdot N(t) dt \quad \text{perciò} \quad \boxed{\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda \cdot N(t)}$$

questo è un'equazione DIFFERENZIALE ORDINARIA (solo derivate ordinarie, e non parziali) del PRIMO ORDINE (solo derivate prime) LINEARE (contiene soltanto espressioni e funzioni) a COEFFICIENTI COSTANTI (λ è un numero costante) a VARIABILI SEPARABILI ed OMOGENEA (senza termine noto)

* : mi servono una condizione iniziale : N_0 * : obbedisce al principio di sovrapposizione degli EFFETTI



trovare il TEMPO di DIMETZAMENTO

$$N(T_{1/2}) = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2}$$

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lambda T_{1/2} = \log 2$$

$$T_{1/2} = \frac{\log 2}{\lambda}$$

è uguale al tempo medio di decadimento per il logaritmo di 2.

$$T_{1/2} = \bar{t} \log(2)$$

DECADIMENTO CON Sorgente di NUCLEI $R(t)$

Il bilancio fra i tempi t e $t+dt$ sono $N(t+dt) - N(t) = \underbrace{R(t)}_{\text{sorgente}} - \underbrace{\lambda N(t) dt}_{\text{decaduti}}$

$$\frac{dN(t)}{dt} = R(t) - \lambda N(t)$$

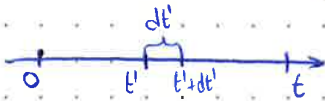
questa equazione differenziale NON È OMOGENEA ($R(t)$: termine noto)

Per risolvere dov'è sommare la soluzione dell'omogenea associata, in cui non ho $R(t)$ ($R(t)=0$), che tiene conto dell'evoluzione naturale che avrebbe il sistema senza forzanti e ~~una~~ ~~una~~ una soluzione particolare che tiene conto dell'effetto della sorgente.

APPROCCIO FISICO

$$N(t) = \underbrace{N_0 e^{-\lambda t}}_{\text{contributo iniziale fra } 0 \text{ e } t} + \underbrace{\int_0^t dt' R(t') e^{-\lambda(t-t')}}_{\text{contributo di quelle provenienti dalla sorgente}}$$

+ : è somma per la LINEARITÀ
 \int_0^t : somma tutti i contributi della forzante fra t' e t



APPROCCIO MATEMATICO

CAUCHY: metodo della variazione della costante ordinaria

$N_h(t) = C e^{-\lambda t}$
 homogenea costante

per cui $N(t) = C(t) e^{-\lambda t}$

sostituisco $N(t)$ in $\frac{dN(t)}{dt} = R(t) - \lambda N(t)$

$$\frac{dC}{dt} e^{-\lambda t} - C(t) \lambda e^{-\lambda t} = R(t) - \lambda C(t) e^{-\lambda t}$$

$$\frac{dC}{dt} e^{-\lambda t} = R(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = R(t) e^{\lambda t}$$

$$dC(t) = R(t) e^{\lambda t} dt$$

INTEGRA FRA 0 e t

$$C(t) - C(0) = \int_0^t dt' R(t') e^{\lambda t'}$$

$$C(t_0) \Rightarrow N(t) = C(t) e^{-\lambda t} \quad N_0 = C(0)$$

$$C(t) \Rightarrow N(t) = C(t) e^{-\lambda t} \quad N(t) e^{\lambda t} = C(t)$$

sostituendo $N(t) e^{\lambda t} - N_0 = \int_0^t dt' R(t') e^{\lambda t'}$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t dt' R(t') e^{\lambda t'} e^{-\lambda t}$$

REAZIONI NUCLEARI

3/03

Le reazioni nucleari possono essere naturali, indotte dal decadimento naturale mediato dal neutrone, o ARTIFICIALI, indotte da urti neutronici: si provocano collisioni nucleo-neutrone per provocare delle reazioni nel nucleo.

I principali tipi di interazione sono le TRASMUTAZIONI NUCLEARI e la FISSIONE.

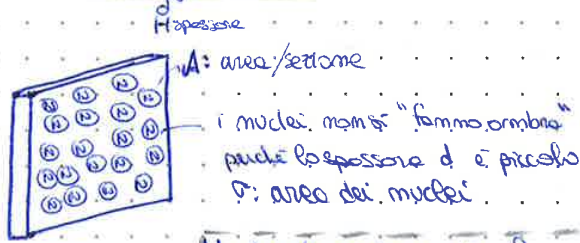
Le TRASMUTAZIONI NUCLEARI si dividono in:

- SCATTERING ELASTICO di POTENZIALE: il neutrone non riesce a penetrare nel nucleo perché non ha abbastanza energia, ma ci rimbalza contro cedendogli energia, quindi (essendo meno energetico) dopo la collisione il neutrone sarà più lento.
 Più il nucleo è piccolo, maggiore è l'energia ceduta dal neutrone al nucleo stesso.
- SCATTERING ELASTICO di RISONANZA: il neutrone collide con il nucleo e scambia energia penetrandolo ed entrando a farne parte, dopodiché il nucleo rilascia un neutrone.
 Quindi l'energia globale si conserva.
- SCATTERING ANELASTICO: l'interazione provoca l'eccitazione del nucleo che inizia ad emettere radiazioni.
 Durante l'interazione l'energia meccanica non si conserva perché l'energia cinetica del neutrone si trasforma in energia termica dissipata dalle radiazioni, mentre l'energia globale si conserva.
- CATTURA del NEUTRONE: l'urto provoca l'assorbimento da parte del nucleo del neutrone, il quale diventa un isotopo ~~di~~ di quello originale; il nucleo ora è in uno stato eccitato in virtù del quale emette radiazioni.

SPALLAZIONE: quando i neutroni o le particelle incidenti hanno ~~una~~ energie talmente elevate da provocare l'evaporazione del nucleo.

Le TRASMUTAZIONI sono le reazioni che costituiscono le catene di decadimento in cui un nucleo trasmuta cedendo/assorbendo neutroni ed emettendo α o β .

INTERAZIONE fra i NEUTRONI e la MATERIA



$$N: \text{densità nucleare} = N_A \frac{\rho}{PM} \quad \left[\frac{\text{nuclei}}{\text{cm}^3} \right]$$

MOLARE
MOLEcolare

o può anche venire espressa come

$$N = N_A \frac{\rho}{A} \quad \left[\frac{\text{atomo}}{\text{cm}^3} \right]$$

(MOLARE) (MOLEcolare)

Ogni atomo di un certo elemento contiene un N_A (numero di Avogadro) di atomi

Si pensa di prendere una lamina sottile (d) di un materiale e si immagina di bombardarla con dei proiettili (= neutroni) che colli davanti o meno con degli ostacoli (= nuclei)

La probabilità di interazione nucleo-neutrone si può scrivere come

$$P = \frac{N \cdot d \cdot \sigma}{A}$$

dove

$N \cdot d$: è il numero di nuclei presenti nel volume (d)

σ : è l'area oscurata da ogni ostacolo

$N \cdot d \cdot \sigma$: è l'area oscurata da tutti gli ostacoli presenti, quindi l'area degli ostacoli

Certo la probabilità di collisione per unità di percorso

$$\frac{P}{d} = \frac{N \cdot \sigma \cdot d}{d} = N \cdot \sigma$$

$$N \cdot \sigma = \Sigma \quad \text{SEZIONE D'URTO MACROSCOPICA}$$

è riferita a tutta la lamina

$$\sigma \quad \text{SEZIONE D'URTO MICROSCOPICA}$$

è riferita al singolo nucleo

$$[\sigma] = \text{cm}^2 = b \quad (\text{barn})$$

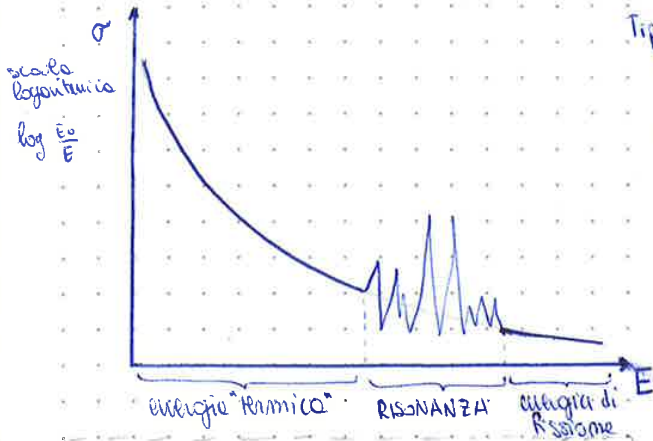
$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$[\Sigma] = \text{cm}^{-1}$$

ANDAMENTO DELLA SEZIONE D'URTO

Da un punto di vista classico σ è l'area occupata dal nucleo. Da un punto di vista quantistico invece può variare bruscamente.

Sperimentalmente si ottiene che σ dipende dal materiale e dall'energia del neutrone incidente.



Tipicamente l'andamento di $\sigma(E)$ è un'iperbole perché σ aumenta con il diminuire della velocità del neutrone incidente e quindi della sua energia ($\sigma \propto \frac{1}{v}$).

Esistono dei fenomeni di risonanza quando i neutroni hanno energie pari ai livelli energetici degli atomi.

In alcuni intervalli energetici la sezione d'urto scivola a valori altissimi: la risonanza fa variare σ di diversi ordini di grandezza al variare di E di pochi eV.

nelle fissione i neutroni hanno energia dell'ordine di grandezza di MeV
 $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19} J$
 per togliere un elettrone dall'orbita di valenza servono circa 10 eV

Più il neutrone rallenta, più acquista LETALITÀ (diminuisce l'energia).

σ esprime la probabilità di interazione fra nucleo e neutrone; per ogni tipo di interazione avremo una σ associata.

- σ_p : sezione d'urto elastico potenziale
 - σ_r : sezione d'urto elastico di risonanza
 - σ_a : sezione d'urto anelastico
- } $\sigma_p + \sigma_r + \sigma_a = \sigma_{sc}$: sezione d'urto di scattering
- σ_c : sezione d'urto di cattura
 - σ_f : sezione d'urto di fissione
- } $\sigma_c + \sigma_f = \sigma_a$: sezione d'urto d'assorbimento
- $\sigma_a + \sigma_{sc} = \sigma$: sezione d'urto (microscopica)

Immaginiamo di far collidere un neutrone n con un nucleo di U^{235} e U^{238}

$U^{235} + n \rightarrow U^{236}$ $P' U^{236}$ ha una energia di separazione $E_{sep} = 5,3$ MeV (energia necessaria per staccare un nucleone dal nucleo) e ha un'energia di legame $E_{leg} = 6,4$ MeV (proporzionale all'energia posseduta da ogni nucleone in virtù delle forze nucleari). Essendo $E_{leg} > E_{sep}$, anche un neutrone con energia nulla è in grado di dare fissione. $P' U^{235}$ è FISSILE

$U^{238} + n \rightarrow U^{239}$ $P' U^{239}$ ha una energia di separazione $E_{sep} = 5,5$ MeV, e una energia di legame $E_{leg} = 4,9$ MeV. Essendo $E_{sep} > E_{leg}$, un neutrone per dare fissione dovrà avere almeno un'energia pari alla differenza fra $E_{sep} - E_{leg}$, che è pari a 0,6 MeV. $P' U^{238}$ è FISSIONABILE

Per trovare la velocità media di un neutrone termico si usa la teoria di Boltzmann

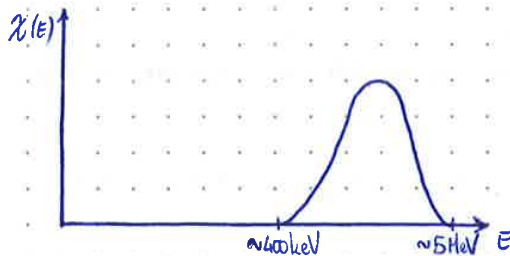
$\frac{1}{2} m v^2 = k T$ l'energia media dei neutroni è proporzionale alla temperatura assoluta T
 dove $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K : costante di Boltzmann

quindi i neutroni termici a 20°C (293,15 K) hanno velocità media di circa $v = 2200$ m/s

Qual è la probabilità che un neutrone di fissione venga emesso nell'intervallo fra E ed $E+dE$?

$\chi(E) dE$
 distribuzione energetica
 probabilità che un neutrone abbia energia fra E ed $E+dE$

$\chi(E)$: è detto anche SPETTRO DI FISSIONE



$\int_0^{+\infty} \chi(E) dE = 1$
 $\int_0^{+\infty} E \chi(E) dE = \bar{E}$
 media dell'energia.
 $\bar{E} \approx 2$ MeV

Il neutrone "padre" ha E bassa mentre il neutrone "figlio" avrà E alta; noi dobbiamo cercare di averli uguali in modo da controllare il reattore. \rightarrow materiale MODERATORE.

VITA MEDIA di UN NEUTRONE : quanto stanno i neutroni nel reattore?

per i neutroni termici l'ordine di grandezza (odg) è il millesimo di secondo 10^{-3} s.
 per i neutroni veloci invece l'odg è 10^{-6} s.

[nei calcoli per l'ingegneria nucleare usiamo 5 cifre significative l'ò precdo" è 10^{-5}]

I neutroni emessi vengono divisi in

- PRONTI (prompti / rapidi) (99%) vengono emessi subito per la fissione.
- RITARDATI (1%) emessi dopo un certo tempo (1 s), per decadimento radioattivo.

In natura abbiamo grandi quantità di U^{238} e molto poco U^{235} (che è il vero "combustibile") \rightarrow si arricchisce l'uranio, cioè si fa in modo di avere una miscela un po' più ricca di U^{235} che è fissile. Comunque nella miscela c'è ancora molto U^{238} che in qualche modo reagisce.

L' U^{238} assorbe un neutrone diventando U^{239} \rightarrow l' U^{239} è radioattivo e decade β diventando NETTONIO Np^{239} \rightarrow è anch'esso radioattivo decedendo ancora β diventando PLUTONIO Pu^{239} che è fissile. Essendo Pu e U due atomi diversi sono facili da separare, messa a ottenere combustibile fissile puro. (Δ il $T_{1/2}$ del Pu^{239} è di ~ 24.100 anni), che però è molto pericoloso perché decade α (il decadimento α può essere schermato con dei semplici vestiti, ma se inghiottito provoca danni gravissimi). E Pu^{239} può anche assorbire un neutrone diventando Pu^{240} (fissionabile) \rightarrow assorbendo ancora Pu^{241} (fissile).

Questi possono ancora decadere β creando nuovi elementi \rightarrow BREEDING / PROLIFERAZIONE

la grandezza $v \cdot N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot d\vec{\Omega} = \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ flusso di particelle.

$\phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ è il FLUSSO NEUTRONICO.

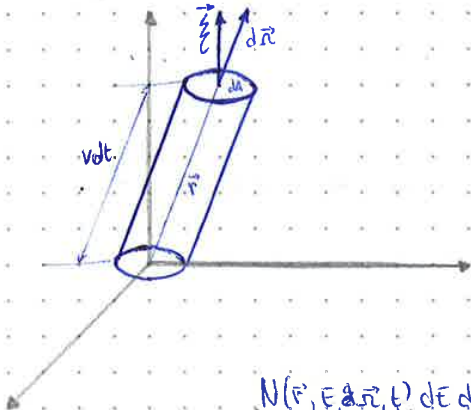
Se ϕ fosse isotropo e lo conoscessi.

Se conoscessi ϕ potrei progettare un reattore nucleare. TEORIA DELLA DIFFUSIONE.

Nello studio della diffusione di particelle è utile a questo definire la grandezza

CORRENTE di PARTICELLE

($\vec{z} = x_1$)



$\vec{\Omega}$ è la direzione delle particelle.

$v dt$ distanza da cui parteciano le particelle che possono attraversare dA nel tempo dt .

$dA \cdot v dt \cdot \cos(\text{angolo tra } \vec{z} \text{ e } d\vec{\Omega})$ VOLUME del CILINDRO

$dA \cdot v dt \cdot \vec{z} \cdot d\vec{\Omega}$
prodotto scalare

$N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \cdot dE \cdot d\Omega \cdot v dt \cdot dA \cdot \vec{z} \cdot d\vec{\Omega}$ diviso per dt

$\vec{\Omega} \cdot \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \int dA \cdot dE \cdot d\vec{\Omega}$

~~direzione~~

~~direzione~~

questa quantità mi dice quante particelle attraversano dA con direzione $d\vec{\Omega}$ ed è quindi una corrente direzionale.

$\vec{\Omega} \cdot \phi =$ CORRENTE ANGOLARE

$\vec{\Omega} \cdot \phi = j(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ (può essere positiva o negativa); per calcolare la corrente totale, indipendente dalla direzione delle particelle integro su $d\vec{\Omega}$

$\left(\int d\Omega \vec{\Omega} \cdot \phi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \right) \cdot \int dA \cdot dE$
 $\vec{J}(\vec{r}, E, t) =$ CORRENTE NETTA

Se sono ellipsoidi di energia sia uniforme quindi anche $\vec{J}(\vec{r}, t)$ e $\phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$

Le particelle dopo il tempo dt sono meno perché alcune possono venire assorbite; all'interno del volume potrebbe esserci una sorgente; le particelle hanno una certa velocità. quindi possono entrare ed uscire dal volume di controllo (dV); quindi:

$$n(\vec{r}, t+dt)dV - n(\vec{r}, t)dV = -\text{Assorbimenti} + \text{Sorgenti} - \text{Particelle Uscite} + \text{Particelle Entrate}$$

Esprimiamo i vari termini

Sorgenti: $S(\vec{r}, t)dV dt$ numero di particelle intrappolate $S(\vec{r})$ caratteristica della sorgente

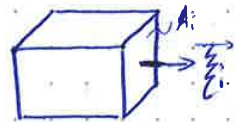
Assorbimenti: la distanza percorsa per la probabilità di essere assorbita per unità di percorso

$$\sum_a \langle \sigma_a(\vec{r}) \rangle \phi(\vec{r}, t) dV dt \quad \sum_a \text{ è il dato del problema}$$

distanza percorsa

\sum_a potrebbe cambiare nel tempo, ma noi consideriamo il sistema stazionario.

Uscite-Entrate: il volume dV di controllo avrà un certo numero di facce eguaglie con il proprio vettore



Se conosciamo la corrente so dire quante particelle entrano ed escono

MF è il numero di facce

$$\sum_{i=1}^{MF} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_i dA_i dt$$

Il bilancio reale

~~$$n(\vec{r}, t+dt)dV - n(\vec{r}, t)dV = -\sum_a \langle \sigma_a(\vec{r}) \rangle \phi(\vec{r}, t) dV dt + S(\vec{r}, t) dV dt - \sum_{i=1}^{MF} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_i dA_i dt$$~~

Le prime grandezze sono tutte riferite al volume dV , mentre l'ultima è riferita alla sua superficie A_i . Devo trovare il legame tra una grandezza riferita alla superficie e una riferita al volume.

↓
Teorema di Gauss (Th. della divergenza)

$$\left(\sum_{i=1}^{MF} \vec{J}(\vec{r}, t) \cdot \vec{n}_i dA_i \right) dt = (\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV) dt$$

Perciò posso scrivere il bilancio come

$$n(\vec{r}, t+dt)dV - n(\vec{r}, t)dV = -\sum_a \langle \sigma_a(\vec{r}) \rangle \phi(\vec{r}, t) dV dt + S(\vec{r}, t) dV dt - (\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) dV) dt$$

semplice fatto tutto dividendo per dV e dt e trovo

1. ASSUNZIONE : emissione ISOTROPA, si distribuiscono equamente in tutte le direzioni con la stessa probabilità

Per poter incidere su dA_z devono comunque avere orientazione nel "cono $d\Omega$ "

L'angolo solido $d\Omega$ è l'area ortogonale ad \vec{r} ($\cos\theta dA_z$) diviso lo spazio al quadrato (r^2)

$\frac{\cos\theta dA_z}{r^2}$ diviso ancora per 4π , per la probabilità distrib. in qualunque

$\frac{1}{4\pi} \frac{\cos\theta dA_z}{r^2}$ Se collidono le particelle possono uscire dal percorso

possono venire catturate, quindi si perdono, o possono subire scattering, lo considero comunque perse perché anche se rimangono con orientamento nel cono le considero come generate nel volume dV in cui ho colpito; alla fine integro su tutto il volume dV

$\frac{1}{4\pi} \frac{\cos\theta dA_z}{r^2} \psi(\vec{r}, t) e^{-\Sigma r}$ probabilità di non collidere

particelle partite da \vec{r} verso A_z ed effettivamente arrivate su A_z

2. ASSUNZIONE : omogeneità del mezzo, proprietà del mezzo costanti nello spazio

le particelle però devono arrivare su A_z al tempo t , quindi devono partire prima dell'istante t

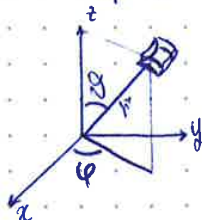
$\frac{1}{4\pi} \frac{\cos\theta dA_z}{r^2} \psi(\vec{r}, t - \frac{r}{v}) e^{-\Sigma r}$ $\frac{r}{v}$ tempo impiegato dalla particella per andare da r a 0

$J_z^- dA_z = \frac{dA_z}{4\pi} \int_{z>0} dV \psi(\vec{r}, t - \frac{r}{v}) \frac{\cos\theta}{r^2} e^{-\Sigma r}$ J_z^- contributo alla corrente lungo z verso il basso
integrale nel
 spazio superiore

L'integrale però è troppo complesso da risolvere nello spazio

contorniamo \rightarrow a: anzitutto passiamo in coordinate sferiche

Coordinate sferiche



il volume "sferico" infinitesimo è

$$dV = (r \sin\theta dr) (r \sin\theta d\theta) d\phi$$

$$r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

COORDINATE SFERICHE

$$x = r \cos\theta \sin\phi$$

$$y = r \sin\theta \sin\phi$$

$$z = r \cos\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta \cos^2\theta = -\frac{\cos^3\theta}{3} \Big|_0^{\pi/2} = -0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{+\infty} dr e^{-\Sigma r} = \frac{1}{-\Sigma} e^{-\Sigma r} \Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{\Sigma}$$

$$\int_0^{+\infty} dr r e^{-\Sigma r} = e^{-\Sigma r} \left[\frac{r}{-\Sigma} - \frac{1}{(-\Sigma)^2} \right] \Big|_0^{+\infty} = 0 - \dots - 1 \left(0 - \frac{1}{\Sigma^2} \right) = \frac{1}{\Sigma^2}$$

quindi si sommano

$$J_z^- dA_z = \frac{dA_z}{2} \left(\frac{1}{2\Sigma} \varphi(0,t) + \frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_0 \right)$$

densità di emissione gradiente di densità di emissione

Orò trova la componente che va da sotto a sopra

$$J_z^+ dA_z = \frac{dA_z}{2} \left(\frac{1}{2\Sigma} \varphi(0,t) - \frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_0 \right)$$

lo corrente netto sarà $J_z = J_z^+ - J_z^- = -\frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_0$

per analogia, anche le correnti lungo le altre direzioni y e x.

$$J_y = -\frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Big|_0 \quad J_x = -\frac{1}{3\Sigma^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_0$$

essendo $\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{e}_z$ (dove \hat{e} indica il versore)

$$\vec{J}(0,t) = -\frac{1}{3\Sigma^2} \nabla \varphi \Big|_0 \quad \text{quindi} \quad \vec{J}(\vec{r},t) = -\frac{1}{3\Sigma^2} \nabla \varphi(\vec{r},t)$$

5. ASSUNZIONE: supponiamo che l'area Σ_s sia così grande da poter trascurare le sorgenti, perché tutte le particelle derivanti dalla sorgente hanno collasso prima di arrivare a A_z .

$$\varphi(\vec{r},t) d\vec{r} = (\delta(\vec{r},t) + \Sigma_s \phi(\vec{r},t)) d\vec{r} \quad \varphi(\vec{r},t) d\vec{r} = \Sigma_s \phi(\vec{r},t) d\vec{r}$$

Perciò riusciamo a trovare la relazione tra \vec{J} e ϕ

$$\boxed{\vec{J}(\vec{r},t) = -\left(\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2}\right) \nabla \phi(\vec{r},t)}$$

LEGGE DI FICK o LEGGE DELLA DIFFUSIONE

$$\frac{\Sigma_s}{3\Sigma^2} : \text{è il coefficiente di diffusione} = D$$

In realtà l'assunzione 2. è superflua perché, in pratica, consideriamo solo le particelle molto vicine all'area dA .

+ CASO STAZIONARIO, GEOMETRIA PIANA, MEZZO INFINITO (e omogeneo), Sorgente LOCALIZZATA

$\nabla \cdot D \nabla \phi(\vec{r}) - \sum_a \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0$, essendo il mezzo omogeneo posso portare fuori D dalla ∇

il prodotto scalare $\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$: operatore di Laplace = LAPLACIANO

$D \nabla^2 \phi(\vec{r}) - \sum_a \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0$, continuo ad essere alle derivate parziali

con l'ipotesi di geometria piana per cui abbiamo $\phi(x)$, così che

$D \nabla^2 \phi(x) = \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \frac{d^2 \phi(x)}{dy^2} + \frac{d^2 \phi(x)}{dz^2} = \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2}$ usati alle derivate totali (o ordinarie)

per cui risulta $D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \sum_a \phi(x) + S(x) = 0$

Così vediamo il mezzo infinito e sorgente nulla ovunque tranne che in un punto \rightarrow sorgente localizzata, le parziali nullo in 0.

Quindi se $x \neq 0$ abbiamo $D \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \sum_a \phi(x) = 0$, perché $S(x) = 0$ e

quindi è un'equazione omogenea $\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{\sum_a}{D} \phi(x) = 0$

$\left[\frac{D}{\sum_a} \right] = \text{cm}^2 \Rightarrow L^2$ dove $L = \sqrt{\frac{D}{\sum_a}}$ = lunghezza di diffusione, definisce la scala del fenomeno diffusivo

$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi(x) = 0$

$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \frac{1}{L^2} \phi(x)$

è una funzione tale che se derivata due volte da come mostrato se stesso diviso per L^2 .

perciò $\phi(x) = A e^{x/L} + C e^{-x/L}$

se vado a distanza infinita dalla sorgente devo trovare $\phi(x) = 0$, perciò

per $x \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$

per $x > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$ il termine $A e^{x/L}$ non ci deve essere $A = 0$

per $x < 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$ il termine $C e^{-x/L}$ non ci deve essere $C = 0$

$\hookrightarrow \phi = B e^{-|x|/L}$

così ho entrambe le soluzioni in una

RIPRESO DOPO

le soluzioni saranno lo stesso degli e^x

$$\phi(x) = Ae^{x/L} + Ce^{-x/L}$$

Il mezzo è infinito e omogeneo, quindi sarà anche simmetrico rispetto all'origine quindi la soluzione sarà PARI.

Il mezzo è dissipativo, per cui il lim $\phi(x) = 0$ per cui dobbiamo porre $A=0$, rimane $\phi(x) = Ce^{-x/L}$ $x \rightarrow +\infty$

Avendo supposto, quando abbiamo ricavato l'equazione della diffusione, che la sorgente fosse isotropa, possiamo dire che metà delle particelle vanno a destra e metà a sinistra: se consideriamo un solo lato $\frac{S_0}{2}$

Vuol dire che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \bar{J}(x) = \frac{S_0}{2}$$

detta CONDIZIONE di Sorgente

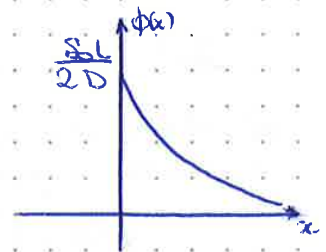
per la legge di Fick (nel caso stazionario/costante) $\bar{J}(x) = -D \frac{d\phi(x)}{dx}$

dallo che la soluzione sarà del tipo $\phi(x) = Ce^{-x/L}$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\frac{C}{L} e^{-x/L} \quad \text{quindi} \quad \bar{J}(x) = \frac{CD}{L} e^{-x/L}$$

per cui il $\lim_{x \rightarrow 0^+} \bar{J}(x) = \frac{S_0}{2} = \frac{CD}{L}$ da cui ricaviamo $C = \frac{S_0 L}{2D}$

perciò sarà
$$\phi(x) = \frac{S_0 L}{2D} e^{-x/L}$$



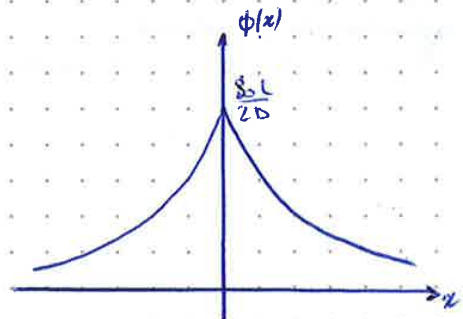
Dopo una distanza $x=L$ avremo $\phi(x) = \frac{S_0 L}{2D} e^{-1}$
il flusso di particelle si riduce di $1/e$

L. mi dice in quanto spazio il fenomeno diminuisce, e la distanza di assorbimento del fenomeno

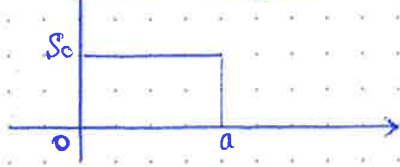
per $x < 0$
$$\phi(x) = \frac{S_0 L}{2D} e^{x/L}$$

quindi la soluzione completa sarà:

$$\phi(x) = \frac{S_0 L}{2D} e^{-|x|/L}$$



Se avessi una sorgente non nulla solo in un intervallo fra 0 e a



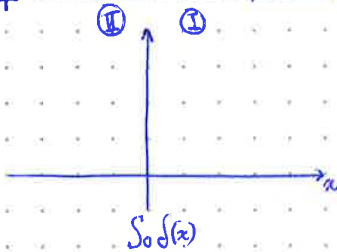
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' S(x') G(x' \rightarrow x) = \int_0^a dx' S_0 G(x' \rightarrow x) = \int_0^a dx' S_0 G(x' \rightarrow x) =$$

$$= \frac{S_0 L}{2D} \int_0^a e^{-|x-x'|/L} dx' = \phi(x)$$

però, dov'è analizzare 3 diversi casi: per $x < 0$ avrò $x < x'$
 $x > a$ $x > x'$
 $0 < x < a$ dov'è spezzare l'integrale in due parti

trattato ad esercitazione...

+ CASO STAZIONARIO, GEOMETRIA PIANA, SORGENTE LOCALIZZATA, DUE MEZZI DIVERSI SEMIINFINITI



Dovremo esaminare le due regioni separatamente.

$$x > 0 \quad \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L_I^2} \phi(x) = 0 \quad \phi(x) = A_I e^{-x/L_I}$$

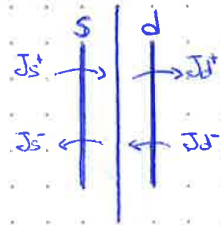
$$x < 0 \quad \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L_{II}^2} \phi(x) = 0 \quad \phi(x) = A_{II} e^{x/L_{II}}$$

più nella sorgente, cioè per $x=0$, deve essere uguale

$$\phi(x=0^+) = \phi(x=0^-) \quad A_I = A_{II}$$

Nell'intorno della sorgente, cioè il salto di particelle dovuto allo scattering, non è più nulla perché ho due materiali diversi, quindi due Σ_s diversi.

Analizzo l'intorno considerando due piani a sinistra e a destra della sorgente piano.



Essendo stazionario il bilancio tra ciò che entra, ciò che esce e ciò che viene prodotto deve essere costante.

$$S_0 + \underbrace{J_s^+ + J_s^-}_{\text{queste sono correnti parziali}} = J_s^- + J_s^+$$

$$S_0 = J_d^+ - J_d^- + J_s^- - J_s^+ = (J_d^+ - J_d^-) - (J_s^+ - J_s^-) =$$

$$= J_d - J_s \rightarrow \text{condizione di sorgente}$$

da si introduce all $S_0 = J(0^+) - J(0^-)$

$$I) \phi'(x) = -A_I \frac{1}{L_I} e^{-x/L_I}$$

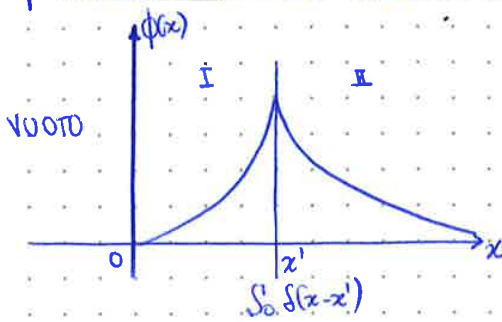
$$II) \phi'(x) = A_{II} \frac{1}{L_{II}} e^{x/L_{II}}$$

ricordando che $J(x) = -D \phi'(x)$

$$I) J(0^+) = + \frac{A_I D_I}{L_I} e^{0/L_I} = \frac{A_I D_I}{L_I}$$

$$II) J(0^-) = - \frac{A_{II} D_{II}}{L_{II}} e^{0/L_{II}} = - \frac{A_{II} D_{II}}{L_{II}}$$

+ CASO STAZIONARIO, GEOMETRIA PIANA, SORGENTE LOCALIZZATA, MEZZOOMOGENEO E SEMI-INFINITO



Devono analizzare due zone diverse in cui le caratteristiche del mezzo sono le stesse, ma l'accamento del flusso sarà differente.

$x \neq x'$ in generale vale: $\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\phi(x) = 0$

$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = \frac{1}{L^2}\phi$

I) $\phi(x) = A_I e^{x/L} + C_I e^{-x/L}$

II) $\phi(x) = A_{II} e^{x/L} + C_{II} e^{-x/L}$

lim. per $x \rightarrow \infty$ di $\phi(x)$ deve tendere a zero, quindi $A_{II} = 0$ perché deve annullarsi il termine divergente.

Poi posso imporre la condizione di annullamento sul contorno estremo per $x=0 \phi=0$

$0 = A_I \cdot e^0 + C_I e^0 = A_I + C_I$

$A_I = -C_I$

$\phi(x) = A_I (e^{x/L} - e^{-x/L})$

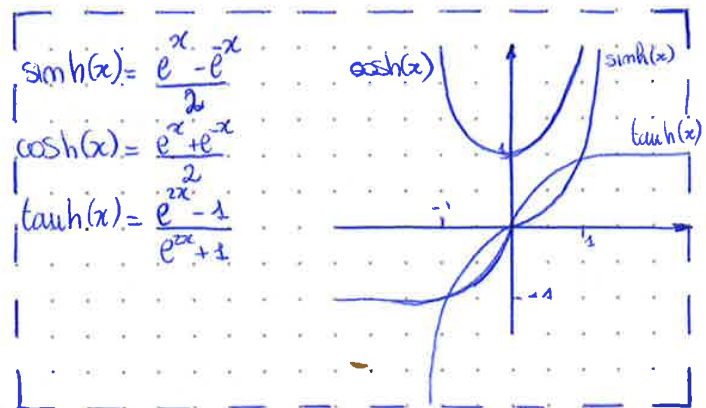
a questo punto è utile introdurre una funzione somma di esponenziali che si annulla in un punto

$\phi(x) = 2A_I \left(\frac{e^{x/L} - e^{-x/L}}{2} \right) =$

il $\sinh(x)$

$= 2A_I \sinh(x/L) =$

$= E_I \sinh(x/L)$



ora le mie equazioni sono

I) $\phi(x) = E_I \sinh(x/L)$

II) $\phi(x) = C_{II} e^{-x/L}$

Posso le condizioni: $\begin{cases} \phi(x^-) = \phi(x^+) \\ J(x^-) - J(x^+) = S_0 \end{cases}$

NON SVOLTO IN CLASSE

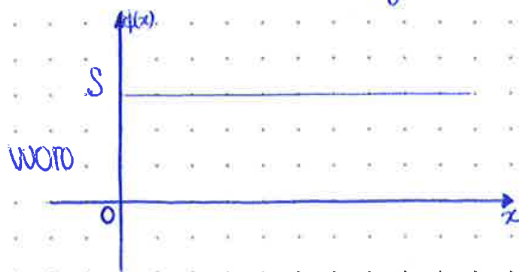
dalla prima condizione $\phi(x^-) = \phi(x^+)$ abbiamo $E_I \sinh(x/L) = C_{II} e^{-x/L}$ $E_I = C_{II} \frac{e^{-x/L}}{\sinh(x/L)}$

ora la seconda condizione $J(x^-) - J(x^+) = S_0$

I) $\phi(x) = \frac{E_I \cosh(x/L)}{L}$ $J(x^-) = -\frac{DE_I}{L} \cosh(x/L)$

II) $\phi(x) = -\frac{C_{II} e^{-x/L}}{L}$ $J(x^+) = \frac{DC_{II}}{L} e^{-x/L}$

Esce avessimo una sorgente costante in un mezzo semi-infinito?



$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' S(x') G(x-Lx)$$

la sorgente è una costante

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi(x) + \frac{S}{D} = 0$$

Le soluzioni di questa equazione differenziale non omogenea sono date dalle somme delle soluzioni omogenee associate e delle soluzioni particolare.

da $\frac{d^2 \phi_h(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi_h(x) = 0$ (omogenea associata) otteniamo $\phi_h(x) = Ae^{x/L} + Ce^{-x/L}$

per la particolare, sappiamo che per fortuna il problema è lineare, quindi ad una sollecitazione costante il sistema risponderà in modo costante, perciò:

$$\phi_p(x) = H \quad (\text{costante})$$

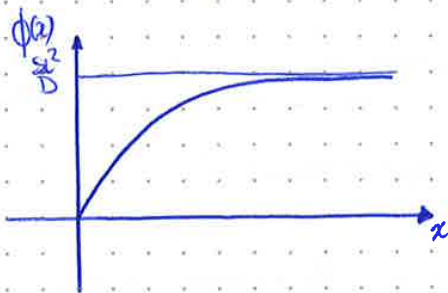
$$-\frac{1}{L^2} H + \frac{S}{D} = 0 \quad H = \frac{SL^2}{D} \quad \text{per cui} \quad \phi(x) = Ae^{x/L} + Ce^{-x/L} + H = Ae^{x/L} + Ce^{-x/L} + \frac{SL^2}{D}$$

condizioni per trovare A e C.

so che all'infinito ($x \rightarrow \infty$) non può divergere, quindi $A=0$, poi

so che per $x=0$ $\phi(0) = 0$ per cui $\phi(0) = C + \frac{SL^2}{D} = 0 \quad C = -\frac{SL^2}{D}$, in fine

$$\phi(x) = \frac{SL^2}{D} (1 - e^{-x/L})$$



Quanto è la quota di particelle consumate dall'assorbimento?

$$\phi \Sigma_a = \frac{SL^2}{D} \Sigma_a = \frac{SL^2}{D/\Sigma_a} = \frac{SL^2}{L^2} = S$$

cioè quanto la parte immessa dalla sorgente

Ricordo che il mezzo è dissipativo per cui il $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = 0$ devo mettere $c=0$ perché $e^{n/L}$ diverge di più di r ($\rightarrow \frac{1}{r}$ convergenza)

$$\phi(r) = \frac{A}{r} e^{-n/L}$$

Ho preso alla condizione di sorgente [la condizione di sorgente riguarda sempre la corrente sulla/parziale]

Considero una sferetta di raggio ϵ che contiene l'origine (= la sorgente), conto quante particelle attraversano la superficie sferica, poi faccio tendere $\epsilon \rightarrow 0$ così da trovare la sorgente

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = A \left[-\frac{1}{L} e^{-r/L} - \frac{1}{r^2} e^{-r/L} \right] \quad J(r) = DA \left[\frac{1}{L} e^{-r/L} - \frac{1}{r^2} e^{-r/L} \right]$$

prendo la corrente sulla superficie e lo moltiplico per la superficie, trovo le particelle

totali che attraversano la superficie e ne faccio il $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$

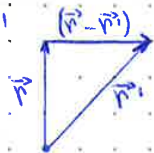
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \epsilon^2 \left[\frac{1}{L} e^{-\epsilon/L} + \frac{1}{\epsilon^2} e^{-\epsilon/L} \right] 4\pi \epsilon^2 = S_0$$

il primo termine rimarrebbe $\frac{1}{L} e^{-\epsilon/L} 4\pi \epsilon$ che tende a 0, mentre il secondo rimarrebbe $e^{-\epsilon/L} 4\pi$ perciò

$$4\pi AD = S_0 \quad \text{da cui trovo } A = \frac{S_0}{4\pi D} \quad \phi(r) = \frac{S_0}{4\pi D} \frac{e^{-r/L}}{r} = \frac{S_0}{D} \frac{e^{-r/L}}{4\pi r}$$

Per l'equazione di Green devo fare il caso più generale. fra il punto r e il punto r'

$$\phi(r, r') = \frac{S_0}{4\pi D} \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{r}'|/L}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad \text{con sorgente unitaria}$$



$$G(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) = \frac{1}{4\pi D} \frac{e^{-|\vec{r}-\vec{r}'|/L}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

funzione di Green per un punto qualsiasi

(problema: per una distanza $r \rightarrow 0$ diverge \rightarrow è una scelta enistica della $S(r)$)

Ho dimostrato come a partire da $G(\vec{r}' \rightarrow \vec{r})$ si ricava $G(\vec{x}' \rightarrow \vec{x})$ imponendo

opportune condizioni che descrivono il fatto che la sorgente è un punto in x'

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{L}{2D} \int_0^\infty \frac{p e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2+p^2}}{L}}}{L \sqrt{(x-x')^2+p^2}} = -\frac{L}{2D} \left(e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2+p^2}}{L}} \right) \Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{L}{2D} \left(0 - e^{-\frac{\sqrt{(x-x')^2}}{L}} \right) = \frac{L}{2D} e^{-\frac{|x-x'|}{L}}$$

Che introduciamo i sistemi in cui si verificano FISSIONI

All'equazione della diffusione $\frac{1}{V} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \nabla \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t)$ dov'è aggiungere

il termine delle fissioni:

$\Sigma_f \phi(\vec{r}, t)$ è il numero di fissioni per unità di volume e tempo

lo moltiplico per il numero medio di neutroni emessi per fissione ν per cui diventa

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \nabla \phi(\vec{r}, t) - \Sigma_a \phi(\vec{r}, t) + \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}, t) + S(\vec{r}, t)$$

Nella soluzione più generale dovremo anche tener conto della variazione temporale, poi il sistema magari diventa stazionario

Ma cerchiamo prima la soluzione stazionaria, poi quella dinamica.

se stazionaria $\frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0$ quindi avremo $D \nabla^2 \phi(\vec{r}) - \Sigma_a \phi(\vec{r}) + \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) + S(\vec{r}) = 0$

Prima studiamo il caso senza sorgente, per cui $D \nabla^2 \phi(\vec{r}) - \Sigma_a \phi(\vec{r}) + \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) = 0$ e omogenea (avrà quindi due soluzioni una nulla, e una non nulla), e nel mezzo infinito, di modo che la soluzione, se esiste, è una costante

quindi $D \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0 \quad -\Sigma_a \phi(\vec{r}) + \nu \Sigma_f \phi(\vec{r}) = 0$ raccolgo

$\phi(\vec{r}) (\nu \Sigma_f - \Sigma_a) = 0$ $\phi(\vec{r}) = 0$ non è una soluzione interessante, quindi

$\nu \Sigma_f = \Sigma_a$ da cui $\frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} = 1$ per cui il numero di neutroni prodotti è uguale a quelli assorbiti

il sistema risulta in CONDIZIONI CRITICHE

In generale per cercare una soluzione non nulla di una equazione omogenea si inserisce l'autovalore k che fa variare la moltiplicazione del sistema attraverso la sua manipolazione affinché il sistema diventi stazionario.

$\phi(\vec{r}) \left(\frac{1}{k} \nu \Sigma_f - \Sigma_a \right) = 0 \quad \frac{1}{k} \nu \Sigma_f - \Sigma_a = 0 \quad k = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a} : \text{ COSTANTE DI MOLTIPLICAZIONE}$

- se $k = 1$ il sistema è critico
- se $k < 1$ i m prodotti < i m assorbiti, sistema subcritico: per cercare la stazionarietà bisogna aumentare la produzione, inserendo del nuovo materiale fissile.
- se $k > 1$ i m prodotti > i m assorbiti, sistema supercritico: per cercare la stazionarietà posso diminuire la produzione o aumentare l'assorbimento.

Così, non ho trovato le due costanti A e C, ma ho trovato

$$\phi(x) = A \cos\left(\frac{\pi}{H}x\right) \quad k = \frac{k_0}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2}$$

AUTOFUNZIONE. e il suo AUTOVALORE

ponendo a questo problema $k=1$ possiamo dimensionare il reattore ponendo o L^2 (proprietà del materiale) o H (dimensione geometrica)

$$\frac{k_0}{1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2} = 1 \quad k_0 = 1 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \quad \frac{k_0 - 1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

Vediamo che cosa rappresenta $\left(\frac{\pi}{H}\right)^2$

facendo la derivata seconda $\phi'' = -A \alpha^2 \cos(\alpha x)$

facendo $\left|\frac{\phi''}{\phi}\right| = \frac{A \alpha^2 \cos(\alpha x)}{A \cos(\alpha x)}$ il rapporto tra la derivata seconda e la funzione è una costante: è la CURVATURA

$$\left|\frac{\phi''}{\phi}\right| = \alpha^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \quad \text{Buckling geometrico} \quad [\text{in inglese buckling = curvatura}]$$

$$\frac{k_0 - 1}{L^2} = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

buckling materiale buckling geometrico

In realtà posso scegliere un altro valore di α in cui si annullava il $\cos(\alpha x)$

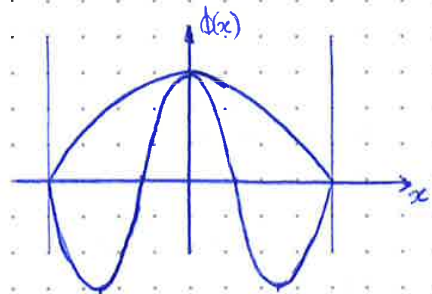
$$\text{invece di } \alpha \frac{H}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha \frac{H}{2} = \frac{2m-1}{2} \pi \quad \alpha H = 3\pi \quad \alpha = \frac{3\pi}{H}$$

per cui in teoria potrei trovare infiniti valori di k che soddisfano il problema

ma cambia la frequenza della funzione

queste soluzioni sono ammissibili solo matematicamente, e non fisicamente

perché un flusso negativo non ha significato fisico.



solo $\alpha = \frac{\pi}{H}$ è valida \rightarrow soluzione fondamentale

$$\text{poniamo } \frac{\pi}{H} = B \quad [B] = [L^{-1}]$$

$$k_{\text{eff}} = k_0 \left(\frac{1}{1 + L^2 B^2} \right)$$

trae conto delle fughe

sostituisco $\phi(\vec{r}, t)$

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \psi_m(\vec{r})}{\partial t} = D \nabla^2 \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \psi_m(\vec{r}) + \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - 1) \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \psi_m(\vec{r}) + S(\vec{r}, t)$$

$$\frac{1}{V} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{dA_m(t)}{dt} \psi_m(\vec{r}) = D \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \nabla^2 \psi_m(\vec{r}) + \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - 1) \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \psi_m(\vec{r}) + S(\vec{r}, t)$$

ricordando che $\nabla^2 \psi_m(\vec{r}) = -B_m^2 \psi_m(\vec{r})$

$$\frac{1}{V} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{dA_m(t)}{dt} \psi_m(\vec{r}) = -D \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) B_m^2 \psi_m(\vec{r}) + \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - 1) \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \psi_m(\vec{r}) + S(\vec{r}, t)$$

moltiplico tutto per una data autofunzione $\psi_m(\vec{r})$

$$\frac{1}{V} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{dA_m(t)}{dt} \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) = -D \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 A_m(t) \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) + \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - 1) \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) + S(\vec{r}, t) \psi_m(\vec{r})$$

faccio l'integrale sul D a sinistra e a destra

$$\frac{1}{V} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{dA_m(t)}{dt} \int_D \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r} = -D \sum_{m=1}^{\infty} B_m^2 A_m(t) \int_D \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r} + \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - 1) \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \int_D \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r} + \int_D S(\vec{r}, t) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r}$$

sappiamo che $S(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} S_m(t) \psi_m(\vec{r})$ quindi $\int_D \sum_{m=1}^{\infty} S_m(t) \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r}$ si sommano $S_m(t)$ essendo probab. scalari. l'integrale mi dà $\int_D \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r} = 1$

o se $m \neq m$ e 1 se $m = m$, il problema si riduce a

$$\frac{1}{V} \frac{dA_m(t)}{dt} = -D B_m^2 A_m(t) + \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - 1) A_m(t) + S_m(t) \quad \text{ora abbiamo una sola incognita } A_m$$

ci serve conoscere $A_m(t=0)$

$$\phi(\vec{r}, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(0) \psi_m(\vec{r})$$

! Ora ricordiamo che per trovare la componente a_1 di un vettore $\vec{v} = a_1 \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2$ devo fare il prodotto scalare il vettore corrispondente \vec{x}_1 per cui $\vec{v} \cdot \vec{x}_1 = a_1 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 = a_1$

$$a_1 = \vec{v} \cdot \vec{x}_1$$

Analogamente noi facciamo $\phi(\vec{r}, 0) \psi_m(\vec{r}) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(0) \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r})$ integro sul D

$$\int_D \phi(\vec{r}, 0) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(0) \int_D \psi_m(\vec{r}) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r} \quad \text{quindi } A_m(0) = \int_D \phi(\vec{r}, 0) \psi_m(\vec{r}) d\vec{r}$$

moltiplico entrambi i membri per v

$$\frac{dA_m(t)}{dt} = -v D B_m^2 A_m(t) + v \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - 1) A_m(t) + v S_m(t)$$

$$\frac{dA_m(t)}{dt} = \left[v \sum_{\alpha} (k_{\alpha} - 1) - v D B_m^2 \right] A_m(t) + v S_m(t) \quad \text{abbiamo già visto come si risolve}$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) + R(t)$$

Studiamo un'altro problema, corrispondente allo $\lambda = [s^{-1}]$

quindi se le particelle sono distribuite come un'autofunzione di Helmholtz con autovalore $-B^2$ la probabilità di fuggire sarà

$$P_L = \frac{DB^2}{DB^2 + \Sigma_a}$$

Invece la probabilità di una fuga P_{NL} sarà $P_{NL} = 1 - P_L = 1 - \frac{DB^2}{DB^2 + \Sigma_a} = \frac{\Sigma_a}{DB^2 + \Sigma_a} = \frac{1}{L^2 B^2 + 1}$

i k_m sono dati da $k_m = k_{\infty} \left(\frac{1}{1 + L^2 B_m^2} \right)$ e i l_m sono $= \frac{1}{v \Sigma_a} \frac{1}{1 + L^2 B_m^2}$

$\frac{1}{\Sigma_a}$ è la distanza media percorsa dalle particelle prima di essere assorbite.
 $\frac{1}{v \Sigma_a}$ è la vita media delle particelle prima di essere assorbite,

ma la vita media è influenzata anche dalle fughe, q.u.m di

Quasi $\rho_m = \frac{1}{v \Sigma_a} P_{NL}^{(m)}$ dei neutroni $= \frac{1}{v \Sigma_a} \frac{1}{1 + L^2 B_m^2}$ $\psi_m(\vec{r})$ sono le armoniche

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\underbrace{A_m(0)}_{\text{il contributo iniziale}} e^{\frac{k_m - 1}{l_m} t} + v \int_0^t dt' S_m(t') e^{\frac{k_m - 1}{l_m} (t - t')} \right] \psi_m(\vec{r})$$

il contributo della sorgente

B_m^2 sono una successione che cresce al crescere di m

$$P_{NL}^{(m)} = \frac{1}{1 + L^2 B_m^2} \quad k_m = k_{\infty} \frac{1}{1 + L^2 B_m^2} \quad l_m = \frac{1}{v \Sigma_a} \frac{1}{1 + L^2 B_m^2}$$

i P_{NL} sono una successione decrescente con m , e anche i k_m saranno decrescenti.

Daremo i numeri alle autofunzioni in modo che $n=1$ abbia il B_m^2 minore (in valore assoluto)

$$\frac{k_m - 1}{l_m} = \left(\frac{k_{\infty}}{1 + L^2 B_m^2} - 1 \right) v \Sigma_a (1 + L^2 B_m^2) = \frac{k_{\infty} - 1 - L^2 B_m^2}{1 + L^2 B_m^2} v \Sigma_a (1 + L^2 B_m^2) = (k_{\infty} - 1 - L^2 B_m^2) v \Sigma_a = -v \Sigma_a (1 - k_{\infty} + L^2 B_m^2)$$

siccome è proporzionale a B_m^2 anche il rapporto $\frac{k_m - 1}{l_m}$ sarà una successione crescente, ma ha un segno \ominus davanti

quindi $e^{\frac{k_m - 1}{l_m} t}$ si spegnerà per ordini n grandi perché decadono più velocemente.

il contributo delle armoniche di ordine superiore hanno valore sempre minore e si spegneranno, in effetti, ciò fa intuire che ci sarà una condizione asintotica

Dimostreremo che l'armonica con indice $n=1$ (l'armonica FONDAMENTALE $\psi_1(\vec{r})$) sono tutte positive

Poichè $\phi_0(\vec{r}') = 0$ per ciò la sorgente $S(\vec{r}', t) = S(\vec{r}')$ sono costanti nel tempo, perciò

$$S_m(t) = S_m = \int_D d\vec{r}' S(\vec{r}') \phi_m(\vec{r}') \quad \text{è una costante rispetto a } t$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} v \int_0^t dt' S_m e^{\frac{km-1}{v_m} (t-t')} \phi_m(\vec{r}') = \sum_{m=1}^{\infty} v S_m \phi_m(\vec{r}') e^{\frac{km-1}{v_m} t} \int_0^t dt' e^{-\frac{km-1}{v_m} t'} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} v S_m \phi_m(\vec{r}') e^{\frac{km-1}{v_m} t} \left(-\frac{v_m}{km-1} e^{-\frac{km-1}{v_m} t'} \right) \Big|_0^t =$$

è costante, esce dall'integrale

(posso invertire gli estremi di integrazione e togliere il segno -)

$$= \sum_{m=1}^{\infty} v S_m \phi_m(\vec{r}') e^{\frac{km-1}{v_m} t} \left(\frac{v_m}{km-1} e^{-\frac{km-1}{v_m} t'} \right) \Big|_t^0 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} v S_m \phi_m(\vec{r}') e^{\frac{km-1}{v_m} t} \frac{v_m}{km-1} \left[1 - e^{-\frac{km-1}{v_m} t} \right] =$$

$$\phi(\vec{r}, t) = \sum_{m=1}^{\infty} v S_m \frac{v_m}{km-1} \left[e^{\frac{km-1}{v_m} t} - 1 \right] \phi_m(\vec{r}')$$

Se km fossero tutti < 1 per $t \rightarrow \infty$ mancherebbero tutti, ma la soluzione non sarebbe 0
 \rightarrow posso vedere un sistema sottosonico ma con comportamenti oscillatorio grazie ad una sorgente

PARENTESI MATEMATICHE per CHIARIRE CONFONDERE LE IDEE di WIKIPEDIA

Metodo di Frobenius

In matematica il metodo di Frobenius descrive un modo di trovare una soluzione come serie infinita per una equazione differenziale ordinaria di secondo grado della forma $z^2 u'' + p(z)u' + q(z)u = 0$.
 $u'' + \frac{p(z)}{z} u' + \frac{q(z)}{z^2} u = 0$, questo non è risolvibile tramite espansione in serie di potenze, ovvero cercando soluzioni del tipo $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nel caso in cui $p(z)$ o $q(z)$ non siano sviluppabili in serie di potenze di Taylor in $z=0$. Il metodo di Frobenius permette di creare delle soluzioni in serie di potenze a questo tipo di equazioni differenziali nel caso in cui $p(z)$ e $q(z)$ siano a loro volta sviluppabili secondo Taylor in serie di potenze nell'intorno dell'origine, oppure anche nel caso in cui i loro limiti a zero esistano e siano finiti.
 Il metodo di Frobenius stabilisce che si può cercare una soluzione nella forma $u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{k+r}$ con $A_0 \neq 0$.

Equazione di Helmholtz

In analisi matematica, l'equazione di Helmholtz è un'equazione differenziale alle derivate parziali, ellittica ottenuta a partire dall'equazione di d'Alembert (= equazione delle onde: $\nabla^2 u - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$) cercando soluzioni che abbiano una dipendenza armonica dal tempo, cioè variabili nel tempo in modo sinusoidale. Molte funzioni speciali sono ottenute cercando soluzioni dell'equazione di Helmholtz con il metodo di separazione delle variabili in coordinate cartesiane. L'equazione di Helmholtz ha la forma canonica $\nabla^2 f + k^2 f = 0$. Si può vedere l'equazione di Helmholtz come un'equazione agli autovalori del Laplaciano, e le soluzioni dell'equazione di Helmholtz come le autofunzioni del Laplaciano.
 Le soluzioni dell'equazione di Helmholtz hanno la forma: $A(\vec{r}) = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr}$.

Se invece pongo una sorgente $S(\vec{r}) = S_0 \phi_1(\vec{r})$ che ha la forma dell'armonica fondamentale

$$S_m = \int_{\mathcal{D}} d\vec{r}' S_0 \phi_1(\vec{r}') \phi_m(\vec{r}') = S_0 \int_{\mathcal{D}} d\vec{r}' \phi_1(\vec{r}') \phi_m(\vec{r}') = \text{l'integrale } \int_{\mathcal{D}} \phi_1(\vec{r}') \phi_m(\vec{r}') \text{ sarà } \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq 1 \\ 1 & \text{per } m=1 \end{cases}$$

$$= \delta_{m1} S_0 \delta_{m1}$$

OPERATORE DI KRONECKER δ_{m1} per cui vale $\begin{cases} S_0 & \text{se } m=1 \\ 0 & \text{se } m \neq 1 \end{cases}$

In questo caso il ϕ_{as} sarebbe $\phi_{as}(\vec{r}) = v S_0 \frac{\phi_1(\vec{r})}{1-k_1}$

Se introduciamo una sorgente fatta come l'armonica fondamentale ϕ_1 , le risposte sono dato dalle ϕ_i e sono proporzionale alle ϕ_i e alla S_0 , l'altra armonica ϕ_2 dovremo risposta

Più k_1 è vicino a 1 più il segnale della sorgente sarà amplificato

Se $k_1 > 1$ si vede che la parte esponenziale è divergente, e non si avrà la stazionarietà

Se $k_1 = 1$ nell'equazione $\phi(\vec{r}, t) = v S_1 \frac{\phi_1}{k_1 - 1} \left(e^{\frac{k_1 - 1}{\epsilon_1} t} - 1 \right) \phi_1(\vec{r}) + \sum_{m=2}^{\infty} v S_m \frac{\phi_m}{k_m - 1} \left(e^{\frac{k_m - 1}{\epsilon_m} t} \right) \phi_m(\vec{r})$

è solo il primo termine da problemi, perché il secondo decade e non si fluisce. Allora faccio il

$$\lim_{k_1 \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{k_1 - 1}{\epsilon_1} t} - 1}{k_1 - 1} \text{ che sono i sei termini in cui è compreso } k_1$$

è una forma indeterminata, perché sia il NUM che il DEN tendono a 0

Per studiare il limite possiamo usare ϵ de l'Hopital o sviluppare l'esponenziale.

noi usiamo de l'Hopital ponendo $k_1 - 1 = z$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{z}{\epsilon_1} t} - 1}{z} \text{ faccio la derivata } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{z}{\epsilon_1} t} \frac{t}{\epsilon_1}}{1} = \frac{t}{\epsilon_1} \text{ quindi per } k_1 \rightarrow 1$$

$$\phi(\vec{r}, t) = v S_1 \frac{t}{\epsilon_1} \phi_1(\vec{r}) + \underbrace{\sum_{m=2}^{\infty} v S_m \frac{\phi_m}{k_m - 1} \left(e^{\frac{k_m - 1}{\epsilon_m} t} \right) \phi_m(\vec{r})}_{\text{non influenza}} \text{ divergerà seguendo una retta}$$

Si può risolvere in un altro modo; partendo dall'integrale $S_1 v \int_0^t dt' e^{\frac{k_1 - 1}{\epsilon_1} (t-t')}$

pongo già a questo punto, prima di integrare, $k_1 = 1$ per cui mi resta un integrale facile

$$S_1 v \int_0^t 1 dt' = S_1 v t$$

In un sistema critico, con sorgente costante, non è vero che si assesta su un asintoto ma diverge esponenzialmente

(un sistema critico è un "integratore": un tempo nel tempo la sorgente, che se è costante, risulta per una retta.)

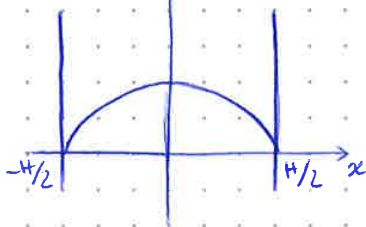
$A \sin(B^{H/2}) + C \cos(B^{H/2}) = 0$ ma il coseno si annulla

il seno vale ± 1 , quindi per $A \sin(B^{H/2}) = 0$ serve che $A=0$

non necessario trovare i valori di $C \rightarrow$ qualsiasi $C \neq 0$ va bene (per il problema matematico.)

$\varphi_m(x) = C \cos\left(\frac{2m-1}{H} \pi x\right)$ con $m=1, 2, 3, \dots$

Poniamo $m=1$



$B_1 = \frac{\pi}{H}$ per $m=1$

$\varphi_1(x) = C \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right)$ dove può essere normalizzato

per cui $\int_{-H/2}^{H/2} dx \varphi_1^2(x) = 1$

$\int_{-H/2}^{H/2} C^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{H} x\right) dx = 1$

$C^2 \int_{-H/2}^{H/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{H} x\right) dx = 1 \quad C^2 = \frac{1}{\int_{-H/2}^{H/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{H} x\right) dx}$

$C = \frac{1}{\sqrt{\int_{-H/2}^{H/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{H} x\right) dx}}$

risolvo $\int_{-H/2}^{H/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{H} x\right) dx = \frac{2 \frac{\pi}{H} x + \sin\left(2 \frac{\pi}{H} x\right)}{4 \frac{\pi}{H}} \Big|_{-H/2}^{H/2} =$

$= \frac{2 \frac{\pi}{H} \frac{H}{2} + \sin\left(2 \frac{\pi}{H} \frac{H}{2}\right)}{4 \frac{\pi}{H}} - \frac{-2 \frac{\pi}{H} \frac{H}{2} + \sin\left(2 \frac{\pi}{H} \left(-\frac{H}{2}\right)\right)}{4 \frac{\pi}{H}} = \frac{\pi + \sin(\pi)}{4 \frac{\pi}{H}} - \frac{-\pi + \sin(-\pi)}{4 \frac{\pi}{H}} =$

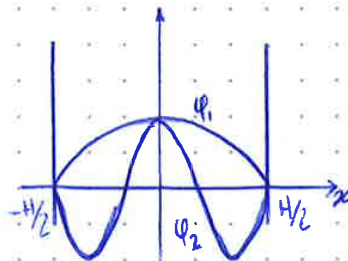
$= \frac{\pi}{4 \frac{\pi}{H}} + \frac{\pi}{4 \frac{\pi}{H}} = \frac{H}{4} + \frac{H}{4} = \frac{H}{2}$

$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{H}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{H}}$

$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right)$

ponendo $m=2$ troviamo $C = \sqrt{2/H}$ e ponendo $m=3$ troviamo ancora $C = \sqrt{2/H}$ perciò C non dipende da m

ma le autofunzioni



con $m=1$ è l'unica autofunzione tutta positiva, quindi sarà l'autovalore FONDAMENTALE.

$B_m = (2m-1) \frac{\pi}{H}$ $B_m = \frac{2m\pi}{H}$ quindi B_m è dispari e B_m è pari (somma $d+p=d$)

però sono un numero dispari di $\frac{\pi}{2}$ → per cui il seno si annulla

se prendo in considerazione il secondo, il cui integrale è

$$\frac{1}{B_m - B_m} \sin((B_m - B_m)x) \Big|_{-H/2}^{H/2}$$

(differenza $d-p=d$), quindi ancora un numero dispari di $\frac{\pi}{2}$ → il seno si annulla, quindi.

$$\int_{-H/2}^{H/2} dx \cos(B_m x) \cos(B_m x) = 0$$

→ $\cos(B_m x)$ e $\cos(B_m x)$ sono ortogonali e così via al crescere di m e m

$$\phi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{H}} \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \cos\left(\frac{2m-1}{H} \pi x\right) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \sin\left(\frac{2m}{H} \pi x\right) \right)$$

La rappresentazione in serie della mia soluzione in geometria piana è una

serie di Fourier

Facciamo degli esempi

Supponiamo di avere una sorgente fatta come l'armonico fondamentale ed impulsiva

$$S(x,t) = S_0 \varphi(x) \delta(t) = S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right) \delta(t)$$

è una delta di Dirac, nel tempo, emette solo in $t=0$

→ IMPULSO

(gli esperimenti impulsivi servono per conoscere le proprietà dei materiali)

$$S_1(t) = S_0 \delta(t) \int_{-H/2}^{H/2} \varphi(x) \varphi(x) dx = S_0 \delta(t)$$

è normalizzato

$$A_m(t) = v \int_0^t dt' S_m(t') e^{\frac{k_m-1}{\tau} (t-t')}$$

$$\phi(x,t) = A_1(t) \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right) =$$

dove $A_1(t) = v \int_0^t dt' S_1(t') e^{\frac{k_1-1}{\tau} (t-t')} =$

$$= v \int_0^t dt' S_0 \delta(t') e^{\frac{k_1-1}{\tau} (t-t')} = v S_0 e^{\frac{k_1-1}{\tau} t}$$

$$= v S_0 e^{\frac{k_1-1}{\tau} t} \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right)$$

$$k_1 = \frac{k_0}{1 + L^2 \left(\frac{\pi}{H}\right)^2} \quad \tau_1 = \frac{1}{v \alpha \left(1 + L^2 \left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right)}$$

possiamo trovare le proprietà dei materiali

Se k_1 risulta < 1 → sistema SOTTOCRITICO con quell'impulso

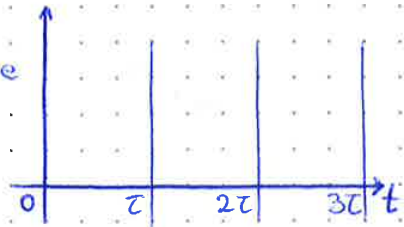
$= 1$ → sistema CRITICO con quell'impulso

> 1 → sistema SOPRACRITICO con quell'impulso → divergenza

Ora la sorgente va come una funzione $f(t)$

$$S(x,t) = S_0 P(x) f(t) \quad \text{in cui } f(t) \text{ e}$$

l'impulso è presente a ogni τ



per un tempo $t \rightarrow \infty$ raggiungeremo una condizione asintotica, per cui negli intervalli succedono le stesse cose \rightarrow EQUILIBRIO, non costante nel tempo perché ci sono gli impulsi

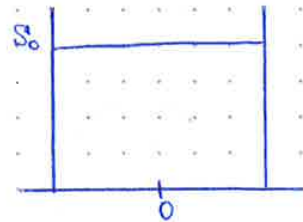
13/04

Ha scelto alcuni esempi di problemi sfruttando Matlab, per far vedere visivamente cosa vuol dire lo sviluppo in serie di Fourier (ormai è più utile seguire).

Esempio 2. (dopo il caso $P(x)$)

considero un sistema piano (1D) con una sorgente impulsiva costante nel tempo.

Abbiamo visto che, in un sistema piano, la serie di Fourier ha tutti i seni che si annullano.



$$\text{il } k_{eff} \equiv k_1 = \frac{k_0}{1 + L^2 B_1^2} \quad \text{dove } B_1^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

k_0 è un parametro da sono in grado di gestire, perché posso scegliere un combustibile più o meno arricchito, più è arricchito maggiore sarà k_0 ; posso metterlo a piacere.

poniamo $k_{eff} = 0.99$

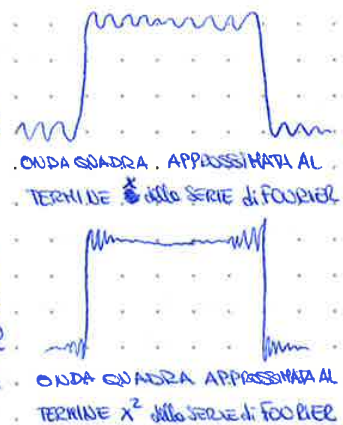
La sorgente è una costante nello spazio, ma impulsiva $S(x,t) = S_0 \delta(t)$

Si verifica il Fenomeno di Gibbs

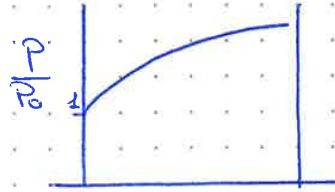
Wiki

Il fenomeno di Gibbs si presenta quando viene ricostruito un segnale della serie di Fourier troncata.

Dato una funzione periodica che presenta punti di discontinuità di prima specie, il suo sviluppo tramite la serie di Fourier è finito da infiniti termini. Quando si ricostruisce il segnale, e questo serie viene troncata si osserva delle sovraoscillazioni del valore della funzione ricostruita nell'intorno del punto di discontinuità: all'aumentare del numero delle componenti della serie il valore di picco di detta sovraoscillazione rimane costante, mentre le oscillazioni alle quali tali sovraoscillazioni si riferiscono si avvicinano al punto di discontinuità.



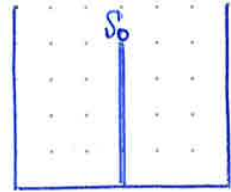
Se $k_{eff} > 1 = 1.001$
 il sistema può presto divergere, come l'annuncia
 fondamentale, che diverge come un'esponenziale, ma
 lentamente



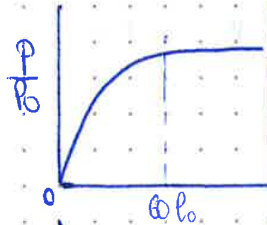
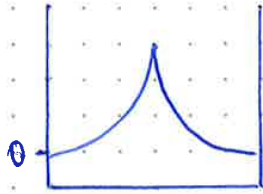
Esempio 3.

Supponi in un sistema pieno, ma con sorgente in un punto costante nel tempo

$$S(x, t) = S_0 S(x)$$



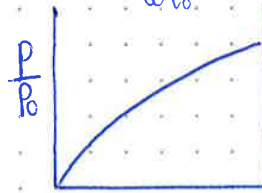
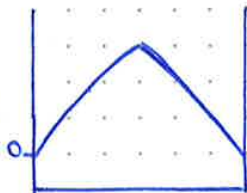
poniamo $k_{eff} = 0.9$
 (sottocritico)



intorno alla ω_0 si
 assesta e diventa stabile

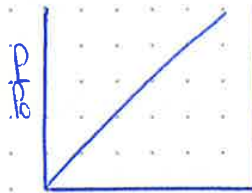
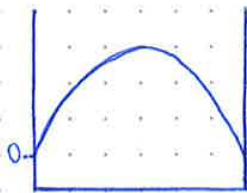
(con Matlab si vede che gli
 ordini di grandezza sono
 piccoli)

$k_{eff} = 0.98$
 assomiglia ancora di più
 ad un coseno



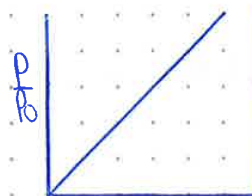
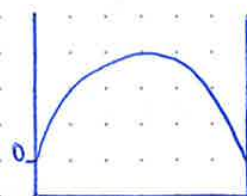
in ω_0 non si è
 stabilizzato.

$k_{eff} = 0.999$
 assomiglia molto ad
 un coseno (non si vede
 più lo discontinuo dello
 sorgente puntuale)



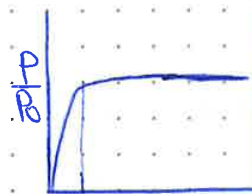
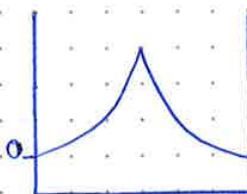
in ω_0 non si è
 assestato, anzi è quasi
 diventato una retta.

$k_{eff} = 1$
 va come un coseno
 dopo un po' di t_0
 sistema diventato
 delle fissioni



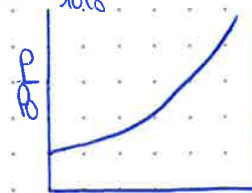
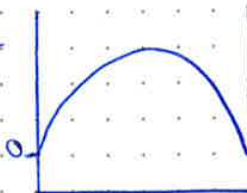
È una retta
 Nelle argomentazioni vedremo che non
 è esattamente una retta, perché
 le annuncie di ordine superiore,
 per tempi brevi, hanno peso.

$k = 0.5$
 (con 200 annuncie)



con circa 10 t_0 si
 stabilizza

$k = 1.001$
 (sopercritico)



$\Delta \nabla^2 \phi^{(0)}(\vec{r}) - \sum_a \phi^{(0)}(\vec{r}) + S^{(0)}(\vec{r}) = 0$ ma la sorgente è $k_{\infty} \sum_a \phi^{(0)}(\vec{r}) = S^{(0)}(\vec{r})$ dovuta alla riproduzione delle particelle, quindi

$\Delta \nabla^2 \phi^{(1)}(\vec{r}) - \sum_a \phi^{(1)}(\vec{r}) + S^{(1)}(\vec{r}) = 0$ con cui $S^{(1)}(\vec{r}) = k_{\infty} \sum_a \phi^{(1)}(\vec{r})$, quindi

$\Delta \nabla^2 \phi^{(2)}(\vec{r}) - \sum_a \phi^{(2)}(\vec{r}) + S^{(2)}(\vec{r}) = 0$

in generale $S^{(m+1)}(\vec{r}) = k_{\infty} \sum_a \phi^{(m)}(\vec{r})$ e $\Delta \nabla^2 \phi^{(m+1)}(\vec{r}) - \sum_a \phi^{(m+1)}(\vec{r}) + S^{(m+1)}(\vec{r}) = 0$

per cui $\Delta \nabla^2 \phi^{(m+1)}(\vec{r}) - \sum_a \phi^{(m+1)}(\vec{r}) + k_{\infty} \sum_a \phi^{(m)}(\vec{r}) = 0$

si succede che $\frac{\phi^{(m+1)}(\vec{r})}{\phi^{(m)}(\vec{r})} = \text{costante} = k$ anche rapporto integrale fra una generazione e l'altra è costante

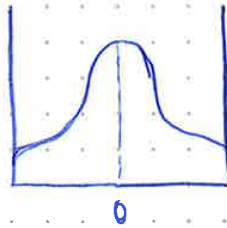
$$\frac{\int \phi^{(m+1)}(\vec{r}) d\vec{r}}{\int \phi^{(m)}(\vec{r}) d\vec{r}} = k$$

↳ METODO delle POTENZE

~~Il metodo delle potenze è un metodo iterativo per il calcolo approssimato dell'autofunzione di modo proprio di un sistema e il corrispondente autovalore~~

Esempio 1

100 armoniche
e $k_{eff} = 1$
e come n° di generazioni = 10

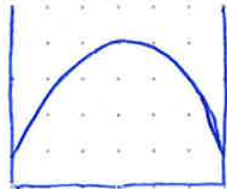


troviamo due stime del k_{eff}

$k_{spaz} = 0.98309 = \frac{\int \phi^{10}}{\int \phi^0}$
 $k_{int} = 1.0012 = \frac{\int \phi^{10}}{\int \phi^0}$

non è preciso → dobbiamo usare più generazioni

100 armoniche
 $k_{eff} = 1$
n° di generazioni = 200



COSELUO

$k_{spaz} = 0.99999$
 $k_{int} = 1$

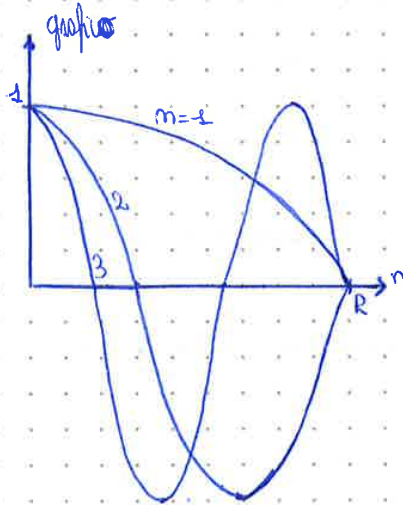
Se diminuiamo le dimensioni del sistema si assesta più in fretta, dopo 50 generazioni e già a posto

(più il sistema è grande più le differenze spaziali sono importanti)

$$1 = \int_0^R dr 4\pi (A \sin(B_m r))^2 = 4\pi A^2 \int_0^R \sin^2(B_m r) dr \quad \text{da cui}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{4\pi \int_0^R \sin^2(B_m r) dr}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \int_0^R \sin^2\left(\frac{m\pi}{R} r\right) dr}} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi R}}$$

$$\varphi_m(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{R} r\right)}{r}$$



$$\begin{aligned} (*) \int_0^R \sin^2\left(\frac{m\pi}{R} r\right) dr &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m\pi}{R} r - \sin\left(\frac{2m\pi}{R} r\right) \cos\left(\frac{2m\pi}{R} r\right) \right) \Big|_0^R = \\ &= \frac{1}{2} \left(m\pi \right) \frac{1}{\frac{m\pi}{R}} \\ 4\pi \int_0^R \sin^2\left(\frac{m\pi}{R} r\right) dr &= 2\pi \frac{1}{R} \frac{R}{\pi} \\ &= 2\pi R \end{aligned}$$

con $m=2$ è l'unica tutta positiva \rightarrow FONDAMENTALE

Anche se non è presente esplicitamente la funzione sferica per via della geometria del sistema, va come $\frac{1}{R}$

Domanda posta in aula: la potenza di un sistema dipende dallo stato di criticità?

15/04

$$P = \int dV \sum_f A \varphi_f(\vec{r}) E_f \quad \text{se fisso la potenza che voglio ottenere posso trovare la A}$$

$$A = \frac{P}{\sum_f E_f \int dV \varphi_f(\vec{r})}$$

lo stato di criticità è una proprietà del sistema a prescindere dalla potenza (possa avere $k_{eff}=1$ con $P=1W$ o $P=1GW$)

Il flusso di neutroni avrà la forma dell'autofunzione fondamentale per una costante di potenza A

$$\phi = A \varphi(\vec{r})$$

Quando progetto un reattore cerco di porre $k_{eff}=1$; però un reattore che lo accendo

$P^1 U^{235}$ inizia a consumarsi, quindi il $k_{eff} < 1$ e si spegne. Quindi, devo progettare

con un $k_{eff} > 1$ ed utilizzare delle barre di controllo. Parto con $k_{eff} > 1$ e tutte le

barre di controllo inserite, durante il funzionamento, posso provare le astregge e una

volta dopo ho tutte completamente dentro e il combustibile perde e' finito.

Poiché delle condizioni al contorno $\varphi(R)=0$ e la funzione deve essere "finita" in tutto il sistema

Per $r=0$ φ diverge, quindi $C=0$ $\varphi(r) = A J_0(Br)$

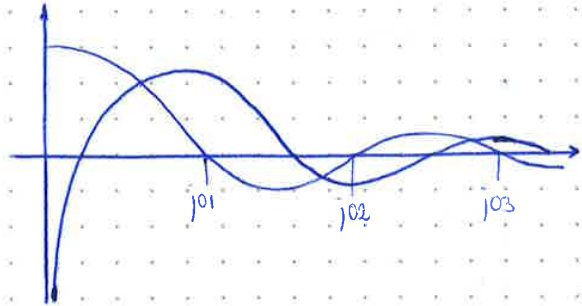
$A J_0(BR) = 0$ dove per $J_0(BR) = 0$, BR deve essere un punto in cui J_0 si annulla

gli zeri sono a j_{0m}

$BR = j_{0m}$ i B. saranno numerabili

$B_m = \frac{j_{0m}}{R}$ gli j_{0m} sono tabulati

$j_{01} \cong 2.4048$ (sono numerabili anche le autofunzioni)



$\varphi_m(r) = A J_0\left(\frac{j_{0m}}{R} r\right)$ bisognerebbe verificare che siano anche ortogonali.

$$\int_0^R 2\pi r \varphi_m(r) \varphi_n(r) dr = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ \text{cost.} & \text{se } m = n \end{cases}$$

determino A in modo che la cost = 1

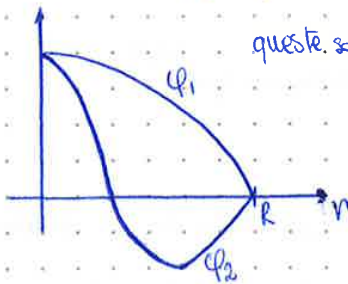
Bessel ha trovato che $A = \frac{1}{R\sqrt{\pi} |J_1(j_{0m})|}$

per cui ora $\int_0^R 2\pi r \varphi_m(r) \varphi_m(r) = 1$

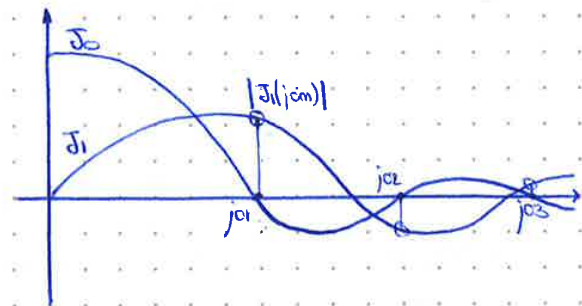
Voglio sapere come sono fatte queste autofunzioni

$\varphi_1(r) \Rightarrow J_0\left(\frac{j_{01}}{R} r\right)$, $\varphi_2(r) \Rightarrow J_0\left(\frac{j_{02}}{R} r\right)$

queste son fatte così



$\Rightarrow \varphi_1(r)$ è tutta positiva \Rightarrow FONDAMENTALE
il cui buckling è $\frac{j_{01}}{R}$



Esistono anche altre autofunzioni di Bessel

per risolvere $z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2) w = 0$ EQUAZIONE MODIFICATA di Bessel

con $\nu=0$ urea $z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - z^2 w = 0$ divido per z^2

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} - w = 0$$

di questa equazione si trova la soluzione per un mezzo di Bessel non moltiplicante

noto che una parte dipende solo da z e una solo da r . la cui somma però deve sempre darci un numero

l'è solo un modo per cui questo accade: i due addendi devono essere delle costanti

per cui pongo

$$\frac{1}{g(z)} \frac{d^2 g(z)}{dz^2} = -B_z^2$$

moltiplico per $g(z)$

$$\frac{d^2 g(z)}{dz^2} = -B_z^2 g(z)$$

una equazione le ho già risolta

SLAB

$$g(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{2m-1}{H} \pi z\right) \\ \sqrt{\frac{2}{H}} \sin\left(\frac{2m}{H} \pi z\right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{f(r)} \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r f(r)} \frac{df(r)}{dr} = -B_r^2$$

moltiplico per $f(r)$

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} = -B_r^2 f(r)$$

mei casi di

CILINDRO INFINITO

$$f(r) = \frac{1}{2\sqrt{\pi} |J_1(j_{0m})|} J_0\left(\frac{j_{0m}}{R} r\right)$$

ora devo forzare a dare come somma $-B^2$

$$B^2 = B_z^2 + B_r^2 \quad \text{però ho tutte } B_z \text{ e } B_r, \text{ le numeri}$$

$$B_{m,m}^2 = (B_z^2)_{m,m} + (B_r^2)_{m,m} \quad \text{da cui, se prendo le soluzioni con il coseno (o il seno)}$$

$$B_{m,m}^2 = \left(\frac{2m-1}{H} \pi\right)^2 + \left(\frac{j_{0m}}{R}\right)^2 \quad \left(0 = \left(\frac{2m-1}{H} \pi\right)^2 + \left(\frac{j_{0m}}{R}\right)^2\right)$$

quindi

$$\varphi_{m,m}(r,z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{1}{2\sqrt{\pi} |J_1(j_{0m})|} \cos\left(\frac{2m-1}{H} \pi z\right) J_0\left(\frac{j_{0m}}{R} r\right)$$

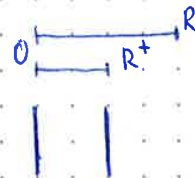
queste sono le costanti di normalizzazione

per trovare l'autofunzione fondamentale devo prendere quella tutta positiva

$$\varphi_{fund}(r,z) = \varphi_{1,1} = \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{1}{2\sqrt{\pi} |J_1(j_{01})|} \cos\left(\frac{\pi}{H} z\right) J_0\left(\frac{j_{01}}{R} r\right)$$

se voglio trovare il rapporto tra le potenze prodotte da una barra di combustibile, in un reattore, su 0 e R^+

$$\frac{P_0(0)}{P(R^+)} = \frac{J_0(0)}{J_0\left(\frac{j_{01}}{R} R^+\right)}$$



$$A_x = \sqrt{\frac{2}{a}}; A_y = \sqrt{\frac{2}{b}}; A_z = \sqrt{\frac{2}{c}}; B_{x_m} = \frac{2m-1}{a}\pi; B_{y_m} = \frac{2m-1}{b}\pi; B_{z_q} = \frac{2q-1}{c}\pi$$

infine, quindi: $\varphi(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\frac{2}{b}} \sqrt{\frac{2}{c}} \cos\left(\frac{2m-1}{a}\pi x\right) \cos\left(\frac{2m-1}{b}\pi y\right) \cos\left(\frac{2q-1}{c}\pi z\right)$

$$\varphi(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\frac{2}{b}} \sqrt{\frac{2}{c}} \cos\left(\frac{2m-1}{a}\pi x\right) \cos\left(\frac{2m-1}{b}\pi y\right) \cos\left(\frac{2q-1}{c}\pi z\right)$$

e lo fondamentale

$$\varphi(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\frac{2}{b}} \sqrt{\frac{2}{c}} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{c}z\right)$$

Calcolo per progettare un reattore cubico

$$k_{eff} = \frac{k_{\infty}}{1+L^2B^2} = 1 \quad \text{in realtà abbiamo già visto che il } k_{im} \text{ deve essere fatto } > 1 \text{ (esempio 1.1)}$$

$k_{iniziale} = \frac{k_{\infty}}{1+L^2B^2}$ (questo vale solo per un reattore omogeneo, per quelli eterogenei si cercano delle proprietà medie per usare il modello omogeneo.)

Pero, questo keff è calcolato per neutroni con energia costante, e non tenendo conto della possibilità di fuga; per esistono i neutroni veloci che possono fissurare l'U²³⁸ di cui non ho tenuto conto

Fermi ha fatto una valutazione del k_∞ partendo da k_∞ = $\frac{\sum_a}{\sum_c}$

$$k_{\infty} = \frac{\#m \text{ th prodotti}}{\#m \text{ th assorbiti}} = \frac{\#m \text{ veloci da fiss th}}{\#m \text{ th assorbiti}} \cdot \frac{\#m \text{ veloci totali da fiss}}{\#m \text{ veloci da fiss th}} \cdot \frac{\#m \text{ th prodotti}}{\#m \text{ veloci tot da fiss}}$$

3) questo termine mi dà il rapporto tra i m che riescono a diventare termici rispetto a quelli totali prodotti → probabilità di un m veloce di diventare termico(th), e di non venire catturato

↳ p = probabilità di sfuggire alla cattura epitermica (alle riserchezze)

2) rapporto tra i m veloci totali prodotti da fissione e quelli derivanti da fissioni termiche

↳ E : fattore di moltiplicazione veloce

1) viene ancora diviso in 1a) e 1b)

$$1) = \frac{\#m \text{ veloci da fiss th}}{\#m \text{ th assorbiti dal comb}} \cdot \frac{\#m \text{ th assorbiti dal comb}}{\#m \text{ th assorbiti}}$$

1b) mi dice quanto bene utilizzato il mio combustibile

↳ f : fattore di utilizzazione dei neutroni termici (stabilisce la qualità della miscela)

1a) mi caratterizza il combustibile

↳ η : fattore del combustibile

FORMULA DEI 4 FATTORI

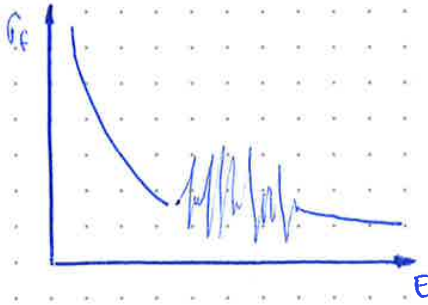
per il modello senza ritardamento si ridurrebbe a 2 fattori

$$k_{\infty} = \eta f p E$$

$$k_{\infty} = \frac{\sum_a}{\sum_c} = \frac{\sum_a^{(f)}}{\sum_a^{(f)}} \cdot \frac{\sum_a^{(m)}}{\sum_a^{(f)} + \sum_a^{(m)}} = \eta f$$

(F) = FUEL (M) = MODERATORE

Però in realtà c'è un nuovo meccanismo, per di più anche lo \bar{v}_f non è costante con l'energia



Però il valore pseudo di \bar{v}_f ? → potrebbe fare una media

$$\bar{v}_f = \frac{\int_{th} dE \Phi(E) v_f(E)}{\int_{th} dE \Phi(E)}$$

però anche $\Phi(E)$ è incognita.

(sostanzialmente quello fornito è un'ipotesi); però sappiamo che $\Phi(E)$ nella zona termica il flusso è fatto come la distribuzione di Maxwell $M(E)$, quindi

$$\bar{v}_f = \frac{\int_{th} dE M(E) v_f(E)}{\int_{th} dE M(E)}$$

che si può risolvere anche analiticamente.

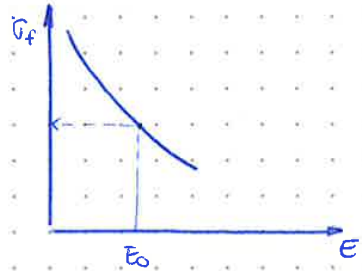
$$\bar{v}_f = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} v(E_0) \quad (\Rightarrow \text{formula di Westcott})$$

dove E_0 è l'energia media dei neutroni termici, che a 20°C $E_0 = 0.025 \text{ eV}$ la cui v corrispondente è 2200 m/s.

se cambia T_0 , cambia E_0 .

T_0 è la T assoluta corrispondente a E_0 .

$$T_0 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$$



T invece è la temperatura cui funziona il reattore

$N_0 B_0$

ORA IN POI USEREMO SEMPRE LA SEZIONE D'URTO MEDIA $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}$

Questa formula può vale se $\bar{\sigma}$ ~~non~~ ~~non~~ ~~non~~ come $\frac{1}{v}$.

$$\text{detentamente } \bar{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} g(T) \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/2} \sigma(E_0)$$

fattore correttivo di Westcott (ho valori tabulati)
detto anche fattore "non 1 su v" per quelle sezioni d'urto che non vanno proprio come $\frac{1}{v}$.

$$\Sigma_f^{(H)} = \bar{v}_f(v_{235}) N(v_{235})$$

Ma $\Sigma_a^{(H)}$ ~~non~~ se abbiamo UO_2 con un certo arricchimento e

$$\Sigma_a^{(H)} = \sigma_a(v_{235}) N_f e + \sigma_a(v_{238}) N_f (1-e) + \sigma_a(0) N_0 = N_f \sigma_a(v_{235}) e + N_f \{ \sigma_a(v_{238}) (1-e) + 2 N_f \sigma_a(0) \}$$

quindi η sarebbe

$$\eta = \frac{\bar{v}_f(v_{235}) N_f e}{N_f \{ \sigma_a(v_{235}) e + \sigma_a(v_{238}) (1-e) + \sigma_a(0) \} 2}$$

→ quindi è caratteristico del combustibile, ma non della concentrazione (indifferente per liquido o solido)

N_A : concentrazione dell'assorbitore di riserva $N_A = N_{238} = N_F(1-e)$

ξ : guadagno letargico d'urto: misura la quantità di letargia ξ guadagnata in un urto

$U = \text{LETARGIA} = \log\left(\frac{E_{max}}{E}\right)$ al diminuire di E U aumenta

I : integrale di riserva: misura la viabilità delle riserve, la sua espressione varia al variare dell'assorbitore, quindi del combustibile

Le espressioni a vengono fornite da tabelle

per U_{238} : $I = 2.73 \left[\frac{\sum_s 10^{24}}{N_A} \right]^{0.486}$

Lo \sum_s nella forma di assemblamento $\sum_s = \sum_s^{(n)} + \sum_s^{(F)}$, quindi

$I = 2.73 \left[\frac{(\sigma_s^{(n)} N_n + \sigma_s^{(F)} N_F) 10^{24}}{N_F(1-e)} \right]^{0.486}$ dividendo per N_F compariamo $\textcircled{\theta}$

$= 2.73 \left[\frac{(\sigma_s^{(n)} \textcircled{\theta} + \sigma_s^{(F)}) 10^{24}}{(1-e)} \right]^{0.486}$ perciò $I = I(\textcircled{\theta})$

per ξ si hanno quello del n ed del F ed $\xi^{(n)}$, $\xi^{(F)}$ e le peso in base allo \sum_s

$\xi = \left(\frac{\sum_s^{(n)}}{\sum_s^{(n)} + \sum_s^{(F)}} \right) \xi^{(n)} + \left(\frac{\sum_s^{(F)}}{\sum_s^{(n)} + \sum_s^{(F)}} \right) \xi^{(F)} = \frac{\sum_s^{(n)} \xi^{(n)} + \sum_s^{(F)} \xi^{(F)}}{\sum_s^{(n)} + \sum_s^{(F)}}$

$= \frac{\sigma_s^{(n)} N_n \xi^{(n)} + \sigma_s^{(F)} N_F \xi^{(F)}}{\sigma_s^{(n)} N_n + \sigma_s^{(F)} N_F}$ dividendo per N_F

$= \frac{\textcircled{\theta} \sigma_s^{(n)} \xi^{(n)} + \sigma_s^{(F)} \xi^{(F)}}{\sigma_s^{(n)} \textcircled{\theta} + \sigma_s^{(F)}}$ quindi $\xi = \xi(\textcircled{\theta})$

per $\frac{N_A}{\sum_s} = \frac{N_F(1-e)}{\sigma_s^{(n)} N_n + \sigma_s^{(F)} N_F} = \frac{(1-e)}{\sigma_s^{(n)} \textcircled{\theta} + \sigma_s^{(F)}}$ $\frac{N_A}{\sum_s} = f(\textcircled{\theta})$

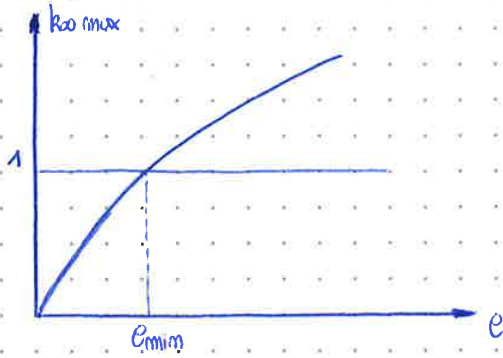
quindi $p = p(\textcircled{\theta})$ ed è l'unico parametro di progetto in p

\boxtimes E : FATTORE DI MOLTIPLICAZIONE VELOCE (l'auto-maggiore meno termico e il mio neutro)

$E = \frac{1 + 0.690 \frac{N(U_{238})}{N_n}}{1 + 0.563 \frac{N(U_{238})}{N_n}}$ dove $N(U_{238}) = (1-e) N_F$

$= \frac{1 + 0.690 (1-e) \frac{N_F}{N_n}}{1 + 0.563 (1-e) \frac{N_F}{N_n}} = \frac{1 + 0.690 (1-e) \frac{1}{\textcircled{\theta}}}{1 + 0.563 (1-e) \frac{1}{\textcircled{\theta}}}$ quindi $E = E(\textcircled{\theta})$

$\lim_{\frac{1}{\textcircled{\theta}} \rightarrow \infty} E(\textcircled{\theta}) = \frac{0.690}{0.563} = 1.227 \rightarrow$ valore asintotico



esiste un valore di ρ_{min} sotto il quale non può esistere un reattore critico

Se ρ di ρ_{mot} è minore di ρ_{min} dovrai forzatamente arricchirlo

Se ρ di ρ_{mot} è maggiore di ρ_{min} potrai avere un reattore critico

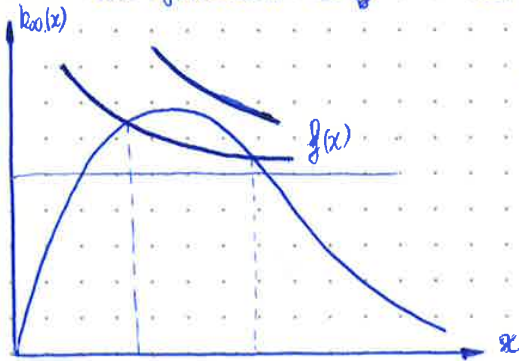
Con H_2O come MOD abbiamo $\rho_{min} > 0.71\%$

Con GRAFITE come MOD abbiamo $\rho_{min} < 0.71\%$

Supponiamo di aver trovato un grafico di $k_{im} = k_{00} \left(\frac{1}{1 + L^2 B^2} \right) P_{NL}^{(F)}$

da trovare un'espressione di $k_{00}(x) = \frac{k_{im} (1 + L^2 B^2)}{P_{NL}^{(F)}} = f(x)$

ora ho due funzioni di x che si dovranno intersecare

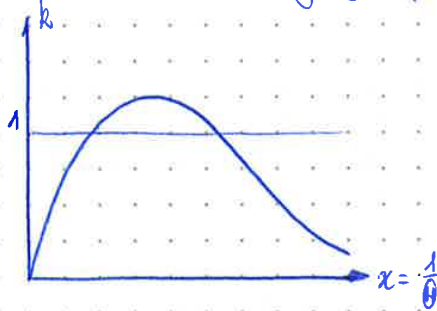


Potrai trovare due valori di x per fare un reattore critico, oppure non trovare affatto.

→ per cui dovrai cambiare il B^2

18/05

Consideriamo ancora il grafico per reattori termici a moderazione



serve che il MAX sia > 1

$$k_{eff} = k_{00} \frac{1}{1 + L^2 B^2} P_{NL}^{(F)}$$

bisogna studiare la $P_{NL}^{(F)}$ durante il rallentamento

+ MODELLO di FERTI (semplificato)



alcuni m. dopo le collisioni riescono ad avere una rettangola $> u$

si diffonde la DENSITA' di RALLENTAMENTO $q(\vec{r}, u) d\vec{r}$ nell'unità di volume e di tempo rappresenta il numero di n. rallentati ad una u maggiore (e minore) in unità di tempo

$$\frac{\partial q(\vec{r}, u)}{\partial u} = \frac{D(u)}{\sum S_i(u)} \nabla^2 \phi(\vec{r}, u)$$

Fermi introdusse una nuova grandezza

$$\int_0^u \frac{D(u')}{\sum S_i(u')} du' = \tau(u) \quad \text{ETA delle PARTICELLE alla letargia } u$$

dimensionalmente è un' [Area]

per cui se voglio posso definire $\tau(u_{th}) = \int_0^{u_{th}} \frac{D(u')}{\sum S_i(u')} du'$

$\tau(u_{th})$ è lo strato medio delle particelle per diventare termiche (ricorda l'area di diffusione L^2)

ricordando che in generale si può scrivere $\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial u}$

$$\frac{\partial \tau(u)}{\partial u} = \frac{D(u)}{\sum S_i(u)} \quad \text{diventa} \quad \frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} \frac{D(u)}{\sum S_i(u)} = \frac{D(u)}{\sum S_i(u)} \nabla^2 q(\vec{r}, \tau)$$

per cui con il modello dell'ETA di FERTI $\frac{\partial q}{\partial \tau} = \nabla^2 q$

ma possiamo supporre che $\nabla^2 q(\vec{r}, \tau) = -B^2 q(\vec{r}, \tau)$ perciò

$$\frac{\partial q(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} = -B^2 q(\vec{r}, \tau) \quad \text{è un'equazione differenziale integrando}$$

$$q(\vec{r}, \tau) = q(\vec{r}, 0) e^{-B^2 \tau} \quad \text{da cui}$$

$$\frac{q(\vec{r}, \tau)}{q(\vec{r}, 0)} = e^{-B^2 \tau}$$

è il rapporto fra la densità di rallentamento all'età τ e quella all'età 0 (quella che arrivano all'età τ note all'età 0) \rightarrow quelle che non arrivano sono fuggite.

Se lo riferiamo a τ_{th}

$$\frac{q(\vec{r}, \tau_{th})}{q(\vec{r}, 0)} = e^{-B^2 \tau_{th}} \Rightarrow P_{NL}^{(f)} = e^{-B^2 \tau_{th}} \quad \text{quindi}$$

$$k_{eff} = \eta p f \epsilon \left(\frac{1}{1 + L^2 B^2} \right) e^{-B^2 \tau_{th}}$$

risulta che $L^2 \approx L_n^2 (1-f)$

per B^2 molto piccoli (quindi sistemi grandi) si può fare lo sviluppo in serie di Taylor di

$$e^{-B^2 \tau_{th}} = \frac{1}{e^{B^2 \tau_{th}}} \approx \frac{1}{1 + B^2 \tau_{th}}$$

Consideriamo un cilindro $B^2 = \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{j_0}{R}\right)^2$

se fissiamo il valore di B^2 qual è il rapporto ottimale fra R ed H ? \rightarrow volume minimo

$$V = \pi R^2 H \quad \left(\frac{j_0}{R}\right)^2 = B^2 - \left(\frac{\pi}{H}\right)^2$$

$$\frac{R^2}{j_0^2} = \frac{1}{B^2 - (\pi/H)^2} \quad V = \pi H \frac{(j_0)^2 H^2}{H^2 B^2 - \pi^2} = \frac{\pi (j_0)^2 H^3}{H^2 B^2 - \pi^2} = V(H)$$

per trovare il min $\frac{d}{dH} \left(\frac{H^3}{B^2 H^2 - \pi^2} \right) = 0$

$$\frac{3H^2 (B^2 H^2 - \pi^2) - 2B^2 H H^3}{(B^2 H^2 - \pi^2)^2} = 0 \quad H^2 (3B^2 H^2 - 3\pi^2 - 2B^2 H^2) = 0$$

$$H^2 (B^2 H^2 - 3\pi^2) = 0 \quad H=0 \text{ non ha significato fisico}$$

$$B^2 H^2 = 3\pi^2 \quad H^2 = \frac{3\pi^2}{B^2} \quad H = \frac{\sqrt{3}\pi}{B} \quad \text{sostituisco } H$$

$$B^2 = \left(\frac{B}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{j_0}{R}\right)^2 = \frac{B^2}{3} + \left(\frac{j_0}{R}\right)^2 = B^2$$

$$B^2 - \frac{B^2}{3} = \frac{2B^2}{3} = \left(\frac{j_0}{R}\right)^2 \quad R^2 = \frac{j_0^2 \cdot 3}{2 B^2} \quad R = \frac{j_0 \sqrt{3}}{B \sqrt{2}}$$

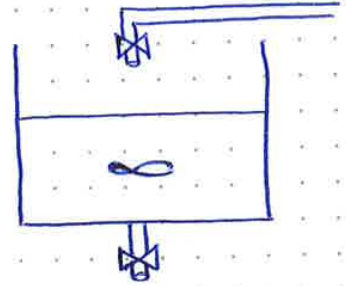
per cui

$$\frac{R}{H} = \frac{j_0 \sqrt{3}}{B \sqrt{2}} \frac{B}{\sqrt{3}\pi} = \frac{j_0}{\sqrt{2}\pi} = 0.55 \quad (\text{indipendente da } B^2)$$

$\frac{R}{H} = 0.55$ è il rapporto che minimizza il volume di un reattore critico

DECADIMENTO MISCELAZIONE

II) Abbiamo un contenitore in cui è presente acqua contenente un sale radioattivo. Da un rubinetto (D) in entrata una portata di acqua W_{H_2O} con concentrazione del sale radioattivo C_{im} . Nel contenitore è presente un miscelatore che mantiene una concentrazione media \bar{C} uniforme in tutto il contenitore. Da un rubinetto (C) esce la stessa portata W_{H_2O} ma con concentrazione \bar{C} . Trovare la concentrazione \bar{C} a regime. ($\lambda = 0$)



Se facciamo il bilancio di massa di H_2O troveremo che la quantità nel contenitore è costante.

$$C_{im} = \left[\frac{kg}{kg_{H_2O}} \right]$$

$$-\lambda \bar{C} M + W C_{im} - W \bar{C} = \frac{d\bar{C}}{dt} M = \left[\frac{mugli}{s} \right]$$

$$\frac{d\bar{C}}{dt} M = -(\lambda M + W) \bar{C} + W C_{im}$$

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = - \left(\lambda + \frac{W}{M} \right) \bar{C} + \frac{W}{M} C_{im}$$

Il termine W/M contribuisce ad aumentare λ

$$\bar{C}(t) = C_0 e^{-(\lambda + W/M)t} + \int_0^t e^{-(\lambda + W/M)(t-t')} \cdot \frac{W}{M} C_{im} dt' =$$

deriva dalla miscelazione associata

probabilità che i nuclei portati dalla W_{H_2O} sopravvivano.

$$= \frac{W}{M} C_{im} e^{-(\lambda + W/M)t} \int_0^t e^{(\lambda + W/M)t'} dt' =$$

$$= \frac{W/M \cdot C_{im} e^{-(\lambda + W/M)t}}{\lambda + W/M} \left[e^{(\lambda + W/M)t} - 1 \right] =$$

$$= \frac{W}{M} C_{im} \left(1 - e^{-(\lambda + W/M)t} \right)$$

come nel caso precedente risolveremo l'integrale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{C}(t) = \frac{W}{M} C_{im} \quad \text{comportamento a regime}$$

DECADIMENTO (con rimozione)

III) Abbiamo due nuclei da scio prodotti di fissione (135I e 135Xe). Le condizioni iniziali sono $N_1 = N_2 = 0$. Le due date le due leggi di decadimento. Trovare $N_1(t)$ e $N_2(t)$

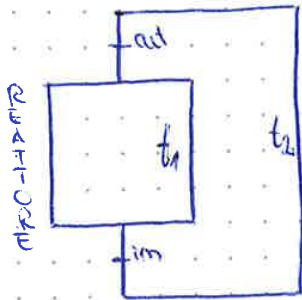
$$^135I) \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 + R \quad \text{dov'è } R \text{ il n. di fissioni che avvengono nel reattore} = \text{cost}$$

$$^135Xe) \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 - D \quad \text{termine di rimozione (i neutroni o "distaccano", trasformato in un altro elemento)}$$

A

DECADIMENTO (ciclo)

IV) Dato il circuito di raffreddamento ad acqua di un reattore, e sapendo che l' ^{135}I contenuto nell'acqua colpito da neutroni decade β^- producendo ^{135}Xe che è radioattivo ($^{135}\text{I} + n \rightarrow ^{135}\text{Xe}$). Si cerchi la condizione asintotica di equilibrio.



giro 1) $\frac{dN}{dt} = -\lambda N + R$ $N(t) = \frac{N_0 e^{-\lambda t}}{\lambda} + R \int_0^t e^{-\lambda(t-t')} dt' =$

$= R e^{-\lambda t} \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t}) \Big|_0^t = \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - 1) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$

$N_{out,1} = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1})$ $N_{in,1} = N_{out,1} e^{-\lambda t_2}$

giro 2) $\frac{dN}{dt} = -\lambda N + R$ $N(t) = N_{out,1} e^{-\lambda t_2} e^{-\lambda t_1} + \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1}) =$

è già il risultato dell'integrale

le equazioni si ripetono $= \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1}) e^{-\lambda t_2} e^{-\lambda t_1} + \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1}) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1}) (1 + e^{-\lambda(t_1+t_2)}) = N_{out,2}$

$N_{in,2} = N_{out,2} e^{-\lambda t_2}$

giro 3) $N_{out,3} = N_{in,2} e^{-\lambda t_1} + \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1}) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_2}) (1 + e^{-\lambda(t_1+t_2)}) e^{-\lambda t_2} e^{-\lambda t_1} + \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1}) =$
 $= \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_2}) (1 + e^{-\lambda(t_1+t_2)} + e^{-2\lambda(t_1+t_2)})$

il processo è iterativo per un numero n di volte.

giro n) $N_{out,n} = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1}) (1 + e^{-\lambda(t_1+t_2)} + e^{-2\lambda(t_1+t_2)} + \dots + e^{-\lambda(n-1)(t_1+t_2)})$

Per $N \rightarrow \infty$ $N_{out,N} = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1})$ è una serie numerica particolare

poniamo $e^{-\lambda(t_1+t_2)} = q$ $1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} q^k$ per $N \rightarrow \infty$
 abbiamo $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$: SERIE GEOMETRICA

La condizione necessaria per cui questa serie converga è $|q| < 1$ essendo una probabilità è sempre ≤ 1 e positiva

La serie converge a $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ quindi

La condizione asintotica è $\lim_{N \rightarrow \infty} N_{out,N} = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t_1}) \cdot \frac{1}{1 - e^{-\lambda(t_1+t_2)}}$

1

$$\lambda_2 e^{-\lambda_2 t^*} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t^*} = 0 \quad \lambda_2 e^{-\lambda_2 t^*} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t^*}$$

$$\lambda_2 \frac{e^{-\lambda_2 t^*}}{e^{-\lambda_1 t^*}} = \lambda_1 \quad e^{-\lambda_2 t^* + \lambda_1 t^*} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) t^* = \ln(\lambda_1 / \lambda_2)$$

$$t^* = \frac{\ln(\lambda_1 / \lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2} = 42.36 \text{ y}$$

3) quantità N_{i0} e M_{i0} per cui $P=1 \text{ W}$ dopo 10y

La potenza $P(t)$, nei sistemi che sfruttano il decadimento radioattivo, si calcola come prodotto tra l'energia liberata dal singolo decadimento per il numero di decadimenti al secondo, \Rightarrow l'attività.

$$P(t) = E_\alpha [\text{MeV}] \cdot 10^6 \left[\frac{\text{eV}}{\text{MeV}} \right] \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \left[\frac{\text{J}}{\text{eV}} \right] \cdot A_2 \quad A_2 = \lambda_2 \cdot N_2(t)$$

$$P(t) = 1 \text{ W} = 4 \cdot 10^6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot \lambda_2 \cdot \frac{\lambda_1 N_{i0}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \quad \text{con } t = 10 \text{ y}$$

$$6.4 \cdot 10^{-13} \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{i0} \left(e^{-\lambda_1 \cdot 10} - e^{-\lambda_2 \cdot 10} \right) = 1$$

$$N_{i0} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 \lambda_1 \cdot 6.4 \cdot 10^{-13} \left(e^{-\lambda_1 \cdot 10} - e^{-\lambda_2 \cdot 10} \right)} = \text{risultato} \approx 7.60 \cdot 10^{13} \text{ atomi}$$

$$M_{i0} = N_{i0} \cdot A \cdot \frac{1}{N_A} = [\text{Nuclei}] \left[\frac{\text{g}}{\text{mol}} \right] \left[\frac{\text{mol}}{\text{Nuclei}} \right] = [\text{g}] = \text{risultato} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ g}$$

$\lambda = [1/\text{s}]$

4) Potenza massima del generatore.

La trovata nell'istante in cui avviene il numero massimo di nuclei.

$$P_{\text{max}} = P(t^*) \quad P_{\text{max}} = 1.94 \text{ W}$$

Nei calcoli di N_{i0} e M_{i0} bisogna usare λ in $[s^{-1}]$ quindi

$$\lambda_1 = 1.1098 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1} \quad \lambda_2 = 4.7565 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1} \quad e \text{ i tempi}$$

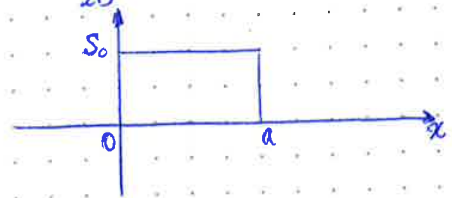
$$t = 10 \text{ y} = 315360000 \text{ s} \quad t^* = 42.36 \text{ y} = 1.335 \cdot 10^9 \text{ s} \quad \text{per cui i risultati sono}$$

$$N_{i0} = 1.20217 \cdot 10^{22} \text{ nuclei} \quad e \quad M_{i0} = 4.75504 \text{ g} \quad P_{\text{max}} = 1.94 \text{ W}$$

2
 Green, stazionario, non mult.
 I Problema suggerito a lezione (cassa con stazionarietà, geometria piana, mezzo omogeneo e infinito, sorgente costante in area)

Noi conosciamo l'equazione di Green per il mezzo infinito $G(x-x') = \frac{L}{2D} e^{-|x-x'|/L}$, quindi

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' S(x') G(x-x')$$



$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' S(x') \frac{L}{2D} e^{-|x-x'|/L} = \frac{S_0 L}{2D} \int_0^a dx' e^{-|x-x'|/L}$$

debbono studiare 3 casi

• $x < 0$ $x < x'$, quindi $-|x-x'| = -(x-x')$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{S_0 L}{2D} \int_0^a dx' e^{-(x-x')/L} = \frac{S_0 L}{2D} e^{x/L} \int_0^a dx' e^{-x'/L} = \frac{S_0 L}{2D} e^{x/L} (-L e^{-x'/L}) \Big|_0^a = \\ &= \frac{S_0 L}{2D} e^{x/L} (L e^{-x'/L}) \Big|_0^a = \frac{S_0 L}{2D} e^{x/L} (L - L e^{-a/L}) = \frac{S_0 L^2}{2D} e^{x/L} (1 - e^{-a/L}) \end{aligned}$$

per verifica faccio $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = 0$, ed è coerente (a distanze infinite una uscite dello S_0)

• $x > a$ $x > x'$, quindi $-|x-x'| = -(x-x')$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{S_0 L}{2D} \int_0^a dx' e^{-(x-x')/L} = \frac{S_0 L}{2D} e^{-x/L} \int_0^a dx' e^{x'/L} = \frac{S_0 L}{2D} e^{-x/L} (L e^{x'/L}) \Big|_0^a = \\ &= \frac{S_0 L}{2D} e^{-x/L} (L e^{a/L} - L) = \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-x/L} (e^{a/L} - 1) \end{aligned}$$

per verifica faccio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$, ed è coerente

• $0 < x < a$ x può essere $> 0 < x'$, mi conviene spezzare l'integrale in due parti

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{S_0 L}{2D} \left[\int_0^x dx' e^{-|x-x'|/L} + \int_x^a dx' e^{-|x-x'|/L} \right] = \frac{S_0 L}{2D} \left[\int_0^x dx' e^{-(x-x')/L} + \int_x^a dx' e^{-(x-x')/L} \right] = \\ &= \frac{S_0 L}{2D} \left[e^{-x/L} \int_0^x dx' e^{x'/L} + e^{-x/L} \int_x^a dx' e^{-x'/L} \right] = \frac{S_0 L}{2D} \left[e^{-x/L} (L e^{x'/L}) \Big|_0^x + e^{-x/L} (-L e^{-x'/L}) \Big|_x^a \right] = \\ &= \frac{S_0 L}{2D} \left[e^{-x/L} (L e^{x/L} - L) + e^{-x/L} (-L e^{-a/L} + L e^{-x/L}) \right] = \\ &= \frac{S_0 L}{2D} \left(L - L e^{-x/L} + L - L e^{(x-a)/L} \right) = \frac{S_0 L^2}{2D} (2 - e^{-x/L} - e^{(x-a)/L}) \end{aligned}$$

2

NON SVOLTO IN AULA

1) $A_I = A_{II} + C_{II} + S_0 L^2 / D$

2) $A_I = A_{II} - C_{II}$

3) $C_{II} e^{-a/L} = A_{II} e^{a/L} + C_{II} e^{-a/L} + S_0 L^2 / D$

4) $C_{II} e^{-a/L} = -A_{II} e^{a/L} + C_{II} e^{-a/L}$

2) $A_I = A_{II} - C_{II}$

$A_{II} - C_{II} = A_{II} + C_{II} + \frac{S_0 L^2}{D} \quad -2 C_{II} = \frac{S_0 L^2}{D}$

$C_{II} = -\frac{S_0 L^2}{2D}$

a) $C_{II} e^{-a/L} = -A_{II} e^{a/L} + C_{II} e^{-a/L} \quad \text{in 2) } -A_{II} e^{a/L} + C_{II} e^{-a/L} = A_{II} e^{a/L} + C_{II} e^{-a/L} + \frac{S_0 L^2}{D}$

$-2 A_{II} e^{a/L} = \frac{S_0 L^2}{D} \quad A_{II} = -\frac{S_0 L^2 e^{-a/L}}{2D}$

sostituisco A_{II} e C_{II} in 2)

$A_I = -\frac{S_0 L^2 e^{-a/L}}{2D} + \frac{S_0 L^2}{2D} = \frac{S_0 L^2 (1 - e^{-a/L})}{2D}$

sostituisco A_{II} e C_{II} in 4)

$C_{II} e^{-a/L} = \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-a/L} e^{a/L} - \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-a/L} = \frac{S_0 L^2}{2D} - \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-a/L}$

$C_{II} = \frac{S_0 L^2}{2D} e^{a/L} - \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-a/L} e^{a/L} = \frac{S_0 L^2 (e^{a/L} - 1)}{2D}$

i) $\phi(x) = A_I e^{x/L} = \frac{S_0 L^2 (1 - e^{-a/L})}{2D} e^{x/L} = \frac{S_0 L^2}{2D} (e^{x/L} - e^{x-a/L})$

iii) $\phi(x) = C_{II} e^{-x/L} = \frac{S_0 L^2 (e^{a/L} - 1)}{2D} e^{-x/L} = \frac{S_0 L^2}{2D} (e^{a-x/L} - e^{-x/L})$

ii) $\phi(x) = A_{II} e^{x/L} + C_{II} e^{-x/L} + \frac{S_0 L^2}{D} = -\frac{S_0 L^2}{2D} e^{-a/L} e^{x/L} + \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-x/L} + \frac{S_0 L^2}{D}$
 $= \frac{S_0 L^2}{2D} (2 - e^{-x-a/L} - e^{-x/L})$

NON TOLT. STAZ.

① Si consideri un sistema a strato piano entro il quale diffonde una radiazione fotonica. Il sistema ha caratteristiche tali da poter essere descritto dalla teoria della diffusione macrocinetica. Sono noti i valori della lunghezza e della sezione d'urto macroscopica. Il sistema viene irradiato su uno dei due catodi da una sorgente che stabilisce il valore della corrente entrante pari a I_0 . L'altro catodo è affacciato al vuoto. Si scriva l'espressione della soluzione dell'equazione della diffusione per il problema in esame. Si richieda quindi di calcolare le espressioni del coefficiente di riflessione R sulla faccia irradiata (rapporto fra il numero di fotoni che escono dal sistema dalla faccia irradiata e il numero di quelli entranti), del coefficiente di trasmissione (rapporto fra il numero di fotoni che escono dal sistema dalla faccia non irradiata e il numero di quelli entranti) e del coefficiente di assorbimento (rapporto fra il numero di fotoni assorbiti dal sistema e il numero di quelli entranti). Si studi il comportamento di questi parametri al variare dello spessore dello strato, giustificandolo con considerazioni fisiche (e verificando il rispetto del bilancio integrale). È richiesto in particolare il valore di questi parametri al tendere dello spessore ad ∞ .

2

(Spiegare tecnicamente perché R var. dipende da I_0 .)

Perché il sistema è lineare, a sollecitazione costante ($I_0 = \text{cost}$). risponde al modo costante.

Non si trova in AULA
provoca spessore $a = 2 \text{ cm}$

$$a/L = 0.4$$

$$R = 0.6579 = 65.79\%$$

(Come varia R_{lim} (con $a \rightarrow \infty$) e lo densità $\rho' = 80\% \rho$?)

$D = \frac{1}{3 \sum \dots}$ spendo $N_0 = \sum$ dove N contiene informazione sulla ρ

$$D = \frac{1}{3 \rho' N}$$

$$N = \frac{N_0}{A} \rho$$

$$L^2 = \frac{D}{\sum a_i} = \frac{1}{3 \rho' \sum a_i} = \frac{1}{3 \rho' N_0 a_i N} = \frac{1}{3 \rho' a_i N^2}$$

$$L = \sqrt{L^2} = \frac{1}{\sqrt{3 \rho' a_i} N}$$

R_{lim} è proporzionale a $\frac{D}{L} = \frac{\frac{1}{3 \rho' N}}{\frac{1}{\sqrt{3 \rho' a_i} N}} \rightarrow R_{\text{lim}}$ dipende da N e quindi dalla

densità $\rho' < \rho$ e uno spessore finito di mezzo, allora anzi una diminuzione di R.

— calcolo del coefficiente di trasmissione T.

$$T = \frac{J^+(a)}{J^+(0)}$$

$$J^+(a) = \frac{1}{4} A \sinh\left(\frac{a-u}{L}\right) + \frac{D}{2} \frac{A}{L} \cosh\left(\frac{a-u}{L}\right) = \frac{DA}{2L}$$

$$J^+(0) = \frac{1}{4} A \sinh\left(\frac{a-0}{L}\right) + \frac{DA}{2L} \cosh\left(\frac{a-0}{L}\right) = \frac{1}{4} A \sinh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{DA}{2L} \cosh\left(\frac{a}{L}\right)$$

$$T = \frac{A \frac{D}{2L}}{A \left(\frac{1}{4} \sinh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{D}{2L} \cosh\left(\frac{a}{L}\right) \right)} = \frac{2DL}{\sinh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2D}{L} \cosh\left(\frac{a}{L}\right)}$$

con spessore $a = 20 \text{ cm}$ $T = 2.66 \cdot 10^{-3} = 0.27\%$

con spessore $a \rightarrow \infty$ $T = \lim_{a \rightarrow \infty} T(a) = 0$

(con spessore $a = 2 \text{ cm}$ $T = 0.1582 = 15.82\%$)

2

NON. TOLT., STAZ.

III. Una scorta di uranio viene arricchita da una multi-ioneata università di strutture e concentrazione di uranio in una roccia. Vengono effettuate delle misure di corrente neutronica nella superficie esterna della parete di roccia che può essere considerato un sistema omogeneo, non moltiplicante, privo, semi-infinito. Si può approssimare che il sistema sia alimentato dai neutroni emessi (in modo spazialmente uniforme) nel processo di fissione spontanea dell' U^{238} , assimilabile a un decadimento radioattivo caratterizzato da una costante di decadimento $\lambda = 2.2371 \cdot 10^{-10} \text{ y}^{-1}$. Ogni fissione spontanea emette mediamente 2.5 neutroni ($\nu = 2.5$). La popolazione neutronica è descrivibile mediante la teoria della diffusione macrocinetica e sulla parete esterna della roccia si può assumere una condizione di annullamento per il flusso neutronico. Si determini l'espressione della soluzione dell'equazione della diffusione e se ne tracci un grafico qualitativo.

La misura effettuata fornisce un valore per la corrente neutronica pari a $15 \frac{\text{m}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$. Questo valore è affetto da incertezza del 5%. Si determini il valore stimato della concentrazione di uranio (in g/cm^3), sapendo che il valore della lunghezza di diffusione della roccia è pari a 15 cm (valore noto con un'incertezza del 10%). Si determini inoltre l'incertezza del dato ottenuto.

La sorgente del sistema lo possiamo considerare costante = S_0

Come già visto la soluzione dell'equazione $\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi(x) + \frac{S_0}{D} = 0$

$$\phi(x) = A e^{x/L} + C e^{-x/L} + \frac{S_0 L^2}{D}$$

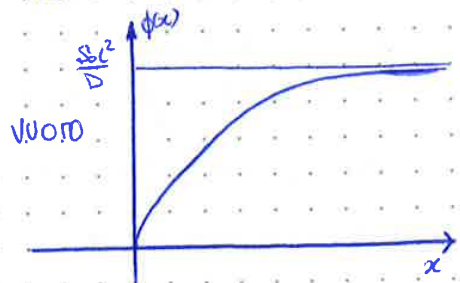
Al lim. $x \rightarrow \infty$ della funzione non andrò a 0, ma no divergerò \rightarrow sono limitato, quindi $A=0$

si imponiamo l'annullamento del flusso in 0 $\phi'(0) = 0$

$$C e^{-x/L} + \frac{S_0 L^2}{D} = 0 \quad C = -\frac{S_0 L^2}{D}$$

$$\phi(x) = -\frac{S_0 L^2}{D} e^{-x/L} + \frac{S_0 L^2}{D} = \frac{S_0 L^2}{D} (1 - e^{-x/L})$$

il valore asintotico di $\phi(x)$ sarà $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = \frac{S_0 L^2}{D}$



Sappiamo da $J(0) = 15 \frac{\text{m}}{\text{cm}^2 \text{ s}}$

$$\phi'(x) = \frac{S_0 L^2}{D} \frac{1}{L} e^{-x/L} = \frac{S_0 L}{D} e^{-x/L}$$

$$J(x) = -D \phi'(x) = -\frac{S_0 L D}{D} e^{-x/L} = -S_0 L e^{-x/L}$$

la corrente è negativa perché va verso sinistra, esce dal mezzo

la misura della corrente è un valore assoluto $|J(x)| = S_0 L e^{-x/L}$

$$J(0) = S_0 L = 15 \frac{\text{m}}{\text{cm}^2 \text{ s}} \quad S_0 = \frac{J(0)}{L} = \frac{15 \frac{\text{m}}{\text{cm}^2 \text{ s}}}{15 \text{ cm}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{cm}^3 \text{ s}}$$

$$\lambda = 2.2371 \cdot 10^{-10} \text{ y}^{-1} = 7.0938 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

① NON POLT., STAZ.

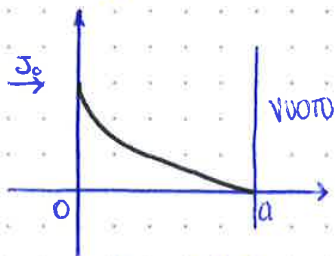
31/03

Si vuole studiare uno schermo di un reattore nucleare esposto a irraggiamento neutronico. Lo schermo può essere considerato uno slab infinito di spessore $a = 10$ cm e il bilancio neutronico è descrivibile mediante la teoria della diffusione monoenergetica;

l'irraggiamento stabilisce su una faccia una corrente netta stazionaria J_0 . Si determini la soluzione dell'equazione stazionaria della diffusione nel mezzo e se ne tracci il grafico qualitativo.

Si determini quanto deve valere la lunghezza di diffusione del mezzo affinché la corrente neutronica nella altra faccia esposta al vuoto sia pari a $1/100$ del valore della corrente J_0 .

Supponendo che lo schermo sia costituito da acqua (sezione d'urto macroscopica di assorbimento pari a 0.0222 cm⁻¹), si determini, qualora esse, la concentrazione (in g/cm³) di boro (sezione d'urto macroscopica di cattura pari a 689 barn, massa atomica pari a 10.8), da aggiungere all'acqua, che permette di realizzare le condizioni di cui al punto precedente (si supponga che l'aggiunta di boro non alteri il valore del coefficiente di diffusione, pari a 0.15 cm).



Poniamo le condizioni

$$\phi(a) = 0 \quad J_0 = -D \phi'(0) \quad \text{per cui}$$

$$\phi(x) = A \sinh\left(\frac{a-x}{L}\right)$$

$$J_0 = -D \phi'(0) = + \frac{DA}{L} \cosh\left(\frac{a}{L}\right) \quad \text{da cui} \quad A = \frac{J_0 L}{D \cosh(a/L)} \quad \text{quindi}$$

$$\phi(x) = \frac{J_0 L}{D \cosh(a/L)} \sinh\left(\frac{a-x}{L}\right)$$

Or ora determiniamo il valore della lunghezza di diffusione L affinché $J(a) = \frac{1}{100} J_0$

$$\frac{J(a)}{J_0} = \frac{1}{100} = \frac{\frac{DA}{L} \cosh\left(\frac{a-a}{L}\right)}{\frac{DA}{L} \cosh\left(\frac{a}{L}\right)} \quad \cosh = 1 \quad = \frac{1}{\cosh(a/L)} \quad \cosh(a/L) = 100$$

$$\cosh(u/L) = \frac{e^{u/L} + e^{-u/L}}{2} = 100 \quad \text{poniamo} \quad u = \frac{a}{L}$$

$$\frac{e^u + e^{-u}}{2} = 100 \quad \text{e} \quad t = e^u \quad \text{perci\u00f2} \quad t + \frac{1}{t} = 2 \cdot 100 \quad \text{da cui}$$

$$t^2 + 1 = 200t \quad t^2 - 200t + 1 = 0$$

risolvendo l'equazione di secondo grado troviamo i seguenti valori di t .

$$t = 0.005 \quad \text{e} \quad t = 199.995$$

non possiamo considerare $t < 1$ perch\u00e9 per a risulta un u , e quindi una L , negativa \rightarrow priva di significato fisico.

$$u = \ln t = \ln(199.995) = 5.298$$

$$L = \frac{a}{u} = \frac{10}{5.298} = 1.887 \text{ cm}$$

3

$\phi_p = c$ sostituisco nell'equazione ϕ_p e trovo

$$0 - \alpha^2 c + \frac{S_0}{D} = 0 \quad \alpha^2 c = \frac{S_0}{D} \quad c = \frac{S_0}{\alpha^2 D} \quad \text{per cui la soluzione completa}$$

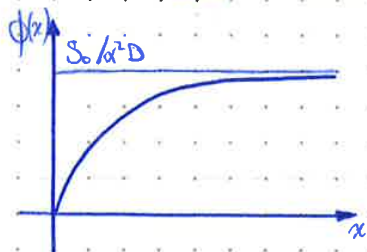
$$\phi(x) = A e^{-\alpha x} + B e^{-\alpha x} + \frac{S_0}{\alpha^2 D}$$

devo essere limitate, non può divergere, per cui A sarà nullo

$A=0$, poniamo la condizione al contorno.

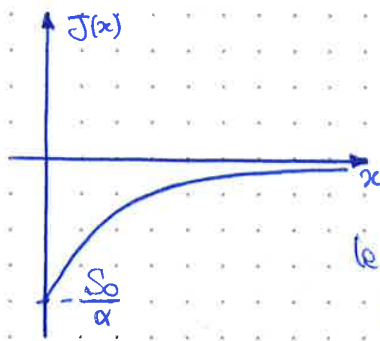
$$\phi(0) = 0 = B e^{-\alpha \cdot 0} + \frac{S_0}{\alpha^2 D} = B + \frac{S_0}{\alpha^2 D} \quad B = -\frac{S_0}{\alpha^2 D}$$

$$\phi(x) = -\frac{S_0}{\alpha^2 D} e^{-\alpha x} + \frac{S_0}{\alpha^2 D} = \frac{S_0}{\alpha^2 D} (1 - e^{-\alpha x})$$



l'espressione del flusso asintotico si trova ponendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \frac{S_0}{\alpha^2 D}$$



L'espressione della corrente neutrica mette zero

$$J(x) = -D \phi'(x) = -D \left(\frac{S_0}{\alpha^2 D} e^{-\alpha x} \right) = -D \left(-\alpha \frac{S_0}{\alpha^2 D} e^{-\alpha x} \right) = \frac{S_0}{\alpha} e^{-\alpha x}$$

le misure sperimentali danno ^{determinato} il rapporto R dato

$$R = \frac{J(0)}{\phi_{as}} = \frac{S_0/\alpha}{\frac{S_0}{\alpha^2 D}} = \frac{S_0/\alpha}{S_0/\alpha^2 D} = \alpha D = \sqrt{\frac{\Sigma a - \sqrt{\Sigma a^2}}{D}} \cdot D = \sqrt{D(\Sigma a - \sqrt{\Sigma a^2})}$$

cerchiamo la relazione fra N ed R

Ci ricordiamo $\Sigma a = \alpha_f N$ e sapendo che $\Sigma a = \frac{D}{L^2}$

$$R^2 = D \left(\frac{D}{L^2} - \sqrt{\alpha_f N} \right) \quad R^2 = \frac{D^2}{L^2} - \sqrt{D \alpha_f N} \quad R L^2 = \frac{D^2}{L^2} - \sqrt{D L^2 \alpha_f N}$$

$$\sqrt{D L^2 \alpha_f N} = \frac{D^2}{L^2} - R L^2 \quad \text{quindi} \quad N = \frac{D^2 - (R L^2)^2}{\sqrt{D L^2 \alpha_f}}$$

Conoscendo i dati $L = 28.28 \text{ cm}$, $D = 0.8 \text{ cm}$, $R = 0.01$, $\nu = 2.5$, $\alpha_f = 5706 \text{ psi} \cdot \text{db} = 10^{14} \text{ cm}^{-2}$

$$N = \frac{0.8^2 - (0.01 \cdot 28.28)^2}{2.5 \cdot 0.8 \cdot (28.28)^2 \cdot 570 \cdot 10^{14}} = 6.1425 \cdot 10^{17} \frac{\text{atomi}}{\text{cm}^3}$$

Quindi studiamo gli andamenti di $J(0)$, di ϕ_{as} e di R in funzione di N .

3.

Per trovare $N_1(t)$ e $N_2(t)$, si ipotizza che in $[0, s]$ il flusso sia dipendente da x , ma sia pari a $\bar{\phi}$

$$\bar{\phi}(x) = \frac{J_0 L}{\cosh(a/L) D} \cdot \frac{L}{s} (\cosh\left(\frac{x}{L}\right) - \cosh\left(\frac{a-s}{L}\right)) = \text{dove } J_0 = 10 \frac{m^3}{cm^2 s}, L = 10 \text{ cm},$$

$$D = 0.1 \text{ cm}, a = 30 \text{ cm}, S = 1 \text{ cm}.$$

$$= \frac{10^{13} \cdot 10}{\cosh\left(\frac{30}{10}\right) \cdot 0.1} \cdot \frac{10}{1} (\cosh\left(\frac{30}{10}\right) - \cosh\left(\frac{30-1}{10}\right)) = 9.4667 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{cm^2 s}$$

$$\frac{dN_1}{dt} = -\Sigma_a \bar{\phi} = -\sigma_{c1} N_1 \bar{\phi} \quad \text{da cui } N_1(t) = N_0 e^{-\sigma_{c1} \bar{\phi} t}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \sigma_{c1} N_1 \bar{\phi} \quad \text{dove } \lambda_2 = \frac{1}{T_2} = 0.5 \cdot y^{-1}$$

$$N_2(t) = \int_0^t dt' N_0 \sigma_{c1} \bar{\phi} e^{-\sigma_{c1} \bar{\phi} t'} e^{-\lambda_2 (t-t')} = N_0 \bar{\phi} \sigma_{c1} e^{-\lambda_2 t} \int_0^t dt' e^{-\sigma_{c1} \bar{\phi} t'} e^{\lambda_2 t'}$$

e il termine di sorgente $S(t)$

$$= \frac{N_0 \bar{\phi} \sigma_{c1}}{\lambda_2 - \sigma_{c1} \bar{\phi}} e^{-\lambda_2 t} \left(e^{(\lambda_2 - \sigma_{c1} \bar{\phi}) t} - 1 \right) = \frac{N_0 \bar{\phi} \sigma_{c1}}{\lambda_2 - \sigma_{c1} \bar{\phi}} e^{-\lambda_2 t} \left(e^{(\lambda_2 - \sigma_{c1} \bar{\phi}) t} - 1 \right)$$

$$N_2(t) = \frac{N_0 \bar{\phi} \sigma_{c1}}{\lambda_2 - \sigma_{c1} \bar{\phi}} \left(e^{-\sigma_{c1} \bar{\phi} t} - e^{-\lambda_2 t} \right)$$

Da cui si può la concentrazione di nuclei 1 trasformati in un arco di funzionamento $t = 1y$ nello stato $[0, s]$

$$N_1(1y) = N_0 - N_0 e^{-\sigma_{c1} \bar{\phi} t} \quad \text{dove } N_0 = 1.2 \cdot 10^{20} \text{ atomi/cm}^3$$

TRASFORMATI $\sigma_{c1} = 100b = 10^{-22} \text{ cm}^2$ $\bar{\phi} = 9.4667 \cdot 10^{14} \frac{m^3}{cm^2 s}$

$$t = 1y = 31\,536\,000 \text{ s}$$

$$= 1.2 \cdot 10^{20} \left(1 - e^{-10^{-22} \cdot 9.4667 \cdot 10^{14} \cdot 31\,536\,000} \right) = 1.14 \cdot 10^{20} \frac{\text{NUCLEI}}{\text{cm}^3}$$

molte dei tutti i nuclei sono trasformati

$$\text{concentrazione in massa} = n_1(1y) \cdot \frac{M}{N_A}$$

dove $M = 100$ e N_A è il n° di Avogadro

$$= 0.0189 \text{ g/cm}^3$$

Da cui si può la concentrazione di nuclei 2 presenti e la loro attività.

$$N_2(1y) = \frac{N_0 \bar{\phi} \sigma_{c1}}{\lambda_2 - \sigma_{c1} \bar{\phi}} \left(e^{-\sigma_{c1} \bar{\phi} t} - e^{-\lambda_2 t} \right) = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \cdot 31\,536\,000} = 1.5855 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$$

$$= \frac{1.2 \cdot 10^{20} \cdot 9.4667 \cdot 10^{14} \cdot 10^{-22}}{1.5855 \cdot 10^{-8} - 10^{-22} \cdot 9.4667 \cdot 10^{14}} \left(e^{-10^{-22} \cdot 9.4667 \cdot 10^{14} \cdot 31\,536\,000} - e^{-1.5855 \cdot 10^{-8} \cdot 31\,536\,000} \right)$$

$$= 8.0144 \cdot 10^{11} \frac{\text{NUCLEI}}{\text{cm}^3}$$

$$A_2 = \lambda_2 \cdot N_2(1y) = 1.5855 \cdot 10^{-8} \cdot 8.0144 \cdot 10^{11} = 1.2707 \cdot 10^{12} \frac{\text{NUCLEI}}{\text{cm}^3 \cdot \text{s}}$$

L dopo 1y

3

Determiniamo $P(t) \left[\frac{W}{cm^3} \right]$ sapendo che l'energia prodotta da uno fissone è $E_F \approx 200 \text{ MeV}$

$$P(t) = E_F \Phi (v_{F3} N_3(t) + v_{F1} N_1(t)) = E_F \Phi \left(v_{F1} N_0 e^{-\lambda_1 \phi t} + \frac{v_{F3} v_{a2} N_{20}}{v_{a3} - v_{a2}} \left(e^{-\lambda_2 \phi t} - e^{-\lambda_3 \phi t} \right) \right)$$

Determino $P(0)$

$$P(0) = E_F \Phi \left(v_{F1} N_0 + \frac{v_{F3} v_{a2} N_{20}}{v_{a3} - v_{a2}} (1 - 1) \right) = E_F \Phi v_{F1} N_0 =$$

ricordiamo che $1 \text{ MeV} = 1.602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$, $\Phi = 3 \cdot 10^{13} \frac{m}{cm^2 s}$, $v_{F1} = 500 \text{ b} = 500 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$,

$$N_0 = 4 \cdot 10^{20} \frac{N}{cm^3}$$

$$= 200 \cdot 1.602 \cdot 10^{-13} \cdot 3 \cdot 10^{13} \cdot 500 \cdot 10^{-24} \cdot 4 \cdot 10^{20} = 192.24 \text{ W/cm}^3$$

Determino $P(1y)$, $N_1(1y)$, $N_2(1y)$, $N_3(1y)$ dove $1y = 31536000 \text{ s}$

~~Calcolo~~ $P(1y) = [\text{calcolatrice}] \Rightarrow$ con $v_{a1} = 600 \text{ b}$, $v_{F3} = 200 \text{ b}$, $v_{a3} = 1000 \text{ b}$, $N_{20} = 2 \cdot 10^{22} \frac{N}{cm^3}$, $v_{a2} = 3 \text{ b}$.

$$P(1y) = 137.15 \text{ W/cm}^3$$

$$N_1(1y) = N_0 e^{-\lambda_1 \phi t} = 4 \cdot 10^{20} e^{-600 \cdot 10^{-24} \cdot 3 \cdot 10^{13} \cdot 31536000} = 2.26743 \cdot 10^{20} \frac{N}{cm^3}$$

$$N_2(1y) = N_{20} e^{-\lambda_2 \phi t} = 2 \cdot 10^{22} e^{-3 \cdot 10^{-24} \cdot 3 \cdot 10^{13} \cdot 31536000} = 1.99433 \cdot 10^{22} \frac{N}{cm^3}$$

$$N_3(1y) = \frac{v_{a2} N_{20}}{v_{a3} - v_{a2}} \left(e^{-\lambda_2 \phi t} - e^{-\lambda_3 \phi t} \right) = [\text{calcolatrice}] = 3.66443 \cdot 10^{19} \frac{N}{cm^3}$$

Per sapere se il sistema è autofertilizzante bisogna vedere se la quantità di fissile iniziale, e dopo 1 anno, è cresciuta o diminuita.

$$N_0 + N_{30} \stackrel{=0}{\geq} N_1(1y) + N_3(1y)$$

$$4 \cdot 10^{20} \geq 2.26743 \cdot 10^{20} + 3.66443 \cdot 10^{19} = 2.63387 \cdot 10^{20}$$

Il sistema non è autofertilizzante.

3.

$$\frac{dN_2(t^*)}{dt} = -\sigma_2 \phi N_2 e^{-\sigma_2 \phi t^*} + \frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \left(-\sigma_3 \phi e^{-\sigma_3 \phi t^*} + \sigma_2 \phi e^{-\sigma_2 \phi t^*} \right) =$$

$$= e^{-\sigma_2 \phi t^*} \left(-\sigma_2 \phi N_2 + \frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) - \frac{\sigma_3^2 \phi N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} e^{-\sigma_3 \phi t^*} = 0$$

$$= \phi \left(\frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} - \sigma_2 N_2 \right) e^{-\sigma_2 \phi t^*} - \phi \left(\frac{\sigma_3^2 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) e^{-\sigma_3 \phi t^*} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} - \sigma_2 N_2 \right) e^{-\sigma_2 \phi t^*} = \left(\frac{\sigma_3^2 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right) e^{-\sigma_3 \phi t^*}$$

$$e^{(\sigma_2 - \sigma_3) \phi t^*} = \frac{\left(\frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} - \sigma_2 N_2 \right)}{\left(\frac{\sigma_3^2 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right)} \quad \text{da cui}$$

$$t^* = \ln \left(\frac{\left(\frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} - \sigma_2 N_2 \right)}{\left(\frac{\sigma_3^2 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \right)} \right) \frac{1}{(\sigma_2 - \sigma_3) \phi} = [\text{calc}] = 55.000.516 \text{ s} = 1.7 \text{ y}$$

$$N_2(t^*) = N_{20} e^{-\sigma_2 \phi t^*} + \frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \left(e^{-\sigma_3 \phi t^*} - e^{-\sigma_2 \phi t^*} \right) = [\text{calc}] = 1.573 \cdot 10^{20} \text{ N/cm}^3$$

Determinare l'espressione di P(t) con $E_F = 0.200 \text{ MeV}$

$$P(t) = E_F \cdot \phi \cdot (\sigma_1 N_1(t) + \sigma_2 N_2(t)) = E_F \phi \left(\sigma_1 N_{10} e^{-\sigma_1 \phi t} + \sigma_2 \left(N_{20} e^{-\sigma_2 \phi t} + \frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \left(e^{-\sigma_3 \phi t} - e^{-\sigma_2 \phi t} \right) \right) \right)$$

$$P(t^*) = E_F \phi \left(\sigma_1 N_{10} e^{-\sigma_1 \phi t^*} + \sigma_2 \left(N_{20} e^{-\sigma_2 \phi t^*} + \frac{\sigma_2 \sigma_3 N_{30}}{\sigma_2 - \sigma_3} \left(e^{-\sigma_3 \phi t^*} - e^{-\sigma_2 \phi t^*} \right) \right) \right) = [\text{calc}] = 330.05 \text{ W/cm}^3$$

Trovo il tempo τ per raggiungere il 10% dei nuclei 3 iniziali, cioè

$$\frac{N_3(\tau)}{N_{30}} = 10\% = 0.1 = \frac{N_{30} e^{-\sigma_3 \phi \tau}}{N_{30}}$$

$$e^{-\sigma_3 \phi \tau} = 0.1$$

$$-\sigma_3 \phi \tau = \ln(0.1)$$

$$\tau = \frac{\ln(0.1)}{-\sigma_3 \phi} = 146.334.050 \text{ s} = 4.64 \text{ y}$$