NUMERO: 1807A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Tosti Michela

MATERIA: Analisi I - prof. Rolando

LOGICA

PROPOSIZIONE (P) LOGICA — enunciato che dice il vero o il falso

ESEMPIO: . la lavagna è nera SI!
. Domani pioverà NO!

NEGAZIONE DI P ($\neg P$) LOGICA → si legge: non P

ESEMPIO: P = la lavagna è nera
$\neg P$ = la lavagna non è nera

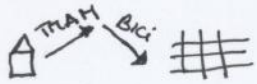
può essere indicato anche con → $\sim$

CONGIUNZIONE LOGICA è vera quando sono vere P e Q

($P \wedge Q$)

P et Q

esempio:



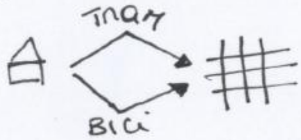
P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

DISGIUNZIONE LOGICA è falsa quando P e Q sono false

($P \vee Q$)

P VEL Q

esempio:



P	Q	$P \vee Q$
F	V	V
V	F	V
F	F	F
V	V	V

IMPLICAZIONE LOGICA è falsa quando P è vera e Q è falsa

($P \Rightarrow Q$) P IMPLICA Q

. IPOTESI . TESI
. o, antecedente . conseguente

P è condizione sufficiente per Q e Q è necessaria per P
ovviamente se $P \Rightarrow$ è vera!

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esempi!

$P \to Q = \sim P \vee Q$

$P \wedge \neg P$

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	F	F
F	V	F

→ **CONTRADDIZIONE** proposizione sempre falsa

$P \vee \neg P$

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
F	V	V
V	F	V

→ **TAUTOLOGIA** proposizione sempre VERA

PREDICATO ($P(x)$) enunciato con variabili libere

Esempio: $x^2 - 1 > 0$

→ si introducono i **quantificatori**

Universale

$\forall x \mid P(x)$

[il predicato, ovvero $P(x)$ è vero per ogni x]

Esistenziale

$\exists x \mid P(x)$

[$P(x)$ è vero per almeno un x]

Esercizi:

$\exists x \mid x^2 - 4 = 0$ vera

$\forall x \mid x^2 + 4 > 0$ sempre vera

$\forall x \mid x^2 - 4 > 0$ Falso

$\exists x \mid x^2 + 4 = 0 \begin{cases} \text{in } \mathbb{R} & \text{Falso} \\ \text{in } \mathbb{C} & \text{vera} \end{cases}$

$\neg(\forall x / P(x)) \Leftrightarrow \exists x / \neg P(x)$

$\exists (x) / x^2 - 4 < 0$ vera

$\neg(\exists x / P(x) \Leftrightarrow \forall x / \neg P(x)$

EQUIVALENZA LOGICA

$P \Leftrightarrow Q$ P EQUIVALE A Q

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

→ se vale, allora:
- P condizione necessaria e suff. affinché valga Q (e viceversa)
- P vale se e solo se vale Q (e viceversa)

Si adopera per dire che due preposiz. vogliono dire la stessa cosa

3°

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 158

LEGGE DI DALTON DELLE PRESSIONI PARZIALI

$$P_{\text{totale}} = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots \quad (5.11)$$

Come esempio, supponiamo di avere un recipiente di volume fisso che contiene azoto gassoso a una certa pressione e di introdurre nel recipiente un campione di idrogeno gassoso. Ciascuno dei due gas si comporta indipendentemente e quindi possiamo scrivere un'equazione di stato dei gas perfetti per ciascuno di essi:

$$P_{N_2} = \frac{n_{N_2}RT}{V} \qquad \text{e} \qquad P_{H_2} = \frac{n_{H_2}RT}{V}$$

Poiché ciascuno dei due gas occupa lo stesso volume totale ed è alla stessa temperatura, la pressione di ciascun gas dipende soltanto dalla sua quantità, n. Perciò, la pressione totale è

$$P_{\text{totale}} = P_{N_2} + P_{H_2} = \frac{n_{N_2}RT}{V} + \frac{n_{H_2}RT}{V} = \frac{(n_{N_2} + n_{H_2})RT}{V} = \frac{n_{\text{totale}}RT}{V}$$

con $n_{\text{totale}} = n_{N_2} + n_{H_2}$.

Si definisce frazione molare $\chi_i = n_i/n_{tot}$ ($\%_i$ vol. $= \chi_i$ *100). La somma delle frazioni molari è uguale a 1.

$$X_{N_2} = \frac{n_{N_2}}{n_{\text{totale}}} = \frac{n_{N_2}}{n_{N_2} + n_{H_2}}$$

Poiché la pressione totale è dovuta al numero totale di moli, la pressione parziale del gas A è data dalla pressione totale moltiplicata per la frazione molare di A, X_A:

$$P_A = X_A \times P_{\text{totale}} \quad (5.12)$$

L'Equazione 5.12 è un risultato molto importante. Per vedere che è valida per la miscela di N_2 e H_2, teniamo presente che $X_{N_2} + X_{H_2} = 1$ per ottenere

$$P_{\text{totale}} = P_{N_2} + P_{H_2}$$
$$= (X_{N_2} \times P_{\text{totale}}) + (X_{H_2} \times P_{\text{totale}}) = (X_{N_2} + X_{H_2})P_{\text{totale}} = 1 \times P_{\text{totale}}$$

Modi di esprimere la composizione di una miscela gassosa

Frazione molare:

$$\frac{p_1 V}{P V} = \frac{n_1 RT}{(n_1 + n_2 + n_3) RT} \qquad p_1 = \frac{P\, n_1}{n_1 + n_2 + n_3} = P \cdot \chi$$

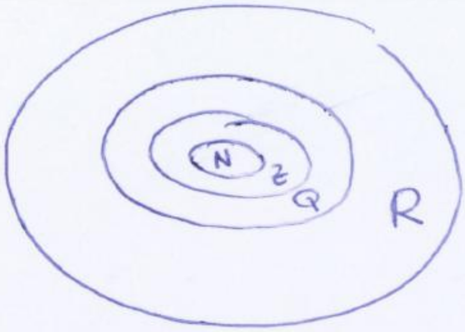
Percentuale in volume per il gas 1:

$$\%_{v1} = (v_1/V) \cdot 100 = n_1/(n_1 + n_2 + n_3) \cdot 100 = \chi \cdot 100$$

Percentuale in peso per il gas 1:

$$\%_{m1} = (m_1/m) \cdot 100$$

RICORDA:



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Valore Assoluto o Modulo

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $|x| = |-x|$; $|x| \geq 0$; $|x| = 0 \iff x = 0$

dato $K \geq 0$

$|x| \leq K \iff \begin{cases} x \leq K \\ x \geq -K \end{cases}$ cioè $-K \leq x \leq K$

$|x| \geq K \iff x \leq -K \cup x \geq K$

N.B: la DISTANZA TRA 2 pt SU UNA RETTA È DATO DAL VALORE ASSOLUTO DELLA LORO DIFFERENZA

$d(x;y) = |x-y|$

Proprietà del V. ASSOLUTO

1) $|x| = a \iff x = \pm a$ $\quad |x| < a \iff a \leq x \leq a$ $\quad |x| > a \iff x < -a \vee x > a$

2) $|xy| = |x||y|$ $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ se $y \neq 0$ $\quad |x^n| = |x|^n$ per $\forall n \in \mathbb{Z}$

3) $|x+y| \leq |x| + |y|$ DISEGUAGLIANZA TRIGONALE

Funzioni

DEFINIZIONE: corrispondenza che associa ad ogni elemento x di un certo insieme X al più un elemento $f(x)$ appartenente ad un certo insieme Y.

dominio: insieme degli $x \in X$ a cui è effettivamente associato un valore $f(x)$ ↳ tale valore è detto immagine di x tramite la funzione f.

IMMAGINE: insieme dei valori $y \in Y$ effettivamente assunti da Y

Funzione suriettiva: ⇒ ha come immagine l'asse y
se ogni elemento di $b \in B$ è il corrispondente di almeno un elemento di $a \in A$.

$f: A \to B$ suriettiva se $f(A) = B$

Funzione iniettiva: ⇒ esempio: non è iniettiva la parabola
se i corrispondenti di due qualunque elementi distinti di A sono elementi distinti di B.

$f: A \to B$ iniettiva se: $\forall a, b \in A \,;\in A: a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Funzione biettiva:
se è sia suriettiva che iniettiva

FUNZIONE INVERSA → solo se iniettiva e suriettiva
Data una funzione $y = \dots$, devo ricavare la x per far diventare la funzione $x = \dots$

N.B $(f^{-1})^{-1} = f$

esempio: $y = x^3 + 5 \to y^{-1} = \sqrt[3]{x-5}$

invertibile se monoton
↳ sufficiente ma non necessaria

NOTA BENE: QUANDO FAI LA FUNZIONE INVERSA IL DOMINIO (che era l'asse x) DIVENTA L'ASSE y E VICEVERSA CON L'IMMAGINE.
(codominio)

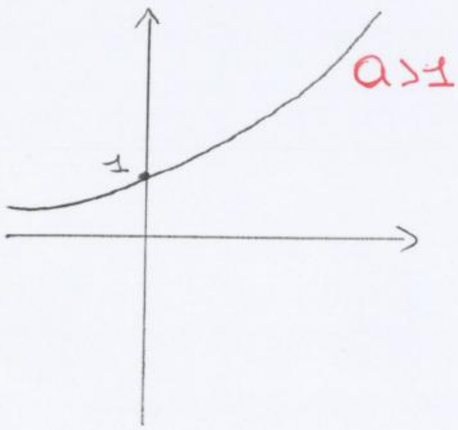
funzioni reali di variabile reale cioè:

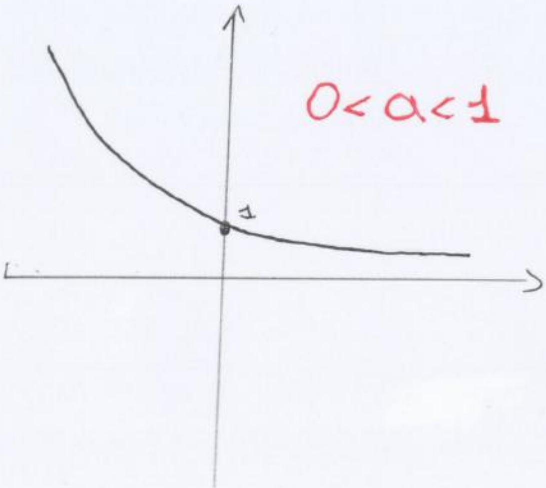
$f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

FUNZIONI ELEMENTARI (GRAFICI)

Funzioni esponenziali:

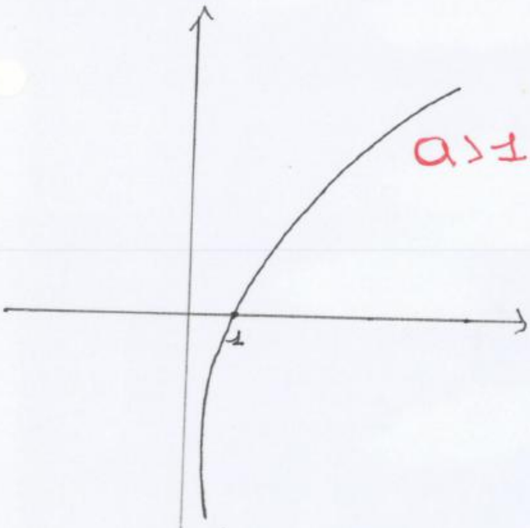
a^x; con $a \in \mathbb{R}$ e $a > 0$

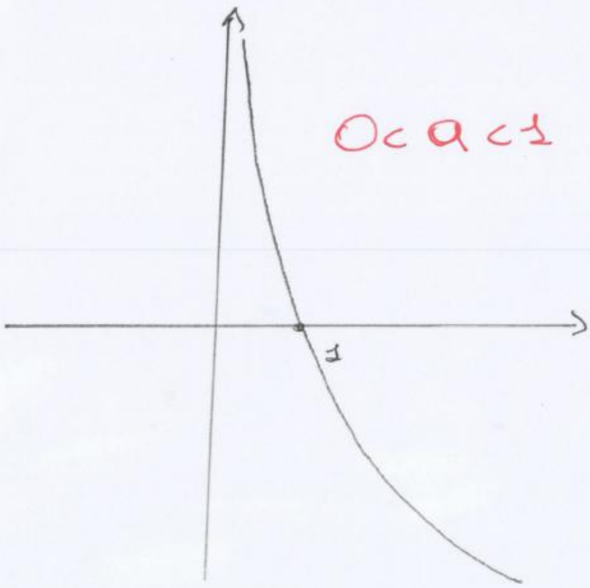




- dominio di entrambe $\mathbb{R}$
- immagine " " $\mathbb{R}^+$.

Funzioni logaritmiche

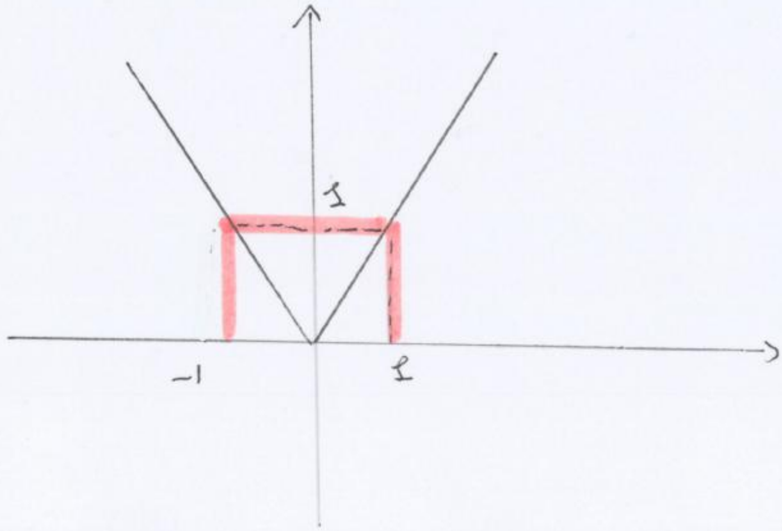




- dominio di entrambe $\mathbb{R}^+$
- immagine " " $\mathbb{R}$

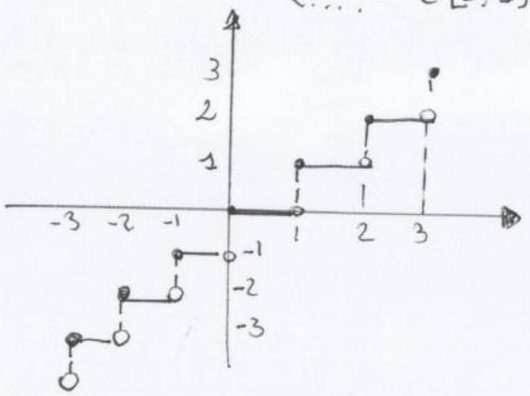
FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



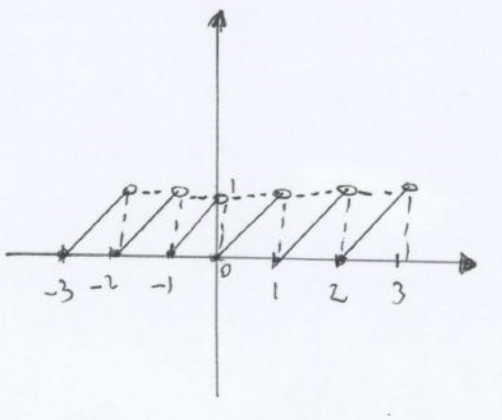
FUNZIONE PARTE INTERA

$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\} = \begin{cases} \dots \\ 2 & \text{se } x \in [2;3) \\ 1 & \text{se } x \in [1;2) \\ 0 & \text{se } x \in [0;1) \\ \dots \end{cases} \quad \text{ogni } x \in \mathbb{R}$$



FUNZIONE MANTISSA

$$M(x) = x - [x]$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 158

Estremi e Max, Min di una $f(x)$ 15

Estremo Superiore e Inferiore

Sono valori a cui la funzione si avvicina ma che non raggiunge, ne supera, MAI

$\sup f(x)$ e $\inf f(x)$

Massimo e Minimo

Sono il massimo e il minimo valore che la funzione raggiunge (quindi sono compresi nelle soluzioni)

$\min f(x)$ e $\max f(x)$

NON sempre esistono

esempio notevole: $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ hanno: $\max = 1$, $\min = -1$

Funzioni Monotone

N.B:

x e y direttamente proporzionali $\frac{y}{x} = m$

x e y inversamente proporzionali $yx = k$

CRESCENTE $\forall x_1; x_2 \in A;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

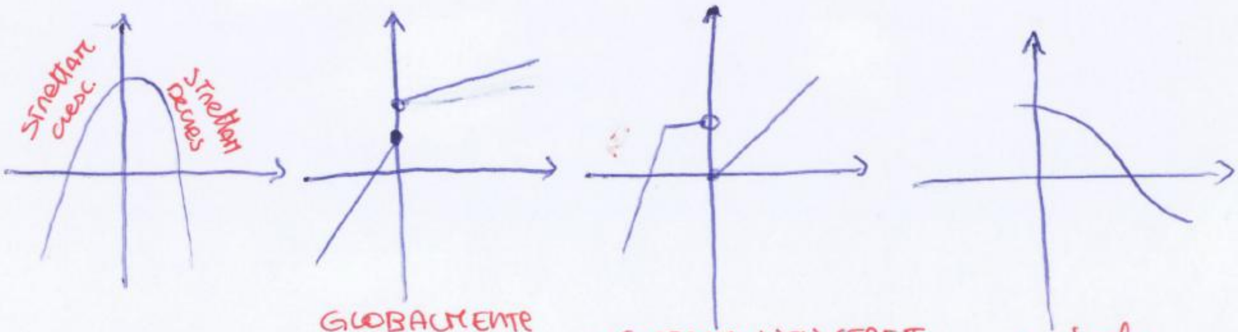
STRETTAMENTE CRESCENTE $\forall x_1; x_2 \in A;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

DECRESCENTE $\forall x_1; x_2 \in A;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

STRETTAMENTE DECRESCENTE $\forall x_1; x_2 \in A;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

MONOTONA (strettamente) se f è STRETTAMENTE CRESCENTE o STRETTAMENTE DECRESCENTE

(può essere espressa con l'equivalenza ($\Leftrightarrow$))



GLOBALMENTE STRETTAMENTE CRESCENTE

• GLOBALM. NON STRETT. CRESCENTE
• STRETT. CRESC. $(0;+\infty)$

Globalm strettamente decrescente

Funzioni Periodiche

$f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è periodica se esiste un numero reale $p > 0$ tale che:

$$\forall x \in \text{dom} f;\ x \pm p \in \text{dom} f \quad e \quad f(x+p) = f(x)$$

in tal caso p è un periodo per f

Graficamente:

Una $f(x)$ è periodica di periodo p se e solo se suddiviso l'asse delle ascisse in intervalli di ampiezza pari a p; il suo grafico si ripete = a se stesso su ciascuno di tali intervalli.

es: $\operatorname{sen}(x)$

lungo y

$f(x) \quad g(x) = \beta(x) \Rightarrow (g \circ f)x = (f(x)) = \beta f(x)$ es $2 \log x$ 19

se $0 < \beta < 1$ dilatazione su y
se $\beta > 1$ contrazione su y

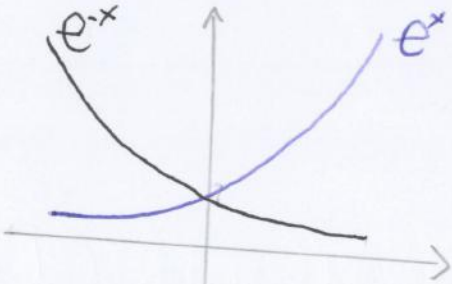
SIMMETRIE

Rispetto a $\vec{y}$

$f(x), \quad g(x) = -x \Rightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x)$

→ Ribaltamento simmetrico rispetto a $\vec{y}$

$f(x) = f(-x)$

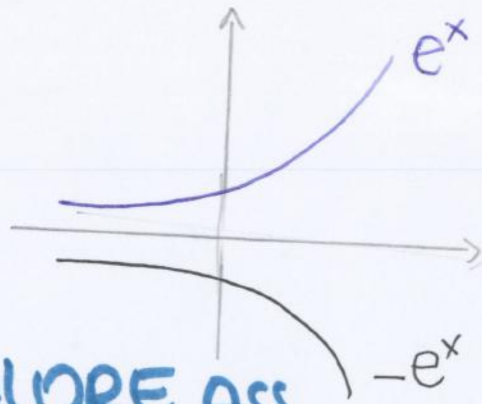


Rispetto alla $\vec{x}$

$f(x); \quad g(x) = -x \Rightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = -f(x)$

→ Ribaltamento simmetrico rispetto a $\vec{x}$

$f(x) = -f(x)$



VALORE ASS.

se io ho una funzione $f|x| \rightarrow$ RIBALTO le $x<0$

se io ho una funzione $|f(x)| \rightarrow$ ribalto le $y<0$

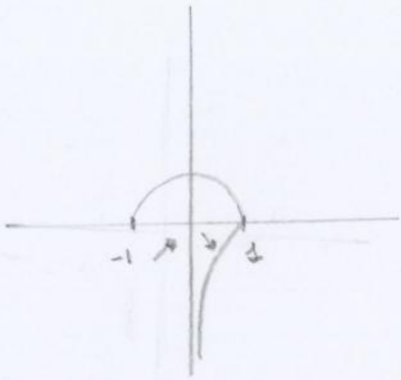
esempio:

$h: \text{dom}\,h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad h(x) = \log(1-x^2)$

$\text{dom}\,h(x) = (-1; +1)$

$g(x) = \log(x)$ $\quad g \circ f = \log(1-x^2)$

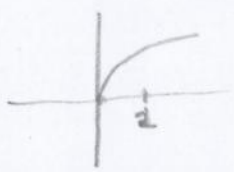
$f(x) = (1-x^2)$



crescente tra (-1 e 0)
decrescente tra (0 e 1)

RESTRIZIONE

Data una $f: A \to B$ ed un sottoinsieme C dell'insieme A si dice RESTRIZIONE di f all'insieme C la funzione $h: C \to B$ tale che $\quad h(a) = f(a), \ \forall a \in C$



dom $(0, +\infty) \to$ sottoinsieme $(0, 1)$
$h \qquad f$

$h(2) = f(2)$ $\quad f_{|A}$

ELEVAMENTO DI FUNZIONE A FUNZIONE

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \log f(x)}}$$

INTORNI

Qualunque intervallo limitato che comprenda (o si aggiri intorno) a x_0

INTORNO COMPLETO $\quad I_r = \{x \in \mathbb{R} \,/\, d(x; x_0) < r\} = (x_0 - r \,;\, x_0 + r)$

INTORNO BUCATO (completo) $\quad I_r^* = I_r \setminus \{x_0\}$

I. UNILATERALE DESTRO $\quad I_r(x_0^+) = [x_0 \,;\, x_0 + r)$

I. UNILATERALE SINISTRO $\quad I_r(x_0^-) = (x_0 - r \,;\, x_0]$

I. UNILATERALE BUCATO $\quad I_r^*(x_0^+) = (x_0 \,;\, x_0 + r)$ e $I_r^*(x_0^-) = (x_0 - r \,;\, x_0)$

LIMITE FINITO DI UN PUNTO FINITO

23

DEFINIZIONE:

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in domf \,/\, |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$|x - c| < \delta$ $\quad \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$ da cui: $c - \delta < x < c + \delta$

cioè:

$\forall I_\varepsilon(\ell); \exists I_\delta(x_0); \forall x \in domf; x \leq I^*_\delta(x_0); f(x) I_\varepsilon(\ell)$

LIMITE FINITO DI UN PUNTO INFINITO

DEFINIZIONI:

DIPENDE DA ε

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon > 0 \,/\, \forall x \in domf; \; x > N_\varepsilon$ e $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon > 0 \,/\, \forall x \in domf; \; x < N_\varepsilon$ e $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon > 0 \,/\, \forall x \in domf; \; |x| > N_\varepsilon$ e $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

cioè:

$\forall I_\varepsilon(\ell); \exists I_{N_\varepsilon}(\pm\infty) \; \forall x \in domf \,/\, x \in I_{N_\varepsilon}(\pm\infty) \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$

LIMITE INFINITO DI UN PT FINITO

$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ $\quad \forall M > 0 \; \exists \delta \quad f(x) > M \quad |x - c| < \delta$

$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ $\quad \forall M > 0 \; \exists \delta \quad f(x) < -M \quad |x - c| < \delta$

$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ $\quad \forall M > 0 \; \exists \delta \quad |f(x)| > M \quad |x - c| < \delta$

* non essenziale scriverlo

DEFINIZIONE UNIFICATA DI LIMITE

IN TERMINI DI INTORNI:

Supponiamo $C = x_0 \in \mathbb{R}$ oppure $C = \pm\infty$
e $\ell \in \mathbb{R}$ oppure $\ell = \pm\infty$

Sia $f : \text{Def} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita almeno in un intorno bucato di C eventualmente solo unilaterale se $C = x_0 \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ significa $\forall I(\ell);\ \exists I(c);\ \forall x \in \text{dom} f$ se $x \in I^*(c) \Rightarrow f(x) \in I(\ell)$

RIASSUME TUTTI I LIMITI

CONTINUITA'

⇒ N.B. - Combinaz. lineare di f continue è continua
- f reali sono tutte continue sul loro D.

Sia data una funzione f; sia $x_0 \in$ dom f allora, si dice che f è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

→ f è continua dunque se è continua in ogni $x_0 \in$ dom f

N.B. se $x \to x_0^+$ è continua da dx, analogamente da sx.

PROPOSIZIONE Se f è definita in un intorno completo di x_0, allora f è continua in $x_0 \iff$ f è continua in x_0 sia da dx che da sx.

TEOREMA Tutte le funzioni elementari e le funzioni razionali sono continue in tutti i pt del proprio dominio

↳ questo + la conosc. dei loro grafici ci permette di valutare tutti i limiti delle f elementari.

PUNTI DI DISCONTINUITA'

Diciamo che x_0 è un pt di discontinuità per f se $x_0 \notin$ dom oppure non è vero che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(I) DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

ii) $x_0 \notin$ dom f $\vee$ $f(x_0) \neq \ell$

Si può eliminare ottenendo una f(x) continua in x_0 estendendo ℓ:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \ell & x = x_0 \end{cases}$$

esempio $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $x_0 = 1$

ora: $1 \notin$ dom f $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

$$\tilde{f}: \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x_0 = 1 \end{cases}$$

(II) DISCONTINUITÀ DI I SPECIE (o A SALTO)

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_1$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_2$ $\ell_1 \neq \ell_2$

SALTO ⇒ differenza tra $\ell_1 - \ell_2$

Algebra dei limiti

Somma

$$\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = \ell_1 + \ell_2$$ FI $+\infty - \infty$

Prodotto

$$\lim_{x \to c}[f(x)\, g(x)] = \ell_1 \cdot \ell_2$$ FI: $0 \cdot \infty$

Rapporto

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

b_n \ a_n	$\ell \neq 0$	0	∞
$\ell \neq 0$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	∞
0	∞	FI	∞
∞	0	0	F.I

Teorema di sostituzione

Si applica alle funzioni composte

DATE le funzioni:

Supponiamo:

- $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ • g una funzione definita $I^*_{(\ell)}$ Supponiamo inoltre
- $\rightarrow$ esista $\lim_{y \to \ell} (y)$ $\longrightarrow$ g sia continua in ℓ

Allora:

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = \lim_{y \to \ell} g(y) \Rightarrow$$

se f è continua
e g " "
allora f(g(x)) è "

esempi di applicazione:

1) $\lim_{x \to c} f(x) = \ell \rightsquigarrow \lim_{x \to c} |f(x)| \overset{\ell}{=} \lim_{y \to \ell} |y|$ e $\lim_{x \to c} e^{f(x)} \overset{\ell}{=} \to \lim_{y \to \ell} e^y$

N.B..

funzione infinitesima => se il suo limite è 0
funzione infinita => se il suo limite è ∞

3)

Corollario: il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima è 0 (ovvero è infinitesimo)

f è limitata in $I^*(c)$ e $\lim_{x \to c} g(x) = 0$

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = 0$$

LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE

Sia:

$\to c = x_0^-$ oppure $\to c = +\infty$

supponiamo che f sia monotona in $I^*(c)$

allora:

$$\lim_{x \to c} (x) \begin{cases} \sup f(x) \text{ se } f \text{ è crescente } I^*(c) \\ \inf f(x) \text{ se } f \text{ è decrescente } I^*(c) \end{cases}$$

analogamente:

$\to c = x_0^+$ oppure $\to c = -\infty$

" " " "

$$\lim_{x \to c} (x) \begin{cases} \inf f(x) \text{ se } f \text{ è crescente } I^*(c) \\ \sup f(x) \text{ se } f \text{ è decrescente } I^*(c) \end{cases}$$

SIMBOLI DI LANDAU

→ servono per confrontare il comportamento di 2 funzioni nell'intorno bucato di c

EQUIVALENZA

f e g definite in $I^*(c)$, f e g sono equivalenti per $x \to c$ se:

$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ in simboli: $f \underset{x \to c}{\sim} g$

ESEMPI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\sin x \sim x$ $_{x \to 0}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $_{x \to 0}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ $e^x-1 \sim x$ $_{x \to 0}$ e $\log(1+x) \sim x$ $_{x \to 0}$

TEOREMA (principio di sostituzione con termini equivalenti)

Nel limite per $x \to c$ è lecito sostituire

- un qualsiasi fattore di un prodotto (anche tutti)
- numeratore o denominatore di un rapporto

con funzioni equivalenti per $x \to c$.

$$\lim_{x \to c} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to c} \tilde{f}(x)\, g(x) \qquad \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{\tilde{f}(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{\tilde{f}(x)}$$

N.B. se $f \sim \tilde{f}$ allora $\lim_{x \to c} f(x)$ esiste $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to c} \tilde{f}(c)$

N.B. NON SI SOSTITUISCONO termini equivalenti in somme e differenze

LIMITI NOTEVOLI E "o"

- $\sin x \sim x \Rightarrow \sin x = x + o(x)$
- $e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^x = 1 + x + o(x)$
- $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(\cancel{\tfrac{1}{2}}x^2) \leadsto \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 - o(x^2)$

TEOREMA: - PRINCIPIO ELIMINAZIONE TERMINI TRASCURABILI -

$$\lim_{x \to c} (f(x) + o(f))(g(x) + o(g)) = \lim_{x \to c} f(x)g(x)$$

e

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) + o(f)}{g(x) + o(g)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

1) Se f è limitata in un $I^*(c)$ e $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$ allora $f = o(g)_{x \to x_0}$

2) Potenze nell'origine e all'infinito. Una potenza di x è trascurabile rispetto alle potenze con esponente < nell'origine, a quelle con esponente maggiore all'∞.

$$x^\alpha = o(x^\beta)_{x \to 0^+} \Longleftrightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha - \beta} = 0 \Longleftrightarrow \alpha > \beta$$

$$x^\alpha = o(x^\beta)_{x \to +\infty} \Longleftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \to +\infty} x^{\alpha - \beta} = 0 \Longleftrightarrow \alpha < \beta$$

I risultati valgono per $x \to 0^-$ e $x \to -\infty$ sostituendo x con $|x|$ se le potenze considerate non sono definite sui ~~n~~ negativi.

OSSERVAZIONI FINALI

3^x

1) $f(x) = o(1)_{x\to c}$ equivale a $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ entrambe significano $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{1} = 0$

2) $f(x) = \ell + o(1)_{x\to c}$ " " $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ " " $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-\ell}{1} = 0$

TEOREMA DI SOSTITUZIONE

→ consente di operare cambi di variabile nei simboli di Landau

se $\lim_{x\to c} \varphi(x) = \ell$ $(= y_0 ; y_0^{\pm} ; \pm\infty)$ con $\varphi(x) \neq \ell$ in $I^*_{(c)}$ allora

$$f(y) \sim g(y) \text{ per } y \to \ell \Rightarrow f(\varphi(x)) \sim g(\varphi(x)) \text{ per } x \to c$$

$$f(y) = o(g(y)) \text{ per } y \to \ell \Rightarrow f(\varphi(x)) = o(g(\varphi(x))) \text{ " "}$$

infatti per il teorema di sostituzione risulta:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim_{y\to \ell} \frac{f(y)}{g(y)}$$

dove il 2° limite esiste e vale 1 o 0 a seconda che $f \sim g$ o $f = o(g)$

ALTRI SIMBOLI DI LANDAU

a) diciamo che f e g sono equigrandi per $x \to c$ se:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \text{ (finito, non nullo)}$$

In simboli: $f \asymp g_{\,x\to c}$

b) diciamo che f è controllata da g per $x \to c$ se

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \text{ (finito)}$$

IN SIMBOLI:

$\underbrace{f = O(g)_{x\to c}}$ (f è un O grande di g per $x \to c$)

allora esiste $c > 0$ costante $|$ $|f(x)| \le c|g(x)|$ in un qualche $I^*(c)$

ESEMPI NOTEVOLI

1) limiti notevoli

Per $\boxed{x \to 0}$ si ha $\operatorname{sen} x \sim \log(1+x) \sim e^x - 1 \sim x \simeq (1+x^\alpha) - 1 \quad (\alpha \neq 0)$

sono tutti infinitesimi dello stesso ordine

Inoltre: $\cos x - 1 \simeq x^2$: $\cos x - 1$ è un infinitesimo dello stesso ordine di x^2.

2) potenze

Per $\boxed{x \to 0^+}$ si ha $x^\alpha = o(x^\beta)$ per $\beta < \alpha$

- Se $\alpha; \beta > 0$ allora x^α è un infinitesimo di ordine superiore ad ogni x^β con $\beta < \alpha$
- Se $\alpha; \beta < 0$ allora x^α è un infinitesimo di ordine inferiore ad ogni x^β con $\beta < \alpha$

Per $\boxed{x \to +\infty}$ si ha $x^\alpha = o(x^\beta)$ per $\beta > \alpha$

- Se $\alpha; \beta > 0$ x^α è un infinitesimo di ordine inferiore ad ogni x^β con $\beta > \alpha$
- Se $\alpha; \beta > 0$ x^α è un infinitesimo di ordine superiore ad ogni x^β con $\beta > \alpha$

3) confronti di crescita

Per $\boxed{x \to +\infty}$ si ha $\log x = o(x^\alpha)$ e $x^\alpha = o(e^x)$ per $\forall \alpha > 0$

- $\log x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualsiasi potenza positiva, la quale è un infinito di ordine inferiore rispetto a e^x

Per $\boxed{x \to -\infty}$ si ha $e^x = o\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)$ per ogni $\alpha > 0$

- e^x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a qualsiasi potenza negativa

Per $\boxed{x \to 0^+}$ si ha $\log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ per ogni $\alpha > 0$

- $\log x$ è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualsiasi

DEFINIZIONE DI ORDINE E PARTE PRINCIPALE IN C:

Sia φ INFINITO/INFINITESIMO in C. Si dice che f è INFINITO/INFINITESIMO DI ORDINE α rispetto al campione φ se esistono $\alpha > 0$ ed $\ell \in \mathbb{R} \setminus$ tale che:

$$\boxed{\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{\varphi(x)^\alpha} = \ell \neq 0} \text{ cioè } \boxed{f(x) \underset{x \to c}{\sim} \ell \varphi(x)^\alpha} \text{, cioè } \boxed{f(x) = \ell \varphi(x)^\alpha + o(\varphi(x)} \ldots$$

In tal caso, l'INFINITO/INFINITESIMO $p(x) = \ell \varphi(x)^\alpha$ è detto parte principale DI f rispetto a φ

→ N.B. α ed ℓ se esistono sono unici.

ESEMPIO, LIMITI NOTEVOLI

$x \to 0$ si ha $\sin x \sim \log(1+x) \sim e^x - 1 \sim x$

sono tutti INFINITESIMI DI ORDINE 1 rispetto ad x nell'origine con parti principali $p(x) = x$

$x \to 0$ si ha $\cos x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

la funzione $f(x) = \cos x - 1$ è INFINITESIMO DI ORDINE 2 rispetto ad x nell'origine con $p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x \to 0$ si ha $\log_a(1+x) \sim \frac{1}{\log a} x \sim \ln a\, x$ e $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ $(\alpha \neq 0$

sono tutti INFINITESIMI DI ORDINE 1 rispetto ad x nell'origine, rispettivamente con $p(x) = \frac{1}{\ln a} x$; $p(x) = (\ln a) x$; $p(x) =$

la scelta DI INFINITI/INFINITESIMI (φ) è ARBITRARIA MA SOLITAMENTE si scelgono i più semplici.

- ↳ $x \to \pm\infty$ avremo: $\varphi(x) = |x|$ e $\varphi(x) = \frac{1}{|x|}$
- ↳ $x \to \pm x_0$ avremo: $\varphi(x)^\alpha = \frac{1}{|x - x_0|^\alpha}$ e $\varphi(x) = |x - x_0|^\alpha$

Limite di successioni

SUCCESSIONI: funzioni il cui dominio è un sottinsieme di $\mathbb{N}$

Ponendo $a_m = a(n)$, la successione viene: $\boxed{(a_m)_{m \geq 0}}$ o $\boxed{a_0; a_1, a_2 \dots}$

↳ è ammesso: $dom\,a = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, $n_0 \in \mathbb{N}$, nel qual caso sarà $(a_m)_{m \geq n_0}$ ovvero $a_{n_0}; a_{n_0+1} \dots$

N.B.
La nozione di limite (finito o non finito) a $+\infty$ ha senso anche per le successioni

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ significa $\forall I(\ell); \exists N>0; n>N \Rightarrow a_n \in I(\ell)$

Posso sempre supporre $N \in \mathbb{N}$ e $N > n_0$

dove $\underline{\underline{\ell}} = y_0; y_0^{\pm}; \pm\infty$

A parole: un predicato $p(n)$ dipendente da una variabile $n \in \mathbb{N}$ vale definitivamente se $\exists N \in \mathbb{N}$ tale che $p(n)$ è vera per ogni $n > N$.

Una successione $(a_m)_{m \geq n_0}$ è:

CONVERGENTE: ad $\ell \in \mathbb{R}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$) se $\forall \varepsilon > 0$ risulta $|a_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente (cioè $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$)

REGOLARE

DIVERGENTE:
- a $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$) se $\forall M > 0$ risulta: $a_n > M$ definitivamente (cioè $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$, $a_n > M$)
- a $-\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) se $\forall M > 0$ risulta: $a_n < -M$ definitivamente (cioè $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N$, $a_n < -M$)

se non è regolare: IRREGOLARE

TEOREMA DI SOSTITUZIONE

Sia $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$ (finito o infinito) e sia f una funzione definita in un I^*_c

i) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \ell$ esista

ii) f continua in c (anche solo da un lato se $c = x_0^{\pm}$)

allora: $f(c_n)$ esiste e risulta: $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = \ell$

$f(c_n)$ è composta: $n \to c_n \to f(c_n)$

TEOREMA (SUCCESSIONI MONOTONE)

Ogni successione monotona è regolare e si ha:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup_n a_n \text{ (finito o } +\infty) & \text{se } a_n \text{ crescente} \\ \inf_n a_n \text{ (finito o } -\infty) & \text{se } a_n \text{ decrescente} \end{cases}$$

E' utile osservare che la crescenza o decrescenza in una successione a_n equivale a:

$$\forall n;\ a_n \le a_{n+1} \quad (a_n \ge a_{n+1})$$

fattoriale: $n!$

definito come $\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ldots}$

esempio: ▯▯▯▯▯▯▯

1° 7 possibilità
2° 6 possibilità...

$n!$ = tutte le possibili combinazioni per sedersi.

Coefficiente Binomiale: $\binom{n}{k}$

definito come $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$

$n, k \in \mathbb{N}$
$1 \leq k \leq n$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

esempio: $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 5 \cdot 3 = 15$

Proprietà di Monotonia delle potenze

$a, b \in \mathbb{R}_+$
$n \in \mathbb{N} \quad n \neq 0$
$a^n > b^n \iff a > b$

$a > 1 \quad m, n \in \mathbb{N}$
$a^n > a^m \iff n > m$

Radice

Radice ennesima di y chiameremo, con $n \geq 2$, quel numero, se esiste, che elevato alla potenza n-esima riproduce y.

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{y}\right)^n = y}$$

N.B. $\sqrt{16} = +4$
$x^2 = 16 \quad x = \pm 4$

Se abbiamo:

$x^a = b$ · $a^x = b$ $a^b = x$

$a^x = b \iff x = \log_a b$ $\begin{pmatrix} a > 0 \\ b > 0 \end{pmatrix}$ Proprietà fondamentale del logaritmo

$a^0 = 1 \iff 0 = \log_a 1$

altre proprietà:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a(x^n) = n \log_a x$

$\log_a x \cdot \log_x b = \log_a b$

I tipo di camb. di base

Prodotto Cartesiano A×B

Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è l'insieme di tutte le coppie ordinate del tipo {a; b} dove $a \in A$ e $b \in B$

esempio:

$A\{1;3;5\}$ e $B\{0;2;4\}$

$A \times B = \{(1;0);(1;2);(1;4);(3;0);(3;2);(3;4);(5;0);(5;2);(5;4)\}$

mentre è $\neq B \times A$

$B \times A = \{(0;1);(0;3);(0;5);(2;1);(2;3);(2;5);(4;1);(4;3);(4;5)\}$

infatti N.B. È RILEVANTE L'ORDINE DEGLI ELEMENTI

es: $(4;3) \notin A \times B$

$(4;3) \in B \times A$

Relazione: sottoinsieme di A×B

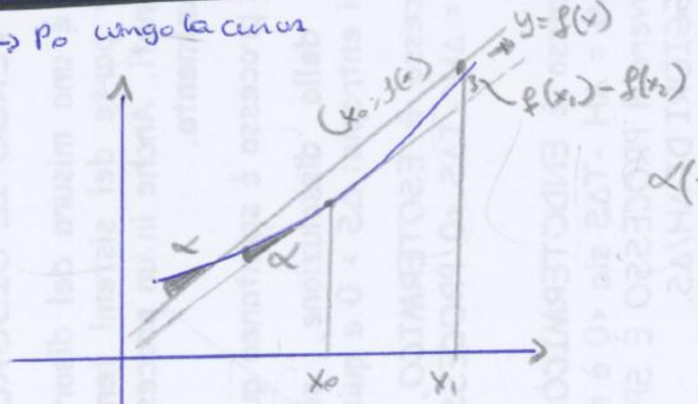
$R\{(1;4);(3;2);(5;4)\}$ → è una relazione ma non è una funzione perché ... associo 2 n ≠.

Si dice: $1 \in A$ ed è in relazione R con $4 \in B$

DERIVATE

Problema: cos'è la retta tg ad una curva in un solo pt? Sì

USIAMO L'IDEA DI LIMITE: POSIZIONE LIMITE DELLE RETTE SECANTI IN P_0 e P per $P \to P_0$ lungo la curva



$\alpha(x) \xrightarrow[x \to x_1]{} \alpha$ se la retta secante tende alla tg

$\tan\alpha'(x) \to \tan\alpha = m$

$\tan\alpha'(x)$ = COEFF ANGOLARE DELLA RETTA SECANTE

m = COEFF. DELLA RETTA TG

+ allora ha equazione:

$y = f(x_0) + m(x_1 - x_0)$ con $m = \lim_{x \to x_0} m(x)$

$m(x) = m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ RAPPORTO INCREMENTI $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Definizione: Sia $f: \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in un INTORNO DI UN PUNTO $x_0 \in \mathbb{R}$, eventualmente solo unilaterale. Si chiama DERIVATA DI f IN x IL NUMERO REALE

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ SE ESISTE FINITO

↳ che si può scrivere anche come $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

dove $x = x_0 + h$

$h = x - x_0$

In TAL CASO SI DICE f è derivabile in x e che la retta

$y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{m}(x - x_0)$ è la retta tg a f in x_0 o al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

Altri simboli per $f'(x)$:

$\dot{f}(x_0)$ ← DA NEWTON, utilizzata ancora in fisica

$\frac{df}{dx}(x_0)$ ← ancora USATA IN FISICA ma è scritta anche come: $\left.\frac{d}{d(x)} f(x)\right|_{x_0}$

$Df(x_0)$ ← Cauchy

Definizione: sia $f: \text{dom} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 52

1) $\text{dom} f' := \{x \in \text{dom} f \mid f \text{ è derivabile in } x\}$

chiama funzione derivata di f la funzione

$$f' : \text{dom} f' \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x)$$

2) Si dice che f è:

- derivabile (ovunque) se $\text{dom} f' = \text{dom} f$
- derivabile in (o su) $A \subseteq \text{dom} f$ se $f|_A$ è derivabile ovunque.

Esempi notevoli:

1) $f(x) = k$ costante reale $\quad f'(x) = 0 \quad$ perché $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$= \lim_{x \to x_0} \frac{k-k}{(x-x_0)}$ nulla qualunque sia $x \Rightarrow 0$

2) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ dom f dipende α $\quad f'(x) = \alpha \cdot x^{(\alpha-1)}$

perché: $x_0 \in \text{dom} f$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ con $x_0 \neq 0$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^\alpha - x_0^\alpha}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^\alpha \left\{\left[1 + \frac{h}{x_0}\right]^\alpha - 1\right\}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x_0^\alpha \cdot \alpha \frac{h}{x_0}}{h} = \alpha \cdot x_0^{(\alpha}$$

se invece $\underbrace{x_0 = 0 \in \text{dom} f}_{\iff \alpha > 0}$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to x_0} x^{(\alpha-1)} \to \begin{cases} \alpha > 1 & 0 \\ \alpha = 1 & 1 \\ 0 < \alpha < 1 & \infty \text{ non vi è derivata} \end{cases}$$

3) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ — $\sqrt[3]{x}$ $\quad \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4) $f(x) = 1/x$ dom $\mathbb{R}^*$ $\quad f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

5) $f(x) = \text{sen}\, x$ $\quad \text{dom} f = \mathbb{R}$ $\quad$ fisso $x_0 \in \mathbb{R}$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h} = \lim_{h \to 0}$ ~~$\text{sen}\,x_0 \cos h +$~~

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x_0 \cdot \cosh + \cos x_0 \cdot \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x_0 (\cos h - 1)}{h}}_{\substack{h\to 0 \\ \to 0}} + \underbrace{\frac{\cos x_0 \operatorname{sen} h}{h}}_{1} \right] = \cos x_0$$

$f'(x) = \cos x$

6) $f(x) = \cos x$ $\quad f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

7) $f(x) = a^x$ $\quad f'(x) = a^x \log a$

8) $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

9) $f(x) = \log_a x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \log a}$

10) $f(x) = \log x$ $\quad f'(x) = 1/x$

REGOLE DI DERIVAZIONE

TEOREMA (operazioni algebriche)

Siano f, g tali che $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ contenga un intorno di un pt $x_0 \in \mathbb{R}$, eventualmente solo unilaterale.

Se f e g sono derivabili in x_0, allora

$\boxed{1}$ $(\alpha F + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

CASI PARTICOLARI:

- $(F+g)' = F' + g'$
- $(F-g)' = F' - g'$
- $(\alpha F)' = \alpha \cdot F'$

Si generalizza a: $(\alpha_1 F_1 + \dots + \alpha_n F_n)' = \alpha_1 F_1'(x_0) + \dots \alpha_n F_n'(x_0)$

es: $h(x) = x^6 + \frac{2}{3}x^3 + 5 - 2x = 6x^5 + \frac{2}{3} 3x^2 - 2 = 6x^5 + 2x^2 - 2$

II) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$ REGOLA DI LEIBNIZ

esempio: $h(x) = x e^x \cdot \operatorname{sen} x \Rightarrow h'(x) = e^x \operatorname{sen} x + x(e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x)$

$= e^x(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + \cos x)$

III) TEOREMA (OPERAZIONI ALGEBRICHE)

1) combinazione lineare
2) prodotto
3) Siano F e G tali che $\operatorname{dom}\left(\frac{F}{G}\right)$ contenga un intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ eventualmente solo unilaterale

se F, G sono derivabili in x_0 allora

$$\boxed{\left(\frac{F}{G}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x)}{[g(x_0)]^2}}$$

conseguenza:

$h(x)$ = funz. razionale

$\forall x \in \operatorname{dom} h$

- dom h contiene $I(x_0)$
- numeratore e denominatore derivabili in x_0

$\Rightarrow$ h derivabile in x_0 ($\operatorname{dom} h' = \operatorname{dom} h$) e h' è ancora razionale.

TEOREMA (DERIVATA DI F COMPOSTE)

Siano f e g tali che $\operatorname{dom}(g \circ f)$ contenga un $I(x_0) \in \mathbb{R}$ (eventualmente solo unilaterale)

se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ allora:

$$\boxed{D g[f(x)]\Big|_{x=x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

COROLLARIO

Se $f: \text{dom} f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è pari (rispettivamente dispari) e derivabile ovunque allora $f': \text{dom} f \to \mathbb{R}$ è dispari (ris. pari)

↳ quindi: la derivata di una f pari è dispari e viceversa.

DIM: $\forall x \in \text{dom}\, x$

$f(x) = f(-x) = g(x)$ $\qquad g\; x \to -x \xrightarrow{f} f(-x)$

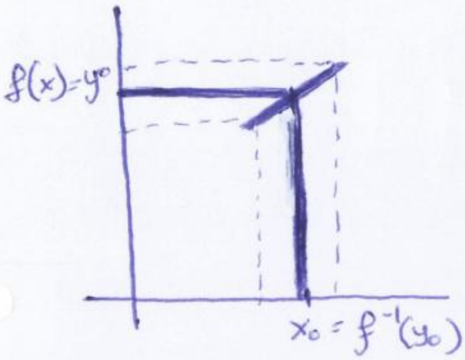
pari

$\Rightarrow f'(x) = Df(-x) = f'(-x)(-1) = -f'(-x)$ dispari

TEOREMA (derivata di funzione inversa)

Sia f invertibile e continua in un intorno di un punto $x \in \mathbb{R}$ eventualmente solo unilaterale.

Se f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$



e $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \boxed{\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$

Pt ≠ ma corrispondenti.

ESEMPIO

$g(y) = \arctan y = f^{-1}(y)$ con $f(x) = \tan\big|_{(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})}^{x}$

$y_0 \in \mathbb{R}$ (= dom(arctg))

- f è invertibile e continua in un $I(x_0)$
- $\exists f'(x_0) = 1 + \underbrace{\tan^2 x_0}_{\geq 0} \neq 0$ $\qquad x_0 = g(y_0) = f^{-1}(y_0)$

$\Rightarrow g = f^{-1}$ è derivabile in y_0 e

$$g'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1+\tan^2 x_0} = \frac{1}{1+[\tan(\arctan y_0)]^2} = \frac{1}{1+y_0^2}$$

$\Downarrow\; g(y_0) = \arctan y_0$

PUNTI DI NON DERIVABILITA'

DEFINIZIONE DI pt DI NON DERIVABILITA' NOTEVOLI

S. dom $f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in un $I(x_0)$ completo e continua in x_0. Supponiamo che $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ esistano.

- **Punto angoloso**

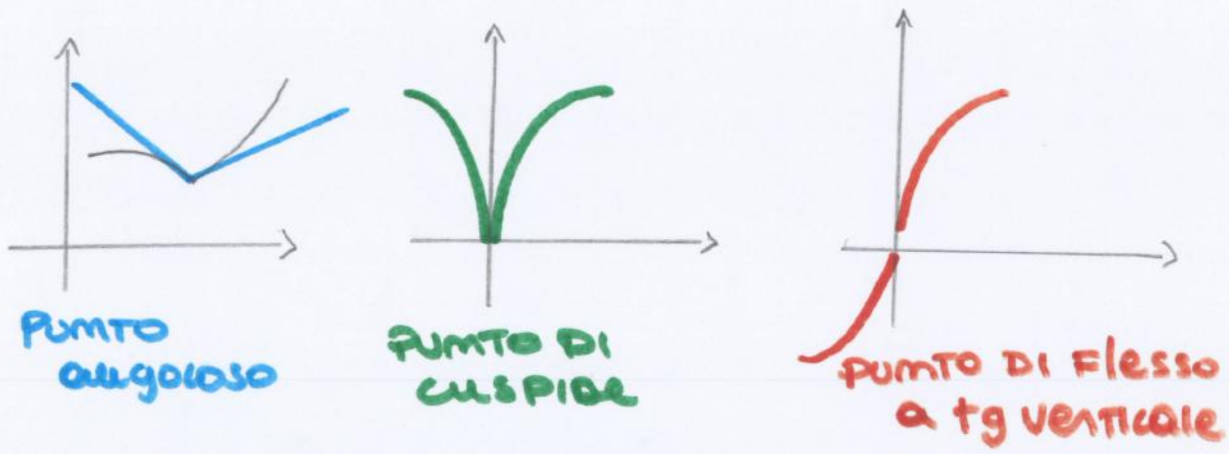
$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ ed almeno 1 è finita, si dice che x_0 è un punto angoloso ovvero le tg dx e sx formano un angolo.

- **Punto di cuspide**

$f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ entrambe finite, si dice che x_0 è un punto di cuspide ovvero ($x = x_0$ è tg sia dx che sinistra)

- **Punto di flesso a tg verticale**

$f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ sono entrambe finite, si dice che x_0 è un punto di flesso a tg verticale ($x = x_0$ è tg sia dx che sx)



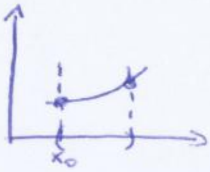
N.B. - Se F è definita solo a dx di x_0 ed è continua in x_0 e risulta $f'_+(x_0) = \pm\infty$ si dice semplicemente che x_0 è un pt a tg verticale

Teorema dei "TAPPABUCHI"

Sia f derivabile in $I^*(x_0^+)$ se

i) f è continua da dx in x_0

ii) $\lim_{x \to x_0^+} f'(x)$ esiste



allora: $\boxed{f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)}$

esiste

e vale

analogamente vale a DX e in un intorno completo

DIMOSTRAZIONE $\Rightarrow$ applico H al rapporto incrementale

$$f'_+(x_0) \overset{def}{=} \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{0}{0}$$

$$\underset{=}{H}: \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(x) - 0}{1 - 0} = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \text{ esiste per (ii)}$$

OSSERVAZIONI:

1) L' Hp "i" è essenziale: la derivabilità in $I^*(x_0)$ e l'esistenza di $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ finito non garantiscono che $f'(x_0)$ esista

es: $f(x) = \operatorname{sen} x$ non è continua in 0 e quindi non esiste $f'(x)$ ma è derivabile in $\mathbb{R} / \{0\}$ e risulta $f'(x) = \cos x$

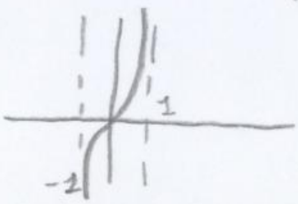
esempio:

Sia $f(x) = \arcsin x$. Il teorema di derivazione della f inversa assicura che:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ in ogni } x \in (-1, 1) \text{ ma non si applica in } x = \pm 1$$

C'è derivabilità in tali pt? Si ha che

- f è continua da sx in 1
- $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ per cui risulta $\boxed{f'(1)} = +\infty$



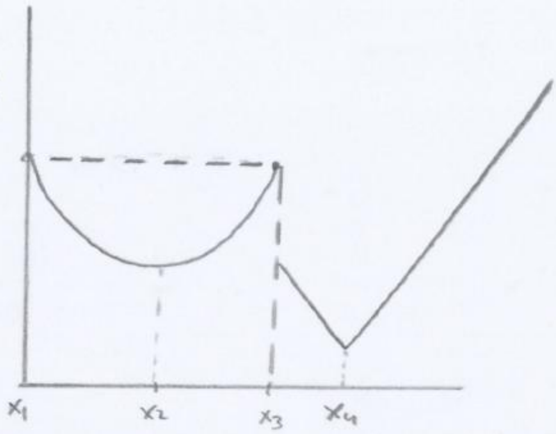
TANGENZA VERTICALE

riprendendo il precedente grafico:

è possibile che un pt di estremo su un intervallo I, sia un estremo di I (possibile di discontinuità)

↳ se però, f è definita in un intorno completo di x_0 e x_0 è un pt di estremo in cui G_f ha retta tg allora tale tg deve essere orizzontale

Vale infatti il seguente:



Teorema di Fermat

Siano $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in \text{dom} f$.

Se:
i) f è definita in un intorno completo di x_0 ed è derivabile in x_0
ii) x_0 è punto di estremo per f

allora: $f'(x_0) = 0$ per la dimostrazione vai alle slide (6)

→ Un punto x_0 in cui una funzione f sia derivabile e si abbia $f'(x_0) = 0$ si dice **punto critico (o stazionario) di f**

↝ Perciò; posso riformulare il Teorema di Fermat:

se f è definita in un intorno completo di un suo pt di estremo x_0 ed è derivabile in x_0, allora x_0 deve essere pt critico per f.

↳ NON VALE VICEVERSA

Nello studio dei pt di estremo (relat o assol.) di una f **su un I** è utile tener presente che essi sono da ricercarsi tra i pt delle 3 classi individuate dal seguente:

Corollario (ricerca pt di estremo) se x_0 è un pt di estremo per una funzione f su un intervallo I allora **vale una ed una sola** tra le seguenti alternat.:

- x_0 è un estremo di I
- x_0 è interno all'intervallo ed f non è derivabile in x_0
- x_0 è interno all'intervallo ed è pt critico per f

Derivate di ordine superiore

64

Se una funzione è derivabile in un punto si avrà f'
↳ se f' è nuovamente derivabile in x_0 si dice che f è derivabile due volte in x_0 ed il numero:

$$f''(x_0) := (f')'(x_0)$$

$f''(x_0)$ → si dice derivata seconda e si può scrivere anche come: $f^{(2)}(x)$

Più in generale:

- Per ogni naturale $k \geq 1$ si dice che f è derivabile k volte in x_0 se esiste il numero

$$f^{(k)}(x_0) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0)$$

il quale si chiama Derivata k-esima di f in x_0

- Si pone $\operatorname{dom} f^{(k)} := \{x \in \operatorname{dom} f : \exists f^{(k)}(x)\}$ e si definisce

$$f^{(k)} : \operatorname{dom} f^{(k)} \to \mathbb{R}$$
$$x \to f^{(k)}(x)$$

Funzione derivata k-esima di f

Funzioni di classi C^k e C^∞ su I

Classi C^k

Sia I un intervallo

- Per ogni naturale $k \geq 1$ si definisce l'insieme

$$C^k(I) := \{f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{R} : f_{/I} \text{ è derivabile } k \text{ volte ovunque in } I \text{ con derivate tutte continue}\}$$

Si definisce l'insieme

$$C^\infty(I) := \{f : \operatorname{dom} f \to \mathbb{R} : f_{/I} \text{ ha derivate di ogni ordine in ogni pt di } I\}$$

in realtà già se dico che l'ultima è continua, affermo che sono tutte continue perché se derivabile → continua

Si pone $C^0(I) := C(I)$ e $f^{(0)}(x_0) := f(x_0)$

risulta $C^0(I) \supset C^1(I) \supset C^{11}(I) \ldots\ldots C^\infty(I)$

$f: \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in \mathrm{dom} f$

- Supponiamo f continua in x_0. Allora

$f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$ d'ora in poi sarà sottinteso

$f(x) - f(x_0) = o(1)$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + o(1)}$$

$T_0(x) = o((x-x_0)^0)$

- Supponiamo f derivabile in x_0. Allora

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

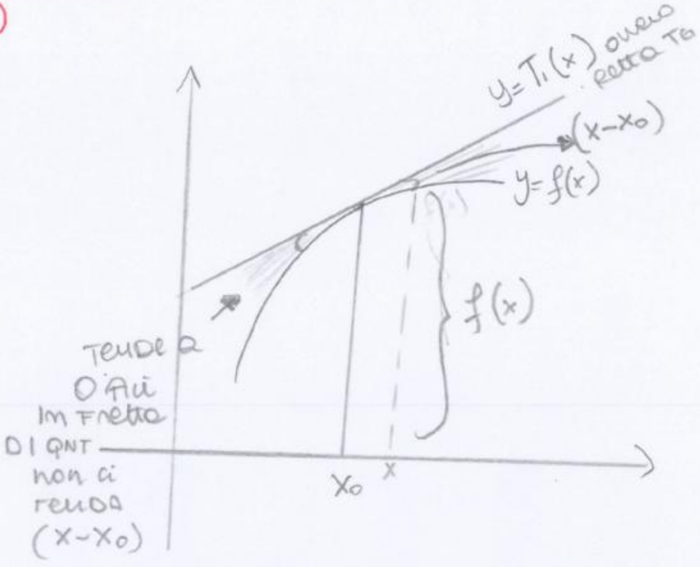
$$'' \quad = f'(x_0) + o(1)$$

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = f'(x)(x-x_0) + \underbrace{o(x-x_0)^1}_{+(x-x_0)o(1)}}$$

I FORMULA dell' INCREMENTO FINITO

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x)(x-x_0)}_{T_1(x)} + o(x-x_0)^1$$

grado ≤ 1



la retta Tg è l'unica per cui accade

Teorema di Taylor Peano

Sia $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x_0 \in \text{dom} f$

Se f è derivabile $n \geq 0$ volte in x_0 allora:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \frac{f^{(n)}(x-x_0)^n}{n!}}_{T_n(x) \text{ di grado } \leq n \text{ si chiama POLINOMIO di TAYLOR di ordine } n \text{ di } f \text{ in } x_0} + o\left((x-x_0)^n\right)_{x \to x_0}$$

VALIDA $\forall x \in \text{dom} f$

RESTO DI ORDINE n nella FORMULA DI PEANO

Lo SVILUPPO = POLINOMIO (DI TAYLOR) + RESTO

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T_{f_{n};x_0}(x)$$

<u>PROPOSIZIONE</u> (UNICITÀ DI $T_{f_n;x_0}$)

Se f è derivabile $n \geq 0$ volte in x_0 e $P_n(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$, allora:

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right)_{x \to x_0} \Rightarrow P_n = T_{f_n;x_0}$$

di conseguenza:

se, $f(x) = a + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 \dots a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$ con $a_0, a_1, a_2; a_3 \dots a_n \in \mathbb{R}$ allora:

$$\boxed{a_n = \frac{f^{(n)} x_0}{n!}}$$

esempi notevoli: (sviluppi di Maclaurin sulle $f(x)$ elementari)

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$$

1) $f(x) = e^x$; $f \in C^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow f$ ha sviluppo di Taylor di ogni ordine in $\forall$ pt x_0.

E' possibile notare che:

f dispari; f' (pari); f'' (dispari); f''' (pari)
=> derivate di ordine pari, solo dispari f^{2k} dispari
=> $f^{(2k)}(0) = 0$
=> nello sviluppo di Mac Laurin di f appaiono solo funzioni con potenze ~~pari~~ dispari.

3) $f(x) = (1+x)^{\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$f \in C^{\infty}(-1;+\infty)$

$f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$; $f'(0) = \alpha$

$f^{(2)}(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$; $f^{(2)}(0) = \alpha(\alpha-1)$

$f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$ $f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

$$f^{(k)}(0) = \underbrace{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}_{k \text{ fattori } (0;1\dots k-1)},$$

DEFINIZIONE: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$

si pone: $\binom{\alpha}{k} := \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(k+1)]}{k!}$

COEFFIC. BINOMIALE GENERALIZZATO $\binom{\alpha}{0} := 1$

↳ se $\alpha \in \mathbb{R}$ è generalizzato
↳ non sarebbe generalizzato se α è intero.

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{m} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^m)}$$

POLINOMIO DI MAC LAURIN per $(1+x)^{\alpha}$

Tanti casi particolari:

$\alpha = -1$ $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^m x^m + o(x^m)$ ⇝ $\sqrt{1+x}$; $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ...

Scrivere lo sviluppo di Mc. di ordine 4 delle seguenti funzioni e calcolare $f^{(n)}(0)$ per $n=0;1;2;3;4$

72

1) $f(x) = x + x^5 - \log(1+x)e^x + \operatorname{sen}^4 x$

Scopo: $f(x) =$ POLINOMIO DI GRADO ≤ 4 $+ o(x^4)$

Sviluppo di somme e prodotti $\rightarrow$ devo sviluppare tutti i termini all'ordine voluto e poi faccio conti x arrivare allo scopo

- $x + x^5$: polinomio, quindi già sviluppato ovvero coincide con il proprio polinomio di Mac Laurin di grado 5
  ↳ anzi devo accorciarlo perché è di grado > di quello richiesto, quindi
  $x^5 = o(x^4)$
  ↳ da cui $x + x^5 = x + o(x^4)$

- $\log(1+x) \cdot e^x = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cancel{\frac{x^4}{4}} + o(x^4) + x^2 - \cancel{\frac{x^3}{2}} + \cancel{\frac{x^4}{3}} \underbrace{-\frac{x^5}{4}}_{o(x^4)} + x\,o(x^4) + \cancel{\frac{x^3}{2}} - \cancel{\frac{x^4}{4}} + \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{8} +$$

sono entrambi $o(x^4)$

$$+ \frac{x^2}{2} o(x^4) + \cancel{\frac{x^4}{6}} + o(x^4) + o(x^4)$$

perchè tutti gli altri termini sono $o(x^4)$

$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad x \to 0$$

- $\operatorname{sen}^4(x)$

$\operatorname{sen} x \sim x$
$\operatorname{sen}^4 x \sim x^4$ QUINDI $\operatorname{sen}^4(x) = x^4 + o(x^4)$

$$f(x) = \cancel{x} + o(x^4) - \cancel{x} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - o(x^4) + x^4 + o(x^4) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4)$$

$f(0) = 0 = f'(0)$

$\frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f''(0) = 1$

$\frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{3} \Rightarrow f'''(0) = -2$

$\frac{f^4(0)}{4!} = 1 \rightarrow f^{(4)}(0) = 24$

Concavità, convessità e flessi

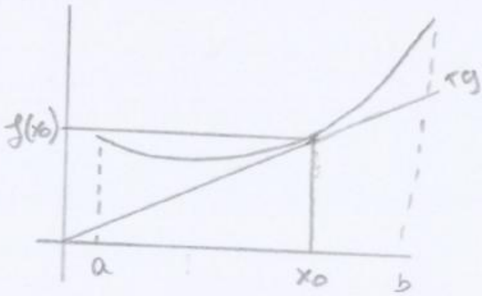
VEDI QUAD. V

74

Definizione: data una funzione $f: (a;b) \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a;b)$

- f è convessa (in $a;b$) se per ogni $x_0 \in I$ il grafico della $f(x)$ sta al di sopra della retta tg nel pt $(x_0; f(x_0))$ al grafico della $f(x)$

CONVESSA



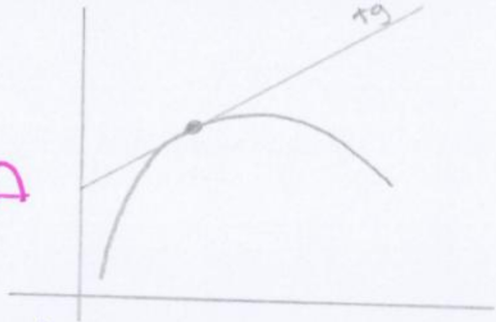
$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

↳ strettamente convessa se non c'è l' =

inoltre se $f''(x) \geq 0$ per $\forall x \in I$ allora $f(x)$ è convessa in $(a;b)$

- f è concava (in $a;b$) se per ogni $x_0 \in I$ il grafico della $f(x)$ sta al di sotto della retta tg nel pt $(x_0; f(x_0))$ al grafico di $f(x)$

CONCAVA



$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

↳ strettamente concava se non c'è =

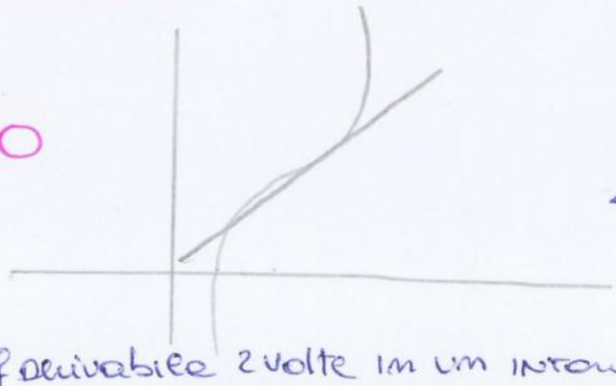
inoltre: se $f''(x) \leq 0$ per $\forall x \in I$ allora $f(x)$ è concava in $(a;$

- $x_0 \in (a;b)$ si dice punto di flesso per la funzione $f: (a;b) \to$ se in tale punto la funzione cambia concavità.

↳ ascendente: se cambia la concavità da asse y^- a y^+

discendente: = = = = = = asse y^+ a y^-

Flesso



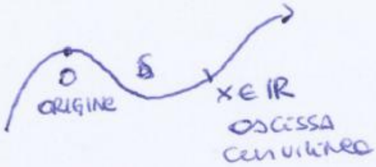
COME TROVO UN PUNTO DI FLESSO?

↳ punto in cui la derivata 2 cambia segno

Teorema: f derivabile 2 volte in un intorno completo di x_0 se $f''(x)$

SIGNIFICATO FISICO DELLA DERIVATA

76



$t \longmapsto s(t)$

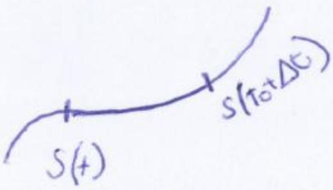
ISTANTE — POSIZIONE ALL'ISTANTE

LEGGE ORARIA

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

V_m = velocità media di moto nell'interv. di tempo $[t_0; t_0+\Delta t]$

$$V_m = \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$



$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

↑ accelerazione

INTEGRALI FONDAMENTALI

$f(x)$	$f'(x)$	$\int f'(x)dx = f(x)+c$
K	0	$\int 0 dx = K+c = c$
x	1	$\int 1 dx = x+c$
$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	x^α	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$\log\|x\|$	$\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \log\|x\|+c$
e^x	e^x	$\int e^x dx = e^x+c$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x+c$
$-\cos x$	$\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x+c$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x+c$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x+c$
$\arcsen x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x+c$

DI SOLITO SI SCRIVE:

$$\int f(\varphi(x))d\cdot\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$$

dove: $\varphi(x) = y$ — SOSTITUZIONE formale —

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)\cdot dy - \varphi(x)\,dx$$

alla FINE DEVO RISOSTITUIRE $\varphi(x)$ a y.

ESEMPIO ①

$$\int e^{\varphi(x)}\varphi'(x)\,dx = \int e^y dy = e^y + c = e^{\varphi(x)} + c$$

ESEMPIO ②

$$\int 2e^{x^2}dx = \int e^y dx = e^y + c = e^{x^2} + c$$

ESEMPIO ③

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx = \int f(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$f \to \frac{1}{t}$

$t = \log x$

$dt = \frac{1}{x}dx$

$$\leadsto = \int \frac{1}{t}dt = \log|t| + c = \log|\log(x)| + c$$

ESEMPIO ④

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)\,dx =$$

$y = \cos x$

$dy = -\sin x\,dx$

$$= -\int \frac{1}{y}dy = -\log|y| + c = -\log|\cos x| + c$$

Integrali Definiti
- RIEMANN -

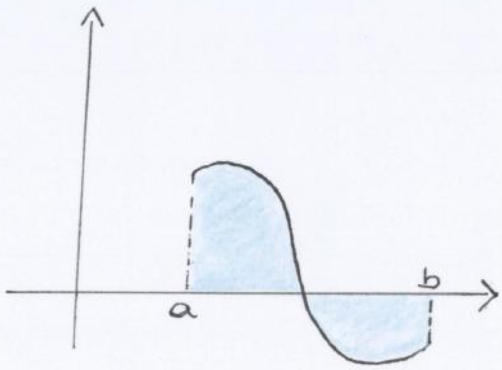
Problema: calcolare l'area di una figura piana.

Supponiamo che $f: \text{dom} f \to \mathbb{R}$ sia una funzione limitata su un intervallo limitato $[a;b]$

DEFINIZIONE: Si chiama trapezoide di f su $[a;b]$ l'insieme:

$$T_{f;a;b} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a;b] ;\ 0 \leq y \leq f(x) \text{ oppure } f(x) \leq y \leq 0\}$$

ossia la parte di piano contenuta nella striscia verticale $a \leq x \leq b$ e delimitata dalle curve $y = 0$ e $y = f(x)$

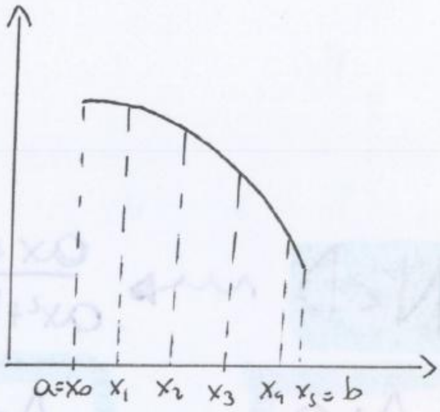


→ Per il momento definiremo l'area positiva (ovvero dove $f(x) \geq 0$)

Consideriamo una qualsiasi suddivisione σ di $[a;b]$

$$\sigma : a = x_0 < x_1 \ldots\ldots < x_{m-1} < x_m = b$$

Si tratta di una famiglia di $n+1$ pt di $[a;b]$ con $x_0 = a$ e $x_m = b$



Tramite σ l'intervallo viene suddiviso in n sottointervalli $[x_0; x_1]$; $[x_1; x_2]$ ..... $[x_{m-1}; x_m]$ su ciascuno dei quali f è limitata e quindi dotata di INF e SUP finiti.

ESERCIZI:

1) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+3}\,dx$ $\quad \Delta<0$ $\quad y = x^2-3x+3$ $\quad dy = 2x-3\,dx$ $\quad = \int \frac{1}{y}\,dy = \log|y|+c$

$= \log|x^2-3x+3| + c$

2) $\int \frac{5}{x^2+6x+13}\,dx$ $\quad \Delta<0$

completo il quadrato al denominatore

$x^2+6x+13 = (x^2+2\cdot 3x)\,13 = (x^2+2\cdot3x+9-9)+13 =$

$= (x^2+6x+9)-9+13 = (x+13)^2+4 = 4\left(1+\frac{(x+3)^2}{4}\right) = 4\left(1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right)$

per cui:

$\frac{5}{4}\int \frac{1}{x\left(\left(1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right)\right)}\,dx = \frac{5}{4}\cdot 2\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\left[1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right]}\,dx =$

$y = \frac{x+3}{2}$ $\quad dy = \frac{1}{2}\,dx$

$= \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{5}{2}\operatorname{arctg} y + c = \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right)+c$

3) $\int \frac{3x+4}{x^2+6x+13}\,dx$ $\quad \Delta<0$ $\quad 3x+4 = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot(2x)+4 = \frac{3}{2}(2x+6-6)+4$

$= \frac{3}{2}(2x+6)-9+4$

$\int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)-5}{x^2+6x+13}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)}{x^2+6x+13}\,dx - \int \frac{5}{x^2+6x+13}\,dx = \frac{3}{2}\log|x^2+6x+13|$

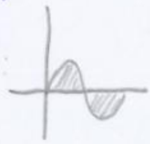
$- \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right)+c$

- l'integrale definito serve per calcolare l'area tra a e b.

$\int_a^b f(x)dx$ • se la funzione è ⊕, l'area coincide con l'integrale

$-\int_a^b f(x)dx$ • " " " " ⊖, " coincide con ⊖ l'integrale

$A=\int_a^c f(x)dx-\int_c^b f(x)dx$ • " " " " ⊕ in un intervallo e ⊖ in un altro si spezza in 2 integrali e si sommano i risultati

↳ es: 

Classi di funzioni integrabili

→ non tutte le f limitate sono integrabili.

esempio: (funzione di Dirichlet)

$f: [0;1] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x)=\begin{cases} 1 \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

risulta che:

$$s_\sigma=\sum_{i=1}^{n} 0\cdot(x_i-x_{i-1})=0 \quad e \quad S_\sigma=\sum_{i=1}^{n} 1\cdot(x_i-x_{i-1})=x_n-x_0=1$$

ovvero

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=0 \quad e \quad \int_a^{\overline{b}} f(x)dx=1$$

da cui sono integrabili su $[a;b]$ tutte le funzioni:

1) limitate e continue su $[a;b]$ privato eventualm. di un numero finito di pt

2) monotone su $[a;b]$

3) continue su $[a;b]$

22

5) DISUGUAGLIANZA TRIGONALE INTEGRALE se $f \in \mathbb{R}([a;b])$ allora $|f| \in \mathbb{R}([a;b])$ e risulta:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

N.B. se f è integrabile, $|f|$ è integrabile ma non sempre vale viceversa

6) POSITIVITÀ:

$$\boxed{\text{se } f \geq 0 \text{ allora } \int_a^b f(x)\,dx \geq 0}$$

7) MONOTONIA RISPETTO ALL'INTEGRANDO:

$$\boxed{\text{se } f \leq g \text{ allora } \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

8) MONOTONIA RISPETTO AD DOMINIO:

dato $[a';b'] \subseteq [a;b]$ e $f \geq 0$

$$\boxed{\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx}$$

TEOREMA DELLA MEDIA

90

Se la $f(x)$ è continua nell'intervallo limitato chiuso $[a;b]$ allora esiste un pt μ di tale I per cui si ha:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(\mu)$$

oppure

$$f(\mu) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

dove μ : $\inf f(x) \leq \mu \leq \sup f(x)$

Deve appartenere all'immagine

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f \in C(I)$ e sia $a \in I$ un pt fissato.

↳ Per ogni $x \in I$

$$\int_a^x f(t)dt$$

Se ho una funzione integranda continua, la sua funzione integrale è derivabile e la sua funzione derivata coincide con la funzione integranda.

$f(t)$ continua $\rightarrow$ $F(x)$ derivabile $\rightarrow$ e $F'(x) = f(x)$

N.B se $x < a$: $\int_a^x f(t)dt = -\int_x^a f(t)dt$

Quindi si definisce la funzione integrale (con pt base a)

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt$$