NUMERO: 1814A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Nappo Giuseppe

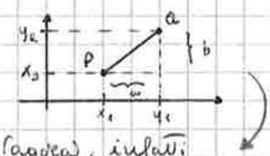
MATERIA: Analisi II (Integrali + Serie) - prof. Mazzi

- Si denota con $\mathbb{R}^n$ (dove $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per se stesso n volte, ovvero $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}\}$

Su $\mathbb{R}^n$ sono definiti un prodotto scalare ed una norma (detta anche modulo)

1) $\forall x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots y_n) \rightarrow x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ (prodotto scalare)
2) $\forall x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \rightarrow \|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ (modulo)

- Siano P, Q due elementi di $\mathbb{R}^n$ inteso come spazio metrico, con $P = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $Q = (y_1, y_2, \ldots y_n)$. Si ha che la distanza euclidea fra P e Q è data da:
$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$
- La distanza euclidea gode delle seguenti proprietà:
1) $d(P,Q) \geq 0$ in particolare $d(P,Q) = 0 \iff P \equiv Q$
2) $d(P,Q) = d(Q,P)$ (Simmetria)
3) $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ (Disuguaglianza Triangolare)



- Su $\mathbb{R}^2$, nella formula della distanza ritroviamo il Teorema di Pitagora, infatti
$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$
- Si chiama intorno sferico aperto (od anche palla aperta) di centro x_0 e raggio r l'insieme $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$ (dove B sta per "ball", palla)
- Si chiama intorno sferico chiuso (od anche palla chiusa) di centro x_0 e raggio r l'insieme $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$

$n = 1$: $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$
$\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\} = [x_0 - r, x_0 + r]$
per $n = 1$ possono definirsi i concetti di intorno destro e sinistro, nonché quelli di intorno di $\pm\infty$

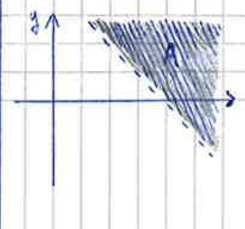
$n = 2$: $B_r(x_0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r\}$ (Disco senza bordo)
$\overline{B_r(x_0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \leq r\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq r\}$ (Disco con bordo)
e così via per $n > 2$

- Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- Si dice che x_0 è un punto interno ad A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subseteq A$
- Si dice che x_0 è un punto esterno ad A se esiste $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subseteq (\mathbb{R}^n \setminus A)$
- Si dice che x_0 è un punto di frontiera per A se $\forall r > 0$, si ha che $B_r(x_0) \cap A \neq \emptyset$ e $B_r(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$

- Si chiama parte interna di A e si denota con $int(A)$ oppure $\mathring{A}$ l'insieme dei punti interni di A
- Si chiama parte esterna di A e si denota con $est(A)$ l'insieme dei punti esterni di A
- Si chiama frontiera o bordo di A e si denota con $fr(A)$ oppure ∂A l'insieme dei punti di frontiera di A. È evidente che $\partial A = \partial CA$, ossia che la frontiera di un insieme coincide con la frontiera del suo complementare
- Si chiama chiusura di A e si denota con $cl(A)$ oppure $\bar{A}$, l'unione di A e della sua frontiera $\bar{A} = A \cup \partial A$. È sempre vero che $\mathring{A} \subseteq A \subseteq A \cup \partial A$. Prop.: $\bar{A}$ è il più piccolo chiuso contenente A

$A : \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \land 0 \leq y \leq 1 \land x \in \mathbb{Q}\}$ non possiede punti interni, poiché tutti i suoi punti sono di frontiera
$A : \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \land 0 \leq y \leq 1\}$; $A' : \{(x,y) : 0 < x < 1 \land 0 < y < 1\}$ tutti i punti di A' sono punti interni di A

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$
- A è aperto se $A = \mathring{A}$, cioè se ogni punto di A è interno ad A. A aperto $\iff A \cap \partial A = \emptyset$
- A è chiuso se $A = \bar{A} = A \cup \partial A$, od anche se CA (il suo complementare) è aperto.
Per convenzione $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono contemporaneamente aperti e chiusi.
Alcuni insiemi non sono né aperti né chiusi $A : \{0 \leq x < 1\}$ ovvero $[0,1)$ in $\mathbb{R}$
Si dimostra che se A è chiuso, CA è aperto. Inoltre se A è chiuso, allora $A = \bar{A}$
- A è limitato se $\exists H > 0 : A \subseteq B_H(0)$
- A è illimitato se $\forall H > 0 \ \exists x_0 \in A : x_0 \notin B_H(0)$, o più semplicemente se A non è limitato
- A è compatto se è chiuso e limitato



A è aperto e illimitato

A è chiuso e limitato (compatto)

1

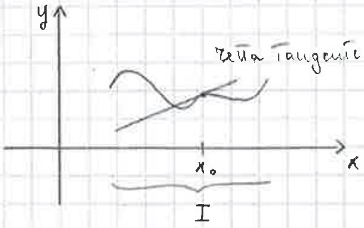
- Relativamente agli insiemi, valgono i seguenti fatti:
  1) l'unione di insiemi aperti è un insieme aperto
  2) l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è un insieme aperto
  3) l'unione di un numero finito di insiemi chiusi è un insieme chiuso
  4) l'intersezione di insiemi chiusi è un insieme chiuso

- Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.
Ricordando che $f^{-1}(\Omega) = \{x \in A : f(x) \in \Omega\}$ è la controimmagine di Ω tramite f
si ha che valgono i seguenti fatti:
  1) se Ω è aperto, allora $f^{-1}(\Omega)$ è aperto
  2) se Ω è chiuso, allora $f^{-1}(\Omega)$ è chiuso

- Sia $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione reale di n variabili e sia P_0 un punto interno ad I. Sia poi $u = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ un versore. Consideriamo la funzione $F(t) = f(P_0 + t u)$ nella variabile t, definita per quei valori di t tali che $P_0 + t u \in I$. Poiché P_0 è interno ad I, $F(t)$ sarà sicuramente definita in un intorno di $t = 0$. Si ha inoltre che $F(0) = f(P_0 + 0 \cdot u) = f(P_0)$; se $F(t)$ è derivabile per $t = 0$, la derivata $F'(t)$ si dice derivata direzionale di f in P_0 secondo la direzione di u. Questa derivata, se esiste è
$$\frac{df}{du}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t u) - f(P_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{F(t) - F(0)}{t}$$
Si dice anche che f è derivabile in P_0 secondo u. La derivata direzionale gode delle medesime proprietà delle derivate di funzioni reali in una variabile.
  1) $\dfrac{d(f+g)}{du} = \dfrac{df}{du} + \dfrac{dg}{du}$
  2) $\dfrac{d(\alpha f)}{du} = \alpha \cdot \dfrac{df}{du}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$
  3) $\dfrac{d(f \cdot g)}{du} = g \dfrac{df}{du} + f \dfrac{dg}{du}$

Le derivate di f secondo i versori fondamentali di $\mathbb{R}^n$ ovvero $e_1, e_2, \dots e_n$ si dicono derivate parziali di f. Se f si esprime mediante la formula $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e se esiste la derivata parziale rispetto al vettore e_i si dice che f è derivabile rispetto ad x_i ed in luogo di df/de_i si scrive $\partial f / \partial x_i$. La $\partial f/\partial x_i$ si calcola considerando la f funzione della sola variabile x_i e considerando costanti tutte le altre variabili.
La derivata parziale di f rispetto ad x_i in $P_0 = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ è infatti uguale a:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = \frac{df}{de_i}(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h e_i) - f(P_0)}{h}$$
Si capisce quindi perché $\partial f/\partial x_i$ si calcola considerando f funzione della sola x_i. Il limite è infatti uguale a
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h \cdot 0, \dots, a_i + h \cdot 1, \dots, a_n + h \cdot 0) - f(a_1, \dots, a_i, \dots a_n)}{h}$$
Se f è derivabile rispetto ad $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si dice che f è derivabile

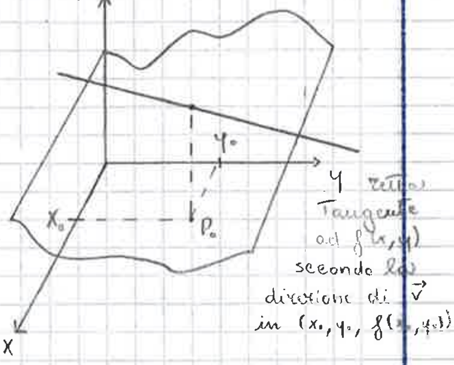
- Caso $n = 1$. $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. x_0 interno ad I
f derivabile in x_0 se esiste finito il seguente limite:
$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{coefficiente angolare della retta tangente ad } f(x) \text{ in } x_0}$$
  1) f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0
  2) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ per $x \to x_0$
  3) $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ equazione della retta tangente



- Caso $n = 2$ $f: I \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $P_0(x_0, y_0)$ interno ad I
$v = (v_1, v_2)$ versore; f derivabile in (x_0, y_0) secondo la direzione di v se esiste finito il seguente limite:
$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h v_1, y_0 + h v_2) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{df}{dv}(P_0)$$
$\boxed{\text{"coefficiente angolare"}}$ della retta tangente ad f secondo la direzione di v in (x_0, y_0)

La direzione di $v = (v_1, v_2)$ è quella della retta definita dal seguente sistema:
$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$
Tutte le rette tangenti ad $f(x,y)$ nel punto $P_0(x_0, y_0)$ giacciono sullo stesso piano, il piano tangente ad $f(x)$ in P_0

Si tratta di un vettore, le cui componenti rappresentano le pendenze della retta tangente, rispetto ai due assi di $\mathbb{R}^2$, x e y



Si ha che se $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile in $x_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in I$ allora

Nel caso in cui $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è come se avessimo $\nabla f(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0)} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n - \alpha_n \end{pmatrix} = L(x - x_0)$$

ovvero che $L(x - x_0) = J_{x_0} f \cdot (x - x_0)$

- Sia $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Allora valgono i seguenti fatti:
1) Se f è differenziabile in x_0, allora f è continua in x_0 (Infatti mentre con le derivate direzionali ci avviciniamo ad x_0 da alcune direzioni privilegiate, con il differenziale consideriamo un intorno completo di x_0 in $\mathbb{R}^n$)
2) Se f è differenziabile in x_0, allora $\forall v \in \mathbb{R}^n$ si ha che f è derivabile in x_0 secondo la direzione di v e vale la seguente eguaglianza:
$\frac{df}{dv}(x_0) = df(x_0)(v) = df(x_0)(v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n) = v_1 \cdot df(x_0)(e_1) + \dots + v_2 \cdot df(x_0)(e_2) + \dots + v_n \cdot df(x_0)(e_n) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$
Evidentemente si ha che $df(x_0)(v) = J_{x_0} f \cdot v$
Nel caso in cui $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, più semplicemente, si ha che $df(x_0)(v) = \nabla f(x_0)(v)$
3) Se f ammette tutte le derivate parziali $\partial f / \partial x_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$ in I e se queste derivate parziali sono continue in x_0 allora f è differenziabile in x_0.

Applichiamo quanto visto fino ad ora ad una generica $f: I \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- f differenziabile in (x_0, y_0) se $\exists L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: $f(x,y) = f(x_0, y_0) + L(x - x_0, y - y_0) + o(\|x - x_0, y - y_0\|)$ per $(x,y) \to (x_0, y_0)$ con $\boxed{L(x - x_0, y - y_0)} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0)$
- Se f differenziabile $\Rightarrow$ f continua in (x_0, y_0); $\exists\, \partial f / \partial x\, (x_0, y_0)$, $\exists\, \partial f / \partial y\, (x_0, y_0)$
- Se f differenziabile $\Rightarrow \forall v : \|v\| = 1 \Rightarrow \exists\, \partial f / \partial v\, (x_0, y_0) \wedge \partial f / \partial v\, (x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$
ovvero $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot \vec{v}$
- Oppure ... f è differenziabile in (x_0, y_0) se $\exists L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - \boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right)}}{\|(x - x_0), (y - y_0)\|} = 0$$

- Sia $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione.
- Diciamo che f è **di classe C^0 in I** se f è continua in I
- Diciamo che f è **di classe C^1 in I** se f è continua ed ~~ammette~~ tutte le derivate parziali $\partial f / \partial x_i$ in I e tali derivate sono continue in I. Le derivate parziali definiscono delle funzioni che dove possibile possono essere ancora derivabili. Si ottengono così le derivate parziali seconde, terze e quarte.
- Diciamo che f è **di classe C^k in I** se f è continua ed ammette tutte le derivate parziali fino all'ordine k e tali derivate sono continue su I. Una derivata parziale del k-esimo ordine è il risultato di successive derivazioni effettuate secondo variabili diverse.
$\frac{\partial^k f}{\partial x_i \dots \partial x_j}$ È possibile definire una diversa derivata per ognuna delle diverse combinazioni con ripetizione delle variabili rispetto alle quali si deriva
- Diciamo che f è **di classe C^∞ in I** se f è di classe C^k in I per ogni $k \in \mathbb{N}$

- **Lemma di Schwarz**: sia $f: I \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^2. Allora $\forall i,j = 1, 2, \dots n$ e $\forall x \in I$ si ha che si può invertire l'ordine di derivazione nelle derivate parziali seconde miste
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(x)$

Esempio di derivata parziale seconda $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; f continua; $\exists\, \partial f / \partial x\, (x,y)$, $\exists\, \partial f / \partial y\, (x,y)$

$$\lim_{h \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] / h = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$$

$$\lim_{k \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] / k = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \text{ (Schwarz)}$$

$$\lim_{j \to 0} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+j) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] / j = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 118

INTEGRALI MULTIPLI

(Nozioni preliminari)

Per **integrale multiplo** si intende l'integrale di una funzione reale di $n \geq 2$ variabili su un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. La nozione di integrale multiplo è una naturale estensione di quella dell'**integrale definito** di una funzione reale di variabile reale. La differenza principale sta nel fatto che, mentre in una variabile si calcola l'integrale di una funzione limitata su un intervallo limitato della retta reale $\mathbb{R}$, nell'integrale multiplo si calcola l'integrale di una funzione limitata su un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^n$.
La teoria dell'integrazione multipla deve forzatamente avere una base teorica che permetta di discernere i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ "buoni" su cui integrare, da quelli "non buoni". Questa base teorica è costituita dalla **teoria della misura** (che studia le proprietà degli insiemi "buoni", ossia misurabili, cioè a cui è possibile associare una misura). Le più note teorie dell'integrazione multipla sono quella secondo **Riemann** (basata sulla teoria della misura di **Peano-Jordan**) e quella secondo **Lebesgue** (basata sull'omonima teoria della misura)

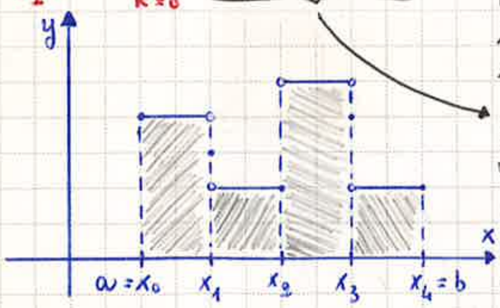
INTEGRALE SECONDO RIEMANN

(Brevi richiami)

- Sia $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Consideriamo $n+1$ punti di $[a,b]$ non necessariamente equispaziati e tali che $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$. Si dice che essi inducono una **ripartizione** o **suddivisione** dell'intervallo $[a,b]$ in sottointervalli $I_K = [x_K, x_{K+1}]$ con $K = 0, 1, \ldots, n-1$. Se uno degli intervalli I_K viene ulteriormente diviso la nuova ripartizione viene detta **raffinamento**. Una funzione $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **funzione a scala** se esistono una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ indotta da punti $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ e costanti $c_1, c_2, \ldots c_n \in \mathbb{R}$ tali che:
$f(x) = c_K, \quad \forall x \in (x_K, x_{K+1}), \quad K = 0, 1, \ldots, n-1$.
In pratica una funzione a scala è una **funzione costante a tratti**. Indichiamo con $S([a,b])$ l'insieme delle funzioni a scala su $[a,b]$; diciamo inoltre che una suddivisione è **adattata ad f** se f è costante in ogni intervallo (x_K, x_{K+1}) della suddivisione stessa.
- **Definizione** Sia $f \in S([a,b])$ e siano $\{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ i punti di una suddivisione ad essa adattata. Sia c_K il valore assunto da f nell'intervallo (x_K, x_{K+1}). Si dice **integrale definito** di f su $I = [a,b]$ il numero reale

$$\int_I f = \sum_{K=0}^{n-1} \boxed{c_K (x_{K+1} - x_K)}$$

Se modifichiamo il valore di f in un numero finito di punti l'integrale non cambia; in particolare l'integrale non dipende dai valori assunti dalla funzione nei suoi eventuali punti di discontinuità.



Ognuno di questi prodotti rappresenta l'area di un rettangolino, di base $(x_{K+1} - x_K)$ ed altezza c_K. Nel caso in cui f è positiva su $[a,b]$, $\int_I f$ rappresenta l'area del trapezoide di f, ossia l'area sottesa al grafico di f, che è uguale alla somma delle aree dei rettangoli

Dunque $\iint_I f = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \cdot e_{ij}$, dove ognuno dei prodotti rappresenta il volume di un parallelepipedo, di Area di base $(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$ e di altezza e_{ij}. Nel caso in cui $0 \le f(x,y)$, l'integrale doppio rappresenta il volume sotteso al grafico di $f(x,y)$ che è uguale alla somma dei volumi di parallelepipedi. Consideriamo ora una generica funzione $f: I = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Introduciamo ora due insiemi di funzioni a scala, formati rispettivamente dalle funzioni che maggiorano e dalle funzioni che minorano f, ovvero:

$S^+_f = \{ h \in S(I) : \ f(x,y) \le h(x,y) \ \ \forall (x,y) \in I = [a,b] \times [c,d] \}$

$S^-_f = \{ g \in S(I) : \ g(x,y) \le f(x,y) \ \ \forall (x,y) \in I = [a,b] \times [c,d] \}$

$\underline{\iint_I} f = \sup \{ \iint_I g : g \in S^- f \}$ mentre $\overline{\iint_I} f = \inf \{ \iint_I h : h \in S^+ f \}$

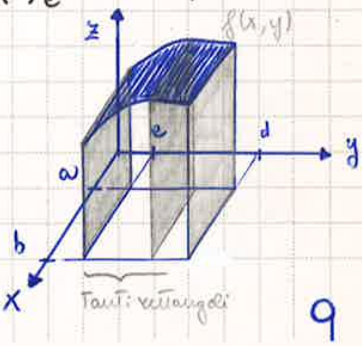
Si dice che f è Riemann-integrabile oppure che f è integrabile secondo Riemann su $I = [a,b] \times [c,d]$ se $\underline{\iint_I} g = \overline{\iint_I} h$

- Teorema: le funzioni $f: I \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue su I, dove I è un rettangolo chiuso, della forma $[a,b] \times [c,d]$ sono Riemann-integrabili su I.
  Le funzioni $f: I \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitate e continue su I, dove I è un rettangolo aperto, della forma $(a,b) \times (c,d)$ sono Riemann-integrabili su I

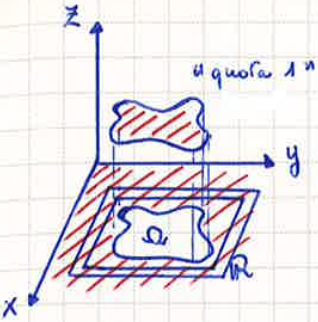
- Teorema (formule di riduzione) Sia $f: I \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Riemann-integrabile su $I = [a,b] \times [c,d]$. Allora valgono i seguenti fatti:

1) Se $\forall y \in [c,d] \ \ \exists g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \ \Rightarrow \ \iint_I f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$
2) Se $\forall x \in [a,b] \ \ \exists h(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy \ \Rightarrow \ \iint_I f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$
3) Se f è continua su $I \Rightarrow h(x)$ e $g(y)$ sono continue e

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$



(È come se uno dei due integrali mi desse l'area di ogni rettangolo costruito come in figura, ed il secondo mi desse la somma di tutte queste aree ovvero il volume del solido sotteso al grafico di $f(x,y)$)



(In rosso è rappresentata la funzione χ_Ω)

Come si può notare, la misura di Ω non dipende dal rettangolo R scelto, in quanto se scelgo rettangoli più grandi o più piccoli, aggiungo o tolgo parti di dominio in cui χ_Ω vale 0

Definizione: Un insieme si dice trascurabile se è misurabile e la sua misura è nulla. Hanno misura nulla in $\mathbb{R}^2$ rette, segmenti, sostegni di curve parametriche (dove una curva parametrica è un'applicazione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$) e funzioni reali di variabile reale, del tipo $\{(x, f(x)),\ x \in [a,b]\}$ e $\{(g(y), y),\ y \in [c,d]\}$. Hanno inoltre misura nulla
- l'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla
- l'intersezione di insiemi di misura nulla
- sottoinsiemi di insiemi di misura nulla (ad esempio le semirette)

Teorema: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato non vuoto $\Rightarrow [\Omega$ è misurabile $\Leftrightarrow |\partial\Omega| = 0]$

Proprietà: Siano Ω_1, Ω_2 insiemi misurabili di $\mathbb{R}^2$. Valgono i seguenti fatti:
1) Se $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \Rightarrow |\Omega_1| \leq |\Omega_2|$
2) $\Omega_1 \cap \Omega_2$ è misurabile; $\Omega_1 \cup \Omega_2$ è misurabile; in particolare si ha che $|\Omega_1 \cup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2| - |\Omega_1 \cap \Omega_2|$

Proprietà: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile. Allora valgono i seguenti fatti:
1) $\mathring{\Omega}$ è misurabile; $\bar{\Omega}$ è misurabile
2) $\forall\, \tilde{\Omega}$ t.c. $\mathring{\Omega} \subseteq \tilde{\Omega} \subseteq \bar{\Omega}$, si ha che $|\mathring{\Omega}| = |\tilde{\Omega}| = |\bar{\Omega}|$

Dimostrazione (punto 2): $|\bar{\Omega}| = |\mathring{\Omega} \cup \partial\Omega| = |\mathring{\Omega}| + |\partial\Omega| + |\mathring{\Omega} \cap \partial\Omega|$ ma $|\partial\Omega| = 0$ per il precedente teorema e $\mathring{\Omega} \cap \partial\Omega$ è vuoto $\Rightarrow |\bar{\Omega}| = |\mathring{\Omega}| + 0 + 0 = |\mathring{\Omega}|$ (cvd)

Definizione: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **continua quasi ovunque** su Ω se è continua su Ω tranne al più su un sottoinsieme A di Ω $(A \subset \Omega)$ di misura nulla, cioè trascurabile

Teorema: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione limitata $(\exists M > 0 : \forall x \in \Omega,\ |f(x)| < M)$. Allora
1) Se f è continua su $\Omega \Rightarrow f$ è Riemann-integrabile su Ω
2) Se f è continua quasi ovunque su $\Omega \Rightarrow f$ è Riemann-integrabile su Ω

Teorema: Sia f integrabile su Ω e $g = f$ su Ω tranne al più su un sottoinsieme trascurabile A di Ω. Allora $\iint_\Omega g = \iint_\Omega f$

Teorema: Se $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è limitata e $|\Omega| = 0 \Rightarrow \exists \iint_\Omega f$ e $\iint_\Omega f = 0$

Teorema: Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e sia $\tilde{f}$ la funzione così definita: $\tilde{f} = \begin{cases} f & \forall (x,y) \in \Omega \\ 0 & \forall (x,y) \notin \Omega \end{cases}$
Sia inoltre R un qualsiasi rettangolo contenente Ω. Allora si ha che f è integrabile su $\Omega \Leftrightarrow \tilde{f}$ è integrabile su R. Inoltre vale che $\iint_\Omega f = \iint_R \tilde{f}$

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme x semplice $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y)\}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora si ha che

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Esempi: $f(x,y) = 2xy \qquad \Omega = \{0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x+1\}$

$$\iint_\Omega f = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x+1} 2xy\,dy \right) dx \,;$$

$$\int_{x^2}^{x+1} 2xy\,dy = 2x \int_{x^2}^{x+1} y\,dy = \cancel{2}x \frac{y^2}{\cancel{2}} \Big|_{x^2}^{x+1} = x(x+1)^2 - x(x^2)^2$$

$$\int_0^1 \left((x^2+2x+1)x - x(x^4) \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 + 2x^2 + x - x^5 \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3+8+6-2}{12} = \frac{\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{12}_{\,4}} = \frac{5}{4}$$

- $f(x,y) = x+y \qquad A = \{0 \le x \le 1,\ 2x^3 \le y \le 2\sqrt{x}\}$

$$\iint_A (x+y) = \int_0^1 \left(\int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} (x+y)\,dy \right) dx \,;$$

$$\int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} (x+y)\,dy = x \int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} dy + \int_{2x^3}^{2\sqrt{x}} y\,dy = xy \Big|_{2x^3}^{2\sqrt{x}} + \frac{y^2}{2} \Big|_{2x^3}^{2\sqrt{x}} =$$

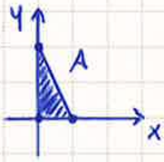
$$= x\,2\sqrt{x} - x\,2x^3 + \frac{\cancel{4}^2 x}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{4}^2 x^6}{\cancel{2}} = 2x^{3/2} - 2x^4 + 2x - 2x^6$$

$$\int_0^1 (2x^{3/2} - 2x^4 + 2x - 2x^6)\,dx = 2\int_0^1 x^{3/2} dx - 2\int_0^1 x^4\,dx + 2\int_0^1 x\,dx - 2\int_0^1 x^6\,dx =$$

$$2\,\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1}\Big|_0^1 - 2\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 - 2\frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{2}{5/2} - \frac{2}{5} + 1 - \frac{2}{7} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} + 1 - \frac{2}{7}$$

$$= \frac{14 - 10 + 35}{35} = \frac{39}{35}$$

- $f(x,y) = \sqrt{x} + 2xy \qquad A =$ triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$



A è sia verticalmente che orizzontalmente convesso

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le -2x+2\}$

$$\iint_A (\sqrt{x} + 2xy) = \int_0^1 \left(\int_0^{-2x+2} (\sqrt{x} + 2xy)\,dy \right) dx \,;$$

$$\int_0^{-2x+2} (\sqrt{x} + 2xy)\,dy = \sqrt{x} \int_0^{-2x+2} dy + 2x \int_0^{-2x+2} y\,dy = \sqrt{x}\,y \Big|_0^{-2x+2} + \cancel{2}x \frac{y^2}{\cancel{2}} \Big|_0^{-2x+2} =$$

$$= \sqrt{x}(-2x+2) + x(-2x+2)^2 = -2x^{3/2} + 2\sqrt{x} + x(4x^2 - 8x + 4)$$

$$\int_0^1 (-2x^{3/2} + 2x^{1/2} + 4x^3 - 8x^2 + 4x)\,dx = -2\int_0^1 x^{3/2} dx + 2\int_0^1 x^{1/2} dx + 4\int_0^1 x^3 dx - 8\int_0^1 x^2 dx + 4\int_0^1 x\,dx =$$

$$= -2\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1}\Big|_0^1 + 2\frac{x^{1/2+1}}{1/2+1}\Big|_0^1 + \cancel{4}\frac{x^4}{\cancel{4}}\Big|_0^1 - 8\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \cancel{4}^2\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 = \frac{-2}{5/2} + \frac{2}{3/2} + 1 - \frac{8}{3} + 2$$

$$= -\frac{4}{5} + \frac{4}{3} + 3 - \frac{8}{3} = \frac{45 - 20 - 12}{15} = \frac{13}{15}$$

• Cambiamenti di coordinate notevoli

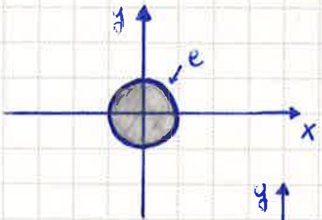
- **Coordinate polari**: Questo cambiamento di variabile viene usato per integrare su insiemi che presentano una simmetria radiale rispetto ad un punto. Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. La funzione che esprime le coordinate polari centrate in (x_0, y_0) dei punti del piano è $\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\Phi(\rho, \vartheta) = (x_0 + \rho\cos\vartheta,\ y_0 + \rho\sin\vartheta)$

La matrice Jacobiana di Φ è $J\Phi(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$ quindi il modulo del determinante è $|\det J\Phi(\rho,\vartheta)| = |\rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta| = |\rho| = \rho$. Nel caso in cui $(x_0, y_0) = (0,0)$ si ha che $(x,y) = \Phi(\rho,\vartheta) = (\rho\cos\vartheta,\ \rho\sin\vartheta)$.

Osservazione

Per $\rho = 0$ $\det J\Phi = 0$, inoltre $\Phi(\rho, 0) = \Phi(\rho, 2\pi)$ $\forall \rho \geq 0 \Rightarrow \Phi$ non biunivoca! Tuttavia siccome $\{0\} \times [0, 2\pi]$ e $[0, +\infty) \times \{2\pi\}$ sono trascurabili in $\mathbb{R}^2$ (sono rispettivamente un segmento e una retta) queste due "condizioni" non influiscono sull'utilizzo di questo cambiamento di variabile.

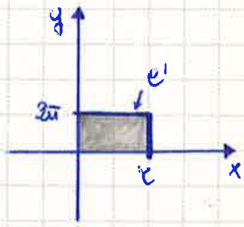
Esempio: Area del cerchio di raggio r $\equiv$ misura del sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{R}^2$ a forma di cerchio e di raggio r (*) $\Rightarrow$ integrale doppio



$$|C| = \iint_C 1\,dx\,dy \quad \text{dove } C : x^2 + y^2 \leq r^2$$

$$|C| = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy \right) dx = \ ?$$

Usando le coordinate polari: $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & 0 \leq \rho \leq r \\ y = \rho\sin\vartheta & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases}$



$$\text{Area} = |C'| = \iint_{C'} |\det J\Phi| = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{r} \rho\, d\rho \right) d\vartheta =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \right) \left(\int_0^{r} \rho\, d\rho \right) = \vartheta \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{r} = (2\pi - 0) \cdot \left(\frac{r^2}{2} - 0 \right)$$

$$= \cancel{2}\pi \cdot \frac{r^2}{\cancel{2}} = \pi \cdot r^2$$

(*) È chiaro che le misure di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ corrispondenti a figure geometriche note, non sono altro che le aree di quelle figure geometriche. Ricordiamo che, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, la sua misura si indica con $|A|$ o $m(A)$ e nel caso in cui si voglia specificarne la dimensione, con $m_n(A)$.

INTEGRALI TRIPLI

① $f: I \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è a scala se costante sui rettangoli
$f: I \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è a scala se costante sui parallelepipedi

- Per parlare degli integrali tripli non bisogna far altro che iterare il discorso fatto con gli integrali doppi, con le dovute modifiche.
Sia $f: I \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dove $I = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$. Diciamo che la suddivisione del sottoinsieme I indotta dai punti $\{x_0, x_1, \dots x_n\}$, $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ e $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ e dalle costanti $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ è adattata ad f (e diciamo che f è una funzione a scala) ① se $f(x,y,z) = c_{ijk}$ $\forall (x,y,z) \in (x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1}) \times (z_k, z_{k+1})$ con $i = 0,1,\dots,n$ e $j = 0,1,\dots,n$ e $k = 0,1,\dots n$. Detto R_{ijk} il sottoinsieme $(x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1}) \times (z_k, z_{k+1})$ con $i = 0,1,\dots,n$, $j = 0,1,\dots,n$, $k = 0,1,\dots,n$ chiameremo **integrale triplo** di f su I il numero reale $\iiint_I f = \sum R_{ijk} \times c_{ijk}$

- Anche per una generica funzione $f: I = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \to \mathbb{R}$ possiamo introdurre due insiemi di funzioni a scala, con le maggioranti e le minoranti di f e possiamo concludere che f è integrabile secondo Riemann su I se integrale superiore ed inferiore di f su I coincidono. In simboli:

$$S^+_f = \{ h \in S(I) : f(x,y,z) \leq h(x,y,z) \ \forall (x,y,z) \in I = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \}$$

$$S^-_f = \{ g \in S(I) : g(x,y,z) \leq f(x,y,z) \ \forall (x,y,z) \in I = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] \}$$

$$\underline{\iiint_I} f = \sup \left\{ \iiint_I g : g \in S^-_f \right\} \ ; \ \overline{\iiint_I} f = \inf \left\{ \iiint_I h : h \in S^+_f \right\}$$

$$\underline{\iiint_I} g = \overline{\iiint_I} h \implies f \text{ Riemann integrabile}$$

- Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e sia χ_Ω una funzione così definita: $\chi_\Omega = \begin{cases} 1 & \forall (x,y,z) \in \Omega \\ 0 & \forall (x,y,z) \notin \Omega \end{cases}$
Si dice misura di Ω l'integrale secondo Riemann di χ_Ω su $\mathbb{R}^3 \supseteq \Omega$
$m(\Omega) = |\Omega| = \iiint_{\mathbb{R}^3} \chi_\Omega$. Le misure di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ corrispondenti a solidi geometrici noti, non sono altro che i volumi di quei solidi geometrici.

- Hanno misura nulla in $\mathbb{R}^3$ e sono quindi trascurabili tutti gli insiemi trascurabili in $\mathbb{R}^2$ e quindi punti, segmenti, rette, semirette, sostegni di curve parametriche regolari, archi di curve, superfici e parti di esse; hanno inoltre misura nulla
  - l'unione di un numero finito di insiemi di misura nulla
  - l'intersezione di insiemi di misura nulla
  - sottoinsiemi di insiemi con misura nulla

[Una superficie è il grafico di una funzione continua di due variabili]

- **Proprietà**: Valgono tutte le proprietà e i teoremi enunciati a pag. 5 e 6 e validi per gli integrali doppi in particolare ricordiamo la linearità, la positività, l'additività rispetto al dominio dell'integrale triplo. Ricordiamo anche che se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato non vuoto $\implies$ [Ω misurabile $\iff$ $|\partial\Omega| = 0$]. Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e sia P un qualsiasi parallelepipedo contenente Ω. Se $\tilde{f}$ è la funzione così definita: $\tilde{f} \begin{cases} f & \forall (x,y,z) \in \Omega \\ 0 & \forall (x,y,z) \notin \Omega \end{cases}$ $\implies$ [$\tilde{f}$ integrabile su $\mathbb{R}^3 \iff f$ integrabile su P]. Infine
Sia $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ limitata. Se f è continua in $\Omega \implies f$ Riemann-integrabile su Ω.

17

2) B Integrazione per strati paralleli al piano xz

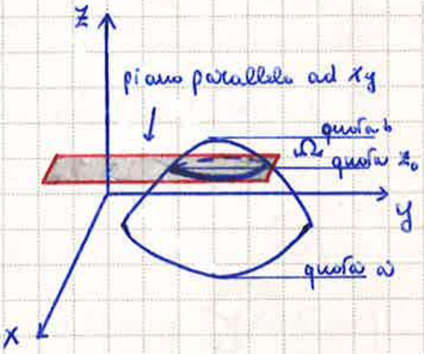
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$; $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le y \le b,\ (x,z) \in \Omega_y\}$, dove $\Omega_y = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Omega\}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Supponiamo che Ω_y sia misurabile in $\mathbb{R}^2$ $\forall y \in [a,b]$. Allora

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\iint_{\Omega_y} f(x,y,z)\,dx\,dz\right] dy$$

2) C Integrazione per strati paralleli al piano yz

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$; $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ (y,z) \in \Omega_x\}$, dove $\Omega_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Omega\}$ e $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata. Supponiamo che Ω_x sia misurabile in $\mathbb{R}^2$ $\forall x \in [a,b]$. Allora

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\iint_{\Omega_x} f(x,y,z)\,dy\,dz\right] dx$$



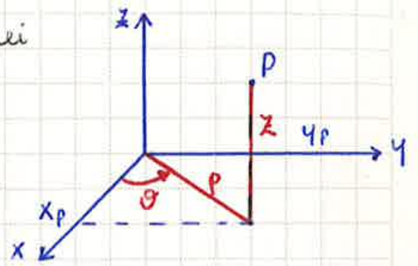
N.B. Fissato un punto $z_0 \in [a,b]$ (y_0 o x_0 rispettivamente) l'intersezione fra Ω e il piano $z = z_0$ ($y = y_0$, $x = x_0$ rispettivamente) è una sezione non vuota di Ω giacente su un piano parallelo al piano xy (xz o yz rispettivamente). È così giustificata la denominazione di "integrazione per strati paralleli ad un piano" (xy, xz e yz rispettivamente)

- **Proprietà**: Sia $f(x,y,z): I \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.c. $f(x,y,z) = g(x)\,h(y)\,i(z)$ e siano $g(x)$ integrabile su $[a,b]$, $h(y)$ integrabile su $[c,d]$, $i(z)$ integrabile su $[e,f]$. Allora $f(x,y,z)$ è integrabile su $I = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ e si ha che
$$\iiint_I f(x,y,z) = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right)\left(\int_e^f i(z)\,dz\right)$$

- **Teorema del cambiamento di variabile (negli integrali tripli)**: Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ aperti misurabili, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata su Ω e sia inoltre $\Phi: \Omega' \to \Omega$ una funzione tale che: Φ sia biiettiva, di classe C^1 e con $\det J_P \Phi \neq 0$ $\forall P \in \Omega'$. Allora
$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega'} f(\Phi(u,v,w))\,|\det J\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$$
La funzione Φ è quella che produce il cambiamento di variabili, detto anche cambiamento di coordinate. Si pone $(x,y,z) = \Phi(u,v,w)$ e nell'integrale di sinistra si sostituiscono $f(x,y,z)$ con $f(\Phi(u,v,w))$, il dominio Ω con Ω' e $dx\,dy\,dz$ con $|\det J\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw$

continua →

- **Coordinate cilindriche**: Sia $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. La funzione che esprime le coordinate cilindriche centrate in (x_0, y_0, z_0), con asse parallelo all'asse z, dei punti dello spazio è $\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da



$\Phi(\rho, \vartheta, z) = (x_0 + \rho\cos\vartheta,\ y_0 + \rho\sin\vartheta,\ z)$. La matrice jacobiana di Φ è $J\Phi(\rho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dopo gli opportuni calcoli, si trova che $|\det J\Phi(\rho, \vartheta, z)| = |\rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta| = \rho$

OSSERVAZIONE: Per $\rho = 0$ $\det J\Phi = 0$, inoltre $\underbrace{\Phi(\rho, 0, z) = \Phi(\rho, 2\pi, z)}_{\Rightarrow \text{ non biiettiva}}$ $\forall \rho \geq 0$ e $z \in \mathbb{R}$. Tuttavia $\underbrace{\{0\} \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}}_{\rho = 0}$, $[0, +\infty) \times \{2\pi\} \times \mathbb{R}$ sono insiemi trascurabili in $\mathbb{R}^3$, dunque questi "punti" non influiscono sull'utilizzo di questo cambiamento di variabili.

Nel caso in cui $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ si ha che $(x, y, z) = \Phi(\rho, \vartheta, z) = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, z)$. Questo cambiamento di variabile viene utilizzato per integrare su cilindri, coni, paraboloidi. In modo del tutto analogo si introducono le coordinate cilindriche con asse parallelo all'asse y o all'asse x.

QUADRICHE (Brevi richiami)

$$f(x,y,z) = \underbrace{\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2}}_{\text{forma quadratica su } \mathbb{R}^3} + \underbrace{2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z}_{\text{Termini lineari}} + \underbrace{a_{44}}_{\text{Termine noto}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} = B \text{ matrice completa} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = A \text{ matrice dei termini di } 2° \text{ grado}$$

- $rk(B) = 4$ → Autovalori di A $(\pm\ \pm\ \mp)$ → $\det B < 0$: Iperboloide a 2 falde $x^2/a^2 + y^2/b^2 + 1 = z^2/c^2$
  → $\det B > 0$: Iperboloide a 1 falda $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 + z^2/c^2$
- $rk(B) = 4$ → Autovalori di A $(\pm\ \pm\ 0)$ Paraboloide ellittico $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 2z$
  → Autovalori di A $(\pm\ \mp\ 0)$ Paraboloide iperbolico $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 2z$
- $rk(B) = 3$ → Autovalori di A $(\pm\ \pm\ \pm)$ Cono improprio 2° ordine $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$
  → Autovalori di A $(\pm\ \pm\ \mp)$ Cono proprio 2° ordine $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z^2/c^2$
- $rk(B) = 3$ → Autovalori di A $(\pm\ \pm\ 0)$ Cilindro ellittico $x^2/a^2 + y^2/b^2 = \pm 1$
  → Autovalori di A $(\pm\ \mp\ 0)$ Cilindro iperbolico $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
  → Autovalori di A $(\pm\ 0\ 0)$ Cilindro parabolico $y^2 = 2px$

- Esempio (integrale triplo)

Calcolare il volume della sfera di raggio R $\Rightarrow$ misura di $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$

Ω: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$

Uso le coordinate sferiche $\rightarrow \begin{cases} x = \rho \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\vartheta \end{cases}$ $\quad 0 \le \rho \le R$, $0 \le \vartheta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$|\det J\,\Phi(\rho,\vartheta,\varphi)| = \rho^2 \sin\vartheta$

Volume sfera: $\int_\Omega 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho^2 \sin\vartheta \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\vartheta \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi$

$= \left(\int_0^R \rho^2 d\rho\right)\left(\int_0^\pi \sin\vartheta \, d\vartheta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) = \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R \cdot (-\cos\vartheta)\Big|_0^\pi \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} =$

$= \left(\frac{R^3}{3} - 0\right)(-\cos\pi + \cos 0)\cdot(2\pi - 0) = 2\pi \cdot \frac{R^3}{3}(1+1) = \frac{4}{3}\pi R^3$

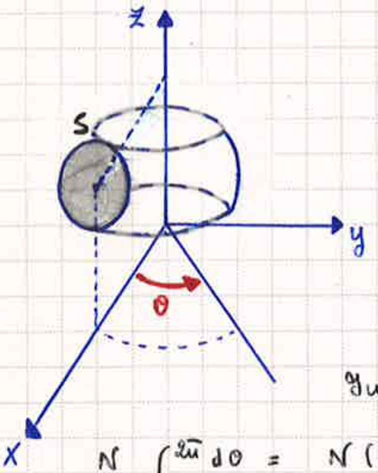
- **Massa e baricentro** (Interpretazione fisica dell'integrale triplo)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ non vuoto e $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione densità di massa in Ω.

La massa di Ω è il numero reale $M(\Omega) = \int_\Omega \underbrace{\rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}_{\text{densità} \cdot \text{volume}}$. Se la densità di massa è costante in Ω allora $M(\Omega) = \rho \int_\Omega dx\,dy\,dz$. Il baricentro (o centro di massa) è il punto $B(x_B, y_B, z_B)$ dove: $x_B = \frac{1}{M(\Omega)} \int x \cdot \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$;

$y_B = \frac{1}{M(\Omega)} \int_\Omega y \cdot \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$; $\quad z_B = \frac{1}{M(\Omega)} \int z \cdot \rho(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$.

- **Volume di un solido di rotazione** (Interpretazione geometrica dell'integrale triplo)



Consideriamo un sottoinsieme non vuoto S del piano xz, con $x \ge 0$. Vogliamo determinare il volume di Ω, ottenuto dalla rotazione completa di S attorno all'asse z. In coordinate cilindriche si ha che $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \\ z = t \end{cases}$ $\quad \rho \ge 0$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$, $t \in \mathbb{R}$. Il volume di Ω sarà dato dalla sua misura, ossia $\int_\Omega 1\, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho\, d\vartheta\, d\varphi$

Integrando per strati si avrà $\int_0^{2\pi}\left(\int_S \rho\, d\rho\, dt\right) d\vartheta = \int_0^{2\pi} N \, d\vartheta =$ $N \int_0^{2\pi} d\vartheta = N(2\pi - 0) = 2\pi \cdot N$ dove $N = \iint_S \rho \, d\rho\, dt$. Ma nel semipiano xz cui S appartiene $\vartheta = 0 \Rightarrow x = \rho$ quindi $N = \iint_S x\, dx\, dz \Rightarrow$ Volume di $\Omega = 2\pi \iint_S x\, dx\, dz$

Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti. Allora esistono $a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b$ tali che γ è regolare in ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ $\forall i=0,1,\ldots,k-1$.

Osservazione: [Possiamo anche dire che $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ è regolare a tratti se valgono i seguenti fatti:
1) γ è derivabile in $[a,b]$ tranne che in un numero finito di punti
2) $\gamma'(t)\neq 0$ in tutti i punti in cui è derivabile (quindi è eventualmente $=0$ solo nel numero finito di punti in cui non è derivabile
3) Nei punti in cui non è derivabile, $\gamma(t)$ possiede le derivate destra e sinistra]

- Sia $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una curva parametrica. Diciamo che γ è **chiusa** se $\gamma(a)=\gamma(b)$

- Siano $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ e $\delta:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ due curve parametriche. Sia poi α una funzione così definita: $\alpha:[c,d]\to[a,b]$, biiettiva, di classe C^1 su un aperto contenente $[c,d]$ (e quindi di classe C^1 su $[c,d]$), tale che $\alpha'(s)\neq 0$ $\forall s\in[c,d]$.

Osservazione: [Osserviamo che $\alpha'(s)$ ha sempre lo stesso segno perché se esistessero s_1, s_2 t.c. $\alpha'(s_1)>0$ e $\alpha'(s_2)<0$, allora ci sarebbe un $\bar{s}$, $s_1<\bar{s}<s_2$ in cui per il Teorema di esistenza degli zeri (essendo $\alpha'(s)$ continua (perché $\alpha(s)$ di classe C^1)) $\alpha'(\bar{s})=0$, ma ciò non è possibile perché $\alpha'(s)\neq 0$ $\forall s\in[c,d]$
Quindi o si verifica che $\alpha'(s)>0$ $\forall s\in[c,d]$ (strettamente crescente)
oppure si verifica che $\alpha'(s)<0$ $\forall s\in[c,d]$ (strettamente decrescente)]

Si dice allora che γ e δ **differiscono per un cambio di parametrizzazione** se $\delta=\gamma\circ\alpha$ cioè se $\delta(s)=\gamma(\alpha(s))$, dove δ,γ,α sono le funzioni sopra definite.

- Se $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$; $\delta:[c,d]\to\mathbb{R}^n$; $\alpha:[c,d]\to[a,b]$, α biiettiva, di classe C^1 su I contenente $[c,d]$, tale che $\alpha'(s)\neq 0$ e $\delta(s)=\gamma(\alpha(s))$ allora valgono i seguenti fatti:
1) γ e δ hanno lo stesso sostegno
2) γ è semplice $\Leftrightarrow$ δ è semplice
3) γ è derivabile $\Leftrightarrow$ δ è derivabile e si ha che $\delta'(s)=\gamma'(\alpha(s))\cdot\alpha'(s)$
4) γ è regolare $\Leftrightarrow$ δ è regolare
5) γ è chiusa $\Leftrightarrow$ δ è chiusa

Infine si ha che:
A) Se $\alpha'(s)>0$ $\forall s\in[c,d]$ $\Rightarrow$ γ e δ inducono lo **stesso verso di percorrenza** sul loro comune sostegno e γ e δ si dicono **equivalenti**
B) se $\alpha'(s)<0$ $\forall s\in[c,d]$ $\Rightarrow$ γ e δ inducono **versi di percorrenza opposti** sul loro comune sostegno.

- Sia γ un arco di curva parametrica regolare, $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$
$\Rightarrow$ γ è rettificabile e la sua **lunghezza d'arco** vale:
$$L(\gamma)=\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$$

- Esempio: $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$
$t\mapsto(\cos t,\sin t,3t)$ (Elica cilindrica)
$\exists\ \gamma'(t)=(-\sin t,\cos t,3)\neq\vec{0}\ \forall t$ e continua $\Rightarrow$ $\gamma(t)$ è regolare dunque rettificabile
$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+9}=\sqrt{10}$
$$\ell(\gamma)=\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{10}\,dt=\sqrt{10}\int_0^{2\pi}dt=\sqrt{10}\cdot t\Big|_0^{2\pi}=2\pi\sqrt{10}$$

(Essendo $\alpha'(s)>0$ posso trasportarlo nel modulo)

Quindi $\displaystyle\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\gamma(\alpha(s)))\,\|\gamma'(\alpha(s))\|\,\alpha'(s)\,ds = \int_e^d f(S(s))\,\underbrace{\|\gamma'(\alpha(s))\,\alpha'(s)\|}_{\|S'(s)\|}\,ds$

Ovvero $\displaystyle\int_\gamma f\,ds = \int_S f(S(s))\,\|S'(s)\|\,ds = \int_S f\,ds$ cvd

2) Se $\alpha'(s)<0$ in $[e,d]$ $\Rightarrow$ α è strettamente decrescente in $[e,d]$ e quindi α^{-1} strettamente decrescente in $[a,b]$, da cui, essendo $\alpha^{-1}:[a,b]\to[e,d]$, $\alpha^{-1}(a)=d$ e $\alpha^{-1}(b)=e$. Quindi $\displaystyle\int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\gamma(\alpha(s)))\,\|\gamma'(\alpha(s))\|\,\alpha'(s)\,ds =$

$$= \int_{\alpha^{-1}(a)}^{\alpha^{-1}(b)} f(\gamma(\alpha(s)))\,\|\gamma'(\alpha(s))\|\,(-|\alpha'(s)|)\,ds = -\int_d^e f(S(s))\,\underbrace{\|\gamma'(\alpha(s))\cdot\alpha'(s)\|}_{\|S'(s)\|}\,ds$$

$$= -(-)\int_e^d f(S(s))\,\|S'(s)\|\,ds = \int_e^d f(S(s))\,\|S'(s)\|\,ds$$

Ovvero $\displaystyle\int_\gamma f\,ds = \int_S f\,ds$ cvd

• **Definizione:** Siano $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti. Siano $a=t_0<t_1<\ldots<t_k=b$ tali che γ è regolare in ogni intervallo $[t_i,t_{i+1}]$ $\forall i=0,1,\ldots,k-1$. Si chiama *integrale curvilineo (di prima specie) di f lungo γ* dove $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è una funzione continua, il numero reale

$$\int_\gamma f\,ds = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^{t_1} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt + \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt + \ldots + \int_{t_{k-1}}^{b} f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt.$$

In altre parole l'integrale curvilineo lungo una curva regolare a tratti è la somma degli integrali curvilinei lungo i tratti in cui la curva è regolare.

• **Integrale curvilineo di seconda specie (o integrale di linea):** Sia $\gamma:[a,b]\to A\subseteq\mathbb{R}^n$ una curva parametrica semplice e regolare e sia F un campo vettoriale continuo, (Un campo vettoriale è una funzione) $F:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Si chiama *integrale curvilineo (di seconda specie)* o *integrale di linea di F lungo γ* il numero reale $\displaystyle\int_\gamma F\cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$ (dove "." indica il prodotto scalare tra i vettori di $\mathbb{R}^n$) l'integrale di F lungo γ rappresenta, da un punto di vista fisico cioè non dipende dalla parametrizzazione in sé, ma dal verso indotto da essa. Del resto l'integrale di linea si calcola a partire da un versore, il cui verso cambia a seconda dell'orientamento della curva a cui il versore è tangente. Questo fatto è in perfetta sintonia con l'interpretazione fisica dell'integrale di linea, quale lavoro compiuto dal campo di forze nel trasferire la grandezza fisica da un punto all'altro: se si invertono punto di partenza e punto di arrivo, il lavoro è opposto.

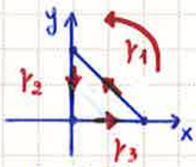
- **Definizione** Siano $\gamma : [a,b] \to A \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti. Siano $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ tali che γ è regolare in ogni intervallo $[t_i, t_{i+1}]$ $\forall i = 0, 1, \ldots, k-1$. Si chiama **integrale curvilineo (di seconda specie) di F lungo γ** dove $F : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale continuo, il numero reale

$$\int_\gamma F \cdot dP = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^{t_1} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt + \ldots + \int_{t_{k-1}}^{b} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

In altre parole l'integrale di linea lungo una curva regolare a tratti è la somma degli integrali curvilinei lungo i tratti su cui la curva è regolare.

- **Esempi** (integrali curvilinei)

- $F(x,y) = (\cos x, y)$. Integrare lungo il triangolo i cui vertici sono i punti $(1,0)$; $(0,1)$; $(0,0)$, in senso antiorario.



$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP \quad \text{(Per l'additività)}$$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = -\int_{-\gamma_1} F \cdot dP \quad \text{dove } -\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -t+1 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\int_{-\gamma_1} F \cdot dP = \int_0^1 (\cos t, -t+1) \cdot (1,-1)\, dt = \int_0^1 (\cos t + t - 1)\, dt = \int_0^1 \cos t\, dt + \int_0^1 t\, dt - \int_0^1 dt$$

$$= \sin t \Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - t\Big|_0^1 = \sin 1 - \cancel{\sin 0} + \frac{1}{2} - \cancel{0} - 1 + \cancel{0} = \sin 1 - \frac{1}{2}$$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = -\int_{-\gamma_2} F \cdot dP \quad \text{dove } -\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\int_{-\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 (1, t) \cdot (0,1)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \cancel{0} = \frac{1}{2}$$

SUPERFICI PARAMETRICHE

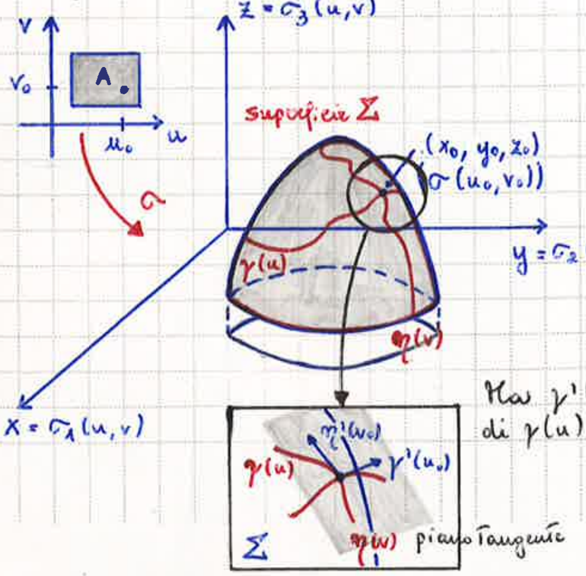
- Una **superficie parametrica** è una funzione $\sigma: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dove A è un aperto connesso per archi, che associa ad ogni punto $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ un punto (x,y,z) nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$ nel modo seguente: $x = \sigma_1(u,v)$; $y = \sigma_2(u,v)$; $z = \sigma_3(u,v)$
- Si chiama **sostegno di σ** l'immagine di σ. Quindi il sostegno di σ è l'insieme dei punti $\sigma(u,v)$ al variare di (u,v) in A cioè la **superficie Σ** in $\mathbb{R}^3$ i cui punti (x,y,z) sono funzioni di $(u,v) \in A$.
- Diciamo che σ è **semplice** se è iniettiva, ovvero $\forall (u_1,v_1) \neq (u_2,v_2) \Rightarrow \sigma(u_1,v_1) \neq \sigma(u_2,v_2)$ oppure se $\sigma(u_1,v_1) = \sigma(u_2,v_2) \Rightarrow (u_1,v_1) = (u_2,v_2)$
- Diciamo che σ è **regolare** se soddisfa queste due proprietà:
  1) σ è di classe C^1 su A (tutte le derivate esistono e sono continue $\forall (u,v) \in A$)
  2) $\forall (u,v) \in A$, la matrice Jacobiana $J_\sigma(u,v)$ ha rango massimo, cioè 2.

- Sia $\sigma: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v); \sigma_3(u,v))$ la **matrice Jacobiana** di σ nel generico punto (u,v) è:

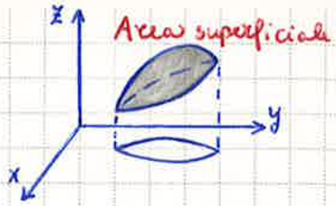
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \; , \; \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right) = J\sigma(u,v)$$

Se σ è regolare $\partial\sigma/\partial u\,(u,v)$ e $\partial\sigma/\partial v\,(u,v)$ (ovvero le due colonne della matrice jacobiana) sono linearmente indipendenti (in quanto il rango deve essere massimo)

- Sia $\sigma: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$ una superficie parametrica regolare. Fissato $(u_0,v_0) \in A$, se si considerano le funzioni $\gamma(u) = \sigma(u,v_0)$ e $\eta(v) = \sigma(u_0,v)$, si noterà che esse sono due curve parametriche; essendo σ regolare, esistono e sono continue le derivate $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$, dunque esistono e sono continue anche $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v_0) = \gamma'(u)$ e $\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v) = \eta'(v)$ (dunque anche $\gamma(u)$ e $\eta(v)$ sono regolari)
In particolare si avrà che
$\gamma'(u_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0,v_0)$ e $\eta'(v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0,v_0)$



Ma $\gamma'(u_0)$ e $\eta'(v_0)$ sono i vettori tangenti ai sostegni di $\gamma(u)$ e $\eta(v)$ in (u_0,v_0) e siccome tali vettori sono l.i.



- Sia $\sigma: K \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una calotta superficiale regolare
$\Rightarrow$ è possibile calcolare l'area $A(\sigma(K))$ del sostegno della calotta
$$A(\sigma(K)) = \iint_K \| N(u,v) \| \, du \, dv$$

- Esempio $\sigma: [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$
$(u,v) \longmapsto (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ (sfera di raggio 1)

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\cos v \sin u & \cos u \cos v & 0 \\ -\cos u \sin v & -\sin u \sin v & \cos v \end{vmatrix} = +k \begin{vmatrix} -\cos v \sin u & \cos u \cos v \\ -\cos u \sin v & -\sin u \sin v \end{vmatrix} + \cos v \begin{vmatrix} i & j \\ -\cos v \sin u & \cos u \cos v \end{vmatrix}$$

$$= (\sin^2 u \sin v \cos v + \cos^2 u \sin v \cos v) K + \cos v (i \cos u \cos v + j \cos v \sin u) =$$
$$= K \sin v \cos v (\sin^2 u + \cos^2 u) + i \cos^2 v \cos u + j \cos^2 v \sin u =$$
$$= i \cos^2 v \cos u + j \cos^2 v \sin u + K \sin v \cos v = (\cos^2 v \cos u, \cos^2 v \sin u, \sin v \cos v)$$

$$\| N(u,v) \| = \sqrt{\cos^4 v \cos^2 u + \cos^4 v \sin^2 u + \sin^2 v \cos^2 v} = \sqrt{\cos^4 v (\cos^2 u + \sin^2 u) + \sin^2 v \cos^2 v}$$
$$= \sqrt{\cos v + \cos^2 v \sin^2 v} = \sqrt{\cos^2 v (\cos^2 v + \sin^2 v)} = \sqrt{\cos^2 v} = \cos v$$

$$\text{Area (sfera)} = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, du \, dv = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v \, dv \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, du = \sin v \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot u \Big|_0^{2\pi} =$$
$$(1 - (-1)) \cdot (2\pi - \cancel{0}) = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

Infatti 4π è l'area superficiale di una sfera di raggio 1

- Siano $\sigma: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\tilde{\sigma}: B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ due superfici parametriche, dove A e B sono due aperti connessi per archi). Sia poi α una funzione così definita:
$\alpha: B \to A$, biettiva, di classe C^1 tale che $|J_\alpha(u,v)| \neq 0 \ \forall (u,v) \in B$.
Si dice allora che σ e $\tilde{\sigma}$ differiscono per un cambio di parametrizzazione se $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \alpha$ cioè se $\tilde{\sigma}(u,v) = \sigma(\alpha(u,v))$. Valgono i seguenti fatti:
1) σ e $\tilde{\sigma}$ hanno lo stesso sostegno
2) σ è regolare $\Leftrightarrow$ $\tilde{\sigma}$ è regolare
3) σ è semplice $\Leftrightarrow$ $\tilde{\sigma}$ è semplice
4) A) Se $\det J_\alpha(u,v) > 0 \ \forall (u,v) \in B$ $\Rightarrow$ σ e $\tilde{\sigma}$ inducono lo stesso orientamento sul loro comune sostegno e si dicono equivalenti
B) Se $\det J_\alpha(u,v) < 0 \ \forall (u,v) \in B$ $\Rightarrow$ σ e $\tilde{\sigma}$ inducono orientamenti opposti sul loro comune sostegno

Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie è un caso particolare di integrale superficiale infatti: considerata la funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continua con $f = F \cdot n$ e $n = \frac{N(u,v)}{\| N(u,v) \|}$ (= $n(\sigma(u,v))$) si ha che $\int_\sigma f = \int_K f(\sigma(u,v)) \| N(u,v) \| \, du\, dv =$

$$\int_K (F \cdot n)(\sigma(u,v)) \| N(u,v) \| \, du\, dv = \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot \left(\frac{N(u,v)}{\cancel{\| N(u,v) \|}} \right) du\, dv \cdot \cancel{\| N(u,v) \|} =$$

$$\int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v) \, du\, dv = \int F \cdot n \quad \text{cvd.}$$

Ovviamente "$\cdot$" indica il prodotto scalare fra due vettori di $\mathbb{R}^3$. Simbolicamente $\int_\sigma F \cdot n$ si può anche indicare con $\int_\Sigma F \cdot n$, $\int_\sigma F \cdot n \, d\sigma$, $\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma$

- **Teorema (Dipendenza del flusso di un campo dall'orientamento indotto dalla parametrizzazione sul sostegno):** Siano $\sigma : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $\tau : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ due calotte superficiali regolari e sia poi $\alpha : B \to A$ un cambio di parametrizzazione regolare, biunivoco con $\det J\alpha(u,v) \neq 0 \ \forall (u,v) \in B$ e tale che $\tau = \sigma \circ \alpha$.
Sia infine $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo. Allora valgono i seguenti fatti:

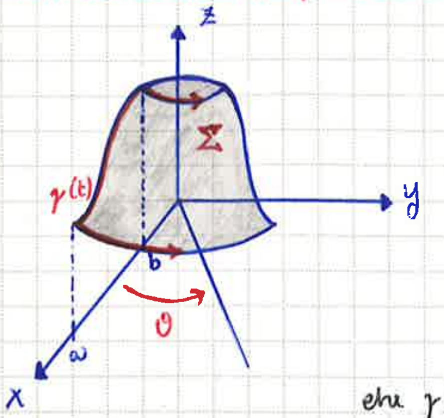
- Se σ e τ differiscono per un cambio di parametrizzazione α e inducono sul loro comune sostegno lo stesso orientamento (σ e τ sono cioè equivalenti) allora $\int_\sigma F \cdot n = \int_\tau F \cdot n$
- Se σ e τ differiscono per un cambio di parametrizzazione α e inducono sul loro comune sostegno orientamenti opposti, allora $\int_\sigma F \cdot n = -\int_\tau F \cdot n$

- **Definizione** Un insieme si dice **convesso** se per ogni coppia di punti il segmento che li unisce è interamente contenuto nell'insieme stesso. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$; se $\forall x, y \in A$ (dove $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$) e $\forall t \in [0,1]$, anche $(t-1)x + ty \in A$ allora A è convesso

insieme convesso

insieme non convesso

• Area di una superficie di rotazione:



Consideriamo una curva parametrica $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ che associ ad ogni $t \longmapsto (\gamma_1(t), 0, \gamma_2(t))$ tale da essere contenuta nel semipiano xz con $x \geq 0$. Vogliamo determinare l'area di Σ ottenuta dalla rotazione completa di $\gamma(t)$ attorno all'asse z. Ora supponendo che $\gamma(t)$ ruoti con un angolo $\vartheta \in [0, 2\pi]$ si avrà che la funzione $\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ il cui sostegno è Σ, è definita da $(t, \vartheta) \longmapsto (\gamma_1(t)\cos\vartheta, \gamma_1(t)\sin\vartheta, \gamma_2(t))$

Dunque il vettore $N(t, \vartheta)$ perpendicolare al piano tangente alla superficie parametrica in ogni suo punto sarà dato da $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t, \vartheta) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}(t, \vartheta)$. Tosto che $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), 0, \gamma_2'(t))$ si avrà che $N(t, \vartheta) =$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \gamma_1'(t)\cos\vartheta & \gamma_1'(t)\sin\vartheta & \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1(t)\sin\vartheta & \gamma_1(t)\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \gamma_1'(t)\cos\vartheta & \gamma_1'(t)\sin\vartheta \\ -\gamma_1(t)\sin\vartheta & \gamma_1(t)\cos\vartheta \end{vmatrix} - \gamma_2'(t) \begin{vmatrix} i & j \\ -\gamma_1(t)\sin\vartheta & \gamma_1(t)\cos\vartheta \end{vmatrix}$$

$$= k\,(\gamma_1(t)\gamma_1'(t)\cos^2\vartheta + \gamma_1(t)\gamma_1'(t)\sin^2\vartheta) - i\,(\gamma_1(t)\gamma_2'(t)\cos\vartheta) - j\,(\gamma_2'(t)\gamma_1(t)\sin\vartheta)$$

$$= k\,\gamma_1(t)\gamma_1'(t)\,(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) - i\,\gamma_1(t)\gamma_2'(t)\cos\vartheta - j\,\gamma_2'(t)\gamma_1(t)\sin\vartheta$$

$$= (-\gamma_1(t)\gamma_2'(t)\cos\vartheta,\ -\gamma_2'(t)\gamma_1(t)\sin\vartheta,\ \gamma_1(t)\gamma_1'(t)$$

$$\|N(t, \vartheta)\| = \sqrt{\gamma_1^2(t)\gamma_2'^2(t)\cos^2\vartheta + \gamma_2'^2(t)\gamma_1^2(t)\sin^2\vartheta + \gamma_1^2(t)\gamma_1'^2(t)} =$$

$$= \sqrt{\gamma_1^2(t)\gamma_2'^2(t)\,(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) + \gamma_1^2(t)\gamma_1'^2(t)} = \sqrt{\gamma_1^2(t)\,(\gamma_2'^2(t) + \gamma_1'^2(t))}$$

$$= \gamma_1(t) \cdot \sqrt{(\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t))}$$

Ma essendo $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), 0, \gamma_2'(t))$ si avrà che $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \cancel{0} + \gamma_2'(t)}$

Dunque $\|N(t, \vartheta)\| = \gamma_1(t)\,\|\gamma'(t)\|$

37

$$\int F\cdot n = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(11u^2+12uv+v^2)\,du\,dv = 11\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u^2\,du\,dv + 12\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}uv\,du\,dv + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}v^2\,du\,dv$$

$$= 11\left(\int_{-1}^{1}u^2\,du\right)\left(\int_{-1}^{1}1\,dv\right) + 12\left(\int_{-1}^{1}u\,du\right)\left(\int_{-1}^{1}v\,dv\right) + \left(\int_{-1}^{1}1\,du\right)\left(\int_{-1}^{1}v^2\,dv\right) =$$

$$= 11\,\frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\cdot v\Big|_{-1}^{1} + 12\,\frac{u^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\cdot\frac{v^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + u\Big|_{-1}^{1}\cdot\frac{v^3}{3}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 11\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)(1-(-1)) + 12\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) + (1-(-1))\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= 11\cdot 2\cdot\frac{2}{3} + \cancel{0} + 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{44}{3}+\frac{4}{3} = \frac{\cancel{48}\,16}{\cancel{3}\,1} = 16$$

- $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ (x,y,z)\mapsto(x,\ zy^2,\ yz)$

$\Sigma:\{(x-1)^2+y^2=1,\quad 1\le z\le 2\}$ Orientata con N uscente. Passiamo ora alla forma parametrizzata della superficie dopodiché

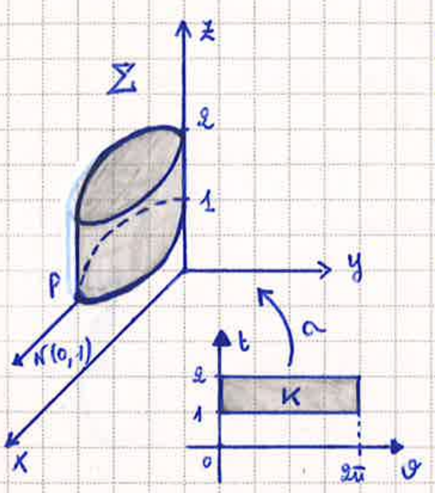
utilizziamo le coordinate polari

$$\begin{cases} x = 1+\cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta, \\ z = t \end{cases}\quad \begin{matrix} 0\le\vartheta\le 2\pi \\ 1\le t\le 2\end{matrix} \Rightarrow \Sigma:\{(\cancel{1}+\cos\vartheta-\cancel{1})^2+\sin^2\vartheta = 1,\ 1\le t\le 2\}$$

dunque $\alpha:[0,2\pi]\times[1,2]\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ (\vartheta,t)\mapsto(1+\cos\vartheta,\ \sin\vartheta,\ t)=\Sigma$

con $[0,2\pi]\times[1,2]=K$

$$N(\vartheta,t) = \begin{vmatrix} i & j & K \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} i & j \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta\end{vmatrix} = i\cos\vartheta+\sin\vartheta\,K = (\cos\vartheta,\sin\vartheta,0),$$ il vettore è orientato nel modo giusto?



Prendiamo il punto $(0,1)\in K$. $\alpha(0,1)=(2,0,1)=P$

$N(0,1)=(1,0,0)$ è uscente dal cilindro? Sì (metodo grafico)

(vedi pag. 30)

$F(\alpha(\vartheta,t)) = (1+\cos\vartheta,\ t\sin^2\vartheta,\ t\sin\vartheta)$

$$\int_\alpha F\cdot n = \int_K F(\alpha(\vartheta,t))\cdot(N(\vartheta,t))\,d\vartheta\,dt =$$

$$\int_K (1+\cos\vartheta,\ t\sin^2\vartheta,\ t\sin\vartheta)\cdot(\cos\vartheta,\sin\vartheta,0)\,d\vartheta\,dt =$$

$$\int_K(\cos\vartheta+\cos^2\vartheta+t\sin^3\vartheta)\,d\vartheta\,dt = \int_K\cos\vartheta\,d\vartheta\,dt + \int_K\cos^2\vartheta\,d\vartheta\,dt +$$

$$+\int_K t\sin^3\vartheta\,d\vartheta\,dt =$$

$$\left(\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_1^2 dt\right) + \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_1^2 dt\right) + \left(\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\cdot\underbrace{\sin\vartheta}_{(1-\cos^2\vartheta)}\,d\vartheta\right)\left(\int_1^2 t\,dt\right) =$$

$$\sin\vartheta\Big|_0^{2\pi}\cdot t\Big|_1^2 + \left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2\vartheta)}{2}\right)d\vartheta\right)\cdot t\Big|_1^2 + \left(\int_0^{2\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta - (-1)\int_0^{2\pi}-\cos^2\vartheta\,\sin\vartheta\,d\vartheta\right)\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$(0-\cancel{0})(2-1) + \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\vartheta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}2\cos(2\vartheta)\,d\vartheta\right](2-1) + \left[-\cos\vartheta\Big|_0^{2\pi} + \frac{\cos^3\vartheta}{3}\Big|_0^{2\pi}\right]\left(2-\frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\vartheta\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin(2\vartheta)\Big|_0^{2\pi} + \left(-(\cancel{1}-\cancel{1}) + \cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}(2\pi-0) + \frac{1}{4}(0-0) = \pi$$

- **Integrale curvilineo di 1^ specie - Applicazione pratica**

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrica regolare che rappresenti un cavo nello spazio e sia $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \rho(x,y,z)$ la funzione densità del cavo. Allora si ha che:

1) Massa del cavo $= M(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_\gamma \rho \, ds$

2) Coordinata x del baricentro del cavo $= x_B = \dfrac{1}{M(\gamma)} \int_\gamma x \rho \, ds$.

Se la densità del cavo è costante si ha che:

1) $M(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt = \rho(\gamma(t)) \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt = \rho \cdot L(\gamma)$

2) $x_B = \dfrac{1}{\rho \cdot L(\gamma)} \int_\gamma x \rho \, ds = \dfrac{1}{\cancel{\rho} \cdot L(\gamma)} \cancel{\rho} \int_\gamma x \, ds = \dfrac{1}{L(\gamma)} \int_\gamma x \, ds$

- **Integrale superficiale - Applicazione pratica**

Sia $\sigma : K \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrica semplice e regolare che rappresenti una lamina nello spazio e sia $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto \rho(x,y,z)$ la funzione densità della lamina. Allora si ha che

1) Massa della lamina $= M(\sigma) = \int_\sigma \rho \, d\sigma = \int_K \rho(\sigma(u,v)) \, \|N(u,v)\| \, du \, dv$

2) Coordinata x del baricentro $= x_B = \dfrac{1}{M(\sigma)} \int_\sigma x \rho \, d\sigma$

3) Coordinata y del baricentro $= y_B = \dfrac{1}{M(\sigma)} \int_\sigma y \rho \, d\sigma$

Se la densità della lamina è costante si ha che:

1) $M(\sigma) = \int_K \rho(\sigma(u,v)) \, \|N(u,v)\| \, du \, dv = \rho(\sigma(u,v)) \int_K \|N(u,v)\| \, du \, dv = \rho \cdot A(\sigma(K))$

2) $x_B = \dfrac{1}{\rho \cdot A(\sigma(K))} \int_\sigma x \rho \, d\sigma = \dfrac{1}{\cancel{\rho} \, A(\sigma(K))} \cancel{\rho} \int_\sigma x \, d\sigma = \dfrac{1}{A(\sigma(K))} \int_\sigma x \, d\sigma$

3) $y_B = \dfrac{1}{\rho \cdot A(\sigma(K))} \int_\sigma y \rho \, d\sigma = \dfrac{1}{\cancel{\rho} \, A(\sigma(K))} \cancel{\rho} \int_\sigma y \, d\sigma = \dfrac{1}{A(\sigma(K))} \int_\sigma y \, d\sigma$

- **Corollario:** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto con bordo con ∂A orientato positivamente e $F = (f_1, f_2)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 che soddisfa la seguente condizione: $\forall (x,y) \in A \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1$. Allora l'area di A è data da:

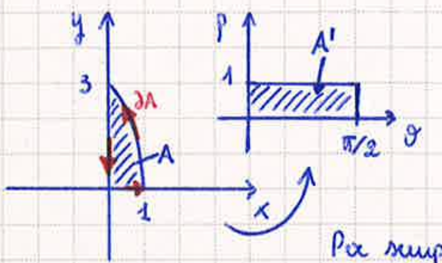
$$A(A) = m_2(A) = \int_A 1\,dx\,dy = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy = \int_{\partial A} F \cdot dP$$

- Esempio (Teorema di Green)

$$\int_{\partial A} \underbrace{\left[\left(e^{x^2} - y\right) dx + \left(\frac{x^4}{4} + e^y\right) dy \right]}_{F \cdot dP}$$

∂A bordo orientato positivamente di A con $A = \{(x,y) : 9x^2 + y^2 \leq 9,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$

$A = \{(x,y) : x^2 + y^2/9 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ / $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \left(e^{x^2} - y,\ \frac{x^4}{4} + e^y\right)$



$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\cancel{4}x^3}{\cancel{4}} - 1 = x^3 - 1$$

$$\int_{\partial A} F \cdot dP \underset{\downarrow}{=} \iint_A (x^3 - 1)\,dx\,dy$$

Per il teorema di Green

Per semplificare il dominio di integrazione, uso le coordinate ellitiche
$A' = \{(\rho, \vartheta) : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2\}$ $\quad \det J = 3\rho$

$\iint_A (x^3 - 1)\,dx\,dy \qquad x = \rho\cos\vartheta,\ y = 3\rho\sin\vartheta$; $\iint_{A'} \rho^3\cos^3\vartheta \cdot 3\rho\,d\rho\,d\vartheta = 3\left(\int_0^1 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos^3\vartheta\,d\vartheta\right) =$

$\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1 \cdot 3\left(\int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta \cos\vartheta\,d\vartheta\right) = 3\left(\frac{1}{5} - \cancel{0}\right)\left(\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta\right) = 3 \cdot \frac{1}{5}\left(\int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\,d\vartheta - \int_0^{\pi/2} \sin^2\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\right)$

$= \frac{3}{5}\left(\sin\vartheta\Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3\vartheta}{3}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{3}{5}\left((1 - \cancel{0}) - \left(\frac{1}{3} - \cancel{0}\right)\right) = \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = \frac{2}{5}$

Dunque $\iint_A (x^3 - 1)\,dx\,dy = \iint_{A'} (\rho^3\cos^3\vartheta - 1)\,3\rho\,d\rho\,d\vartheta = \iint_{A'} \rho^3\cos^3\vartheta \cdot 3\rho\,d\rho\,d\vartheta - \iint_{A'} 3\rho\,d\rho\,d\vartheta$;

$-\iint_{A'} 3\rho\,d\rho\,d\vartheta = -3\left(\int_0^1 \rho\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\vartheta\right) = -3\,\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 \cdot \vartheta\Big|_0^{\pi/2} = -3\left(\frac{1}{2} - \cancel{0}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \cancel{0}\right) = -\frac{3}{4}\pi$

$$\int_{\partial A} \left[\left(e^{x^2} - y\right) dx + \left(\frac{x^4}{4} + e^y\right) dy \right] = \frac{2}{5} - \frac{3}{4}\pi$$

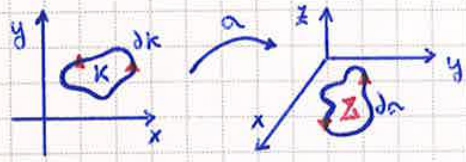
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 118

• Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto con bordo e sia $\sigma: K \to \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie parametrica che associ ad ogni $(x,y) \mapsto (x,y,0)$; Sia poi $F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,0) \mapsto (F_1, F_2, 0)$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & 0 \\ F_1 & F_2 & 0\end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} i & j \\ F_1 & F_2\end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} i & j\\ \partial_x & \partial_y\end{vmatrix} + k\begin{vmatrix}\partial_x & \partial_y \\ F_1 & F_2\end{vmatrix} = k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} i & j \\ 0 & 1\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 0\end{vmatrix} = 0i + 0j + 1k = (0,0,1)$$

$\int_{\partial\sigma} F \cdot dP = \int_\sigma \text{rot } F \cdot n$ per il teorema di Green (F è di classe C^1 su e $\partial\sigma$ è orientata positivamente quindi tutte le ipotesi sono rispettate)



Risulta però chiaro che $\partial K = \partial\sigma$ per come è stata definita σ e dunque

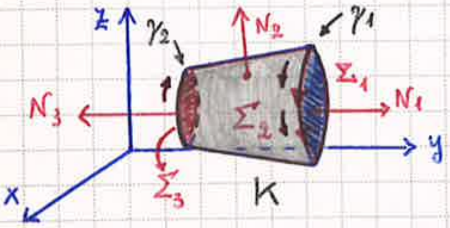
$$\int_{\partial K} F \cdot dP = \int_{\partial\sigma} F \cdot dP \underset{\text{per il Th di Green}}{=} \int_\sigma \text{rot } F \cdot n \underset{\text{è un int. di flusso}}{=} \int_K \left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)(0,0,1)\,dx\,dy$$

$$= \iint_K \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy \Rightarrow \int_{\partial K} F \cdot dP = \iint_K \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Abbiamo ritrovato il Teorema di Green

Osservazione: Il Teorema di Green può dunque essere considerato come un "caso particolare" del teorema di Stokes. Più precisamente, il teorema di Green è il teorema di Stokes nel caso in cui $\Sigma = \sigma(K)$ appartiene al piano xy.

• **Definizione:** Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^3$ si definisce **aperto con bordo** se la sua parte interna è non vuota ($\mathring{K} \neq \emptyset$), ed è chiuso e limitato (compatto), connesso per archi e la sua frontiera (∂K) è l'unione di un numero finito di calotte superficiali regolari aventi a due a due in comune al più sostegni di curve regolari a tratti. Un aperto con bordo K in $\mathbb{R}^3$ è **orientato positivamente** se le calotte che lo costituiscono sono orientate nel verso uscente da K.



- K non vuoto internamente, compatto e connesso
- $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ sono orientate in verso uscente da K (come si vede dai loro vettori normali N_1, N_2, N_3)
- $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{\gamma_1\}$ γ_1 curva parametrica : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- $\Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \{\gamma_2\}$ γ_2 curva parametrica : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

Nella figura sono stati orientati (positivamente) anche i bordi delle calotte (N.B. bordo orientato $\partial\sigma$ e superficie orientata Σ sono due concetti ben distinti)

• **Definizione:** Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots x$

Si chiama **divergenza di F** e si denota con **div F**, il campo scalare $\text{div } F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che misura la tendenza del campo vettoriale F a divergere o a convergere verso un punto dello spazio

$\text{div } F = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)$; la divergenza si può anche esprimere come il prodotto scalare di F per il gradiente:

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

- **Definizione**: Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Diciamo che F è **conservativo** se $\exists g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, di classe C^1 su Ω (e quindi differenziabile) tale che $\nabla g(x) = F(x)$ $\forall x \in \Omega$. Sia $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
$F(x)$ associa ad ogni $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$
mentre g associa ad ogni $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (g(x_1, x_2, \dots, x_n))$
$\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = f_1(x)$, $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = f_2(x)$, $\dots$, $\frac{\partial g}{\partial x_n}(x) = f_n(x)$ $\forall x \in \Omega$; $\nabla g(x) = F(x)$ $\forall x \in \Omega$
Si dice allora che g è un **potenziale di F su Ω**

Proprietà: se $\omega = f_1\, dx_1 + \dots + f_n\, dx_n$ allora (F campo conservativo $\iff$ ω è forma esatta)

- **Proprietà**: Se g è un potenziale di F su Ω $\Rightarrow$ $\forall k \in \mathbb{R}$, $g + k$ è ancora un potenziale di F su Ω. **Dimostrazione**: $g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è un potenziale di $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ su Ω
$\Rightarrow \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = f_i(x)$ $\forall x \in \Omega$, con $1 \le i \le n$. Ma $\frac{\partial(g(x)+k)}{\partial x_i} = \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} + \cancel{0}$
$\forall x \in \Omega$, $\forall i = 1, \dots, n$. Quindi $\frac{\partial(g(x)+k)}{\partial x_i} = f_i(x)$ $\forall x \in \Omega$ $\forall i = 1, \dots, n$

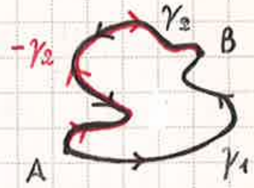
- **Proposizione**: Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto, non vuoto e **connesso (per archi)**, sia $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo, $g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un potenziale di F su Ω e $\gamma: [a,b] \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ una curva parametrica tale che $\gamma(a) = A$, $\gamma(b) = B$
$\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = g(B) - g(A)$ **Dimostrazione**: sia $h(t) = g(\gamma(t)) \Rightarrow h(t): [a,b] \to \mathbb{R}$
$h'(t) = (g(\gamma(t)))' = \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ ($h(t)$ di classe C^1 su (a,b))
$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b h'(t)\, dt = h(b) - h(a)$ (in quanto $h'(t)$ continua perchè $h(t)$ è di classe C^1 e non si "spezza" in un integrale improprio) $= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$
$= g(B) - g(A)$ cvd **Osservazione**: è da notare l'analogia con gli integrali definiti per cui si ha che $\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a)$ con G primitiva di f.

c) $\forall \gamma$ curva chiusa e regolare (eventualmente a tratti) con il sostegno contenuto in Ω si ha che $\int_\gamma F \cdot dP = \oint_\gamma F \cdot dP = 0$

Essendo le 3 proprietà equivalenti, si ha che $A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow A$

Dimostrazione $A \Rightarrow B$: vedi il Teorema a pag. 41

Dimostrazione $B \Rightarrow C$: Sia γ una curva chiusa. Dividiamone il sostegno in 2 parti (curve parametriche) γ_1 e γ_2: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$



$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{-\gamma_2} F \cdot dP$$

Siccome γ_1 e $-\gamma_2$ hanno gli stessi punti iniziale e finale, si ha che $\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{-\gamma_2} F \cdot dP$

da cui segue $\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{-\gamma_2} F \cdot dP = 0 \Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = 0$

Dimostrazione $C \Rightarrow B$: So che $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$ con γ curva chiusa. Prendo due curve parametriche γ_1 e γ_2 che uniscono gli stessi punti iniziale e finale A e B tali che $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma$

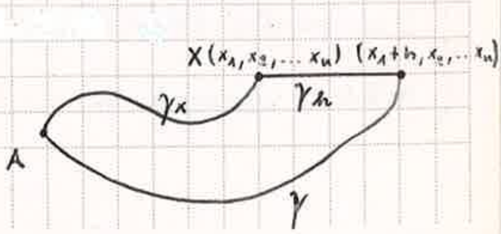
$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_1 - \gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{-\gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP.$$ Essendo $\int_\gamma F \cdot dP = 0$

si ha che $\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$

Dimostrazione $A \Rightarrow C$: Da $A \Rightarrow B$ e $B \Rightarrow C$ segue $A \Rightarrow C$ per proprietà transitiva

Dimostrazione $B \Rightarrow A$: Fissato $A \in \Omega$, prendo $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ e denoto con γ_X una qualsiasi curva che unisce A ad X con il sostegno interamente contenuto in Ω. Per dimostrare che F è conservativo devo dimostrare che $\exists g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla g = F$, od anche che $\forall i = 1, 2, \dots, n$ $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = f_i(x)$ $\forall x \in \Omega$ dove $(f_1, f_2, \dots, f_n) = F$ (cioè che g è un potenziale di F su Ω). Per semplicità consideriamo solo il caso in cui $i = 1$. $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = f_1(x)$;

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x_1 + h, x_2, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)$$



Per Hp $\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\gamma_X} F \cdot dP + \int_{\gamma_h} F \cdot dP$ in quanto $\int_\gamma F \cdot dP$ è lo stesso per ogni curva che unisce le medesime posizioni.

• Teorema (Condizione necessaria per i campi conservativi di classe C^1): Sia $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$ dove Ω è un aperto non vuoto. Se F è conservativo, allora $\forall x \in \Omega$ si ha che

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall i,j = 1,2,\dots,n.$$

In particolare, se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, allora $\forall x \in \Omega$ $\operatorname{rot} F(x) = 0$. Dimostrazione: se F è conservativo su Ω $\exists g$ potenziale di F su Ω tale che $\nabla g(x) = F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$. Ma $\nabla g(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\right)$ quindi $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\right) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ $\forall x \in \Omega$. Essendo $f_1, f_2, \dots f_n$ di classe C^1 (per ipotesi) saranno di classe C^1 anche $\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}$. Quindi $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in C^1(\Omega)$ $\forall i = 1,2,\dots n$ $\Rightarrow$ $g \in C^2(\Omega)$ $\Rightarrow$ è possibile applicare il lemma di Schwarz $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ $\forall x \in \Omega$, $\forall i,j = 1,\dots,n$. Ma $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ e $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ / $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(x)$ per Schwarz, dunque per proprietà transitiva $\boxed{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)}$ $\forall x \in \Omega$, $\forall i,j = 1,\dots n$. Per quanto riguarda il rotore di F con $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la dimostrazione è molto semplice, infatti $\operatorname{rot} F(x)$ $\forall x \in \Omega$ =

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right)}_{0} \vec{i} - \underbrace{\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right)}_{0} \vec{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)}_{0} \vec{k} = 0 \quad \text{cvd}$$

Osservazione: Da questo teorema segue immediatamente che se $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ non è uguale a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ $\forall x \in \Omega$ e $\forall i,j = 1,2,\dots,n$ $\Rightarrow$ F non è conservativo.

• Definizione: Sia $F: \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un campo vettoriale. Se $\frac{f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{f_j}{\partial x_i}(x)$ $\forall x \in \Omega$, $\forall i,j = 1,2,3$ allora si dice che F è irrotazionale su Ω. In altre parole un campo vettoriale definito in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ è irrotazionale se il suo rotore è nullo.

- Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi. Diciamo che Ω è semplicemente connesso se per ogni curva chiusa e semplice γ avente sostegno in Ω si ha che la parte di piano racchiusa dal sostegno di γ è contenuta in Ω. Ciò si traduce nel fatto che nel piano non sono semplicemente connessi gli aperti connessi per archi che hanno dei buchi come le corone circolari.

- Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto connesso per archi. Diciamo che Ω è semplicemente connesso se per ogni curva chiusa, semplice e regolare a tratti γ avente sostegno in Ω, esiste una calotta superficiale regolare σ (il cui sostegno è contenuto in Ω) il cui bordo sia proprio il sostegno di γ. Ciò si traduce nel fatto che nello spazio possono essere semplicemente connessi anche gli insiemi che hanno dei "buchi": l'intercapedine tra due sfere concentriche di raggi diversi è semplicemente connessa. Lo spazio privato di una retta ed il toro non sono semplicemente connessi perché in essi non ogni curva chiusa è il bordo di una calotta superficiale con il sostegno contenuto in essi.

- Teorema (Condizione sufficiente per i campi conservativi di classe C^1):

Sia $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale di classe C^1, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ che associa ad ogni $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto non vuoto.

Se Ω è connesso e semplicemente connesso e $\forall x \in \Omega$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ si ha che

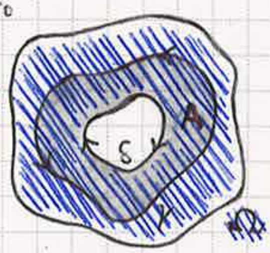
$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \implies F \text{ è conservativo su } \Omega.$$

Dimostrazione ($n=2$): Essendo Ω semplicemente connesso, ogni curva chiusa è la frontiera di un aperto con bordo; scelgo γ curva chiusa e semplice contenuta in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$; $\gamma = \partial A$, dove A è un aperto con bordo contenuto in Ω

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_{\partial A} F \cdot dP \underset{\text{Green}}{=} \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Ma $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ per ipotesi, dunque $\int_\gamma F \cdot dP = \iint_A 0 \, dx\,dy = 0$. Dunque per ogni curva chiusa γ si ha che $\oint_\gamma F \cdot dP = 0$ ma ciò per il teorema di equivalenza vuole dire che F è conservativo

Osservazione Se Ω non fosse semplicemente connesso ed avesse "un buco" come in figura, la dimostrazione non varrebbe infatti $A \subseteq \Omega$ non avrebbe solo γ come frontiera, ma anche S.



$$\int_{\partial A} F \cdot dP = \int_\gamma F \cdot dP + \int_S F \cdot dP \implies \int_\gamma F \cdot dP = \underbrace{\int_{\partial A} F \cdot dP}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ (vedi sopra)}}} - \int_S F \cdot dP \implies \int_\gamma F \cdot dP = -\int_S F \cdot dP$$

① $\int (2xy + yz - 2xz)\,dx = g(x,y,z)$

$2y\int x\,dx + yz\int dx - 2z\int x\,dx = \cancel{2}y\frac{x^2}{\cancel{2}} + yzx - \cancel{2}z\frac{x^2}{\cancel{2}} + c = x^2y + xyz - x^2z + c$

dove c è una costante rispetto ad x quindi è funzione delle sole y e z

$g(x,y,z) = x^2y + xyz - x^2z + c(y,z)$ g è derivabile quindi

② $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + xz + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z)$; ma deve essere $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = x^2 + xz + z$

$\Rightarrow \cancel{x^2} + \cancel{xz} + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = \cancel{x^2} + \cancel{xz} + z$

$\int z\,dy = c(y,z)$; $zy + k = c(y,z)$ dove k è costante rispetto ad y quindi è funzione della sola z $c(y,z) = zy + k(z)$

③ $g(x,y,z) = x^2y + xyz - x^2z + zy + k(z)$, ma deve essere $\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = xy - x^2 + y + z$

$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = \cancel{xy} - \cancel{x^2} + \cancel{y} + k'(z) = \cancel{xy} - \cancel{x^2} + \cancel{y} + z$

$\int z\,dz = k(z) \Rightarrow \frac{z^2}{2} + h = k(z)$ $h \in \mathbb{R}$

l'insieme dei potenziali di f su $\mathbb{R}^3$ è dunque costituito dalla famiglia di funzioni

$g(x,y,z) = x^2y + xyz - x^2z + zy + \frac{1}{2}z^2 + h$, $h \in \mathbb{R}$

• **Ricerca dei potenziali di un campo vettoriale conservativo**

A) Metodo delle integrazioni indefinite. Sia $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale conservativo, $F = (f_1, f_2)$. Se g è una funzione $: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale da essere un potenziale di F allora devono essere soddisfatte le seguenti uguaglianze:

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y)$; $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$

Operativamente si può procedere nel seguente modo per calcolare g:

1) $g(x,y) = \int f_1(x,y)\,dx = G_1(x,y) + k(y)$ dove k è funzione della sola y

2) $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) + k'(y)$

SUCCESSIONI

(Brevi richiami)

Una successione può essere intuitivamente definita come un elenco ordinato composto da un'infinità di oggetti numerabili chiamati Termini della successione.
Formalmente una successione di elementi di un dato insieme A è un'applicazione dall'insieme $\mathbb{N}$ ad A. $f: \mathbb{N} \to A \quad a_n = f(n)$
Una successione soddisfa "definitivamente" una proprietà se $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ la successione soddisfa la proprietà in questione.

Una successione è convergente (e converge ad ℓ) se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$
Una successione è positivamente divergente se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
Una successione è negativamente divergente se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$
Una successione è indeterminata se $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

N.B. Siccome $\forall a$ $(a, +\infty) \cap a_n \neq \emptyset$ diciamo che $+\infty$ è punto di accumulazione per $\mathbb{N}$

1) $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ (Successione convergente) $(a_n = 1/n)$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ oppure
$\forall B_\varepsilon(\ell), \exists B(+\infty) = (a, +\infty) : \forall n \in B(+\infty) \cap \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(\ell)$ oppure
$\forall \varepsilon > 0, \exists B(+\infty) = (a, +\infty) : \forall n \in B(+\infty) \cap \mathbb{N} \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon$ od ancora
$\forall B_\varepsilon(\ell), \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in B_\varepsilon(\ell)$] raramente utilizzate

2) $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ (Successione positivamente divergente) $(a_n = n!)$

$\forall M > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n > M$
$\forall B_M(+\infty), \exists B(+\infty) = (a, +\infty) : \forall n \in B(+\infty) \cap \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in B_M(+\infty)$

3) $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ (Successione negativamente divergente) $(a_n = 1 - e^n)$

$\forall M > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n < -M$
$\forall B_M(-\infty), \exists B(+\infty) = (a, +\infty) : \forall n \in B(+\infty) \cap \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in B_M(-\infty)$

Data una successione, chiamiamo sottosuccessione di $\{a_n\}$ la restrizione di a_n ad un dominio illimitato $M \subset \mathbb{N}$. Una sottosuccessione si indica così: $\{a_{n_k}\}$
$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \{a_{2n}\} \to$ sottosuccessione definita sull'insieme dei numeri pari
Teorema: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \iff \forall \{a_{n_k}\}$ sottosucc. di a_n $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \ell$

Corollario: Se esistono due sottosuccessioni a_{n_k} e a_{n_h} per una stessa successione tali che $\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = \ell_1$ e $\lim_{h\to+\infty} a_{n_h} = \ell_2$ con $\ell_1 \neq \ell_2$ allora $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$
In particolare $\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$ se $\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{k\to+\infty} a_{2k+1}$

Teorema: Se $\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = \ell \wedge \lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = \ell \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} a_n$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$

Proprietà: $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \iff a_n \to c$, $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$

• Applicazione del criterio del rapporto $\{a_n\} = n!/n^n$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n!}(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\, n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \left(\text{perché } (1+1/n)^n = e \text{ per } n \to +\infty\right)$$

$\frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ per il criterio del rapporto $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dunque $\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \to n!$ è infinito di ordine inferiore rispetto a n^n

• Applicazione del criterio del rapporto $\{a_n\} = q^n/n!$ con $q > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(q^{n+1})/(n+1)!}{q^n/n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{q^n} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{q \cdot \cancel{q^n} \cdot \cancel{n!}}{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{q^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{q}{n+1} = 0 < 1$$

$0 < 1 \Rightarrow$ per il criterio del rapporto $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dunque $\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \to q^n$ è infinito di ordine inferiore rispetto a $n!$

- Ordine degli infiniti: $\log n$ — n^α — q^n $(q>1)$ — $n!$ — n^n

• $\boxed{\text{Criterio della radice}}$

Sia $\{a_n\}$ una successione definitivamente positiva e tale che $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \geq 0$

- se $q < 1 \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$
- se $q = 1$ il criterio non dà informazioni $\quad \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- se $q > 1 \Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$? Sì perché è come fosse $\lim_{n \to +\infty} e^{\log \sqrt[n]{n}} =$

$$\lim_{n \to +\infty} e^{\log n^{1/n}} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^{\left[\lim_{n \to +\infty} \frac{\log n}{n}\right]} = \left(\text{ma } (\log n)/n = 0 \text{ per } n \to +\infty\right)$$

$e^0 = 1$

59

Se $q \neq 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} 1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)}$

Tenendo presente che $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ 0 & -1 < q < 1 \\ \nexists, & q \leq -1 \end{cases}$ (Ricorda che non dobbiamo considerare il caso $q = 1$ perché siamo nella condizione $q \neq 1$)

Avremo che $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)} = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ \frac{1}{1-q}, & -1 < q < 1 \\ \nexists, & q \leq -1 \end{cases}$ (Ma anche per $q = 1$ perché lo sappiamo dal caso precedente)

Dunque la serie geometrica di ragione q diverge positivamente per $q \geq 1$, converge ad $1/(1-q)$ per $-1 < q < 1$, è indeterminata per $q \leq -1$

- Serie telescopiche

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ è una serie telescopica. La somma parziale n-esima della serie è

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+1} - a_k) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n)$$

$\Rightarrow S_n = a_{n+1} - a_0$

Più in generale, se $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$, con una serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+p} - a_n)$ si ha che $S_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{k+p} - a_k) = (a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}) - (a_0 + a_1 + \ldots + a_{p-1})$

Un esempio di serie telescopica è la seguente: $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ infatti

$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log(n) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \log(n+1) - \log(n)$

$S_n = \log(n+1) - \log 1$ (per la formula ricavata in precedenza)

$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \log(n+1) = +\infty$ la serie diverge positivamente

- Serie di Mengoli

La serie di Mengoli, cioè la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ è un'altra serie notevole

Infatti $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1) + Bn}{n(n+1)} = \frac{An + Bn + A}{n(n+1)}$

$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$ dunque la serie si può scrivere come

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ / $s_1 = 1 - \frac{1}{2}$; $s_2 = s_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$

continua →

7

- **Teorema (Condizione necessaria)** Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Dimostrazione $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n$. Siccome la serie converge per Hp abbiamo che $\exists \lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Ma S_{n-1} è una sottosuccessione di S_n pertanto $\exists \lim_{n \to +\infty} S_{n-1} = S \in \mathbb{R}$.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n - S_{n-1} = S - S = 0$

Corollario $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ NON converge

N.B.: $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge (Non vale il viceversa del Teorema)

- **Teorema (Criterio necessario) del resto** Assegnata una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, si definisce $\forall n \in \mathbb{N}$ **resto n-esimo** τ_n la serie $\tau_n = \sum_{n=K+1}^{\infty} \cancel{a_K}\ a_n$. È evidente che le **serie resto** hanno lo stesso carattere della serie di partenza. Inoltre, per il teorema del resto, si ha che: se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è convergente, $\lim_{n \to +\infty} \tau_n = 0$.

Dimostrazione Supponiamo che la serie di partenza $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga ad S. Allora $\lim_{K \to +\infty} S_K = S$ dove $S_K = \sum_{n=0}^{K} \cancel{a_K}\ a_n$. Ma $\sum_{n=K+1}^{\infty} \cancel{a_K}\ a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{K} \cancel{a_K}\ a_n$

cioè $\tau_n = S - S_K$. ~~Per K → +∞, anche n → +∞~~, quindi $\lim_{K \to +\infty} \tau_n = \lim_{K \to +\infty} S - S_K$, $S - \lim_{K \to +\infty} S_K = S - S = 0$

$\lim_{K \to +\infty} S - S_K = \cancel{\lim_{n \to +\infty} \tau_n} \Rightarrow \cancel{S - S} = \lim_{n \to +\infty} \tau_n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \tau_n = 0$

Siccome $n = K+1$, $K \to +\infty \Rightarrow n \to +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \tau_n = 0$ cvd

- **Algebra delle serie**

1) $\sum \lambda a_n = \lambda \sum a_n$ infatti: $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$

2) **Teorema:** Sia $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ e sia $\sum_{n \geq 0} a_n$ una serie. Allora
   - se $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge ad $S \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \lambda a_n$ converge a λS
   - se $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \lambda a_n$ diverge, allo stesso modo se $\lambda > 0$, all'infinito opposto se $\lambda < 0$
   - se $\sum_{n \geq 0} a_n$ è indeterminata $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \lambda a_n$ è indeterminata

Dimostrazione: Sia $t_n = \sum_{K=0}^{n} \lambda a_K$ la somma parziale n-esima della serie di $\{\lambda a_n\}$ ovvero $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \ldots + \lambda a_n = \lambda(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$

- Esempio (algebra delle serie): $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow$ serie geometrica di ragione $\frac{1}{2} \Rightarrow$ convergente a $\frac{1}{1-1/2} = 2$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow$ serie geometrica di ragione $\frac{1}{3} \Rightarrow$ convergente a $\frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right) = 2-\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Criteri di convergenza per le serie a termini positivi

(Teorema necessario di convergenza)

- **Teorema:** Sia (a_n) una successione t.c. $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, detta "a termini positivi", converge o diverge positivamente.

Dimostrazione: Poiché $a_n \geq 0 \ \forall n$ risulta che la successione S_n delle somme parziali n-esime di $\{a_n\}$ è crescente. Infatti si ha che $S_0 = a_0 \geq 0$; $S_1 = S_0 + a_1 \geq S_0$ (perché $a_1 \geq 0$); $S_2 = S_1 + a_2 \geq S_1$ (perché $a_2 \geq 0$) ... $S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}$
Per le proprietà delle successioni monotone si ha che la successione S_n delle somme parziali ammette limite. $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n$. Tale limite è finito se S_n è limitata e dunque $\sum a_n$ converge; tale limite è $+\infty$ se S_n è illimitata e quindi $\sum a_n$ è positivamente divergente.

Corollario: Se (a_n) è una successione definitivamente positiva, ossia t.c. $a_n \geq 0$ $\forall n \geq k+1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge o diverge positivamente. Infatti

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{a_0 + a_1 + \ldots + a_k}_{N} + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \rightarrow$ questa serie converge o diverge a $+\infty$ per il teorema precedente. A seconda dei casi:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightarrow N + S = N+S$ (converge)
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rightarrow N + (+\infty) = +\infty$ (diverge positivamente)

Corollario: Sia (a_n) una successione t.c. $a_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, "a termini negativi", converge o diverge negativamente.

Dimostrazione: Basta considerare a_n come $-(-a_n)$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} -(-a_n) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)$; $\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)$ è una serie a termini positivi pertanto o converge ad S o diverge a $+\infty$ per il Th precedente $\Rightarrow -\sum_{n=0}^{\infty}(-a_n)$ converge a $-S$ oppure diverge a $-\infty$

- **Criterio del confronto:** Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $0 \leq a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

1) Se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge a $T \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad $S \leq T$

2) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge (a $+\infty$) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge (a $+\infty$)

Dimostrazione: Siano (S_n) e (T_n) le successioni delle somme parziali delle serie di a_n e b_n rispettivamente. Poiché le due serie sono a termini positivi $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n$ e $\exists \lim_{n\to+\infty} T_n$ (per il Th precedente). Inoltre poiché $a_n \leq b_n \ \forall n$ risulta che $a_0 + a_1 + \ldots + a_n \leq b_0 + b_1 + \ldots + b_n$ ovvero che $S_n \leq T_n \ \forall n$

Ma la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge positivamente (vedi serie telescopiche) e quindi per il criterio del confronto anche $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge positivamente.

$n^{\alpha} < n \quad \forall n > 1$ se $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{n^{\alpha}} > \frac{1}{n} \quad \forall n > 1$ se $\alpha < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \forall n > 1$ se $\alpha < 1$. Dato che la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, per il criterio del confronto anche le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ con $\alpha < 1$ divergono

Riassumendo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ convergono per $\alpha \geq 2$ (vedi esempio), divergono per $\alpha \leq 1$.

- **1° Criterio del confronto asintotico** Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista finito il $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in [0, +\infty)$ (l non può essere negativo in quanto $a_n/b_n \geq 0 \ \forall n$). Allora valgono i seguenti fatti:

1) Se a_n e b_n sono dello stesso ordine di grandezza per $n \to +\infty$, ovvero se ($a_n \sim l\, b_n$ per $n \to +\infty$)
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \ \underset{\text{converge}}{(\text{diverge})} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \ \underset{\text{converge}}{(\text{diverge})} \right]$$ ①

2) Se a_n è un o-piccolo di b_n ($a_n = o(b_n)$) ossia se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

3) Se a_n è un o-piccolo di b_n ($a_n = o(b_n)$) ossia se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge (positivamente perchè sono serie a termini positivi

N.B. Nulla possiamo inferire nel caso in cui $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge o $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge

Dimostrazione caso 1) Siccome $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, per definizione di limite avrò che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - l \right| < \varepsilon$. Siccome ε è arbitrario, lo fisso in modo tale che $l - \varepsilon > 0$; $-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - l < \varepsilon \longrightarrow -\varepsilon + l < \frac{a_n}{b_n} < \varepsilon + l$

Moltiplico tutti i membri per b_n: $\underbrace{(-\varepsilon + l)}_{>0} \underbrace{b_n}_{\geq 0} < a_n < (\varepsilon + l)\, b_n$.

① In generale, si dice che le due serie hanno lo stesso comportamento

(N.B.)
- **Criterio del rapporto** Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista il $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Allora valgono i seguenti fatti:

1) Se $\ell > 1$, $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

2) Se $\ell < 1$, $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

(N.B.)
- **Criterio della radice** Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista il $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ Allora valgono i seguenti fatti:

1) Se $\ell > 1$, $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge (Quindi anche se $\ell = \{+\infty\}$)

2) Se $\ell < 1$, $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

N.B. In entrambi i casi (rapporto e radice) se $\ell = 1$ NON si può concludere nulla e bisogna ricorrere ad altri metodi per studiare il comportamento della serie

Dimostrazione (criterio della radice) Consideriamo il caso in cui $\ell < 1$. Per definizione di limite si ha che: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}; \ \forall n \geq n_0 \ |\sqrt[n]{a_n} - \ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$. In particolare $\forall n \geq n_0$ $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$, da cui - elevando ambo i membri ad n - si ricava che $a_n < (\ell + \varepsilon)^n$. Ma ε è una quantità arbitraria pertanto possiamo sceglierla in modo tale che $\ell + \varepsilon = q$ con $0 < q < 1$ (ℓ ed ε sono entrambe positive per questo $q > 0$). Avremo che $a_n < (\ell + \varepsilon)^n = q^n$ con $0 < q < 1$. Ma $\sum q^n$ converge $\forall q \in (-1, 1)$ di conseguenza, per il criterio del confronto siccome a_n è definitivamente minore di q^n, $\sum a_n$ converge.

Dimostrazione (criterio della radice) Consideriamo ora il caso in cui $\ell > 1$. Per il criterio della radice sulle successioni, essendo $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ con $\ell > 1$, allora esiste $\lim_{n \to +\infty} a_n$ e tale limite è uguale a $+\infty$. Ciò vuol dire che a_n è illimitata e dunque per il teorema necessario di convergenza $\sum a_n$ diverge positivamente

- Esempi (sul criterio della radice):

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\cancel{\sqrt[n]{3^n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\overset{\nearrow 1}{\sqrt[n]{n}}}{3} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ converge

- Osserviamo come nel caso in cui $\ell = 1$ nulla possiamo dire circa il comportamento della serie:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ e sappiamo che la serie DIVERGE

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ e la serie CONVERGE

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$; $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{\sqrt[n]{2^n}}}{\cancel{\sqrt[n]{n^n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$ converge

N.B. Il criterio della radice è più generico di quello del rapporto. Nelle ipotesi del criterio del rapporto $a_n > 0$ (strettamente maggiore). L'ipotesi del criterio della radice è invece più debole (ossia c'è una clausola in meno): $a_n \geq 0$

- Sia $f \in R_{loc}([a,+\infty))$ tale che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,+\infty)$, allora la funzione integrale $F(b)$ è monotona crescente su $[a,+\infty)$ e il suo integrale improprio o è convergente oppure divergente a $+\infty$

- Sia $f \in R_{loc}([a,+\infty))$ tale che $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,+\infty)$. Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^n f(x)\,dx \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ con } n \geq a$$

oppure se $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx \to \ell$ per $t \to +\infty$ $\Rightarrow$ $\forall a_n \to +\infty$, $F(a_n) \to \ell$

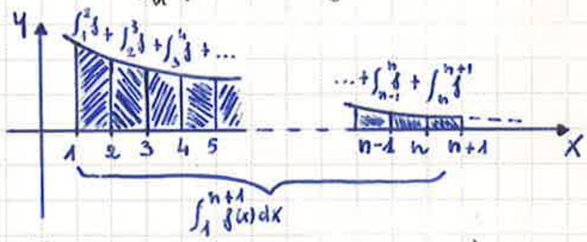
- Criterio di McLaurin: Sia $f(x) : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione t.c. $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [1,+\infty)$ e $f(x)$ decrescente $\forall x \in [1,+\infty)$ ($\Rightarrow f$ integrabile su ogni $[a,b] \subseteq [a,+\infty)$) Allora:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno lo stesso comportamento

2) Se la serie e l'integrale convergono si ha che $\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Dimostrazione: Essendo $f(x)$ decrescente, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in [n, n+1]$ si ha che $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$. Passando agli integrali $\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\,dx$ ovvero $f(n+1) \int_n^{n+1} 1\,dx \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \int_n^{n+1} 1\,dx$ portando le quantità costanti fuori dal segno di integrale; risulta che $f(n+1)\,[\cancel{n}+1-\cancel{n}] \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)\,[\cancel{n}+1-\cancel{n}]$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$$



Ma $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_1^{n+1} f(x)\,dx$ (vedi figura)

Inoltre $\sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$

Dette $t_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$ e $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ le ridotte n-esime della serie di $f(k)$ avremo che $t_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) = s_n$. Passando ai limiti avremo che $\lim_{n \to +\infty} t_{n+1} \leq \lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \lim_{n \to +\infty} s_n$. Se $\lim_{n \to +\infty} s_n = \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = m \leq \ell$ per il criterio del confronto sui limiti.

Ma $\lim_{n \to +\infty} \int_1^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, quindi se la serie converge, anche l'integrale improprio è convergente ($\Leftarrow$ convergenza)

continua →

Dimostrazione: Infatti se a_n ha ordine α rispetto ad $\frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$ vuol dire che

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{(1/n)^\alpha} = \ell \in \mathbb{R} - \{0\}$ e più precisamente $\ell \in (0, +\infty)$ in quanto $a_n \geq 0$ per Hp;

possiamo quindi applicare il 1° criterio del confronto asintotico (1° caso) $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge (diverge)} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \text{ converge (diverge)}$$

Ma $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$, diverge a $+\infty$ per $\alpha \leq 1$

converge per confronto

quindi se $\alpha > 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (perché somma di una serie convergente e di un termine finito)

diverge per confronto

se $\alpha \leq 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge (perché somma di una serie divergente e di un termine finito)

• **Definizione** Una serie è detta "a termini di segno alterno" se è della forma $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$, dove $b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Tali serie sono un caso particolare delle serie a termini di segno variabile

Criteri di convergenza per le serie a termini di segno variabile

• **Criterio di Leibniz** Sia $\{b_n\}$ una successione tale che $b_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ e che la successione b_n sia decrescente, cioè $\forall n$ $b_n \geq b_{n+1}$

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot b_n$ è convergente ad S. In particolare, se S_n è la ridotta n-esima

(serie resto)

della serie, si ha che $|r_n| = |S - S_n| \leq b_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left(r_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} (-1)^m b_m\right)$

Dimostrazione Sia $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k b_k$ la ridotta n-esima della serie. Essendo b_n decrescente e positiva: $\boxed{b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots \geq b_{2n} \geq b_{2n+1} \geq b_{2n+2} \geq \dots \geq 0}$

$S_0 = (-1)^0 b_0 = b_0$

$S_1 = (-1)^1 b_1 + S_0 = -b_1 + b_0$

$S_2 = (-1)^2 b_2 + S_1 = b_2 - b_1 + b_0$. Ma $\boxed{b_2 - b_1 \leq 0} \Rightarrow S_2 \leq b_0$ ovvero $S_2 \leq S_0$

$S_3 = (-1)^3 b_3 + S_2 = -b_3 + b_2 - b_1 + b_0$. Ma $\boxed{b_2 - b_3 \geq 0} \Rightarrow S_3 \geq b_0 - b_1$ ovvero $S_3 \geq S_1$

In generale si ha che:

$$S_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k b_k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k + (-1)^{2n+1} b_{2n+1} + (-1)^{2n+2} b_{2n+2} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k b_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k b_k}_{S_{2n}} \underbrace{\boxed{-b_{2n+1} + b_{2n+2}}}_{\leq 0} \leq S_{2n}$$

continua →

- Esempi (Criterio di Leibniz)

- $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}$; $\frac{1}{\log n} > 0 \ \forall n \geq 2$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\log n} = 0$; $\log n$ è crescente $\forall n$
$\Rightarrow \frac{1}{\log n}$ è decrescente $\Rightarrow$ le 3 condizioni del criterio di Leibniz sono soddisfatte, pertanto possiamo dire che la serie converge

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$; $\frac{1}{n^2} > 0 \ \forall n \geq 1$; $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; n^2 è crescente $\forall n \geq 0$ in particolare $\forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n^2}$ è decrescente $\Rightarrow$ le 3 condizioni del criterio di Leibniz sono soddisfatte e possiamo dire pertanto che la serie è convergente

- Criterio della convergenza assoluta: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente, allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge e si ha che $\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$

Dimostrazione: Prendiamo le due successioni così definite: $b_n = \begin{cases} a_n, & a_n \geq 0 \\ 0, & a_n < 0 \end{cases}$ e $c_n = \begin{cases} 0, & a_n \geq 0 \\ -a_n, & a_n < 0 \end{cases}$ / $0 \leq b_n \leq |a_n| \ \forall n$ e $0 \leq c_n \leq |a_n| \ \forall n$.

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente ($\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge), possiamo applicare il teorema del confronto, dal quale risulta che $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ convergono.

Ma possiamo definire a_n come $b_n - c_n$ (infatti $a_n = \begin{cases} a_n - 0, & a_n \geq 0 \\ 0 - (-a_n), & a_n < 0 \end{cases}$)

Per l'algebra delle serie, $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)$ converge perché convergono sia b_n che c_n; di conseguenza anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - c_n)$ converge. (cvd)

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \lim_{n \to +\infty} S_n = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \\ \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| = \lim_{n \to +\infty} |S_n| = |a_0 + a_1 + \ldots + a_n| \\ \text{Ma } |a_0 + a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \quad \text{(cvd)}$$

Attenzione! Non vale il viceversa del criterio. Ci sono infatti serie che convergono, ma non convergono assolutamente

Successioni di funzioni

Una successione di funzioni è una successione i cui termini sono funzioni. Una successione di funzioni si indica con la scrittura formale $f_n(x)$ con $n \in \mathbb{N}$. Tali successioni sono applicazioni che associano ad ogni numero naturale una funzione.

- <u>Definizione</u>: Sia data la successione $\{f_n(x)\}$ con $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si dice che $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ su I se $\forall x \in I$, $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$

  il che equivale a dire che $\forall x \in I$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ t.c. $\forall n \geq n_0$

  $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. $f(x)$ è allora detta limite puntuale della successione $f_n(x)$ e si scrive che $f_n(x) \to f(x)$

- <u>Definizione</u>: Sia data la successione $\{f_n(x)\}$ con $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitate

  Si dice che $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ su I se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

  t.c. $\forall x \in I$, $\forall n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ il che è equivalente a

  $\lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|\right] = 0$. Si scrive in tal caso che $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$.

- <u>Dimostrazione</u>: voglio dimostrare che $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ su $I \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|\right] = 0$

  ($\Leftarrow$) Siccome so che $\lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|\right] = 0$, posso inferire, per definizione di limite, che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall x \in I$,

  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ cioè $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in I$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

  ovvero $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$ cvd

  ($\Rightarrow$) So che $f_n(x) \twoheadrightarrow f(x)$, ovvero che $\forall \varepsilon/2 > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in I$

  $\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$ cioè

  $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ t.c. $\forall n \geq n_0$, $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ovvero $\lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|\right] = 0$ cvd

Osservazione: la convergenza uniforme si differenzia da quella puntuale per il fatto che, fissato un ε piccolo a piacere, si può trovare in corrispondenza di esso un indice n_0 indipendente da x (ossia indipendente dal punto del dominio di f considerato). Una volta fissato ε e trovato n_0, con la convergenza uniforme si può affermare che ogni funzione $f_n(x)$ con $n \geq n_0$, approssima su tutto I la funzione $f(x)$ con un errore minore di ε.

- Corollario: Sia $\{f_n(x)\}$ una successione di funzioni continue su I; se $f_n(x) \to f(x)$ su I e $f(x)$ non è continua su I $\Rightarrow$ $f_n(x)$ non converge uniformemente ad $f(x)$ su I, cioè $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$.

- Teorema del doppio limite: Sia $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su I, x_0 punto di accumulazione per I; $\boxed{\exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = \ell_n}^{A}$ $\forall n$, $\boxed{\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \ell_n = \ell.}^{B}$ Se si verifica tutto ciò,

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left[\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right] = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right]$$

Dimostrazione: Per definizione di continuità $f(x)$ continua in $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Sappiamo che $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su I, quindi per il teorema precedente $f(x)$ è continua in I e dunque in x_0 quindi vale effettivamente che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right] \underset{A}{\overset{\downarrow}{=}} \lim_{n \to +\infty} \left[f_n(x_0) \right] \underset{B}{\overset{\downarrow}{=}} f(x_0)$$

$$f(x_0) \overset{\downarrow}{=} \lim_{x \to x_0} \left[f(x) \right] \overset{\downarrow}{=} \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right],$$ quindi per proprietà

(per quanto dimostrato sopra) (per def. di conv. uniforme)

transitiva $$\lim_{n \to +\infty} \left[\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right] = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right]$$ cvd

- Teorema di integrazione (o di passaggio al limite sotto il segno di integrale):

Hp: $f_n(x)$ sono continue su $[a,b]$, $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su $[a,b]$

Th: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\lim\limits_n f_n(x) \right) dx = \lim\limits_n \int_a^b f_n(x)\,dx$, si possono cioè scambiare segno di limite e di integrale. La tesi del teorema si può anche scrivere come $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

Dimostrazione: le $f_n(x)$ sono continue su $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f_n(x)$ è ben definito $\forall n$, cioè per ogni funzione della successione. Siccome le $f_n(x)$ sono continue su $[a,b]$ e $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su $[a,b]$, per il teorema precedente anche $f(x)$ è continua su $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)$ è ben definito (e non è un integrale improprio). Se $a < b$, so che

• Teorema di derivazione (o di passaggio al limite sotto il segno di derivata):

Sia I un intervallo aperto e siano le $f_n(x)$ (funzioni di una successione) $\in C^1(I)$ (Cioè ogni $f_n(x)$ è derivabile su I con derivata continua) Supponiamo $\exists\, x_0 \in I$ t.c. $f_n(x_0) \to z \in \mathbb{R}$ e che $f'_n(x) \rightrightarrows g(x)$ su $\forall\,[a,b] \subseteq I$. Allora possiamo dire che:

1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ su $\forall\,[a,b] \subseteq I$

2) $f(x) \in C^1(I)$

3) $f'(x) = g(x)$ $\qquad [(f_n(x) \to f(x)) \Rightarrow (f'_n(x) \to f'(x))]$

Dimostrazione: Per il corollario al teorema di integrazione, essendo le $f'_n(x)$ continue per Hp su I ed essendo $f'_n(x) \rightrightarrows g(x)$ su $\forall\,[a,b]$, posso inferire che $\int_{x_0}^{x} f'_n(t) \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$, scelti in $[a,b]$ x e x_0 $\Rightarrow$ $f_n(t)\Big|_{x_0}^{x} \to \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$, $f_n(x) - f_n(x_0) \to \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$ ovvero $f_n(x) \to z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$: questa relazione, per l'arbitrarietà della scelta di a e b in I vale su $\forall\,[a,b] \subseteq I$ (su tutti i compatti).

$f_n(x) \to z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = f(x)$; $f_n(x) \to f(x)$; $f(x)$ è derivabile (cvd 2)

$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt\right) = \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = g(x) \quad \forall x \in I$ (cvd 3)

Devo dimostrare che $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ sui compatti, cioè che $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, se $f_n(x)$ è di classe C^1 su I, preso $x_0 \in [a,b] \subseteq I$ si ha che $f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt$

Dunque $|f_n(x) - f(x)| = \underline{|f(x) - f_n(x)|} = \left| \underline{z + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt} - \underline{f_n(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt} \right| =$

$= \left| z - f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt \right| \leq \left| z - f_n(x_0) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt \right|$

$\leq \left| z - f_n(x_0) \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \left(g(t) - f'_n(t)\right) dt \right|$ $\quad$ Ma $\left| \int_{x_0}^{x} \left(g(t) - f'_n(t)\right) dt \right| \leq$

$\int_{x_0}^{x} \left| g(t) - f'_n(t) \right| dt \leq \int_a^b \left| g(t) - f'_n(t) \right| dt \Rightarrow$

$|f(x) - f_n(x)| \leq \left| z - f_n(x_0) \right| + \int_a^b \left| g(t) - f'_n(t) \right| dt$

Siccome per Hp so che $f_n(x_0) \to z$, allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 : \forall n \geq n_1 \ |f_n(x_0) - z| < \varepsilon$

Sempre per Hp so che $f'_n(x) \rightrightarrows g(x)$, dunque $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 : \forall n \geq n_2 \ \forall x \in [a,b] \ |f'_n(t) - g(t)| < \varepsilon$

Quindi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = \max\{n_1, n_2\} : \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \int_a^b \varepsilon \, dt$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \varepsilon(b-a) = \varepsilon(b-a+1)$

Ovvero $\forall \varepsilon' > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \forall x \in [a,b] \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon' = \varepsilon(b-a+1)$, arbitrariamente piccolo $\Rightarrow$ $\boxed{f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ su } [a,b] \subseteq I}$ e per l'arbitrarietà della scelta di $[a,b]$ in I, su tutti i compatti contenuti in I si verifica la convergenza uniforme (cvd 1)

Ricapitolando...

1) Sia (f_n) una successione di funzioni $(f_n): I \to \mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. (f_n) converge puntualmente a f in I se $\forall x \in I \ \lim_n f_n(x) = f(x)$

2) Sia (f_n) una successione di funzioni limitate $(f_n): I \to \mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione. (f_n) converge uniformemente a f in I se $\lim_n \left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

3) Sia (f_n) una successione di funzioni limitate e continue, $(f_n): I \to \mathbb{R}$, t.c. $f_n \rightrightarrows f$ su I. Allora f è continua su I

4) Sia (f_n) una successione di funzioni $(f_n): I \to \mathbb{R}$.
Se $f_n \rightrightarrows f$ su I $\Rightarrow$ $f_n \to f$ su I

• **Teorema sull'insieme di convergenza:** Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e sia $R \in [0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ il suo raggio di convergenza.

1) se $R = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge solo nel suo centro $(x=0)$

2) se $R \in (0,+\infty) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente in $(-R,R)$ e uniformemente sui compatti $[a,b] \subseteq (-R,R)$

3) se $R = +\infty \Rightarrow \sum a_n x^n$ converge assolutamente su $\mathbb{R}$ e uniformemente sui compatti.

Dimostrazione caso 1) $0 = R = \sup\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$ Se le $|x|$ per cui la serie converge costituiscono un insieme il cui estremo superiore è 0 (e tali x sono positive o nulle) è chiaro che l'unico elemento dell'insieme, coincidente con il max e con il sup è proprio 0. Per $x=0$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge e il suo valore è $a_0 0^0 + \cancel{a_1 0^1} + \dots + \cancel{a_n 0^n} = a_0$ perché $0^0 = 1$ per convenzione.

caso 3) $+\infty = R = \sup\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\} \Rightarrow$ la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$ in quanto se esistesse $\bar{x}$ t.c. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n$ non converga, $\forall \tilde{x} : |\tilde{x}| > |\bar{x}|$ la serie non convergerebbe $\Rightarrow R \leq |\bar{x}|$, assurdo perché $R = +\infty$.

caso 2) $R \in \mathbb{R} - \{0\}$, $R = \sup\{|x| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$. Sia $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo, per definizione di R, la serie converge in $R - \varepsilon = \bar{x}$

Per il lemma precedente la serie converge assolutamente $\forall x \in (-|R-\varepsilon|, |R+\varepsilon|)$ e per il corollario al lemma essa converge totalmente, e quindi uniformemente, sui compatti $[-\tilde{x}, \tilde{x}] \subset (-|R-\varepsilon|, |R+\varepsilon|)$. In definitiva si ha, per l'arbitrarietà di ε e di convergenza di $R-\varepsilon$ che la serie converge assolutamente $\forall x \in (-R,R)$ e totalmente, in particolare uniformemente, sui compatti $[-\tilde{x}, \tilde{x}] \subset (-R,R)$

semplicemente. Quanto detto vale per tutti gli x che rispettano la condizione trovata per $\bar{x}$ $\Rightarrow$ se $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge $\forall x : |x| < \frac{1}{l}$ ovvero $\forall x \in \left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right) \Rightarrow R = \frac{1}{l}$; se la serie convergesse anche in $\bar{x} : |\bar{x}| > \frac{1}{l}$ esisterebbe un intervallo $(-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$ contenente l'intervallo $\left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$ in cui la serie converge assolutamente, ma ciò è assurdo perché la serie converge assolutamente solo in $\left(-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right)$. La dimostrazione per il criterio della radice è analoga.

$R \in [0, +\infty]$

- $\boxed{\text{Teorema di Abel:}}$ Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e R il suo raggio di convergenza. Se la serie converge in I intervallo, allora essa converge uniformemente sui compatti contenuti in I, cioè converge uniformemente su tutti i sottointervalli chiusi e limitati $[a, b] \subseteq I$. In particolare, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in $x = R$ (rispettivamente $x = -R$), allora essa converge uniformemente in ogni intervallo $[-K, R]$, con $0 < K < R$ (rispettivamente in ogni intervallo $[-R, K]$, con $0 < K < R$). Se la serie di potenze converge in $x = \pm R$, allora essa converge uniformemente in $[-R, R]$
- Corollario: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge puntualmente a $s(x)$ su I, $s(x) : I \to \mathbb{R}$, allora $s(x)$ è una funzione continua su I. Dimostrazione: le $f_n(x) = a_n x^n$ sono funzioni continue su $\mathbb{R}$ e quindi in particolare lo sono su I e su ogni suo sottointervallo. Poiché $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge puntualmente a $s(x)$ su I, per il teorema di Abel la serie converge uniformemente su ogni sottointervallo $[a, x] = K \subseteq I \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows s(x)$ in K dunque sono soddisfatte le ipotesi del teorema sulle successioni di funzioni per il quale $s(x)$ deve essere continua su K. Per l'arbitrarietà della scelta di K in I possiamo in definitiva affermare che $s(x)$ è continua su I.

• Esempio [1 Ho utilizzato la formula per il calcolo della serie derivata]

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ converge su $[-1, 1)$. A cosa converge puntualmente?

$\sum_{n=1}^{\infty} \cancel{n} \frac{1}{\cancel{n}} x^n \overset{①}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge puntualmente a $g(x) = \frac{1}{1-x}$ in $[-1, 1)$

Ma $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n} x^n\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ converge puntualmente

a $\int g(x)$ su $[-1, 1)$ per il Teorema delle derivate; $\int g(x) = \int \frac{1}{1-x} = -\ln|1-x|$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ converge puntualmente a $-\ln|1-x|$ in $[-1, 1)$

• Proprietà: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Sia $g(x)$ la funzione a cui la serie converge puntualmente in I. Si ha che $g(x)$ è di classe C^{∞} su $(-R, R)$. Dimostrazione: per il teorema precedente, si ha che $D\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$ converge puntualmente a $g'(x)$ in I e per il corollario al teorema di Abel $g'(x)$ è continua su I e dunque $g(x)$ è di classe C^1. Ma la serie di potenze è ulteriormente derivabile $\Rightarrow D^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$] (sempre per il teorema precedente) e converge puntualmente a $g''(x)$ in I che, sempre per il corollario al teorema di Abel è continua su $I \Rightarrow g(x)$ è di classe C^2. Iterando il procedimento si arriva alla conclusione, cioè che $g(x)$ è di classe C^{∞}.

• <u>Teorema di integrazione termine a termine per le serie di potenze</u>: Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$. Si ha che, $\forall x \in I$, intervallo di convergenza, $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n \, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$

infatti: $\int_0^x a_n t^n \, dt = a_n \int_0^x t^n \, dt = a_n \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

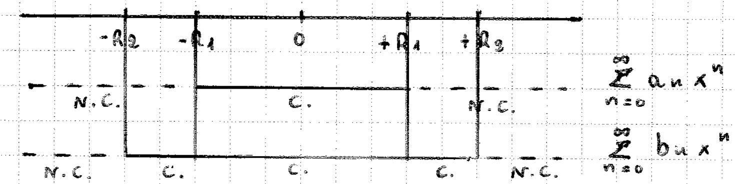
Si ha che la serie delle primitive $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ ha anch'essa raggio di

- Somma di serie di potenze: Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ due serie di potenze con raggi di convergenza rispettivamente R_1 ed R_2. Allora la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ ha raggio di convergenza $R \geq \min\{R_1, R_2\}$. Inoltre si ha che se $R_1 \neq R_2$, allora il raggio di convergenza è $R = \min\{R_1, R_2\}$. In pratica:

- se $R_1 = R_2 = +\infty$, evidentemente $R = +\infty$
- se $R_1 \neq R_2 \Rightarrow R = \min\{R_1, R_2\}$
- se $R_1 = R_2 \neq +\infty$, R può essere maggiore del loro comune valore

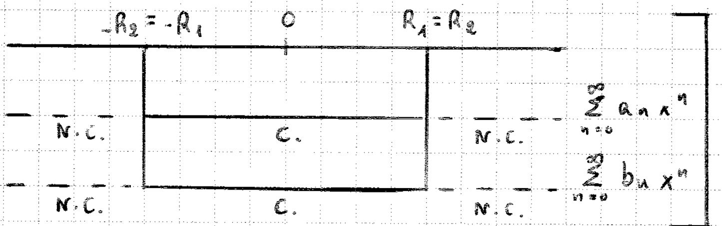
$\Rightarrow R \geq \min\{R_1, R_2\}$

Dimostrazione: caso $R_1 \neq R_2$. Supponiamo che $R_1 < R_2$, allora si ha che

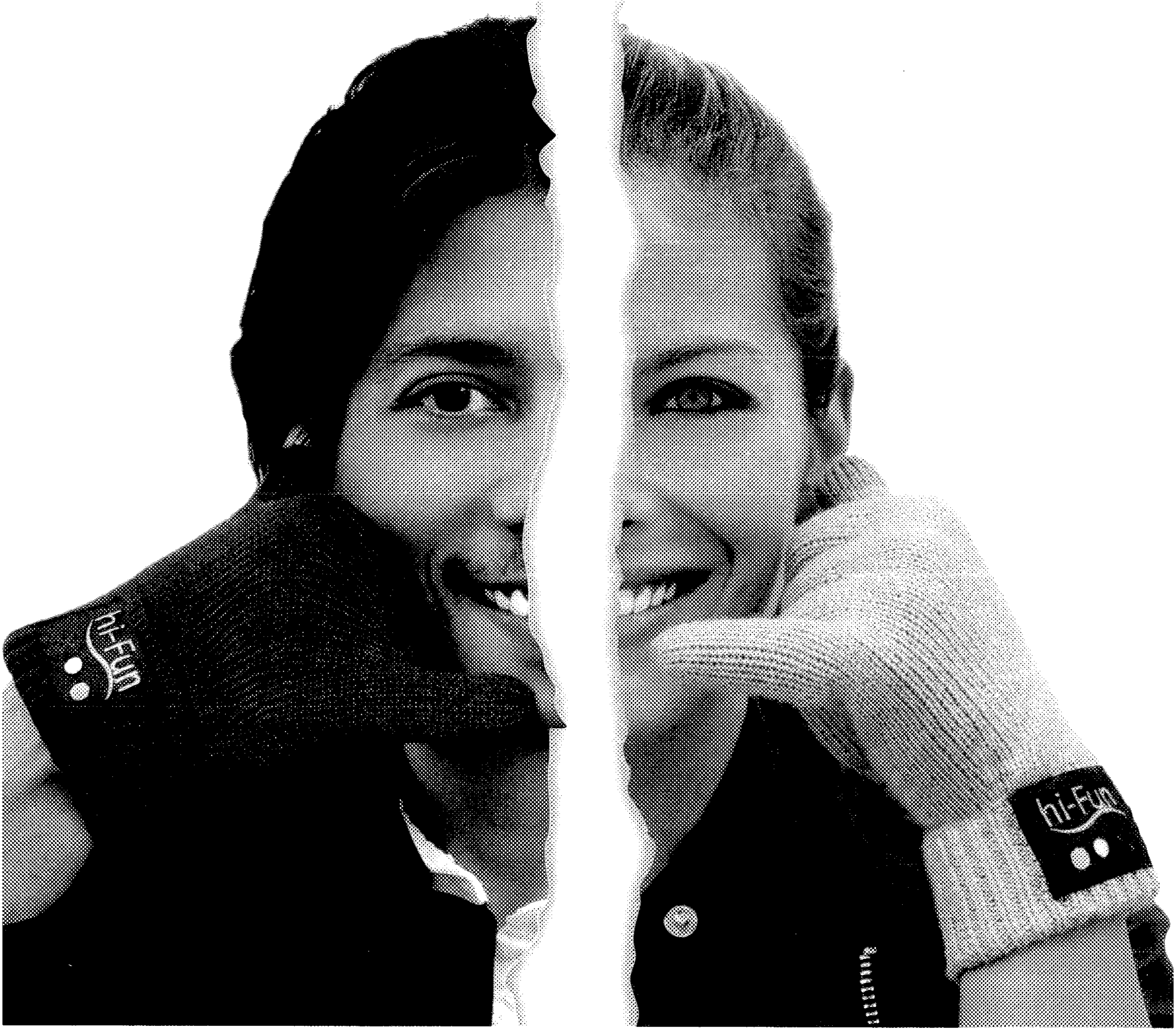


- con $-R_1 < x < R_1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ convergono entrambe, e quindi per l'algebra delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ è convergente. proprietà
- con $-R_2 < x < -R_1 \lor R_1 < x < R_2$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ converge, ma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ non converge, e quindi per l'algebra delle serie se $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ convergesse, dovrebbe convergere anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ma ciò è assurdo quindi $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ non converge per quei valori di x t.c. $R_1 < |x| < R_2$. $\Rightarrow R = \min\{R_1, R_2\}$

Dimostrazione: caso $R_1 = R_2$. Se $R_1 = R_2$ si ha che:



per $x < -R_2 \lor x > R_1$ entrambe le serie non sono convergenti, pertanto, per l'algebra delle serie, la



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 118

Serie di funzioni

- Sia I un intervallo non vuoto e sia (f_n) una successione di funzioni da I in $\mathbb{R}$. $(f_n): I \to \mathbb{R}$. Si chiama serie di funzioni la scrittura formale:

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Essa consiste nella somma di tutte le funzioni che costituiscono i termini della successione di funzioni.

successione delle ridotte !!!

$$\begin{cases} S_0(x) = f_0(x) \\ S_1(x) = f_0(x) + f_1(x) \\ S_2(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) \\ \vdots \\ S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) \end{cases}$$

$\forall n$, S_n è detta somma parziale n-esima o ridotta n-esima della serie di f_n

$(f_n): I \to \mathbb{R}$. E' come se $\forall \bar{x} \in I$, calcolassimo il valore di tutte le $f_n(\bar{x})$, per n che va da 0 a $+\infty$ e poi sommassimo tutti questi valori: $\forall x \in I$, eseguo la seguente somma: $f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$.

Si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente alla funzione $s(x)$ su I ($s(x): I \to \mathbb{R}$) se la successione delle ridotte converge puntualmente ad $s(x)$ su I, cioè se $\forall x \in I$ $\lim_n S_n(x) = s(x)$. Cioè dovrebbe esistere una funzione $s(x)$ che in ogni punto assuma come valore il valore della somma delle infinite funzioni $f_n(x)$ calcolate in quel punto stesso: ($S_n(x) \to s(x)$, convergenza puntuale)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \begin{cases} f_0(x_1) + f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_1) = s(x_1) \\ f_0(x_2) + f_1(x_2) + \ldots + f_n(x_2) = s(x_2) \\ \vdots \\ f_0(x_m) + f_1(x_m) + \ldots + f_n(x_m) = s(x_m) \end{cases}$$

Fissato $x \in I$, la serie di funzioni diventa una serie numerica in quel punto: le serie numeriche sono serie di funzioni costanti !! Per una funzione costante si ha infatti: che $f_0(x_1) = f_0(x_2) = \ldots = f_0(x_m)$ e dunque la somma delle infinite funzioni $f_n(x)$ è la stessa $\forall x$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente ad $s(x)$ in I, $s(x)$ è detta somma della serie di (f_n) e dunque si pone $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = s(x)$ $\forall x \in I$

- Sia I un intervallo non vuoto e sia (f_n) una successione di funzioni da I in $\mathbb{R}$ $(f_n): I \to \mathbb{R}$ limitate. Sia $s(x): I \to \mathbb{R}$ una funzione e $(S_n(x))$ la successione delle ridotte di (f_n). Si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente alla funzione $s(x)$ su I se:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in I} \left| \overset{\text{somma di tutte le funzioni, fino ad una certa funzione } f_n}{S_n(x)} - \underset{\text{somma di tutte le infinite funzioni}}{s(x)} \right| \right) = 0 \quad \text{od anche} \quad \lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in I} \left| \underset{\text{serie resto}}{R_n(x)} \right| \right) = 0$$

$S_n(x) \twoheadrightarrow s(x)$ se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$: $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in I \Rightarrow |S_n(x) - s(x)| < \varepsilon$

convergenza uniforme