



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1805A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Semproni Federica

MATERIA: Meccanica Strutturale (teoria + esercizi) - Prof.  
Somà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**



LIBRO: "Fondamenti di meccanica strutturale" Somà

- ESAME: - Prova scritta  
- Orale obbligatorio con voto  $\geq 25$

- PROGRAMMA:
- 1) STRUTTURE e MODELLI  
(Particolarmente di strutture come modelli ideali matematici)
  - 2) STATICA delle STRUTTURE  
(Diagrammi e schemi sulle strutture, come le  $F$  agiscono sui vincoli, carichi, ..., come le strutture si deformano, ...)
  - 3) COMPORTAMENTO STATICO MECCANICO dei MATERIALI
  - 4) SOLLECITAZIONI SEMPLICI
  - 5) MECCANICA del CONTINUO
  - 6) COMPORTAMENTO MECCANICO dei MATERIALI A FATICA

- 1 ■ Reazioni vincolari
- 2 ■ Travi e Reti
- 3 ■ Caratteristiche di sollecitazione
- 4 ■ Geometria delle aree
- 5 ■ Sollecitazioni semplici TRAZIONE
- 6 ■ Sollecitazioni semplici FLESSIONE
- 7 ■ Linea elastica
- 8 ■ Sollecitazioni semplici TORSIONE
- 9 ■ Sollecitazioni semplici TAGLIO
- 10 ■ Meccanica del continuo
- 11 ■ Leggi costitutive del materiale
- 12 ■ Criteri di cedimento statico
- 13 ■ Fatica dei materiali
- 14 ■ Diagrammi di Wohler
- 15 ■ Effetto della tensione media
- 16 ■ Effetto di intaglio
- 17 ■ Instabilità elastica
- 18 ■ Metodo Staur - case
- 19 ■ Strutture iperstatiche e loro analisi



**PUNTO MATERIALE** è il modello più semplice utilizzabile.  
Si intende la massa concentrata in un punto  
Si trascura la forma e l'estensione dell'oggetto  
(per questo non interviene a noi)  
Sta alla base dello studio del movimento e  
dell'equilibrio.  
La forma e l'estensione sono proprio le  
caratteristiche che ci dicono qualcosa sui  
carichi.

**GRADI di LIBERTÀ** Sappiamo che ogni punto all'interno di un  
sistema si può muovere. I gradi sono dei  
parametri indipendenti necessari per deter-  
minare la posizione del punto nello spazio.  
Un punto nello spazio ha 3 gradi di libertà  
(nelle 3 dimensioni) se non è vincolato.

**CORPO RIGIDO** Corpo dotato di forma ed estensione  
È l'insieme di tanti punti materiali che  
si muovono insieme mantenendo (sotto  
azione di carichi) la forma e le dimensioni  
di partenza. <sup>NON</sup> Cambiano le posizioni relative,  
ma le distanze tra i punti del corpo restano  
invariate.

**CORPO DEFORMABILE** Corpo che segue un'evoluzione e cambia  
forma (configurazione)  
Problema dal punto di vista modellistico  
Serve un sistema di riferimento  
La distanza di 2 punti in un corpo defor-  
mabile cambia in lunghezza  
Configurazione di riferimento  
→ iniziale  $x, y, z$   
→ finale  $X, Y, Z$

! l'accuratezza del sistema dipende dalle ipotesi del progetto



COPPIE o MOMENTI coppie di forze che agiscono su una struttura sollecitandola attorno a un asse.

! Un sistema di forze può essere sostituito dalla risultante.  
(vedere vecc. macchine per somma vettori)

## VINCOLI

Un sistema è vincolato se lo privo della capacità di muoversi.

Un corpo rigido in un sistema <sup>spazio</sup>  $(x, y, z)$  ha 6 gradi di libertà.

Un punto materiale in un sistema <sup>piano</sup>  $(x, y)$  ha 3 gradi di libertà.

2D  $\Rightarrow$  3 GRADI nello spazio

3D  $\Rightarrow$  6 GRADI nel piano

Un corpo si dice vincolato se si blocca parzialmente o totalmente una sua possibilità di movimento. <sup>Impedisco</sup> Impedisco quindi possibili movimenti, cioè sviluppo azioni contrastanti.

REAZIONI VINCOLARI = forze in grado di equilibrare una o più componenti del sistema di Forze che agiscono sul sistema.

Per impedire i movimenti di un corpo.

$\rightarrow$  nello spazio devo trovare 6 vincoli

$\rightarrow$  nel piano devo trovare 3 vincoli

- ISOSTATICO  $N^{\circ}$  vincoli =  $N^{\circ}$  gradi di libertà \*
- IPERSTATICO  $N^{\circ}$  vincoli  $>$   $N^{\circ}$  gradi di libertà
- LABILE  $N^{\circ}$  vincoli  $<$   $N^{\circ}$  gradi di libertà

\* devono essere però **TUTTI EFFICACI!**  
(non sempre basta il numero)

$\S$  vincoli che consideriamo mai sono IDEALI

$\rightarrow$  OLONOMICI impongono una restrizione alla posizione non al movimento

$\rightarrow$  PERFETTI non cedevoli ed eliminano completamente lo spostamento a cui si oppongono (approssimazione)

$\rightarrow$  BILATERALI bloccano una direzione in entrambi i versi

$\rightarrow$  PRIVI di ATTRITO

$\rightarrow$  FISSI indipendenti dal tempo

$\rightarrow$  PUNIFORMI senza estensione superficiale



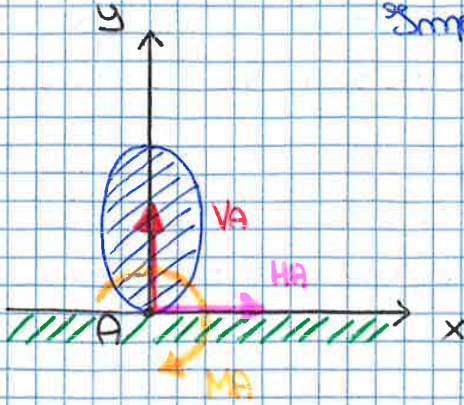
## INCASTRO

(vincolo doppio)

Impedisce 3 gradi di libertà

3 reazioni vincolari di cui 2 sono  
le reazioni

- 3 g.d.l.



## SCHEMA VINCOLI IDEALI FISSI

→ CARRELLLO   $\uparrow V_A$  - 1 g.d.l.

→ CERNIERA   $\uparrow V_A$   
 $\rightarrow H_A$  - 2 g.d.l.

→ BIPENDELO   $\uparrow V_A$   
 $\rightarrow H_A$  - 2 g.d.l.

→ INCASTRO   $\uparrow V_A$   
 $\rightarrow H_A$   
 $\curvearrowright M_A$  - 3 g.d.l.

! Scritte le reazioni vincolari in questo modo sono positive

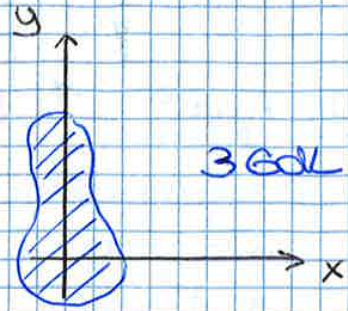
$\left\{ \begin{array}{l} V_A \text{ verso l'alto} \\ H_A \text{ verso destra} \\ M_A \text{ antiorario} \end{array} \right.$



## TRAVI

Le ipotesi che teniamo in considerazione sono di tipo geometrico / dimensionali.

- 1) Vincoli ideali
- 2) Forze ideali
- 3) Piccoli spostamenti



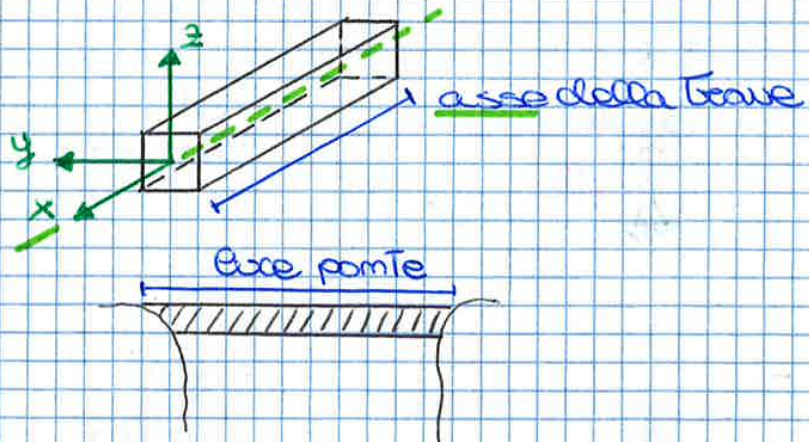
Per questo motivo prendiamo in considerazione un solo tipo di solido (cilindrico) → **SOLIDI TRAVIFORMI**

**TRAVE** = solido cilindrico in cui le 2 dimensioni trasversali sono molto minori di quella longitudinale. L'area geometrica può essere una linea (sviluppo longitudinale) di 1 sola dimensione (approssim.)

↳ 4) ad ASSE RETTILINEO \*

Possono avere dei restringimenti o allungamenti ma prendiamo travi con sezioni costanti

↳ 5) a SEZIONE COSTANTE



! Semplicemente al eccesso la realtà

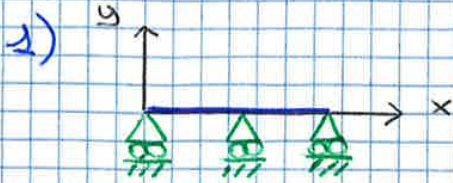
\* <sup>asse</sup> geometrico: Linea che collega i baricentri delle sue sezioni scella



TRAVE 2D  $\rightarrow$  3 g.d.e.

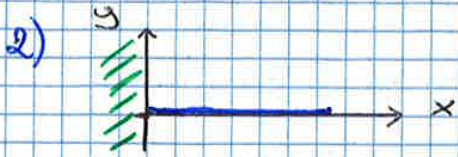
$n^{\circ}$  vincoli =  $n^{\circ}$  G.d.e. (tutti efficaci)

Ricordo  $\left\{ \begin{array}{l} \text{carrucolo} - 1 \text{ g.d.e.} \\ \text{cerniera} - 2 \text{ g.d.e.} \end{array} \right.$



\* 3 carrucoli = -3 g.d.e. ma tutti uguali

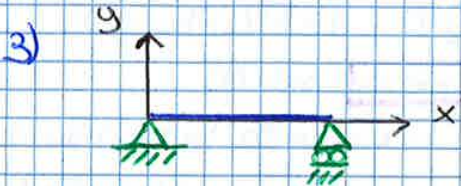
$\rightarrow$  LABILE (perché manca la traslazione e la rotazione)



1 incastro = -3 g.d.e.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{angolare} \\ \text{verticale} \\ \text{rotazione} \end{array} \right.$

$\rightarrow$  ISOSTATICO

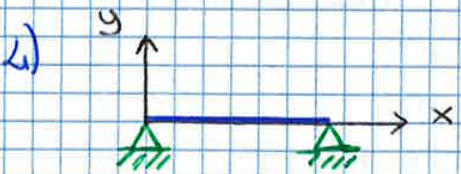


1 carrucolo = -1 g.d.e.

1 cerniera = -2 g.d.e.

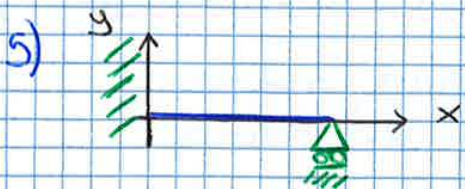
$\left\{ \begin{array}{l} \text{verticale} \\ \text{angolare} \\ \text{rotazione} \end{array} \right.$

$\rightarrow$  ISOSTATICO



2 cerniere = -4 g.d.e.

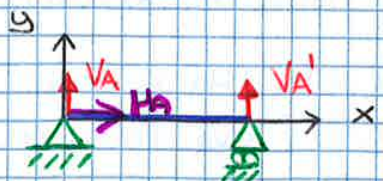
$\rightarrow$  IPERSTATICO



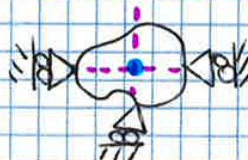
1 incastro = -3 g.d.e.

1 carrucolo = -1 g.d.e.

$\rightarrow$  IPERSTATICO



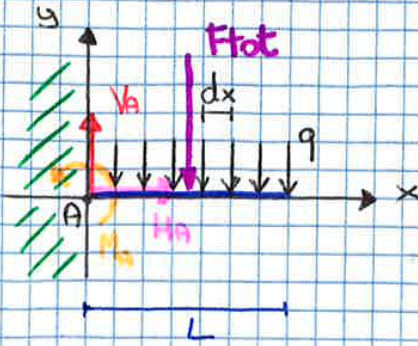
\* è isostatico se le 3 reazioni concorrono in 1 punto



$\rightarrow$  ALMENO 2 CONCORRONO IN 1 PUNTO



3) MEUSOLA INCASTRATA con carico uniforme distribuito



\*  $F_{tot} = q \cdot L$   
 $H = F_{tot} \cdot \frac{L}{2} = q \cdot \frac{L^2}{2}$

Sistema ipostatico

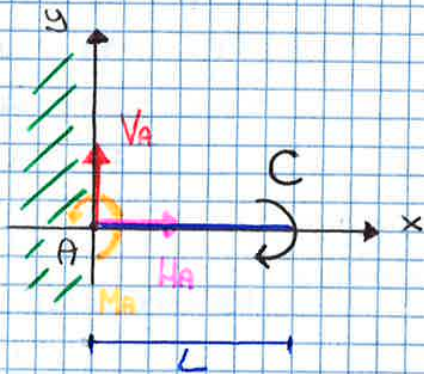
Reazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - \int_0^L q \cdot dx = 0 \\ M_A - \int_0^L q \cdot dx \cdot \underbrace{\text{braccio}}_x = 0 \end{cases}$$

$q \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = qL \\ M_A = \frac{qL^2}{2} \end{cases}$$

4) MEUSOLA INCASTRATA caricata con una coppia Concentrata all'estremità



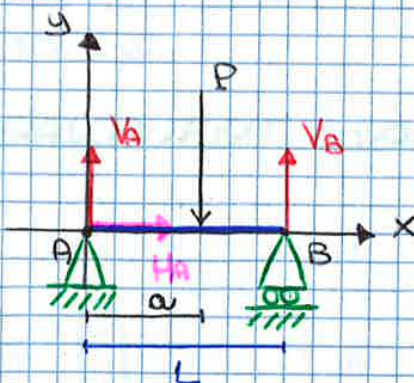
Sistema ipostatico

Reazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A - C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = 0 \\ M_A = C \end{cases}$$

5) TRAVE APPOGGIATA con carico concentrato



Sistema isostatico

Reazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \sum X = 0 \\ \sum Y = 0 \\ \sum M_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A + V_B - P = 0 \\ -P \cdot a + V_B \cdot L = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = \frac{P \cdot b}{L} \\ V_B = \frac{P \cdot a}{L} \end{cases}$$



## RIEPILOGO

Equazioni di equilibrio per il sistema composto da un singolo corpo

Del piano	$\sum X = 0$		Nello spazio	$\sum X = 0$	$\sum M_x = 0$
	$\sum Y = 0$			$\sum Y = 0$	$\sum M_y = 0$
	$\sum M_z = 0$			$\sum Z = 0$	$\sum M_z = 0$

Sistema meccanico  $\rightarrow$  **ISOSTATICO**  $n^\circ$  equazioni =  $m^\circ$  incognite  
 $\rightarrow$  iperstatico  
 $\rightarrow$  labile

Casi chi **esterni**  
Dati del problema

**Reazioni vincolate**  
Incognite

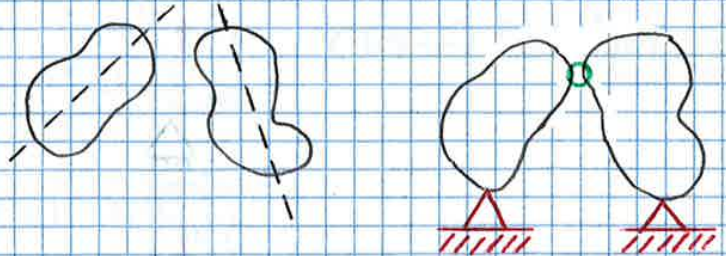
## SISTEMI COMPOSTI e VINCOLI INTERNI

Sistemi con più corpi scelti ognuno dei quali ha  $m$  gradi di libertà. Ci sono 2 tipi di vincoli

$m = 3$  in 2D  
 $m = 6$  in 3D

$\rightarrow$  ESTERNI impediscono i movimenti della struttura rispetto all'esterno

$\rightarrow$  INTERNI interconnettono i sistemi tra di loro = **GIUNTI** impediscono i movimenti relativi tra i corpi



Per valutare  $\rightarrow$  i GdL di ogni corpo  $\left\{ \begin{array}{l} 3 \quad 2D \\ 6 \quad 3D \end{array} \right.$

$\rightarrow$  i GdL impediti dai vincoli interni

Esempio biomeccanico di cinematica relativa

$\rightarrow$  movimento relativo delle vertebre

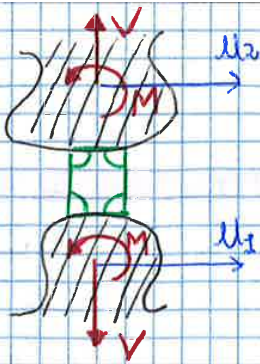
$\rightarrow$  giunto del gomito (nel piano 2D)

simulabile con una cerniera interna che



ammette rotazioni relative



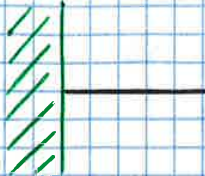


Bipendolo

-2 gdl

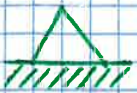
ammette solo sposta-  
mento lungo x

VINCOLI IDEALI nel PIANO



INCASTRO

-3 gdl



CERNIERA FISSA/ESTERNA

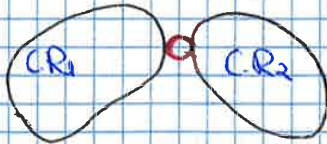
-2 gdl



APPOGGIO o CARRELLO

-1 gdl

CERNIERE INTERNE



$-2(x-1)$

$x = n^{\circ}$  corpi uniti  
dalla cerniera

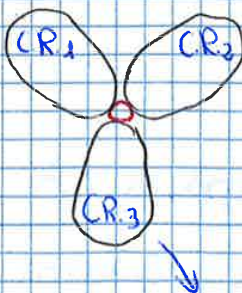
$CR_1 = 3 \text{ gdl} +$

$CR_2 = \frac{3 \text{ gdl}}{2 \text{ gdl}}$



Sistema 4 gdl  $\left\{ \begin{matrix} \uparrow y \\ \rightarrow x \end{matrix} \right.$   
+ rotazione relativa  
tra i corpi

$-2 \text{ gdl}$



$CR_1 = 3 \text{ gdl}$

$CR_2 = 3 \text{ gdl}$

$CR_3 = \frac{3 \text{ gdl}}{9 \text{ gdl}}$

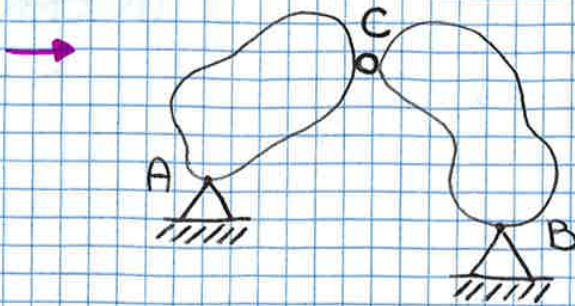
$n^{\circ}$   
corpi  
gdl

Sistema 5 gdl  $\Rightarrow 3 \cdot 3 - 2(3-1) = 5$

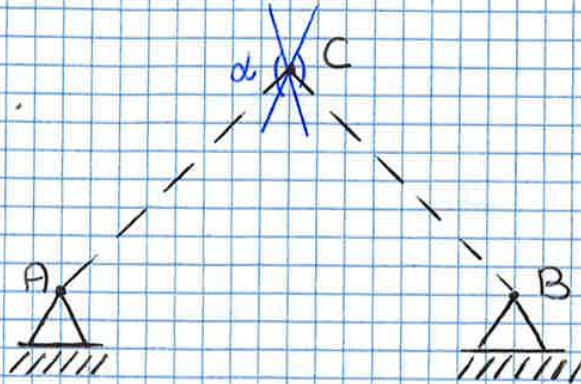
(e 2 possono ruotare  
rispetto a 3  $\rightarrow$ )



# ARCO a 3 CERNIERE



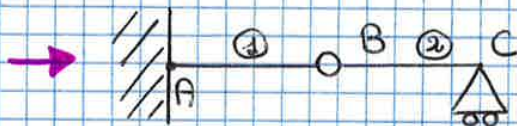
Indefinito  
le travi al  
incastro



$G=0$   
 3 gde per corpo = 6  
 3 cerniere - 2 gde  
 - 2 gde  
 - 2 gde

I vincoli sono efficaci? S

**ISOSTATICO**



3 + 3 gde  
 ① ②

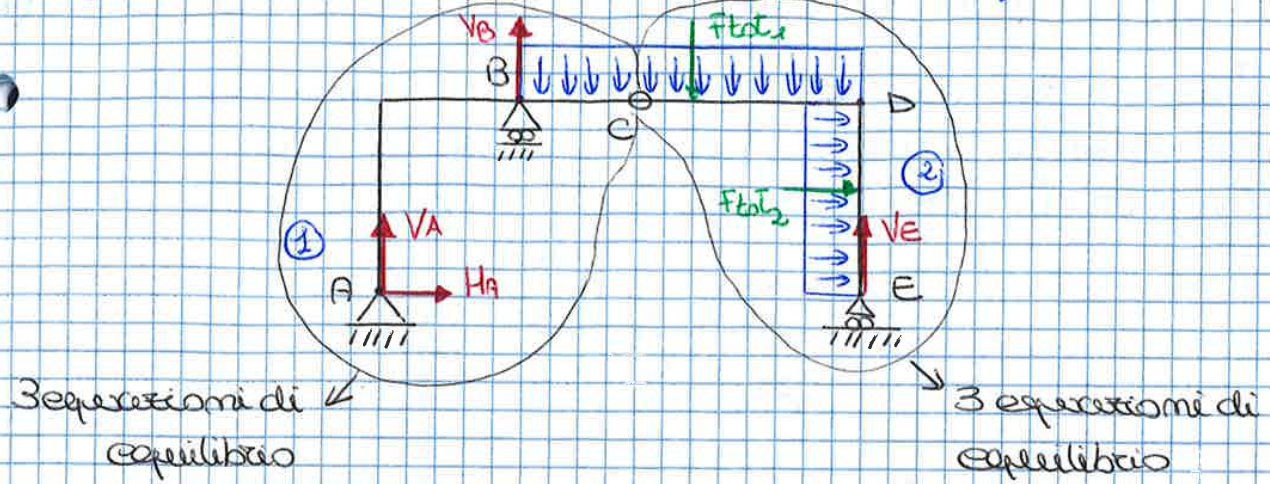
incastro - 3 gde  
 cerniera - 2 gde  
 carrello - 1 gde

$G=0$  **DABILE**

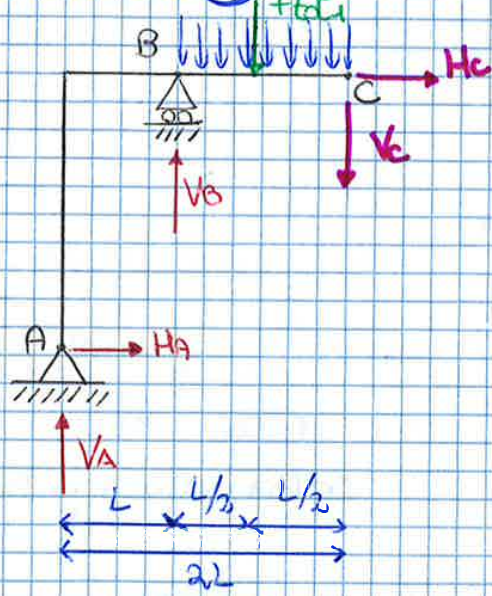
! Se gli assi sono allineati:  
 B può ruotare e il  
 carrello si sposta  
 da cerniera deve unire  
 C.R. con assi non  
 allineati!!!



Decido em sottostutture (sottostuttura = C.P.)



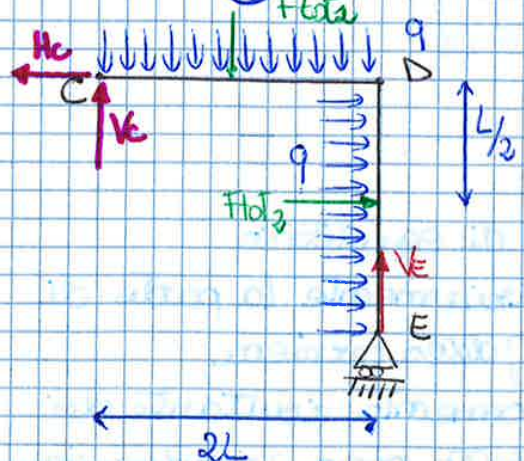
Sottostuttura ①



\* reazioni vincolari orizzontali

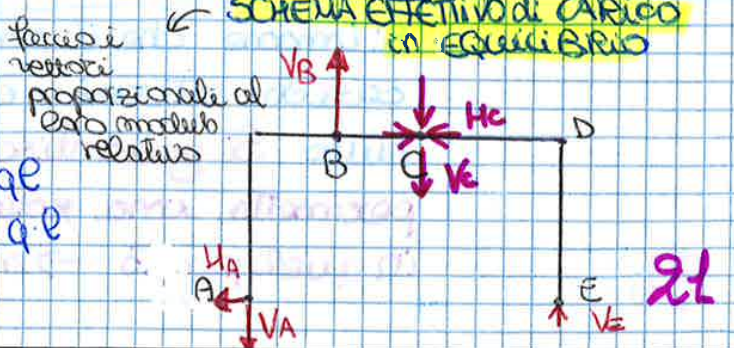
$\rightarrow) H_A + H_c = 0$   
 $\uparrow) V_A + V_B - V_c - F_{tot} = 0$   
 $F_{tot} = q \cdot l$   
 $\curvearrowright) -V_A \cdot 2L + H_A \cdot 2L - V_c \cdot L + F_{tot} \cdot \frac{L}{2} = 0$   
 ! Verifica: scrivo B) o A)

Sottostuttura ②



$\rightarrow) -H_c + q \cdot L = 0$   
 $\uparrow) V_c - q \cdot 2L + V_E = 0$   
 $\curvearrowright) -q \cdot 2L \cdot L + q \cdot L \cdot \frac{L}{2} + V_E \cdot 2L = 0$

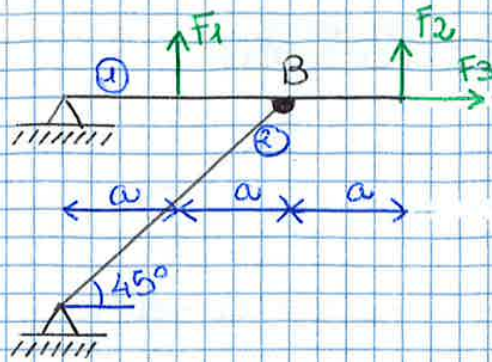
SCHEMA EFFETTIVO di CARICO in EQUILIBRIO



$\Rightarrow H_c = q \cdot l \quad H_A = -H_c = -q \cdot l$   
 $V_E = \frac{3}{4} q \cdot l \quad V_A = -2L \cdot \frac{1}{4} q \cdot l$   
 $V_c = \frac{5}{4} q \cdot l \quad V_B = 5q \cdot l$

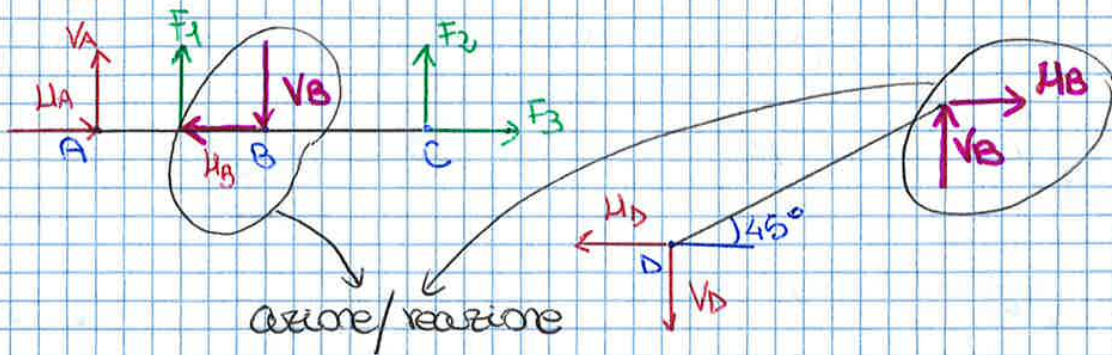


Esempio.



① 3gdl  
 ② 3gdl  
 B - 2gdl  
 ↓  
 esistono 4gdl  
 = 2 cerniere  
 G=0

Esplorato la struttura



azione/reazione

Sottostutturazione

① →)  $H_A - H_B + F_3 = 0$   
 ↑)  $V_A - V_B + F_1 + F_2 = 0$   
 ⤴)  $-V_A \cdot 2a - F_1 \cdot a + F_2 \cdot a = 0$

② →)  $H_B = H_D$   
 ↑)  $V_D = V_B$   
 ⤴)  $-2H_D \cdot a + 2V_D \cdot a = 0$

- ↳ VA ①
- ↳ VB ②
- ↳ HA ③

- ③ ↳ VD
- ④ ↳ HD
- ⑤ ↳ HB



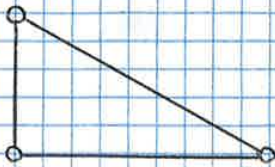
## CONDIZIONE di CARICO di TRAZIONE/COMPRESSIONE

Carichi più semplici = paralleli all'asse dell'asta

È una idealizzazione (le connessioni interne non esistono)

Nella realtà:

- attrito tra camera e aste
- non perfette
- i carichi non agiscono mai solo sui nodi (lungo l'asse e concentrate in punti ≠ nodi)
- rigidezza rotazionale tra le connessioni tra le aste



! Un carico interno per asta

$m^{\circ}$  incognite <sup>interne</sup> =  $m^{\circ}$  aste

$m^{\circ}$  incognite esterne =  $m^{\circ}$  c.d.e. (3 vincoli)

Quindi sempre  **$a+3$  incognite** \*

non sufficiente

$$\begin{cases} 3 = \text{g.d.l.} \\ a = m^{\circ} \text{ aste} \end{cases}$$

(Se sono rispettate le ipotesi della asta ideale)

\* } reazioni interne (sforzi aste)  
} reazioni esterne

## ISOSTATICITÀ (condizione necessaria ma non sufficiente)

La struttura è isostatica se \*

$$a+3 = 2 \cdot n$$

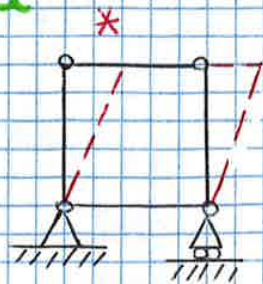
oppure eq. di equil. alla traslazione di ciascun nodo

$\hookrightarrow n^{\circ}$  nodi/camera

= coppie di eq. di equilibrio alla traslazione relative a ciascun nodo

! Solo per strutture reticolari

$n^{\circ}$  di vincoli esterni isostatici



Labile

Assi maldisposte,  $u_0 = 0$

PONTE



15 aste  
9 ci

Se taglio l'asta creo il pt. labile

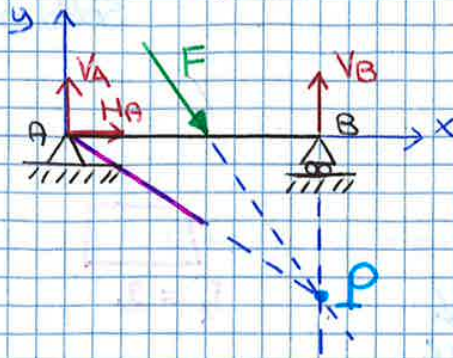


25



## DETERMINAZIONE GRAFICA delle reazioni vincolari

Questa via grafica è utile da usare come verifica



- In B abbiamo la reazione del carrello  $V_B$
- In A la cerniera ci mette 2 reazioni vincolari  $V_A$  e  $H_A$  la cui **Risultante  $R_A$**  ha una retta di applicazione passante per A e di inclinazione incognita

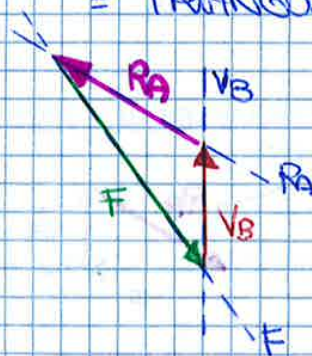
Affinché sia soddisfatto l'equilibrio della rotazione, tale retta deve passare per **P** punto di incontro tra la retta di  $V_B$  e la retta di azione di  $F$ .

Troviamo l'inclinazione di  $R_A$  usando  $P$  ad A

= POLIGONO DELLE FORZE

Per trovare l'intensità e il verso di  $R_A$

= TRIANGOLO DELLE FORZE



Scala 2:1

Ipotesi trasversale reticolare:

- 1) i nodi sono cerniere perfette
- 2) gli assi delle aste concorrono ai nodi senza eccentricità
- 3) i carichi agiscono solo sui nodi quindi le aste trasmettono forze solo alle estremità

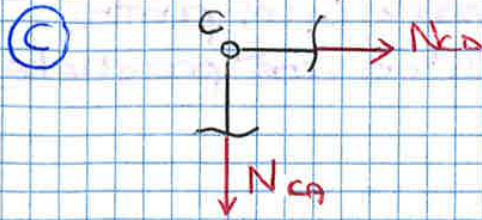
⇓  
 Solo sforzi  $N$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tensione} \\ \text{compressione} \end{array} \right.$



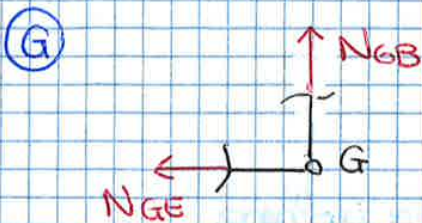
## a) METODO dell'EQUILIBRIO dei NODI

Ogni asta deve garantire equilibrio  
 Ogni camera  $\rightarrow$  2 eq. di equilibrio ( $-2$  ggr.)

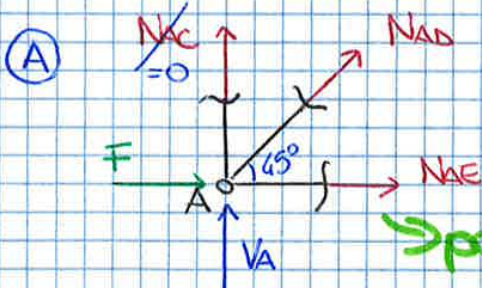
**! Verifichiamo gli sforzi di ogni nodo**  $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$



$\uparrow$   $N_{AC} = 0$   
 $\rightarrow$   $N_{CD} = 0$



$\uparrow$   $N_{GB} = 0$   
 $\rightarrow$   $N_{GE} = 0$

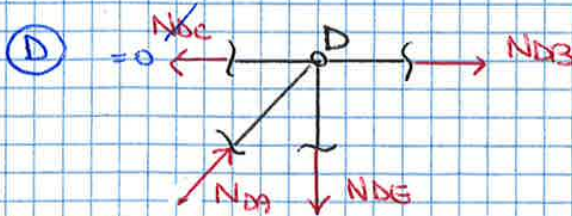
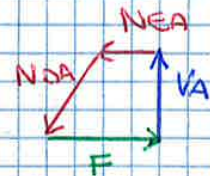


$N_{AD} = -\frac{F}{2} \sqrt{2} \quad \left[ -\frac{F}{2} \cdot \cos(45^\circ) \right]$

$N_{AE} = -\frac{F}{2}$

**poligono delle forze!**

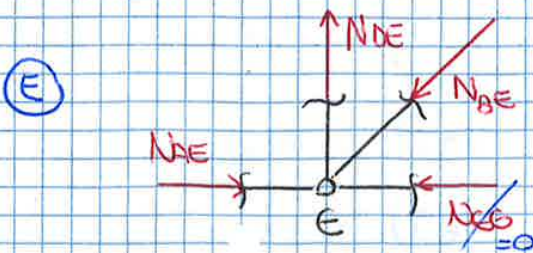
o con il metodo del poligono



$N_{DA} = N_{AD} = -\frac{F}{2} \sqrt{2}$

$N_{DE} = \frac{F}{2}$

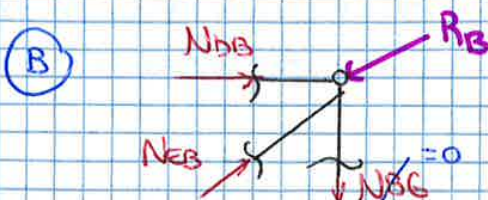
$N_{DB} = -\frac{F}{2}$



$N_{BE} = N_{EA} = -\frac{F}{2}$

$N_{DE} = N_{ED} = \frac{F}{2}$

$N_{BE} = -\frac{F}{2} \sqrt{2}$



$N_{BB} = N_{BD} = -\frac{F}{3}$

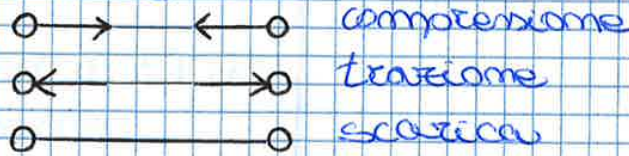
$N_{EB} = N_{BE} = -\frac{F}{2} \sqrt{2}$



## SFORZI INTERNI

Prendiamo in considerazione TRAVI con asse simmetrico pari al luogo dei baricentri delle due sezioni scelte essere ad asse rettilineo e a sezione costante

SFORZI INTERNI nelle aste  $\left\{ \begin{array}{l} \text{trazione} \\ \text{compressione} \end{array} \right.$  sono nuovi  
 li, aversi diretti lungo l'asse dell'asta



## TRAVE DEFORMABILE: AZIONI INTERNE

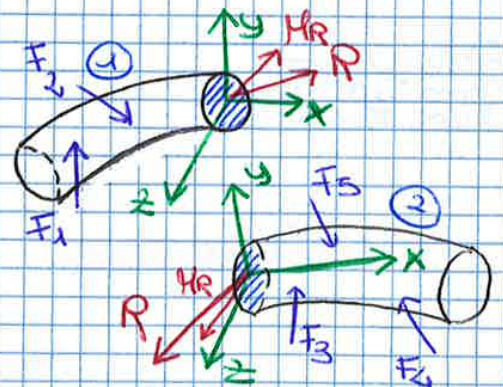
Trave in equilibrio sotto l'azione di carichi esterni e di reazioni vincolari

•  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  in equilibrio fra loro

① e ② in equilibrio per conto proprio

• Sezione S arbitraria ed ideale

Per garantire l'equilibrio sul baricentro delle 2 sezioni ma sono F che garantiscono l'equilibrio tra i 2 manconi



Resultante  $M_R$  momento } hanno 3 componenti lungo i 3 assi  $x, y, z$

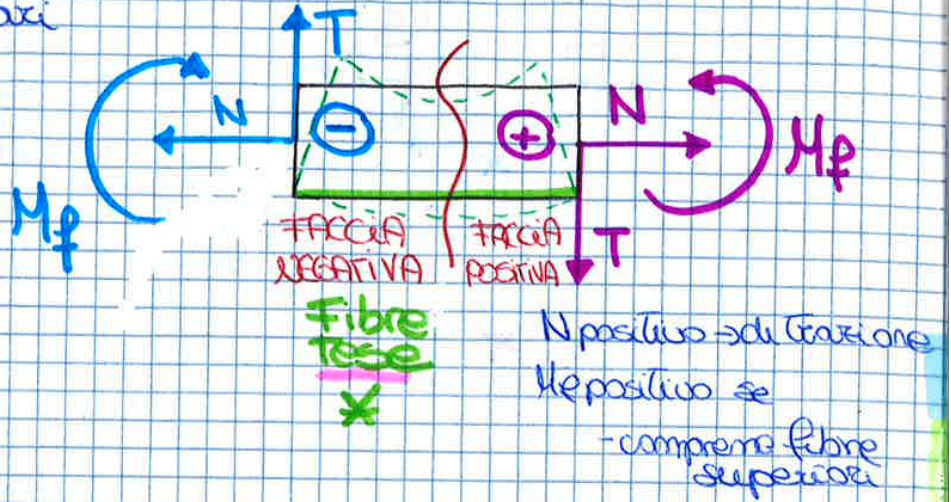
$$M_R \left\{ \begin{array}{l} M_y \text{ e } M_z = M_P \\ M_x \end{array} \right.$$

$$F_R \left\{ \begin{array}{l} N \\ T_y \text{ e } T_z \end{array} \right.$$

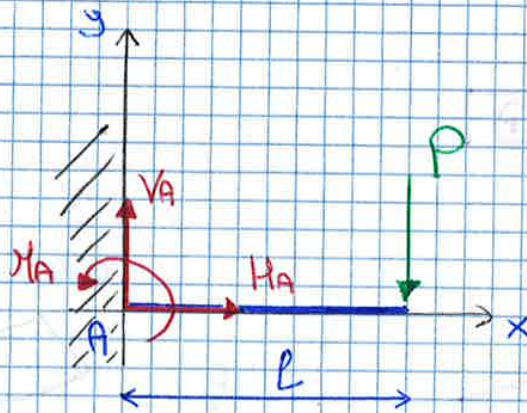


Bisogna scegliere la sezione ideale e calcolare le reazioni vincolari

**CONVENZIONE**

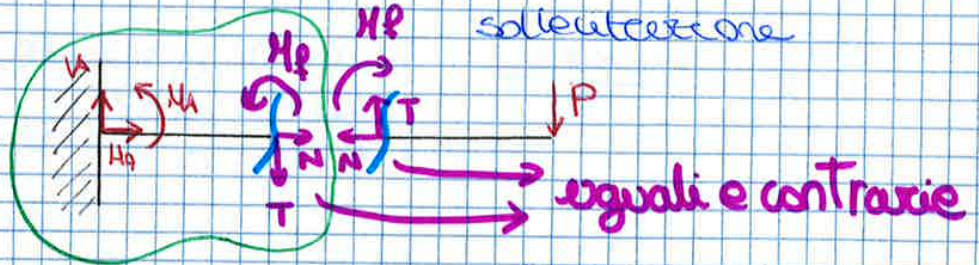


**Esempio**



$$\begin{aligned} \sum X = 0 & \quad H_A = 0 \\ \sum Y = 0 & \quad V_A - P = 0 \\ \sum M_2 = 0 & \quad M_A - P \cdot l = 0 \end{aligned}$$

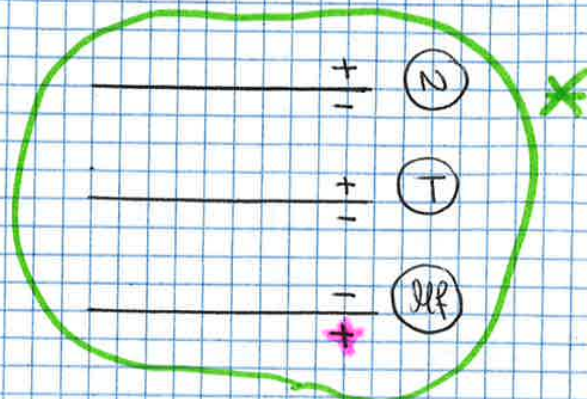
TAGLIO IDEALE  $\rightarrow$  variaz. di caratteristiche di sollecitazione



Ricavo

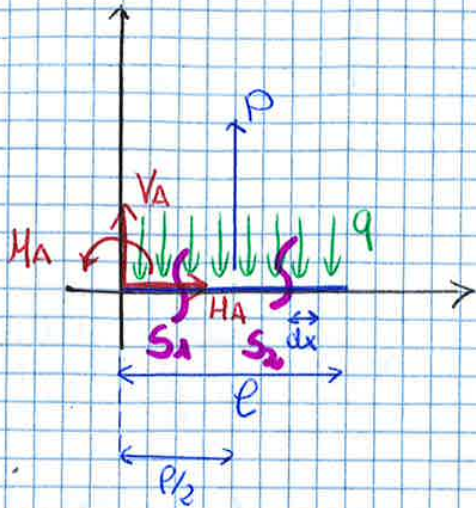
$$\begin{aligned} N \text{ da } \rightarrow & \quad \sum X = 0 \\ T \text{ da } \uparrow & \quad \sum Y = 0 \\ M \text{ da } \curvearrowright & \quad \sum M_2 = 0 \end{aligned}$$

! Se forze in 3D creare 2 tagli lungo y e z





Esempio

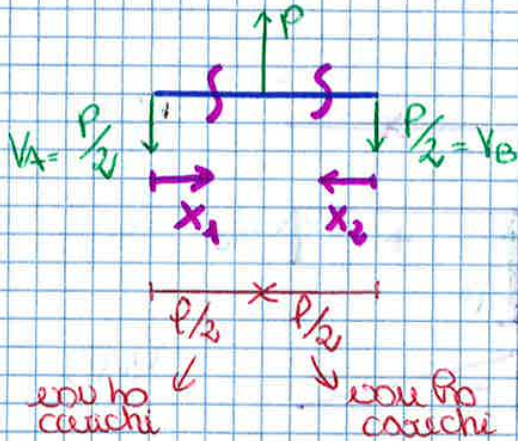


\* Reazioni vincolari

$$\begin{cases} M_A = 0 \\ V_A = -\frac{P}{2} \\ M_A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} V_A + P - \frac{P}{2} = 0 \\ M_A + P \cdot \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \cdot l = 0 \end{cases}$$

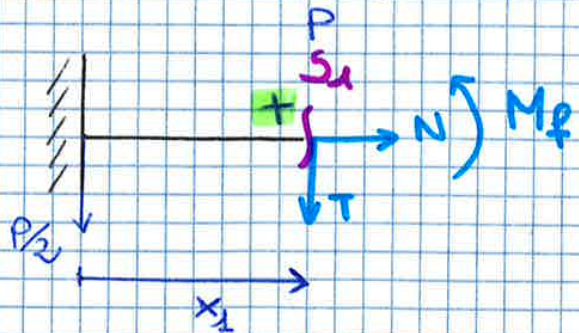
\* Caratteristiche di sollecitazione

! Tante sezioni quante sono le zone della Trave libere dai carichi esterni



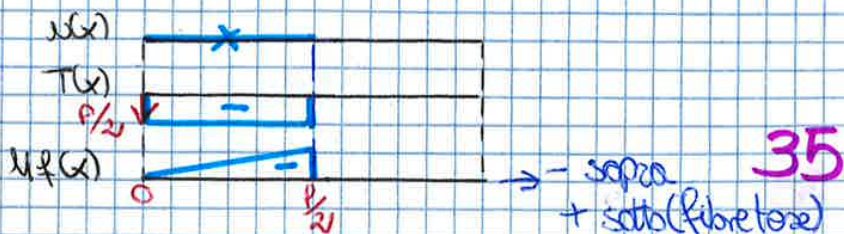
⇒ Carichi effettivi sulla Trave

(x1)  $0 \leq x_1 \leq \frac{l}{2}$



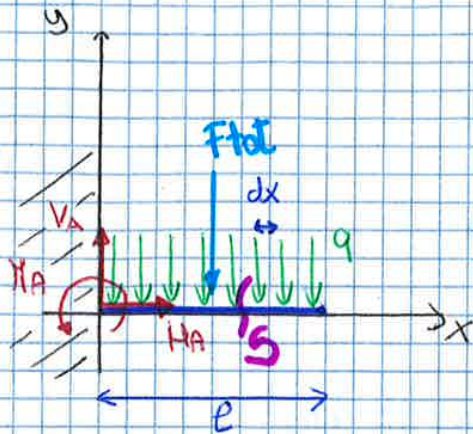
$\Rightarrow N = \phi$   
 $\uparrow T = -P/2$   
 $M_f^+ + \frac{P}{2} \cdot x_1 = 0 \quad M_f = -\frac{P}{2} x_1$

GRAFICO di x1





Esempio. Con il carico distribuito non c'è discontinuità quindi posso scegliere la sezione dove voglio



REAZIONI VINCOLARI

$F_{tot} = q \cdot l$

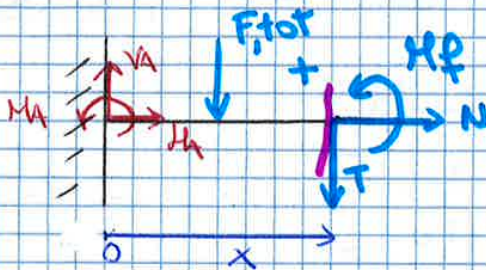
→)  $H_A = 0$

↑)  $V_A - q \cdot l$        $V_A = q \cdot l$

∑)  $-q \cdot l \cdot \frac{l}{2} + M_A = 0$

$M_A = q \cdot \frac{l^2}{2}$

CARATTERISTICHE di SOLLECITAZIONE



! Positive 2° la convenzione di segno

$0 \leq x \leq l$

(N)  
(T)

$H_A + N = 0$        $N = 0$

$V_A - T - q \cdot x = 0$

$T = q \cdot l - q \cdot x = q(l - x)$

perché  $F_{tot} = q \cdot x$

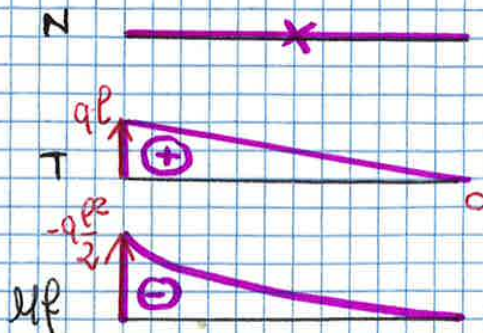
$V_A = q \cdot l$

(Mp)

$M_A + M_p - V_A \cdot x + F_{tot} \cdot \frac{x}{2} = 0$

$M_p = -M_A + q \cdot l \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2}$

$M_p = -q \cdot \frac{(l-x)^2}{2}$

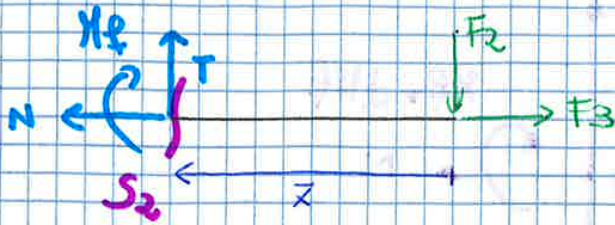


$T = q(l-x)$        $x=0 \rightarrow T=ql$   
 $x=l \rightarrow T=0$

$M_p = -q \cdot \frac{(l-x)^2}{2}$        $x=0 \rightarrow M_p = -q \cdot \frac{l^2}{2}$   
 $x=l \rightarrow M_p = 0$



(S2)  $0 < \bar{x} \leq a$



N)  $F_3 = N = 30.000 \text{ N}$

T)  $T = F_2 = 20.000 \text{ N} = T$

Mp)  $-Mp - F_2 \cdot \bar{x} = 0$

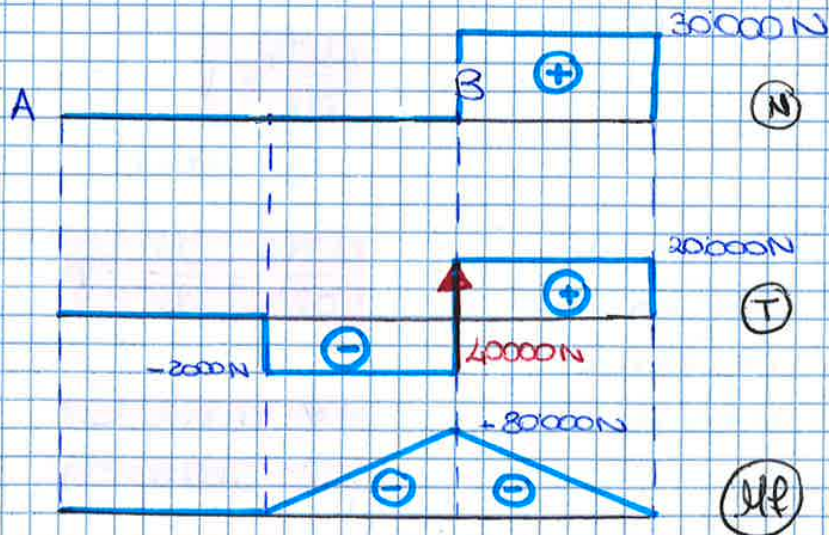
$Mp = -2000 \bar{x}$

$\cdot \bar{x} = 0 \quad Mp = 0$

$\cdot \bar{x} = a \quad Mp = -200.000 \text{ Nmm}$

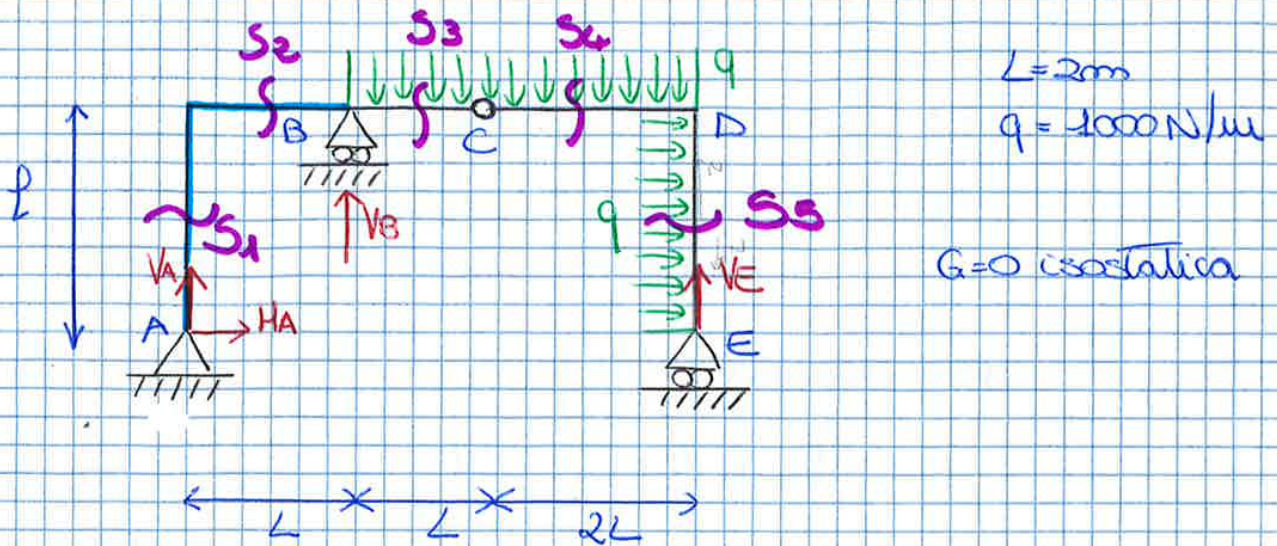


DIAGRAMMA TOTALE





# Esempio. Struttura a portale

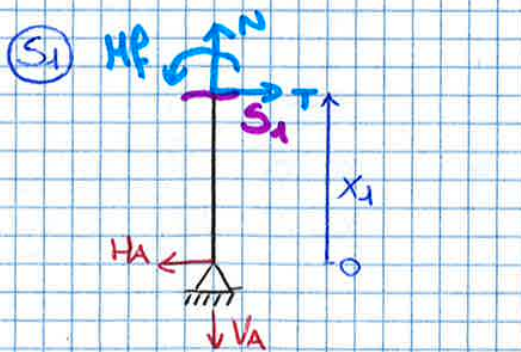


! Non trovo vincoli quindi 1 sezione  $S_1$   
 Quando cambio direzione faccio una sezione  $S_2$

REAZIONI VINCOLARI

$M_C = 2000\text{ N}$	$V_E = 1500\text{ N}$
$V_A = 5500\text{ N}$	$V_B = 10000\text{ N}$
$H_A = 2000\text{ N}$	
$V_C = 2500\text{ N}$	

## CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE



$0 \leq x_1 \leq l$

N)  $N - V_A = 0 \quad N = V_A = 5500\text{ N}$

$N = 5500\text{ N}$

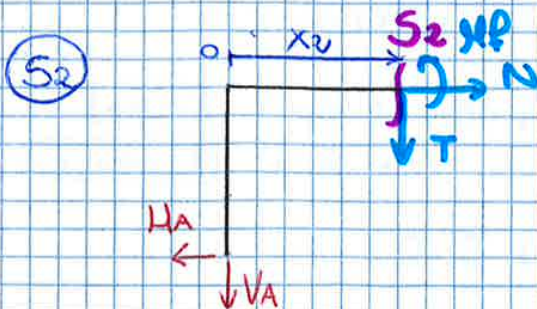
T)  $T - H_A = 0 \quad T = H_A = 2000\text{ N}$

$T = 2000\text{ N}$

MP)  $MP - H_A \cdot x_1 = 0$

$MP = 2000 \cdot x_1$     •  $x_1 = 0 \quad MP = 0$

•  $x_1 = l \quad MP = 4000\text{ N}\cdot\text{m}$



$0 \leq x_2 \leq l$

N)  $N - H_A = 0 \quad N = H_A = 2000\text{ N} = N$

T)  $-V_A - T = 0 \quad T = -5500\text{ N}$

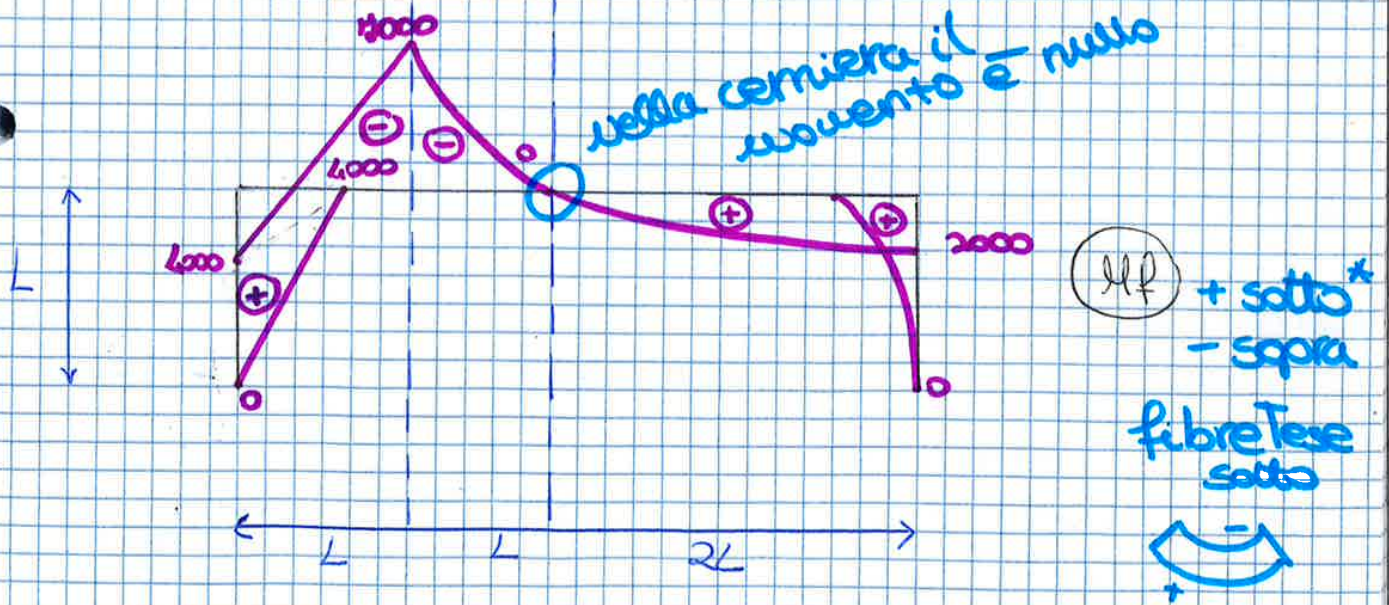
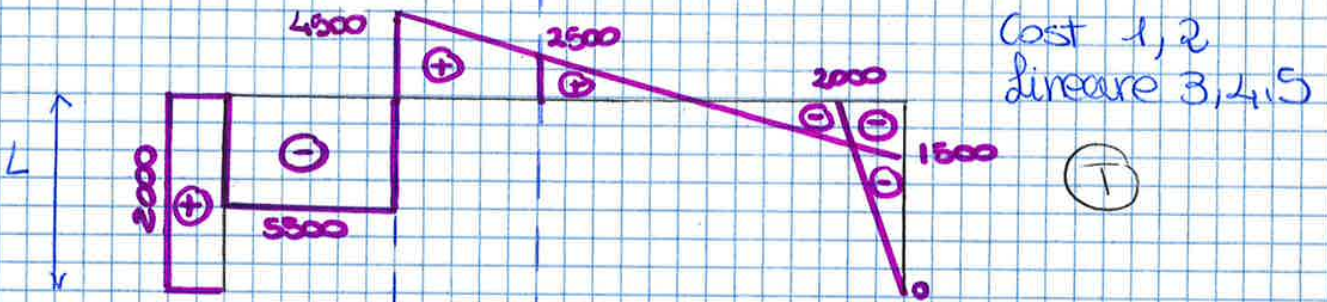
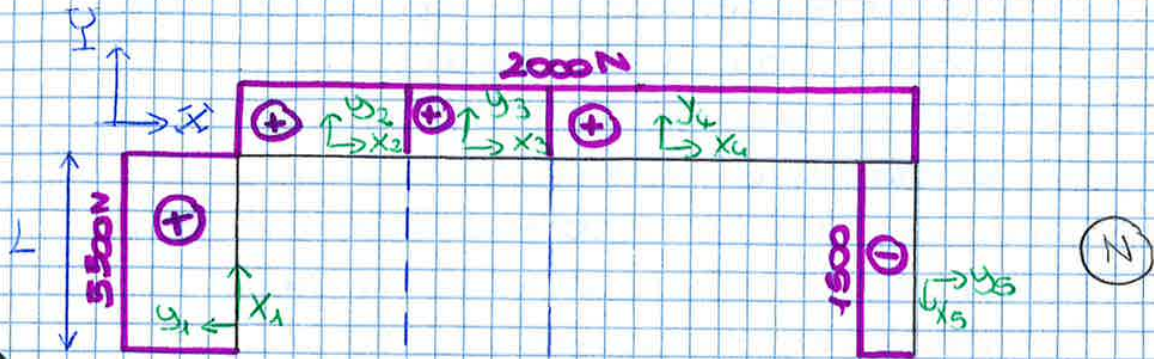
MP)  $MP - H_A \cdot l + V_A \cdot l = 0$     •  $x_2 = 0 \quad MP = 4000\text{ N}\cdot\text{m}$   
 $MP - H_A \cdot l - V_A \cdot x_2 = 0$     •  $x_2 = l \quad MP = -2000\text{ N}\cdot\text{m}$

41



! Devi essere equilibrato tra la parte SX e DX della cerniera (per quanto riguarda la sezione intermedia)

Diagrammi

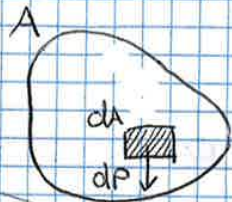




# GEOMETRIA delle AREE

ASSE GEOMETRICO della trave = linea luogo dei baricentri delle sezioni scelte della trave  
 Normalmente è una linea retta spezzata

## TRAVE DEFORMABILE



$d\vec{P} = \vec{g} \rho dA$  forze peso per unità di lunghezza  
 La integriamo per tutta l'area  
 $P =$  somma vettoriale delle  $dP$  elementari

$m = \rho \cdot A$

$[\rho] = \text{kg/m}^3$

Formulario

$dP = \rho dA \vec{g}$

$S = \int_0^L A \cdot x$

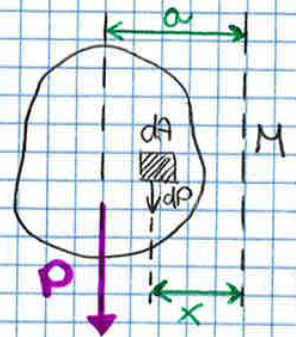
$a = \frac{S}{A}$

$\vec{P} \left\{ \begin{aligned} |\vec{P}| &= \int_A dP = \rho \int_A dA = \rho A \\ \text{DIREZIONE} &= \text{verticale come ogni } dP \end{aligned} \right.$

**PROPRIETÀ:**

- Baricentro
- Momenti statici della sezione

## MOMENTO STATICO



$P =$  sommatoria contributi  
 Il punto di applicazione di  $P$  può essere individuato calcolando il momento delle forze  $dP$  rispetto ad un asse  $M$  parallelo a  $P$

$\vec{P} \cdot a = \int_A \underbrace{x \cdot dP}_{\text{contributo}} \quad dP = \rho \delta A = \rho \int_A x \cdot dA$

teorema di Steiner

$\int_A dP \cdot x = P \cdot a$  momento statico  $S$

incognita  $\Rightarrow a$

effetto della risultante = effetto dei  $dP$   
 Semplicemente considerando il corpo omogeneo

$S = \int_A x \cdot dA$

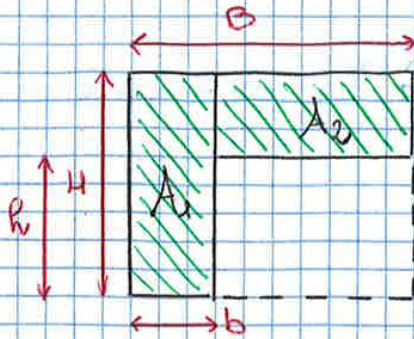
Sappiamo che  $a = \frac{\rho \int_A x \cdot dA}{P} = \frac{\rho \int_A x \cdot dA}{\rho \int_A dA} = \frac{\int_A x \cdot dA}{A} \quad a = \frac{S}{A}$

Spostiamo arbitrariamente  $M$  sulla retta d'azione del carico gravitazionale, allora  $a=0 \Rightarrow S=0$  = il momento statico è nullo se viene calcolato rispetto al carico gravitazionale









$$S = BH \cdot \frac{H}{2} - (B-b)h \cdot \frac{h}{2}$$

Per le figure composte:

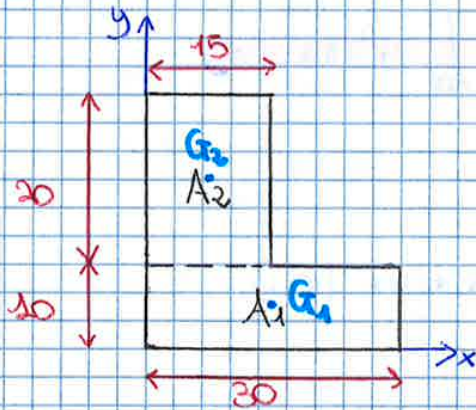
$$S_x = A_1 y_{G1} + A_2 y_{G2} + \dots + A_i y_{Gi} = \sum_{i=1}^n A_i y_{Gi}$$

$$S_y = A_1 x_{G1} + A_2 x_{G2} + \dots + A_i x_{Gi} = \sum_{i=1}^n A_i x_{Gi}$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_{Gi}}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_{Gi}}{A}$$

Esempio del calcolo del baricentro



Tracci baricentri  $G_1, G_2$  per simmetria

$$x_G = \frac{S_y}{A}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A}$$

	AREA [mm] <sup>2</sup>	$x_{G_i}$ [mm]	$S_{y_i}$ [mm] <sup>3</sup>	$y_{G_i}$ [mm]	$S_{x_i}$ [mm] <sup>3</sup>
A <sub>1</sub>	300	15	15 × 300 = 4500	5	5 × 300 = 1500
A <sub>2</sub>	300	15,5	15,5 × 300 = 4650	20	20 × 300 = 6000
A	600		6850		7500

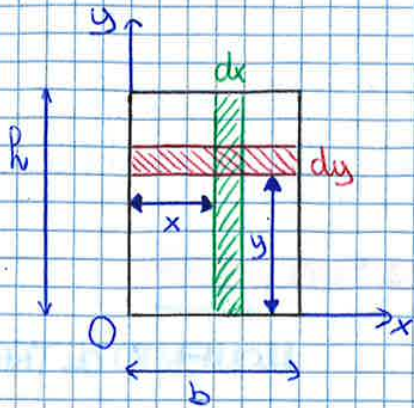
$$x_G = 11,25 \text{ mm}$$

$$y_G = 12,5 \text{ mm}$$

(vedi esercitazione)



RETTANGOLO con un sistema NON baricentrico



Integrabili doppi

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

• Per il calcolo di  $I_x$  area  $dy \cdot b = dA$

↳ asse rispetto al quale calcolo il M di inerzia

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b \cdot dy = \frac{bh^3}{3} = I_x$$

• Per il calcolo di  $I_y$  area  $dx \cdot h = dA$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 h \cdot dx = \frac{hb^3}{3} = I_y$$

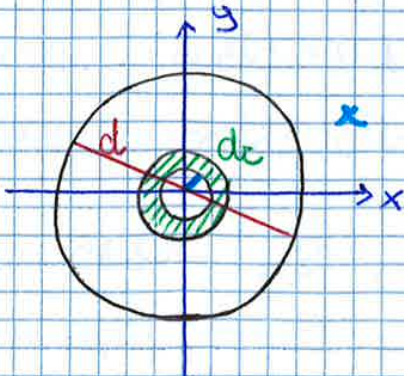
con un sistema baricentrico

Per simmetria  $x_G = b/2$   $y_G = h/2$

$$I_{xG} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b \cdot dy = \frac{bh^3}{12} = I_{xG}$$

$$I_{yG} = \int_A x^2 dA = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h \cdot dx = \frac{hb^3}{12} = I_{yG}$$

SEZIONE CIRCOLARE PIENA



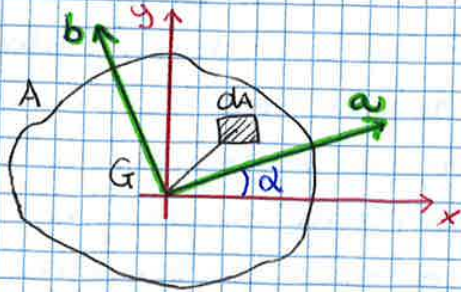
$$I_p \text{ (rispetto } O) = \int_A x^2 dA = \int_0^R r^2 (2\pi r \cdot dr) = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} = I_p$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} \quad I_d = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I_p = I_x + I_y = 2I_d$$



## MOMENTI PRINCIPALI d'INERZIA



$$I_p = \int_A r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_y + I_x$$

$$d = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$I_a = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

$$I_a = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

Il momento d'inerzia o momento si calcolano con:

$$\frac{dI_a}{d\alpha} = -(I_x - I_y) \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha$$

$$\frac{dI_a}{d\alpha} = 0$$

$$-(I_x - I_y) \cdot \sin 2\alpha - 2 I_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad \tan 2\alpha = -2 \frac{I_{xy}}{I_x - I_y}$$

Gli assi rispetto ai quali i momenti sono massimi o minimi sono ortogonali per la natura della tangente e vengono dette **ASSI PRINCIPALI di INERZIA (a, b)**

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \arctg \left( -2 \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} \right) \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$

! Rispetto agli assi principali d'inerzia il momento d'inerzia è 0

$$\begin{aligned} I_{ab} &= \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(y \sin \alpha + x \cos \alpha) dA = \\ &= I_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Sfatti  $I_{ab} = -\tan 2\alpha \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha$

$$I_{ab} = -\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha = 0$$

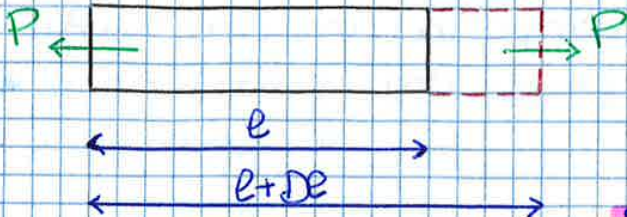
Esempio Calcolo degli assi principali dell'es. della pag. precedente

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctg \frac{2(-16875)}{3052,5 - 45250} = 35,99^\circ \text{ in senso antiorario}$$



## LEGGE di HOOKE (di allungamento)

Data una struttura sollecitata solo dallo sforzo normale si allunga o si accorcia (caso di trazione e compressione)



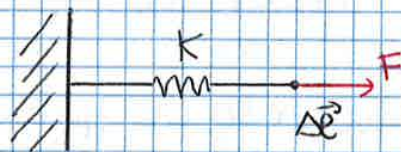
$\Delta e$  = allungamento assoluto

$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta e}{e}$  = allungamento relativo o deformazione

DEFORMAZ.

direzione allungamento  
normale alla sezione rispetto alla quale valuto l'allungamento

FORZA / SPOSTAMENTO



$F = K \cdot \Delta e$   $K = \text{rigidezza}$

TENSIONI / DEFORMAZIONE (per allungamenti piccoli)

$\sigma_{xx} = \frac{N}{A}$

$\epsilon_{xx} = \frac{\Delta e}{e}$

si collega con il concetto di proporzionalità:

LEGGE di HOOKE (definisce il comportamento lineare del materiale)

$\sigma_{xx} = E \cdot \epsilon_{xx}$

$E$  = modulo elastico (elasticità normale) o modulo di Young (è una costante)  
 $E$  piccolo  $\rightarrow$  materiale molle, più deformabile

$[E] = \frac{[N]}{[mm^2]}$



## PROVA di TRAZIONE

In laboratorio si fanno prove di trazione o di compressione per determinare i carichi ammissibili. Si eseguono su macchine di prova di tipo idraulico o elettromeccanico.

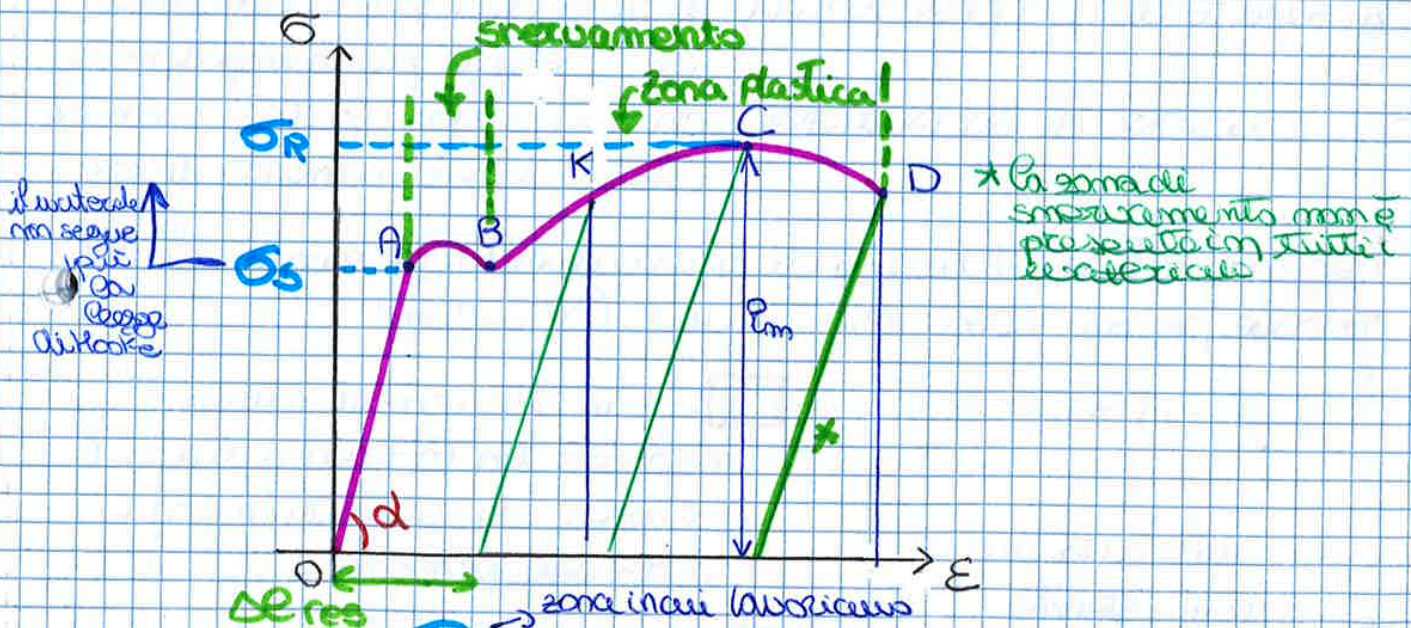
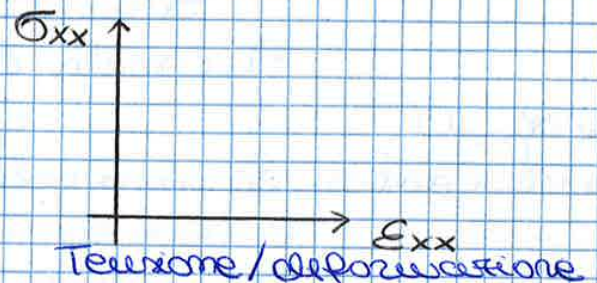
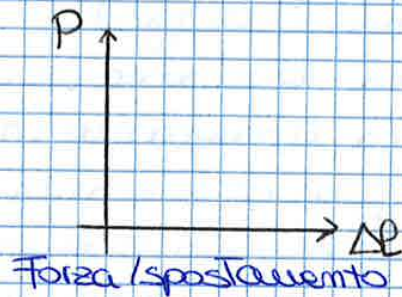
Valutiamo il limite di rottura, le caratteristiche del materiale sollecitabili in tutti i punti dello stesso modo.

Vengono classificate nella NORMATIVA UNI EN 10002

Provine di diametro circa di 15mm

La prova è statica quindi la deformazione è molto lenta.

Due tipi di diagrammi:



4 zone

OA

zona di ELASTICITÀ il materiale segue la legge di Hooke, si ha diretta proporzionalità (reversibile = possono tornare indietro)

\* AB

zona di SNERVAMENTO sensibile all'aumento (irreversibile) senza aumento di carico

BC

zona di INCRINDIMENTO non aumenta lo spostamento linearmente al carico (maximo = c)



# MATERIALI

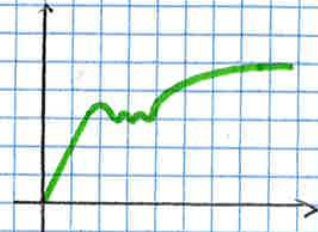
## DUTTI

Hanno la zona BC estesa  
il materiale è favorevole

$$AR \geq 5\%$$

esempio acciaio

\* perché C'è il punto di snervimento  
si può stampare per far sì che  
il materiale sia utilizzabile



## FRAGILI

Hanno la zona BC stretta  
il materiale è poco favorevole

$$AR < 5\%$$

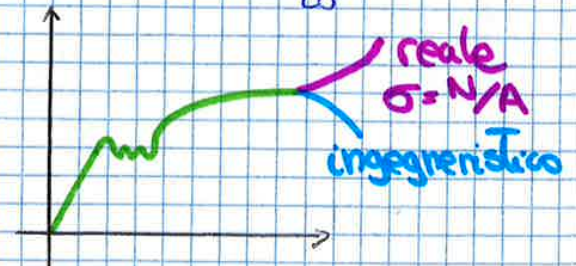
esempio vetro

Valori INGEGNERISTICI

= 2 Parametri

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A_0}$$

$$E_{xx} = \frac{\Delta l}{l_0}$$



I materiali metallici sono

- OMOGENEI il materiale ha le stesse proprietà in tutti i punti
- ISOTROPI stesse proprietà meccaniche in tutte le direzioni

Materiali biomedici → leghe Fe-C (acciaio e ghisa)  
→ leghe di Al, Ti, Bronzo, Mg

(slide 2%)

grafico  
materiali

59



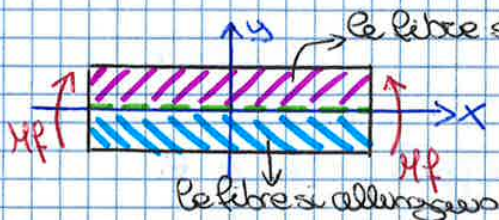
# SOLLECITAZIONI SEMPLICI = FLESSIONE

Sollecitazione semplice  $N \Rightarrow \sigma_{xx}$   
 $N = \int_A \sigma_{xx} \cdot dA$

**FLESSIONE:** modo di carico tale che, nelle sezioni scelti della trave, la sollecitazione si riduce al solo momento flettente  $M_f =$  flessione pura.  
 Normalmente però la flessione è accompagnata anche da sollecitazioni di taglio = flessione semplice (contenuta in un piano)

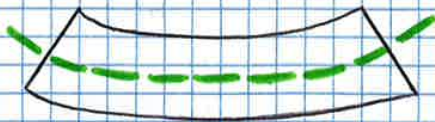
Consideriamo da qui in poi la flessione pura; con quella semplice i procedimenti sono gli stessi e al momento flettente si sommano gli effetti del taglio.

## CONDIZIONE INDEFORMATA



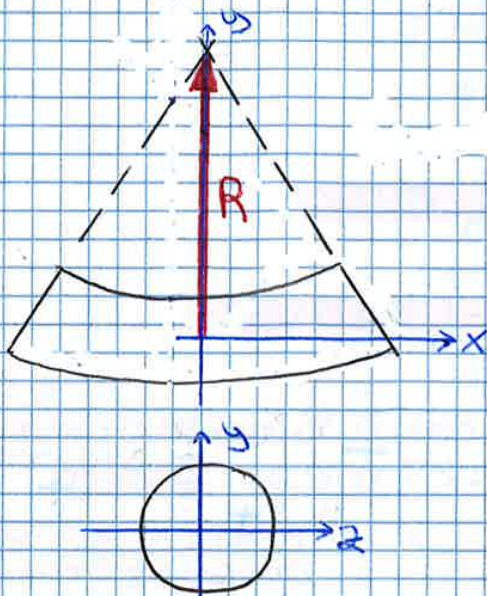
Asse neutro = **Tensione nulla**  
 Zona compressa  $\rightarrow$  **CONCAVA**  
 Zona tesa  $\rightarrow$  **CONVEXA** \*

## CONDIZIONE DEFORMATA



## Asse trave = **LINEA ELASTICA**

Grâce au plan de flexion que, par symétrie, coïncide avec le plan de sollicitation.  
 Considerando

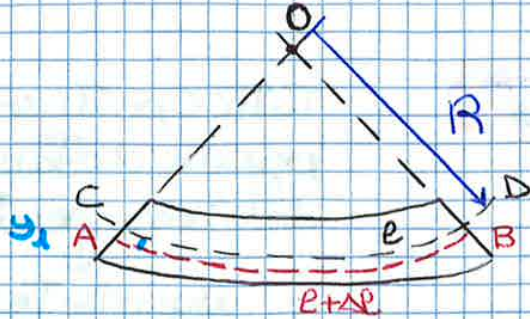


$M_f = \text{cost}$   
 $sezione = \text{cost}$  } **LINEA ELASTICA = ARCO di CIRCONFERENZA di raggio R**

\*Asse  $z \perp$  Asse  $y \Rightarrow$  fibre invariate



Prevediamo  $\Delta A_1$



Per similitudine

$$\frac{l + \Delta l}{l} = \frac{R - y_1}{R}$$

Per definizione

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta l_1}{l_1}$$

$$\Rightarrow \epsilon_1 = -\frac{y_1}{R} \quad \text{in generale } \epsilon = -\frac{y}{R}$$

posizione del punto

raggio del cerchio osculatore

EQUILIBRIO

$$\int_A \sigma dA = 0$$

$$-\int_A \sigma y dA = M$$

DEFORMAZIONE

$$\epsilon = -\frac{y}{R}$$

da Hooke  $\sigma = E\epsilon$

$$\Rightarrow \text{stressone } \sigma = -E \frac{y}{R}$$

$$\frac{E}{R} \int_A y \cdot dA = 0$$

l'asse neutro è BARICENTRICO

$$\frac{E}{R} \int_A y^2 \cdot dA = M$$

momento d'inerzia

non dipende dalla sezione

$$\frac{E}{R} J_2 = M$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{M}{E J_2}$$

CURVATURA ( $\frac{1}{R}$ )

è proporzionale al momento applicato

è inversamente proporzionale alla rigidezza = alla forza e al momento d'inerzia

$$\sigma = -\frac{M_2}{J_2} y$$

$$\epsilon = -y/R$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon = -E y / R = \frac{1}{R} (-E y)$$

$$-\frac{E}{R} \frac{y}{J_2} \cdot M$$

$$\Rightarrow \sigma = + \frac{y M}{J_2}$$

63



## SEZIONE CIRCOLARE per un diametro D

$$\sigma = \frac{My}{J_z}$$

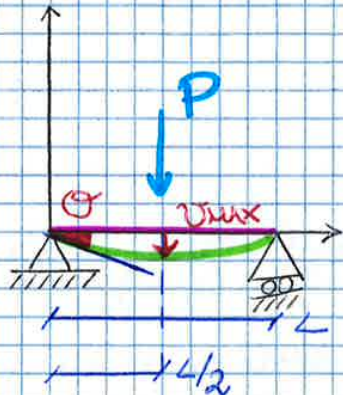
$$J_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$y_{MAX} = \frac{D}{2}$$

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32}$$

$$\Rightarrow \sigma_{MAX} = \frac{32M}{\pi D^3}$$

## INFLESSIONE TRAVE



Indeformata  
Deformata

$v_{MAX}$  coincide come  $\sigma$

I piccoli spostamenti possono percorrere la curva

Raggio totale  $R = \frac{ds}{d\theta}$

$$ds \approx \frac{dx}{\cos\theta} \approx dx$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \quad \frac{dv}{dx} = \theta$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}$$

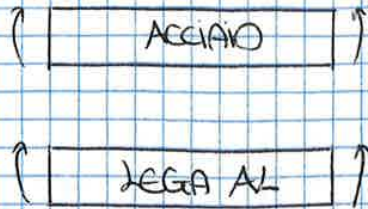
$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M(x)}{EJ_z}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_z}$$

positivo se come  $\theta$  convenzione

equazione differenziale della linea elastica





La Tensione è uguale perché dipende solo dalla geometria

$$\sigma = -\frac{yM}{J_z}$$

↳ invece la curvatura dipende dal materiale

! Nella  $\sigma_{max}$  può iniziare il cedimento = è il punto che ci interessa

LAVORO di DEFORMAZIONE

$$L = \frac{M^2 l}{2EI}$$

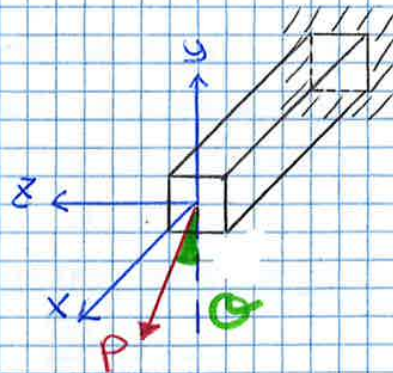
CARICO INCLINATO su Trave incastrata

2 reattenti  $M_y$  e  $M_z$   
 2 carichi  $P \cos \theta$  e  $P \sin \theta$   
 infatti  $P$  è inclinato di  $\theta$

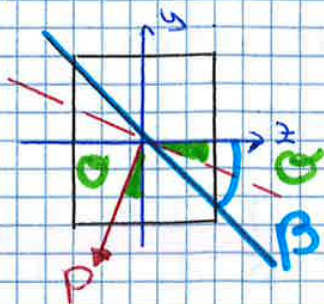
$$M_z = -P x \cos \theta$$

→ fibre tese sotto (-)

$$M_y = P x \sin \theta$$



Il piano di flessione della trave non coincide con il piano della trave = reattenti si inflette ruota



La tensione è data dalla sovrapposizione degli sforzi di flessione

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z}$$

= 0 per trovare l'asse neutro

$$z_y \beta = \frac{y}{z} = \frac{M_y J_z}{M_z J_y} = \frac{J_z}{J_y} \tan \theta$$

(nel caso di  $M_y$  e  $M_z \neq 0$ )

i piani principali per sezioni circolari o quadrate **67**



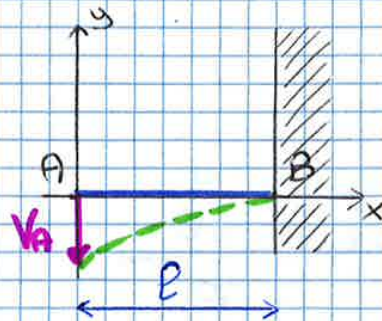
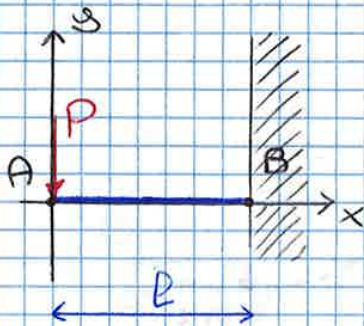
Supponiamo che  $\frac{l}{R} = \frac{M(x)}{EJ_2}$

EQ. DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA  $\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ_2}$

$EJ v(x) = \int_0^x \left[ \int_0^x M(x) dx + C_1 \right] + C_2$  integrata 2 volte

Le costanti  $C_1$  e  $C_2$  dipendono dalle condizioni al vincolo

Esempio = calcolo della freccia di una mensola incastrata



Momento flettente  $M(x) = -P \cdot x$

↓ scrittura eq. differenziale

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{-P \cdot x}{EJ}$$

↓ integrale 1° volta

$$EJ \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2} P x^2 + C_1$$

Asserisco che all'incastro  $x=l$

(rotazione)  $\theta(l) = \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} P l^2$

$$EJ \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2} P x^2 + \frac{1}{2} P l^2$$

↓ integrale 2° volta

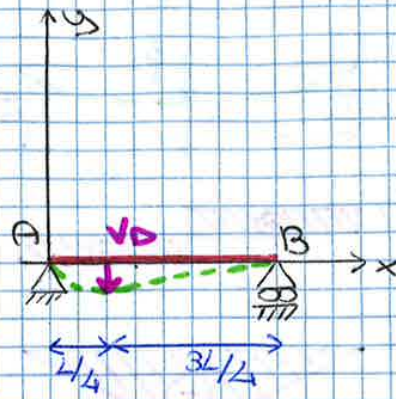
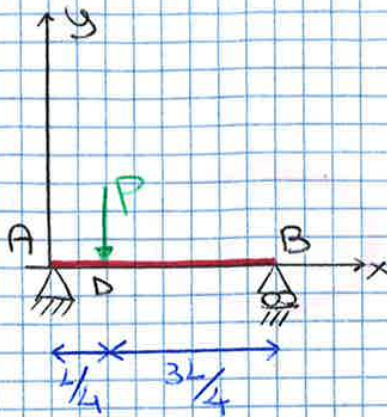
$$EJ v = -\frac{1}{6} P x^3 + \frac{1}{2} P l^2 x + C_2$$

Asserisco che all'incastro  $x=l$

$v(l) = 0$  (freccia)



Esempio. calcolo della freccia di una trave appoggiata con carico concentrato



$$ES \cdot \theta_{AD} = \frac{3}{8} P x^2 - \frac{4}{128} P L^2$$

$$ES \cdot v_{AD} = \frac{1}{8} P x^3 - \frac{4}{128} P L^2 x$$

$$\theta_D = -\frac{P L^2}{32 ES}$$

$$V_D = -\frac{3 P L^3}{256 ES}$$

CON INCIUSTRO

$$\theta(0) = 0$$

$$v(0) = 0$$

TRAVE APPOGGIATA

$$v(L) = 0$$

$$\theta(L) = 0$$

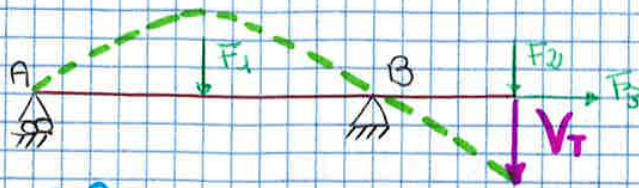
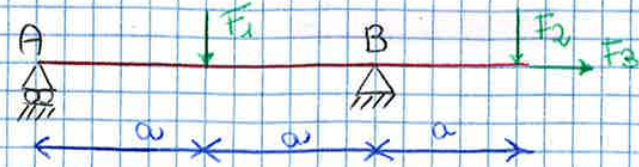
$$\theta(x_{max}) = 0$$

SOVRAPPOSIZIONE degli EFFETTI per il calcolo della freccia

- nel caso di strutture a una singola campata si può calcolare la freccia con il metodo della doppia integrazione
- nel caso di strutture articolate più complesse la  $f$  momento flettente è continua A TRATTI  $\rightarrow$  integrazione a tratti. Oppure nel caso di picchi spostabili:
  - possibilità di applicare i carichi separatamente e sommare i diversi contributi algebricamente
  - possibilità di modificare lealmente i vincoli e sommare gli effetti algebricamente
  - ricordare ai casi notevoli scomponendo la struttura e sommando i contributi algebricamente

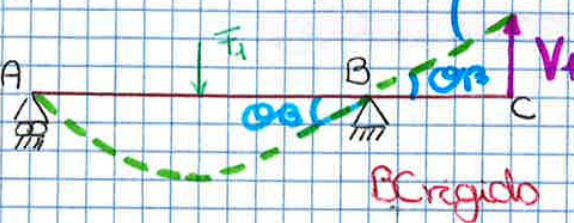


Esempio - calcolo della freccia con la sovrapposizione degli effetti



! Appliciamo una carica per volta

(F1)



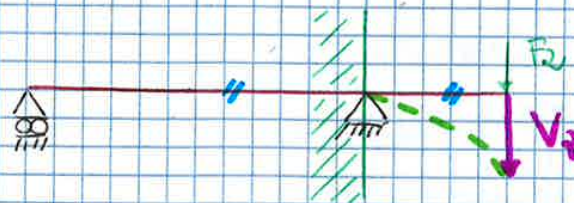
Sezione quindi retta

Calcolo la freccia  $V_1$   
 Si comporta come una trave a una campata  
 BC è sezione e ruota rigidamente

$$V_1 = \frac{F_1 (2a)^2}{16ES} \quad a = (\tan \theta) a \approx \theta \cdot a$$

(F2)

AB rigido

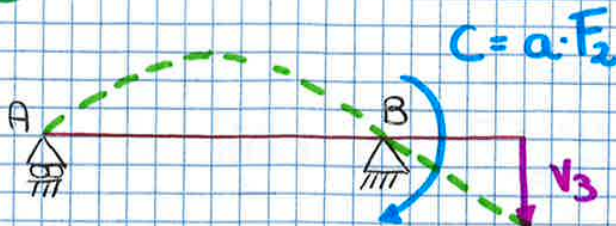


retto univoco momentaneo

$$V_2 = \frac{F_2 a^3}{3ES} \quad \rightarrow F_2 \cdot a = e$$

Due campate

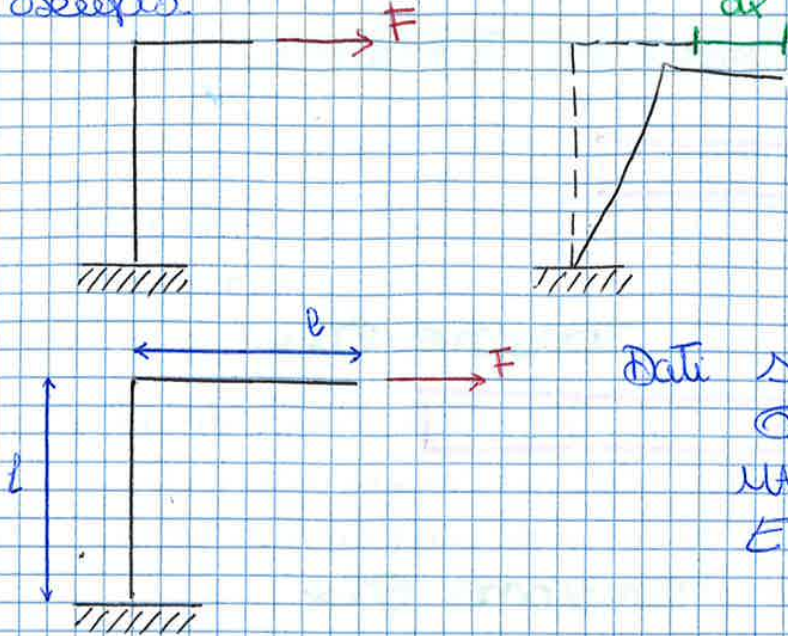
(F3)



$$V_3 = \theta \cdot a = \frac{e(2a)}{3ES} a = \frac{F_3 \cdot a(2a)}{3ES} a$$

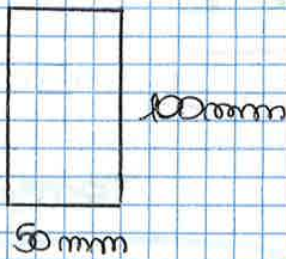


Esempio



Dati  $\Delta x = 2 \text{ mm}$   
 $\sigma_R = 100 \text{ MPa}$   
 MATERIALE FRAGILE  
 $E = 150.000 \text{ MPa}$

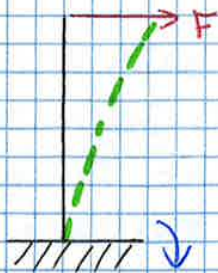
Se non è dato il coeff di simmetria  $b$  prendiamo uguale a 1



$l = 1000 \text{ mm}$

Calcolare la forza che causa spostamento  $\Delta x$

- eq. differenziale della linea elastica
- sovrapposizione degli effetti



\* così è confrontabile



$$\Delta x = \frac{F \cdot e^3}{3ES} + \frac{Fl}{EA} = F \left( \frac{e^3}{3ES} + \frac{l}{EA} \right) \quad F = 384 \text{ ON}$$

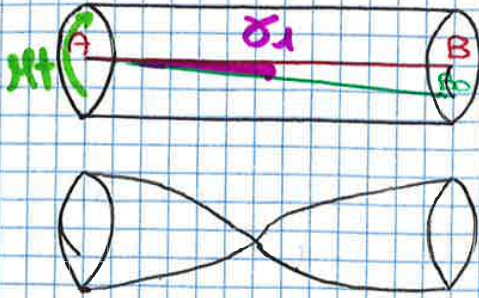
Se sempre?

Tensione massima  $\sigma_{max} = \frac{M}{bh^2} = \frac{6Fl}{bh^2} = 44,28 = 15 \text{ MPa} *$

$\sigma_{max} \leq \sigma_{amm} \text{ per sempre } 15 \cdot 2 = 100 \cdot x \quad x \approx 4 \text{ mm} \quad 75$



Ad esempio prendiamo la fibra AB del troncone (1)



Per effetto della coppia, la fibra AB si dispone secondo un tratto di elica cilindrica AB

La sua inclinazione sarà

$$\tan \sigma_1 = \sigma_1 = \frac{B_0 \cdot B}{L} \quad \text{SCORRIMENTO}$$

$$B_0 \cdot B = \sigma_1 \cdot L \quad \downarrow \quad \sigma_1 = \sigma_1 \frac{L}{L}$$

Generalizzando:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 \cdot L}{L}$$

$\sigma$  e  $\gamma$  sono legate dalla legge di Hooke  $\sigma = G \gamma$

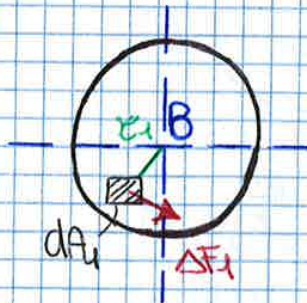
con  $G$  = modulo di elasticità tangenziale

$G = E \cdot \nu$  con  $E$  = modulo di elasticità normale

$$\sigma = G \gamma$$

Per i materiali omogenei:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



$$\Delta \phi_1 = \tau_1 \Delta A_1$$

ideee

$$\Delta \phi_2 = \tau_2 \Delta A_2$$



$$\int_A \tau \cdot r \cdot dA = M \tau$$

Sostituendo Hooke  $\tau = G \cdot \frac{\phi}{L}$

$$\Rightarrow \int_A \tau \left( G \frac{\phi}{L} \right) dA = M \tau$$

$$G \frac{\phi}{L} \int_A \tau^2 dA = M \tau$$

$J_p$

$$G \frac{\phi}{L} J_p = M \tau$$

$$G = \frac{M \tau L}{J_p}$$

MODULO DI TORSIONE

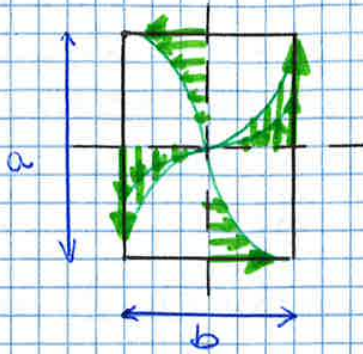
$$G_u = \frac{M \tau}{J_p} \quad \text{UNITARIO}$$

$$\tau = \frac{M \tau L}{J_p}$$

77



**B** Per sezioni rettangolari l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane non è più valida. Si ricorre quindi a metodi indiretti, ad esempio all'analisi elastodinamica.

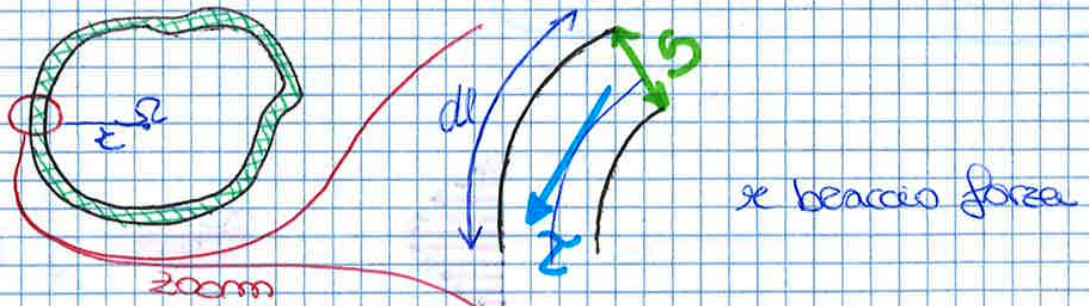


$$\tau_{max} = d \frac{M_t}{ab^2}$$

↓  
tangente zero nel punto di reverso dei lati più corti  
d fattore di forma (tabella)

$$\sigma_u = \beta \frac{M_t}{G a b^3} \quad \beta \text{ tabella}$$

**C** Per sezioni anulari di piccolo spessore Hp di BREST  
Approssimiamo  $\tau_{tg}$  a un valore medio costante



$$dF = \tau s dl \quad (\tau \text{ alla media})$$

$$dM_t = 2\tau s dx \quad \text{integro} \quad M_t = 2\tau s \cdot r$$

$$\tau = \frac{M_t}{2 r s}$$

$\tau$  piccola  $\rightarrow$  spessore grande  
 $\tau$  grande  $\rightarrow$  spessore piccolo

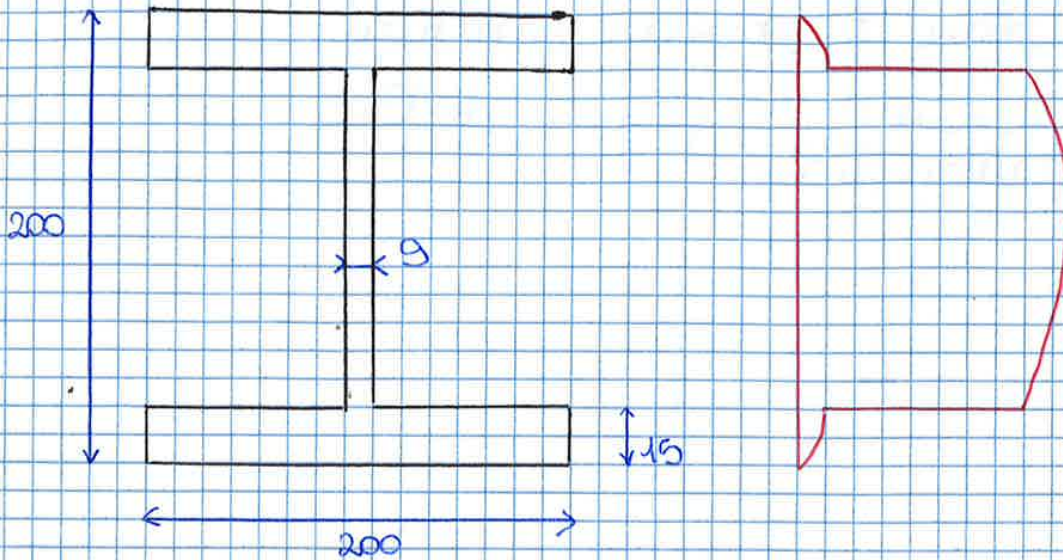
$$\sigma_u = \frac{M_t}{G r^2} \int \frac{1}{s} dl$$

$$r = 2\pi r$$



# Sezione doppio T

$T = 100 \text{ kN}$



$$A = 200 \times 15 \times 2 + 170 \times 9 = 4530 \text{ mm}^2$$

$$\tau_m = \frac{T}{A} = 13,3 \text{ MPa}$$

Momento di inerzia baricentrico (sommando i contributi dell'area centrale e delle ali inferiore e superiore)

$$I_x = 55134,50 \text{ mm}^4$$

$$Z = \frac{I_x}{b \cdot J_2}$$

Momento statico alla superiore  $S(y_1) = 200 \times 15 \times 92,5 = 277500 \text{ mm}^3$

Tensione tangenziale:

$$\tau = \frac{100000 \cdot 277500}{200 \cdot 55134,50} = 2,5 \text{ [MPa]}$$

Tensione nel punto d'inizio dell'area verticale:

$$\tau = \frac{100000 \cdot 277500}{9 \cdot 3294250} = 55,9 \text{ [MPa]}$$

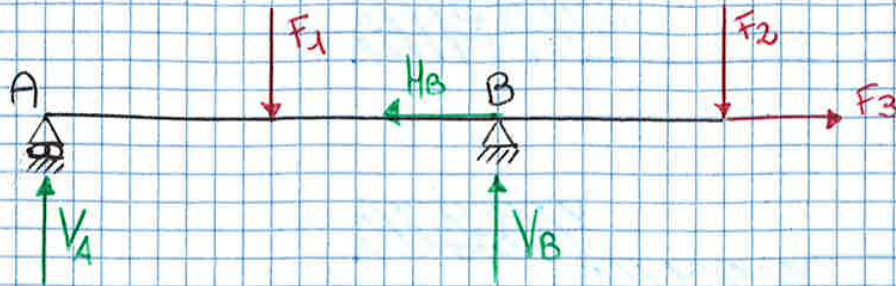
$$S(y_2) = 200 \times 15 \times 92,5 + 85 \times 9 \times (85/2) = 31012,5 \text{ mm}^3$$

Tensione nel baricentro

$$\tau = \frac{100000 \cdot 31012,5}{9 \cdot 55134,50} = 62,5 \text{ [MPa]} \quad \times \uparrow$$



## 1. Calcolare le reazioni vincolari



$$\rightarrow +) F_3 - H_B = 0$$

$$H_B = 30000 \text{ N}$$

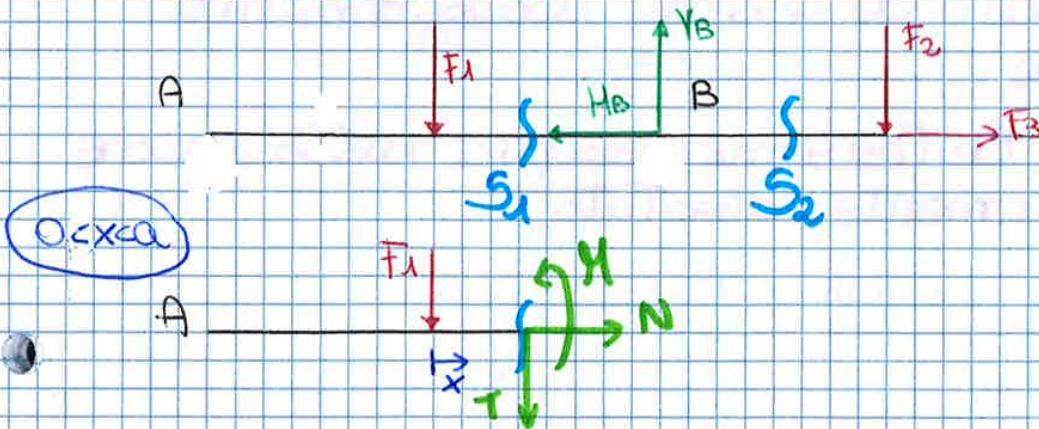
$$\uparrow +) V_A - F_1 + V_B - F_2 = 0$$

$$\curvearrow +) -F_1 \cdot x + V_B \cdot 2x - F_2 \cdot 3x = 0$$

$$V_B = 40000 \text{ N}$$

$$V_A = 0 \text{ N}$$

## 2. Calcolare e diagrammare le caratteristiche di sollecitazione



$$\rightarrow +) N = 0$$

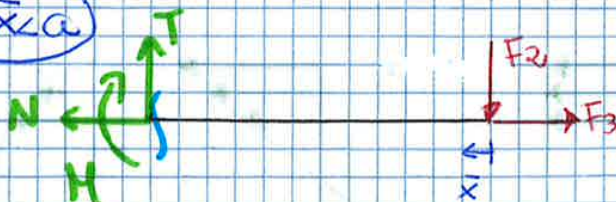
$$\uparrow +) -F_1 - T = 0$$

$$\curvearrow +) M + F_1 \cdot x = 0$$

$$x=0 \quad M = 0 \text{ Nm}$$

$$x=a \quad M = -80000 \text{ Nm}$$

$0 < \bar{x} < a$



$$\rightarrow +) F_3 - N = 0$$

$$N = 30000 \text{ N}$$

$$\uparrow +) T - F_2 = 0$$

$$T = 20000 \text{ N}$$

$$\curvearrow +) M + F_2 \cdot x = 0$$

$$x=0 \quad M = 0 \text{ Nm}$$

$$x=a \quad M = 80000 \text{ Nm}$$



## 6) Verificare la Struttura

Condizione di verifica  $\sigma_N + \sigma_f = 99 \text{ MPa}$   
↳ nel punto  $\downarrow$  dove  $z_T = 0$

$$\sigma_{AMM} = \frac{\sigma_s}{s} = \frac{700}{2} = 350 \text{ MPa}$$

$$99 \text{ MPa} < \sigma_{AMM} \Rightarrow \text{VERIFICATA}$$

! A punto maggiormente sollecitato \*



Sulla faccia inclinata del tetraedro

$$\{F\} = \{t\} \Delta S$$

$$\text{con } \{t\} \Delta S - \{t_x\} \Delta S_x - \{t_y\} \Delta S_y - \{t_z\} \Delta S_z - \{\rho\} \Delta V = 0$$

$$\{t\} \Delta S - \{t_x\} \Delta S \cdot n_x - \{t_y\} \Delta S \cdot n_y - \{t_z\} \Delta S \cdot n_z - \{\rho\} \Delta V = 0$$

$$\Delta S \{t\} - \{t_x\} n_x - \{t_y\} n_y - \{t_z\} n_z = 0$$

infinitesimi di ordine superiore = 0 trascurato

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} t_{xx} \\ t_{xy} \\ t_{xz} \end{Bmatrix} n_x - \begin{Bmatrix} t_{yx} \\ t_{yy} \\ t_{yz} \end{Bmatrix} n_y - \begin{Bmatrix} t_{zx} \\ t_{zy} \\ t_{zz} \end{Bmatrix} n_z = 0$$

Alternativa la matrice

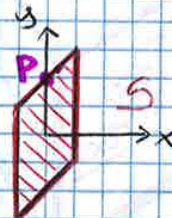
$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

interazioni ingegneristiche

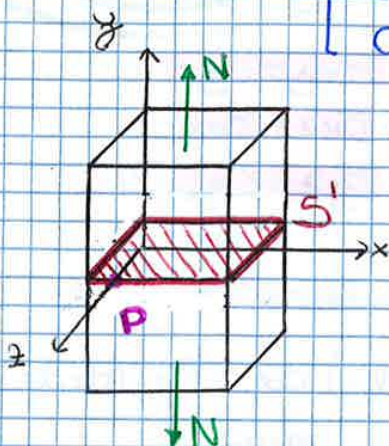
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

TRAZIONE PURA



$$\sigma_{xx} = \frac{P}{A}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

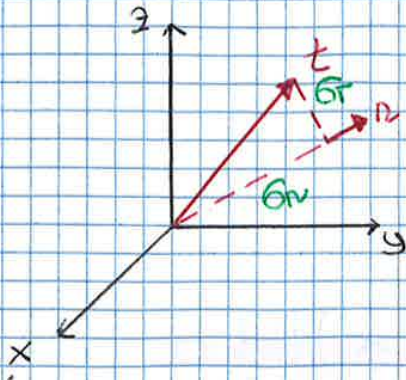


$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Dato il tensore delle tensioni in un punto (rispetto alla base alla sezione  $\{n\}$ ) è possibile determinare le componenti normale e tangenziale



$$\sigma_N = \{t\}^T \{n\} = \{n\}^T \{t\} = \{n\}^T [\sigma] \{n\}$$

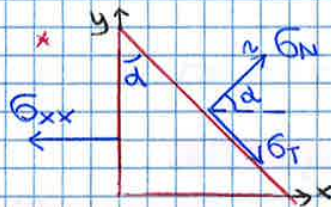
$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{t\}^T \{t\}$$

$$\{n\}^T \{n\} = 1$$

Caso:



TRAZIONE PURA



$\alpha = 45^\circ$  (come nelle prove di tensione)

$$\{n\} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} = 1 \text{ versore } n$$

cos direttori: 
$$\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_N = \{n\}^T [\sigma] \{n\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right\} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \sigma_N = \sigma_T = \frac{\sigma_{xx}}{2}$$

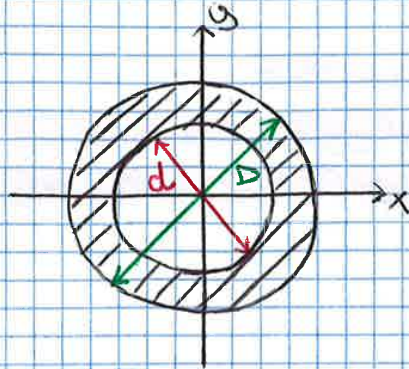
Caso:



Il materiale risente di più, nel geometrico, del contributo tangenziale (verrà piegato). La componente normale allunga o accorcia il materiale



**Esempio** Data una sezione circolare cava di diametro esterno 35mm e interno 28mm soggetta nella sezione maggiormente sollecitata ad un momento flettente di 180 Nm, un momento torcente di 120 Nm, una forza di trazione normale di 25000 N ed una forza di taglio 500 N.



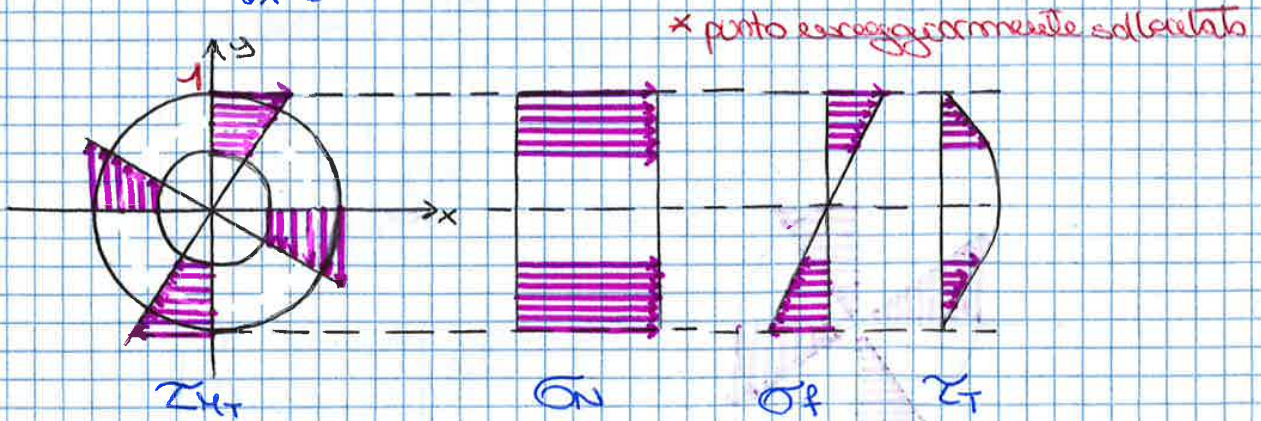
- Calcolare il tensore maggiormente sollecitato
- Calcolare le tensioni principali nel punto maggiormente sollecitato

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{25000}{\pi(R^2 - r^2)} = 82 \text{ MPa}$$

$$\tau_{Mf} = \frac{M_f}{J_p} z \rightarrow \tau_{Mf-max} = \frac{M_f}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \cdot \frac{D}{2} = \frac{16 M_f \cdot D}{\pi(D^4 - d^4)} = 26 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p = \frac{M_f}{I_x} y \rightarrow \sigma_{p-max} = \frac{M_f}{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)} \cdot \frac{D}{2} = 83 \text{ MPa}$$

$$\tau_T = \frac{T \cdot S_x}{I_x \cdot b} = 8 \text{ MPa}$$



$$\sigma_{zz} = \sigma_N + \sigma_p = 165 \text{ MPa}$$

2 aree trave

$$\tau_{zx} = \tau_{Mf-max} = 26 \text{ MPa}$$

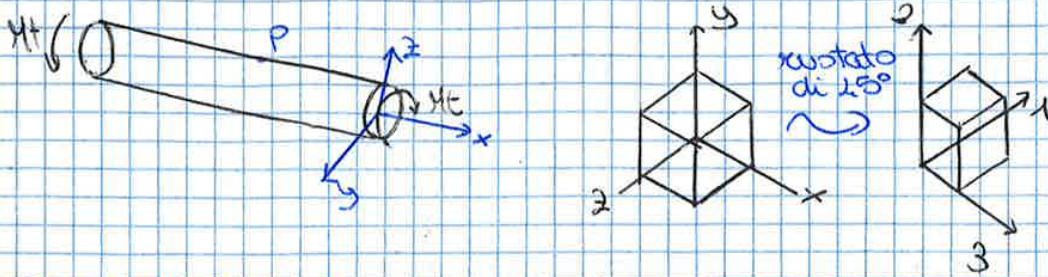
$$\Rightarrow [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 0 \\ 26 & 0 & 165 \end{bmatrix}$$

Tensioni principali  $\det \begin{vmatrix} -\sigma_p & 0 & 26 \\ 0 & -\sigma_p & 0 \\ 26 & 0 & 165 - \sigma_p \end{vmatrix} = 0$

$\sigma_p = 0 \text{ MPa}$      $\sigma_p^2 - 165\sigma_p - 26^2 = 0$   
 $\sigma_1 = 168 \text{ MPa}$      $\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$      $\sigma_3 = -6 \text{ MPa}$



Le direzioni principali della tensione sono inclinate di  $45^\circ$  rispetto al S.R. della trave



CERCHI di MOHR

Rappresentazione bidimensionale (nel piano  $\sigma_N$  vs  $\sigma_T$ ) dello stato di tensione tridimensionale in un punto.

Sappiamo che

$$\sigma_N = \{t\}^T \{n\} \quad **$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{t\}^T \{t\} \quad *$$

$$1 = \{n\}^T \{n\}$$

$$** \quad \sigma_N = \{n\}^T [\sigma] \{n\} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$* \quad \begin{cases} \sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{n\}^T [\sigma] [\sigma] \{n\} \\ \sigma_T^2 + \sigma_N^2 = \{\sigma_1 n_1, \sigma_2 n_2, \sigma_3 n_3\} \end{cases} \begin{cases} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = (\{n\}^T [\sigma]) ([\sigma] \{n\})$$

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\sigma_T^2 + \sigma_N^2 = (\sigma_1 n_1)^2 + (\sigma_2 n_2)^2 + (\sigma_3 n_3)^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \sigma_T^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) + \sigma_T^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)}$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) + \sigma_T^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

Denominatori

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) &\geq 0 \\ (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) &\geq 0 \\ (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

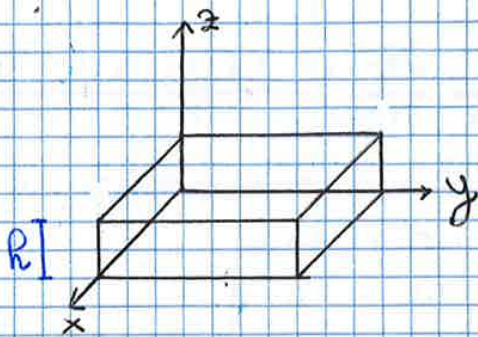


STATO di TENSIONE  $\left\{ \begin{array}{l} \text{TRIASIALE } \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \neq 0 \\ \text{BIDIMENSIONALE} = \text{piana} \\ \text{MONODIMENSIONALE} \text{ caso esempio: } \\ \text{trazione pura} \end{array} \right.$

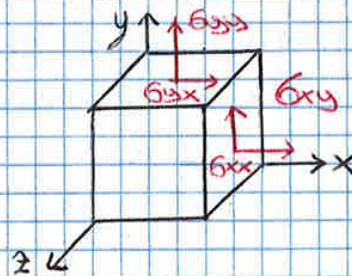
STATO di TENSIONE PIANA

- Travi
- Piastre

Ho sempre una faccia (libera) nella quale riconosco la principale.



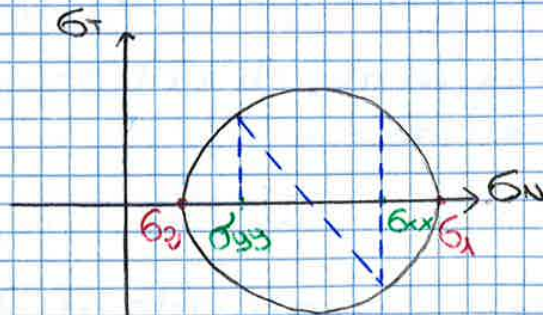
$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$



Asse x:  $\sigma_N = \sigma_{xx}$      $\sigma_T = |\sigma_{xy}|$

Asse y:  $\sigma_N = \sigma_{yy}$      $\sigma_T = |\sigma_{xy}|$

Sono noti  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  (permezzo cerchio di Mohr)



$$C_3 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$R_3 = \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}$$

$$\sigma_{1,2} \text{ principali} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\sigma_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2}$$