



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1804A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Semproni Federica

MATERIA: Meccanica delle Macchine (teoria + esercizi) - Prof.
Eula

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

ESAME:

- 1) Esercizio numerico
- 2) Esercizio su equilibri
- 3) Domanda di teoria
- 4) Laboratorio + Relazione +6%
Relazione +2%

LIBRO: FERRARESI, RAPARELLI "Meccanica applicata"
BELFORTE "Meccanica applicata alle macchine"

- ↳
- 1) Geometria usata
 - 2) Flessibili
 - 3) Ruote dentate
 - 4) Rotore
- } capitoli da fare

- 1 ■ CINETICA
- 2 ■ DINAMICA
- 3 ■ GEOMETRIA delle MASSE
- 4 ■ ATRITO
- 5 ■ FRENI e FRIZIONI (contatti esterni)
- 6 ■ CINGHIE e FUNI (flessibili)
- 7 ■ RUOTE DENTATE
- 8 ■ ROTISMI
- 9 ■ VIBRAZIONI
- 10 ■ TRANSISTORI

$$\vec{\mu} = \vec{k} \wedge \vec{\lambda} \quad \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega r \vec{\mu} = \omega r (\vec{k} \wedge \vec{\lambda}) = \omega \vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$$

$$\omega r \vec{\mu} = \frac{d(r\vec{\lambda})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (r\vec{\lambda})$$

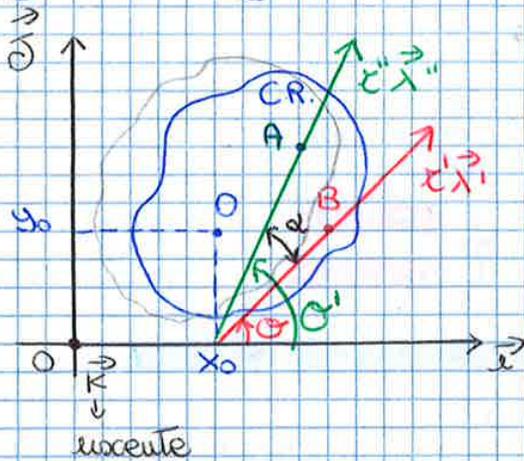
! Derivare un vettore graficamente significa ruotarlo di 90° nel senso di ω e moltiplicarlo per ω .

VELOCITÀ = prodotto esterno del vettore velocità angolare e vettore posizione.

Utile anche nei vettori $\frac{d(\vec{u})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge \vec{\lambda}$, cioè $r=1$.

CINEMATICA del CORPO RIGIDO

Si definisce corpo rigido un corpo in cui la distanza tra 2 punti che gli appartengono non varia nel tempo.



Nel piano le coordinate che fissano la posizione del corpo rigido sono 3: x_0, y_0, θ (coordinate angolare) e rappresentiamo i 3 gradi di libertà che il corpo rigido ha nel piano. Se $O(x_0, y_0)$ non è sufficiente a determinare com'è il C.R. nel piano, potrebbe essere ruotato.

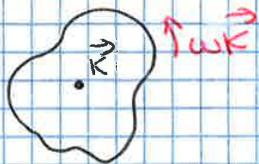
$$\theta' = \theta + d \rightarrow \theta' \neq \theta$$

Derivo θ e θ' è costante quindi non compare nella derivata

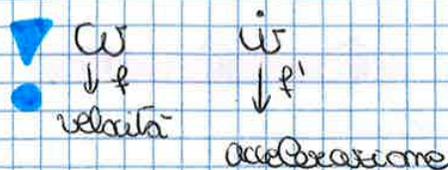
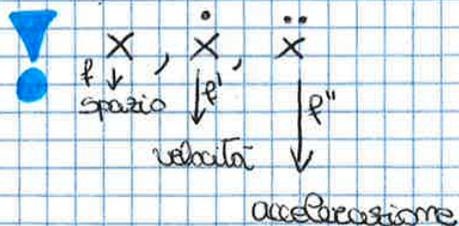
$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \quad \text{velocità angolare} \quad [rad/s]$$

$$\frac{d^2\theta'}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \dot{\omega} \quad \text{accelerazione angolare} \quad [rad/s^2]$$

ω e $\dot{\omega}$ vanno definite all'interno del corpo rigido.

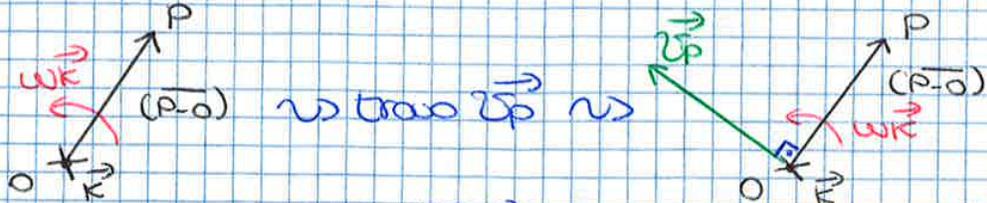


con la regola della mano destra (pollice esceute = \vec{k} , dita = rotazione)



$\vec{v}_p = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{o})$ TERZA DESTROGA
 \downarrow
 \perp piano
 \rightarrow \in piano, $\perp \vec{k}$, $\perp (\vec{P}-\vec{o})$

\vec{v}_p è ruotato di 90° rispetto $(\vec{P}-\vec{o})$, infatti è la derivata del vettore posizione.



$\vec{v}_p = \frac{d(\vec{P}-\vec{o})}{dt}$

M	$\vec{v}_p = \omega R O$ moltiplicato per ω $\perp PO$ ruotato di 90° $(\vec{\omega})$ (verso di ω)
D	
V	

! Ho una distribuzione triangolare delle velocità. La velocità di ogni punto è data dall'angolo (cost) per il suo vettore posizione. (V tangenziale non angolare \rightarrow cost in ogni punto quest'ultimo)

V_{tg} distribuzione triangolare
 V_{ω} cost in ogni punto



$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt}$

$\vec{v}_p = \omega \vec{k} \wedge (r \vec{\lambda}) = \omega r [\vec{k} \wedge \vec{\lambda}] = \omega r \vec{\mu}$

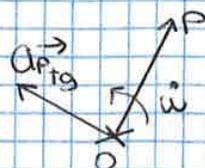
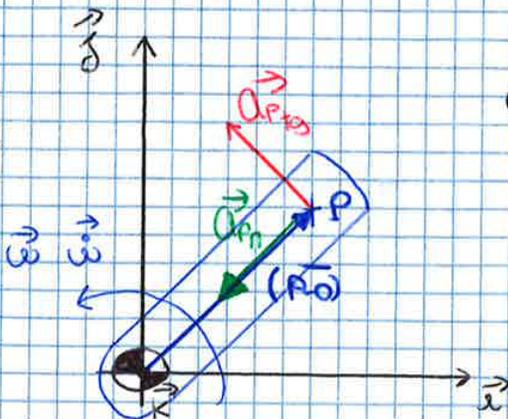
$\vec{a}_p = \frac{d(\omega r \vec{\mu})}{dt} = \frac{dr}{dt} \omega \vec{\mu} + r \frac{d\omega}{dt} \vec{\mu} + r \omega \frac{d\vec{\mu}}{dt}$

$\vec{a}_p = r \dot{\omega} [\vec{k} \wedge \vec{\lambda}] + \omega r [\omega \vec{k} \wedge \vec{\mu}] = \dot{\omega} \vec{k} \wedge r \vec{\lambda} + \omega^2 r (-\vec{\lambda})$

$\vec{a}_p = \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{o}) - \omega^2 (r \vec{\lambda})$

$\vec{a}_p = \underbrace{\dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{o})}_* - \underbrace{\omega^2 (\vec{P}-\vec{o})}_{**} = \vec{a}_{p_{tg}} + \vec{a}_{p_n}$

tangenziale * ** centripeta o normale



\vec{a}_{p_n} punta da P a O, sempre opposta al vettore posizione. La F contribuisce invece veramente opposta alla centripeta.

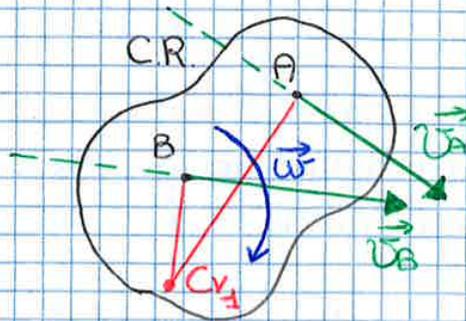
Metodo alternativo per il calcolo delle velocità =
CENTRO di ISTANTANEA ROTAZIONE (centro velocità)

C_v $\vec{v}_{Cv} = 0$ in ogni istante

1) $\vec{v}_A; \vec{v}_B$

$\vec{v}_A \nparallel \vec{v}_B$ non parallele

È sufficiente conoscere le direzioni delle velocità



"Cerniera virtuale"

Il C_v si trova tracciando
 le \perp alle velocità

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{Cv/A} + \vec{v}_A/Cv = \omega \vec{k} \wedge (\vec{A} - \vec{Cv})$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{Cv/B} + \vec{v}_B/Cv = \omega \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{Cv})$$

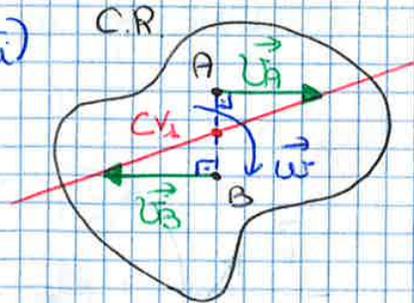
! Tutti i punti del C.R. ruotano attorno al C_v a stessa velocità
 angolare $\vec{\omega}$

2) $\vec{v}_A; \vec{v}_B$ **PAG. 20 SCORRIMENTO all'indietro**

$\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ devo conoscere $\frac{H}{D}$ dei vettori velocità

\vec{v}_A e \vec{v}_B discorsi (verso opposti)

Compongo le velocità
 la retta interseca AB nel C_v
 (interno ad AB)



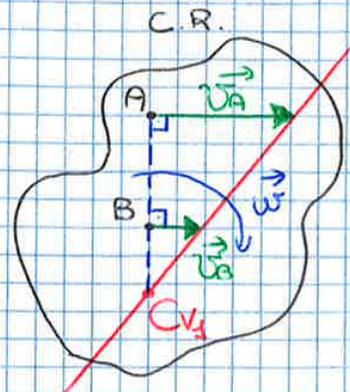
3) $\vec{v}_A; \vec{v}_B$ **PAG. 20 SCIVOLAMENTO in avanti**

$\vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ devo conoscere $\frac{H}{D}$ dei vettori velocità

\vec{v}_A e \vec{v}_B concordi

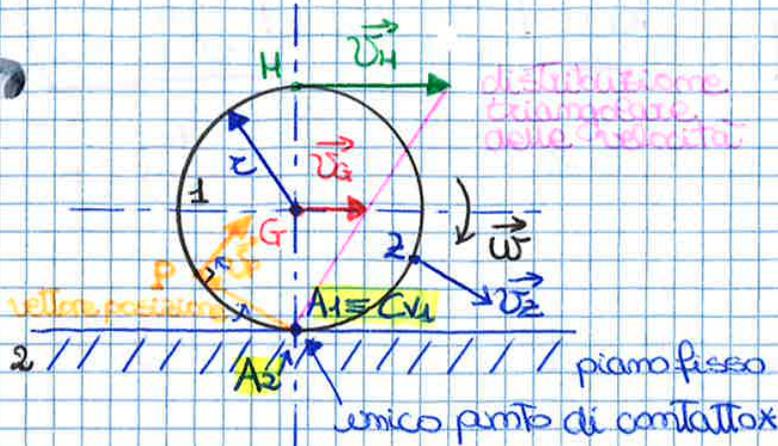
$|\vec{v}_A| \neq |\vec{v}_B|$

Compongo le velocità
 prolungo AB
 trovo C_v



4

Esempio (rullo che rotola su un piano fisso)



Puro rotolamento *

- A₁ punto del rullo a contatto con il piano fisso
- A₂ punto del piano fisso a contatto con il rullo

PAG. 20

Accoppiamento rotola-piano

$$\vec{v}_{A1} = \vec{v}_{A2} + \vec{v}_{A1/A2} \text{ relativo}$$

$$= 0 \quad = 0 \text{ perché è puro rotolamento}$$

perché il piano è fisso $\vec{v}_{A2} = 0$

$$|\vec{v}_{A1}| = |\vec{v}_{Cv1}| = 0$$

$$\vec{v}_G = \vec{v}_{Cv1} + \vec{v}_{G/Cv1} = \omega \vec{k} \wedge (G - Cv1)$$

$$\vec{v}_H = \vec{v}_{Cv1} + \omega \vec{k} \wedge (H - Cv1)$$

P punto periferico al disco

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{Cv1} + \vec{v}_{P/Cv1} = \omega \vec{k} \wedge (P - Cv1) \quad \vec{v}_P \text{ non è } T_g \text{ al disco}$$

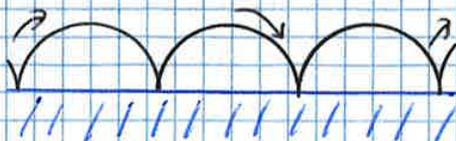
M	$\vec{v}_P = \omega (P - Cv1)$
D	$\perp P - Cv1$
V	$(\vec{\omega})_z$

$$\vec{v}_Z = \vec{v}_{Cv1} + \vec{v}_{Z/Cv1} = \omega \vec{k} \wedge (Z - Cv1)$$

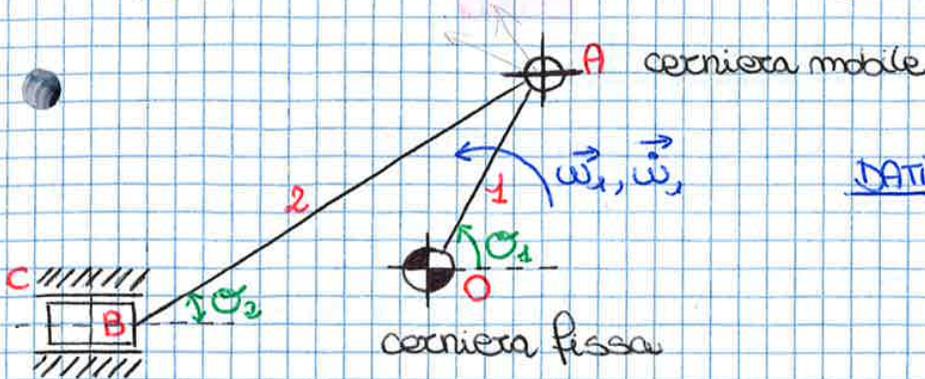
M	$\omega PO = v_Z$
D	$\perp PO$
V	$(\vec{\omega})_z$

! $v = \omega r$ seni da solo è il modulo (non basta)

⇒ se $Cv1$ percorre una **CICLOIDE CUSPIDATA** (il nostro studio è di tipo ISTANZA/VEO)



MECCANISMO BIELLA-MANOVELLA



DATI: $n_1 = 1500$ giri/min
 $\omega_1 = 1000$ rad/s²
 $OA = 0,21$ m
 $\theta_1 = 45^\circ$
 $AB = 0,61$ m
 $\theta_2 = 30^\circ$

INCOGNITE:

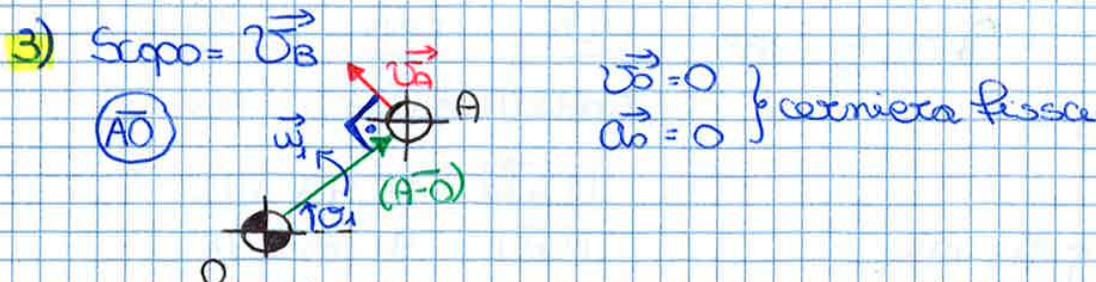
- 1) A cosa serve e come funziona il meccanismo
- 2) Calcolo dei GdL
- 3) Calcolo delle velocità
- 4) Calcolo delle accelerazioni

PARTI: OA → manovella
 AB → biella
 A → batone di manovella
 B → piede di biella
 C → consolo

parto dal punto dove ho maggiori informazioni

2) GdL $K = 3(m-1) - 2C_1 - C_2$
 $m = 4$ } manovella
 } biella
 } consolo
 } telaio
 $C_1 = 4$ (O, A, B, C)
 $C_2 = 0$

$K = 1$ → devo calcolare la velocità: \vec{v}_B



$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{A/O} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{O})$$

M	$\omega_1 AO = v_A = 32,98$ m/s
D	$\perp AO$
V	$\vec{\omega}_1$

$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60} = 157$ rad/s

Distinguiamo 2 tipi di moto:

1) **MOTO SEMPLICE** = le distanze sono costanti.

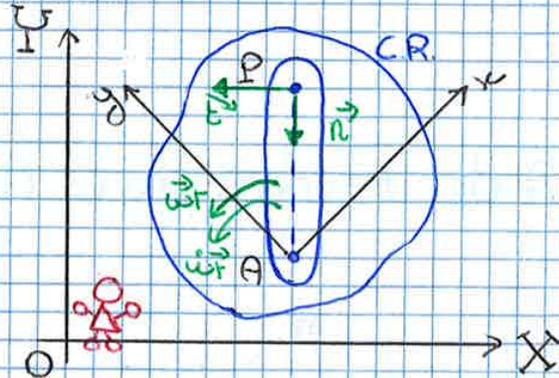
Si parla solo di corpi scagiti con vincoli esterni.

2) **MOTO COMPOSTO** = \exists distanze/lunghezze che cambiano

DENTRO il sistema.

Ad esempio nel corpo scagito seguente

$PA \neq \text{cost}$ (\rightarrow moto composto)



Pa può muoversi nell'axda

MOTO COMPOSTO

1) **MOTO RELATIVO**: moto di P nel corpo scagito ($PA \neq \text{cost}$)

es. passeggiare sul treno che avanza

2) **MOTO di TRASCINAMENTO (T_C)**: moto di P con $[A, K, \gamma]$

moto di P se forze esterne con CR.
virtualmente tago l'axda

es. passeggiare seduto sul treno
(potrebbe alzarsi e muoversi)

3) **MOTO ASSOLUTO**: è la composizione di 1) e 2)

ciò che vede un osservatore fisso su $[O, X, Y]$

FORMULE nel moto composto

$$\vec{v}_{P, \text{ass}} = \vec{v}_{P, \text{rel}} + \vec{v}_{P, T_C} \quad (\text{velocità})$$

$$\vec{a}_{P, \text{ass}} = \vec{a}_{P, \text{rel}} + \vec{a}_{P, T_C} + \vec{a}_{Co} \quad (\text{accelerazioni})$$

$$\vec{a}_{Co} = \vec{a}_{\text{di Coriolis}} = 2 \omega_{T_C} \vec{k} \wedge \vec{v}_{P, \text{rel}}$$

(o complementare)

\rightarrow se l'axda $\vec{a}_{Co} = 0$
non c'è movimento angolare

15

2) IDENTIFICAZIONE MOTI (Po 2 rotazioni e 1 traslazione)

1) MOTO RELATIVO = traslazione lungo $\vec{\lambda}$ del punto P

2) MOTO di TRASCINAMENTO = rotazione (ω_1) del punto P intorno a O_1

3) MOTO ASSOLUTO = rotazione di P intorno ad O (ω)

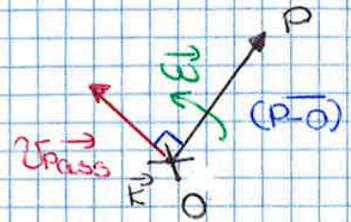
②
$$\vec{v}_{pass} = \vec{v}_{p_{rel}} + \vec{v}_{p_{tr}}$$

① Punto della manovella perché Po $\vec{\omega}$ e $\vec{\omega}$

$$\vec{v}_{pass} = \vec{v}_O + \vec{v}_{PO} = \omega \vec{K} \wedge (P-O)$$

 $= 0$ cerniera fissa

M	$\omega_{PO} = 4 \frac{1}{s}, 1 \text{ m/s}$
D	$\perp PO$
V	ω



②
$$\vec{v}_{p_{ass}} = \vec{v}_{p_{rel}} + \vec{v}_{p_{tr}}$$

$$\vec{v}_{p_{rel}} = \pm \vec{v}_{p_{rel}} \vec{\lambda}$$

$$\vec{v}_{p_{tr}} = \vec{v}_{p_{O_1}} + \vec{v}_{p_{O_1}} = \omega_1 \vec{K} \wedge (P-O_1)$$

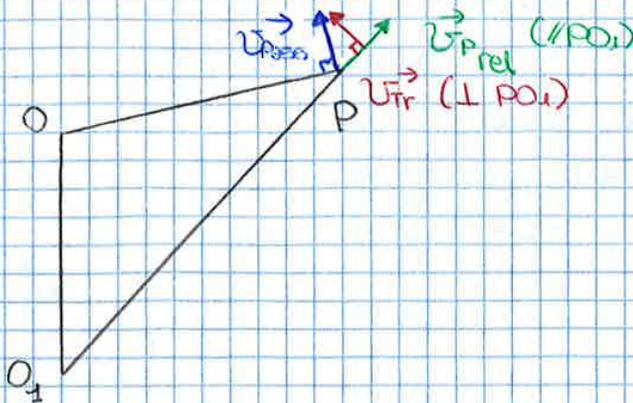
$$\vec{v}_{p_{ass}} = \vec{v}_{p_{rel}} \vec{\lambda} + [\omega_1 \vec{K} \wedge (P-O_1)]_{Tx}$$

 $\neq \omega \vec{K} \wedge (P-O)$

* nota in D, M, V

M	ω_{PO}	?	$\omega_1 PO_1 = ?$
D		dir. lungo $\vec{\lambda}$ (PO)	dir. $\perp PO_1$
V		?	ω_1 ?

(è un caso che sono \perp)



Essendo

$$\vec{v}_{p_{ass}} = \vec{v}_{p_{rel}} + \vec{v}_{p_{tr}}$$

 (sono e versi per costruzione)

14

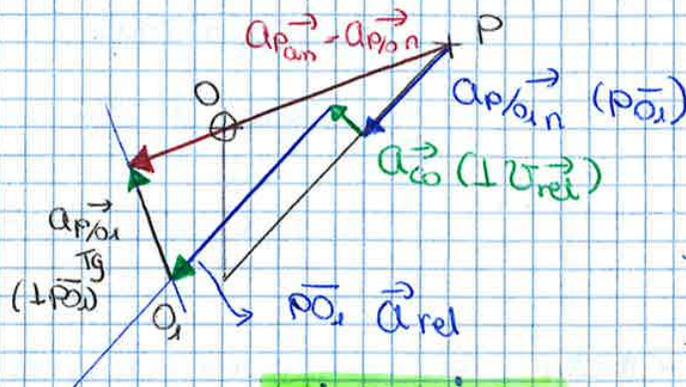
$$\textcircled{1} \vec{a}_P = \vec{a}_{P_{an}} = \underbrace{\vec{a}_O}_{=0} + \underbrace{\vec{a}_{P/O}}_{=0} \text{tg} + \vec{a}_{P/O} n \neq$$

$\vec{a}_{P_{an}}$ risultante

$$\textcircled{2} \vec{a}_P = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{Tx}} + \vec{a}_{P_{CO}} =$$

$$= \pm \vec{a}_{P_{rel}} \vec{\lambda} + \left[\underbrace{\vec{a}_{O_1}}_{=0} + \underbrace{\vec{a}_{P/O}}_{=0} \text{tg} + \underbrace{\vec{a}_{P/O} n}_{\neq} \right] \vec{t}_x + \vec{a}_{P_{CO}} \neq$$

POLIGONO ACCELERAZIONI (non calcoliamo le inclinazioni di tutti i vettori e i moduli)

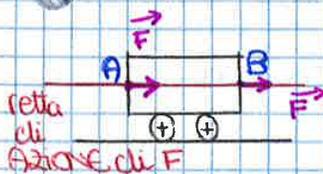
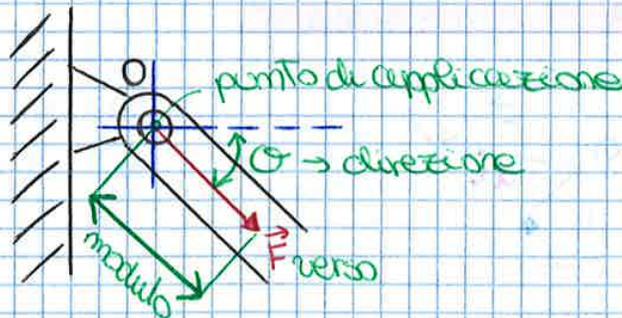


* risultante della somma degli altri 4 vettori

1) disegno 2 vettori neri
freccie in serie

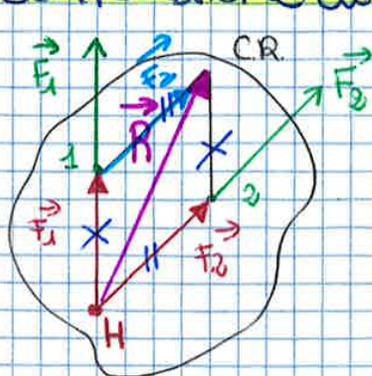
DINAMICA

FORZA



! Nei corpi rigidi esiste il principio di TRASMISSIBILITÀ:
data \vec{F} posso traslarla LUOGO FA sua direzione
senza alterare le condizioni di eq. del corpo

Composizione di VETTORI



Dati \vec{F}_1 e \vec{F}_2 *

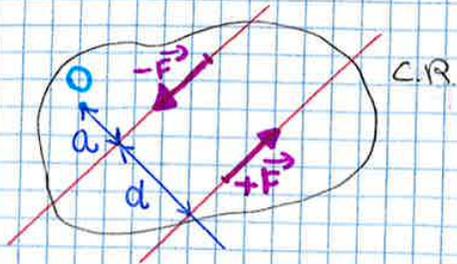
* lo sposta in H lungo le loro rette di azione
tasso con \vec{R} con la regola del
parallelogramma

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

* Posso spostare \vec{F}_2 (come per gli es. di
cinematica) in modo da avere
 \vec{F}_1 stesso $\vec{F}_2 = \vec{R}$

COPPIA di FORZE

1)

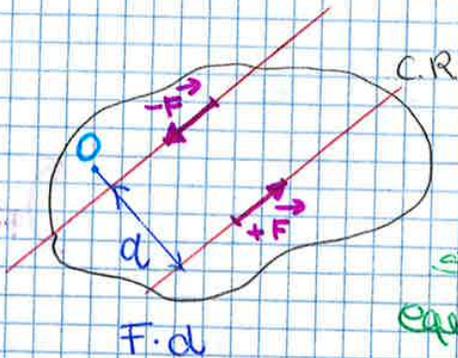


$$\begin{cases} \vec{F} // -\vec{F} \\ |\vec{F}| = |-\vec{F}| \\ \neq \text{rette di azione} * \\ \text{verso opposto} \end{cases}$$

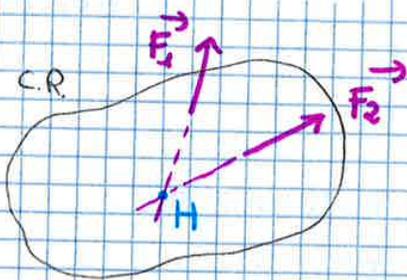
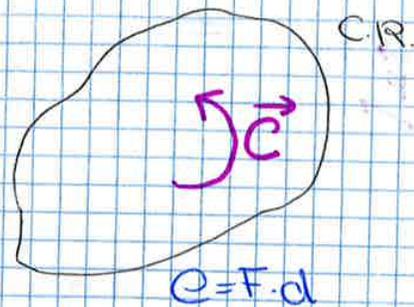
$$M_O = F \cdot (a+d) - F \cdot a = F \cdot d =$$

= intensità forze · distanza delle forze
(con composta 0)

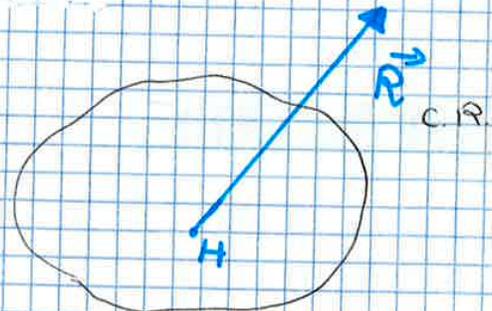
$$\Rightarrow \mathbf{C} = F \cdot d$$



sistemi equivalenti



≡

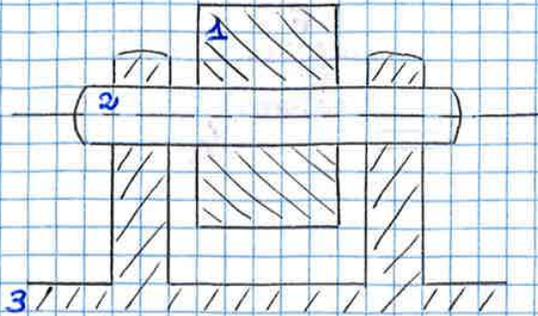


Esistono sistemi equivalenti o nessuno a 1^a riduzione o a 2^a

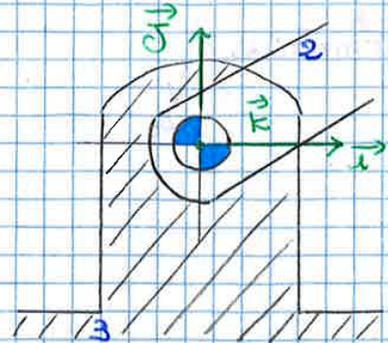
- ! 1) SISTEMI EQUIVALENTI
- } = Risultante
 - | = Momento risultante

- ! 2) SISTEMI in EQUILIBRIO
- Risultante = 0
 - Momento risultante = 0

b) COPPIA ROTOIDALE o CERNIERA (a 4 gde)



Vista axiale.



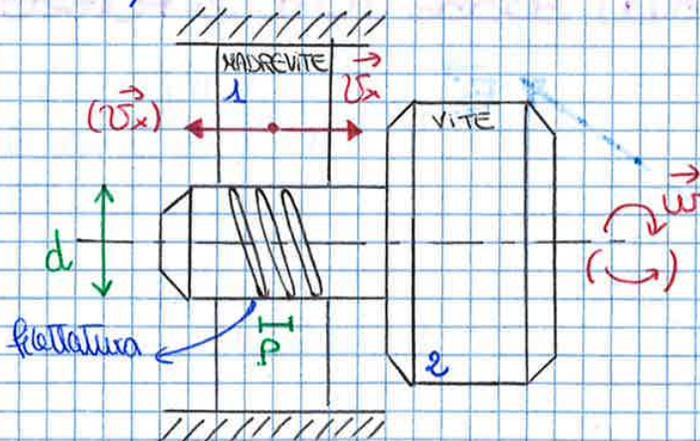
Vista frontale

Cerniera fissa

$$\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ \omega_z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ M_z = 0 \end{cases}$$

REAZIONI VINCOLARI nella cerniera piana senza attrito

c) COPPIA ELICOIDALE si basa sull'attrito (-1 gde)



d = diametro vite
P = passo della filettatura

$$\begin{cases} v_x = \frac{P}{\tau} \\ \omega = \frac{2\pi}{\tau} \end{cases}$$

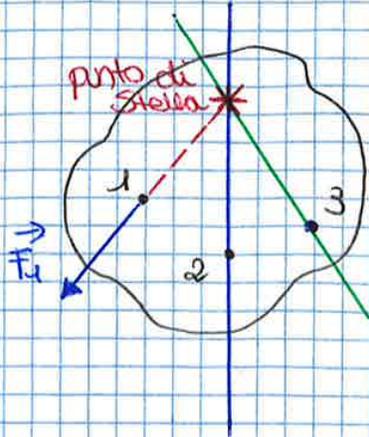
$$v_x = \frac{P}{2\pi} \omega$$

velocità traslatoria

velocità rotatoria

Relazione tra velocità lineare e angolare
trasforma mob rotatorio in traslatorio e viceversa

3) CORPO RIGIDO SOGGETTO a 3 FORZE



Il numero minimo di dati:

- F_1 nota in M, DV
- F_2 nota in Δ
- F_3 noto il punto di applicazione

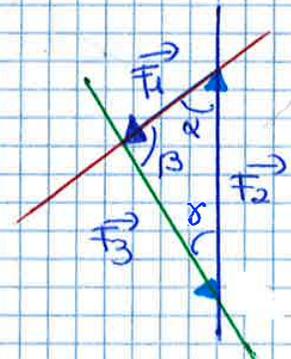
- 1) Trova il punto di stella prolungando la direzione di F_1 finché non incontra la direzione di F_3
- 2) Trova la direzione di F_2 avendo il suo punto di applicazione con il punto stella

$\sum M_i = 0$
 *) $F_1 \cdot O + F_2 \cdot O + F_3 \cdot O = 0$

TRIANGOLO FORZE

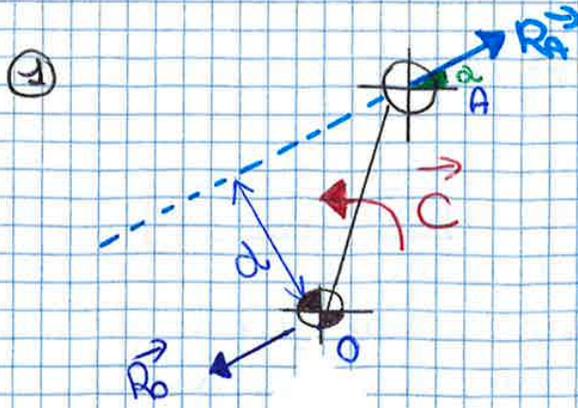
Date le direzioni di \vec{F}_1, \vec{F}_2 e \vec{F}_3

$\sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = 0$
 $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ per avere equilibrio alla traslazione



Individua gli angoli interni e con il teorema dei seni trova il modulo delle forze.

! \vec{F}_1, \vec{F}_2 e \vec{F}_3 in serie (si sommano) perché
 $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = -\vec{F}_2$



lamorella
Devo avere

$$\vec{R}_O \parallel \vec{R}_A$$

$$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_O|$$

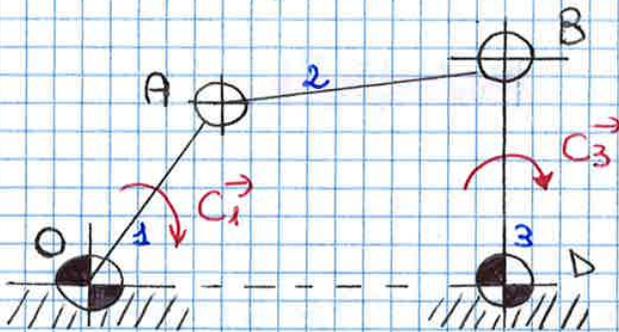
$$C = R_A \cdot d_i \text{ (ad esempio)}$$

Dato \vec{R}_O so che \vec{R}_O e \vec{R}_A
danno un movimento orario
 $\Rightarrow C$ antioraria

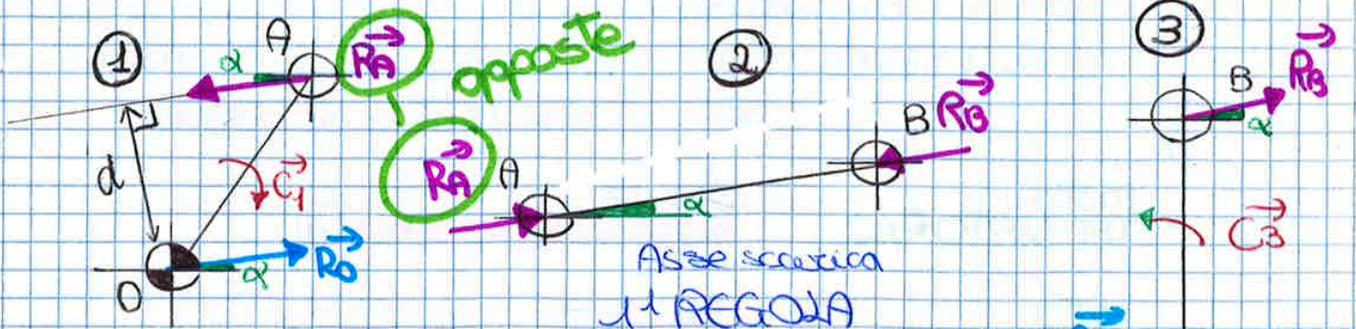
2) Azioni e Reazioni

3) Scientifico in generale regola (1, 2, 3) e l'esercizio
 \rightarrow Cercare le risultanti

Esempio.



- Cercare i pesi
- Usare solo le risultanti
Partire da 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3



2^a REGOLA
 $|\vec{R}_A| = |\vec{R}_O|$
 $\vec{R}_A \parallel \vec{R}_O$
 C senso orario

\vec{R}_A e \vec{R}_O antiorarie
 $C_u = R_A \cdot d$

1^a REGOLA
 \vec{R}_A e \vec{R}_O uguali e opposte
Asse dell'angolo
 \vec{R}_A e \vec{R}_O lungo l'angolo stesso*
Verso?
 $|\vec{R}_A| = |\vec{R}_O|$

Tratta \vec{R}_A in 1, in 2
Sarà opposta. \vec{R}_B
opposta a \vec{R}_A

$\vec{R}_D \parallel \vec{R}_B$
 $|\vec{R}_D| = |\vec{R}_B|$
 \vec{R}_B in 3 opposta a
 \vec{R}_B in 2
 \vec{R}_B e \vec{R}_D orarie
 $C_3 = R_B \cdot d_3 = C_3$ antiorarie

③ $\vec{F}_{inG} = -m \cdot \vec{a}_G$ FORZA di INERZIA BARICENTRICA

④ $\vec{M}_{inG} = -I_G \cdot \vec{\omega}$ COPPA di INERZIA BARICENTRICA

[moto incipiente. Auto frenata al deprimatore, parte $\dot{\omega}=0$ $a \neq 0$]

G

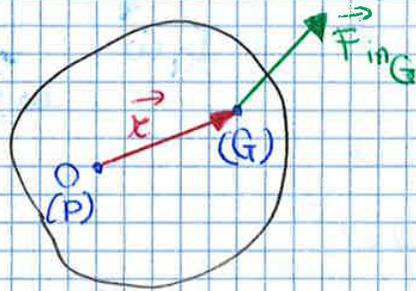
$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{estG} + \vec{F}_{inG} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{estG} + \vec{M}_{inG} = 0$$

P $P \neq G$
 punto qualsiasi

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est_i} + \vec{F}_{inG} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est_P} + \vec{M}_{inG} + \vec{r} \wedge \vec{F}_{inG} = 0$$



$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F}_{inG}$$

↓
 posizione baricentro rispetto O

EQ. CARDINALI della DINAMICA

nel piano abbiamo 3 equazioni scalari

\vec{x}) $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est_i,x} + \vec{F}_{inG,x} = 0$

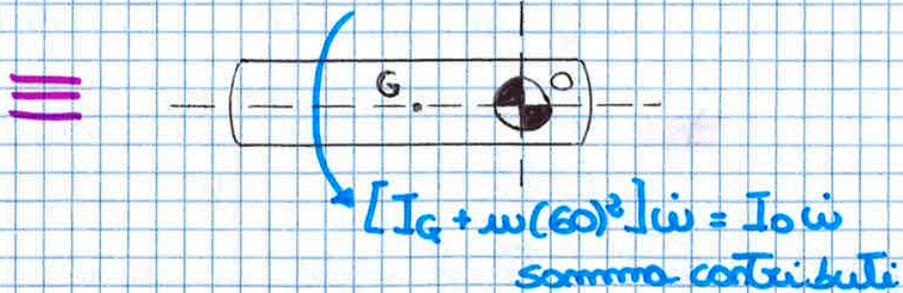
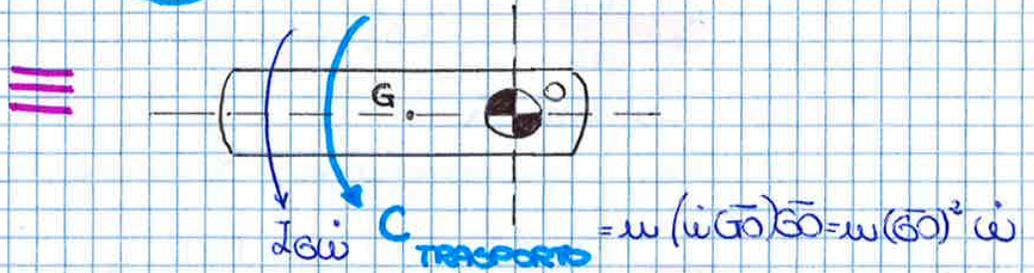
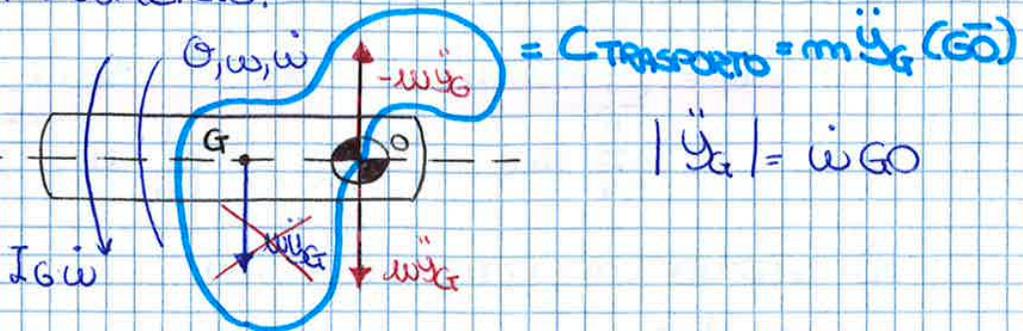
\vec{y}) $\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est_i,y} + \vec{F}_{inG,y} = 0$

\vec{P}) $\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est_i,P} + \vec{M}_{inG} + \vec{r} \cdot \vec{F}_{inG} = 0$

> eq. alla traslazione

! CONSIGLIO: Tenere i contributi rispetto a G

Se ti scrivo rispetto a O devo scrivere anche la F di inerzia, ovvero spostare anche $m\ddot{y}_G$ in O, e spostandola in O, emendo una forza e spostandola al di fuori della sua direzione, devo aggiungere un momento.



O riferisco entrambi le azioni (F e C di inerzia) rispetto a G o entrambe rispetto a 1 altro punto (in questo caso O). Non casi ibridi.

MOMENTI di INERZIA

a) MASSA CONCENTRATA

$$I = m (PO)^2 \quad [kg \cdot m^2]$$

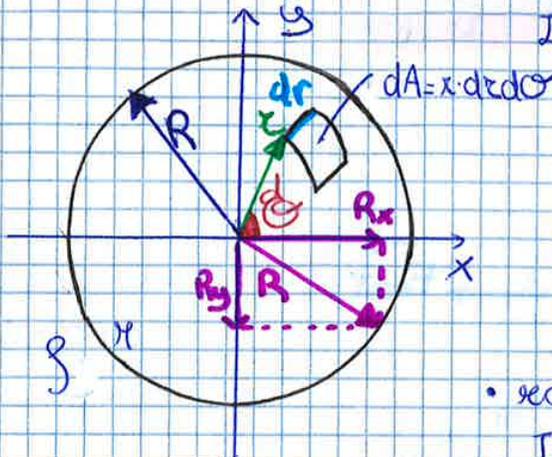
b) SISTEMA DISCRETO

$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i (P_i O)^2$$

c) SISTEMA CONTINUO

$$I_0 = \int_M x^2 dm = \int_V x^2 (\rho dV) = \int_A x^2 (\rho h dA)$$

es. **DISCO SOTTILE**
(Pminuco)



• MOMENTO di INERZIA ASSIALE

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_M x^2 dm = \int_V x^2 (\rho dV) = \\ &= \int_A x^2 (\rho h dA) = \rho h \int_0^R (x^2 \cdot x) dx \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= \rho h \left(\frac{R^4}{4} \right) 2\pi = \rho h \frac{R^4}{2} \pi = \\ &= \rho h (\pi R^2) \frac{R^2}{2} = \frac{M R^2}{2} = I_0 \end{aligned}$$

• MOMENTI di INERZIA DIAMETRALI

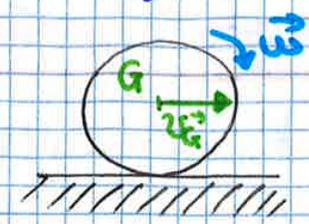
$$\left. \begin{aligned} I_x &= \int_M y^2 dm \\ I_y &= \int_M x^2 dm \end{aligned} \right\} \rightarrow I_x = I_y$$

per simmetria

* Modulo di R
qualsiasi nelle
sue componenti
x e y

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_0 &= \int_M x^2 dm = \int_M x^2 dm + \int_M y^2 dm = I_y + I_x \\ I_x &= I_y = \frac{I_0}{2} = \frac{\pi R^2}{4} \end{aligned}$$

Energia cinetica $E_{cin} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$



EQUAZIONE dell'ENERGIA

$L_{Fest} + L_{Fint} = \Delta E_{cin} + \Delta E_{Pg} + \Delta E_{Pel}$! per gli urti

↳ attrito nei vincoli
 ↳ tranne le forze peso, le azioni di inerzia,

POTENZA $P = \frac{dL}{dt}$ [W] [J/s]

- POTENZA SVILUPPATA da 1 FORZA

$P = \frac{dL}{dt} = F_E \frac{ds}{dt} = F_E \cdot v$

- POTENZA SVILUPPATA da 1 COPPIA

$P = \frac{dL}{dt} = M \frac{d\alpha}{dt} = M\omega$

- POTENZA TOTALE (F+coppia)

$P_{tot} = F_E v + M\omega$

RENDIMENTO di UN SISTEMA

$\eta = \frac{P_u}{P_e} \leq 1$

P_u = potenza utile
 P_e = potenza entrante

ASSI PRINCIPALI di INERZIA

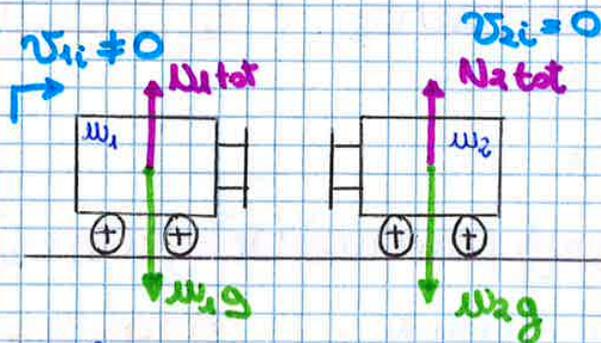
Sono assi caratterizzati dal fatto che il momento di inerzia del corpo rispetto a uno di questi assi è MASSIMO e rispetto ad un altro è MINIMO. Gli assi principali di inerzia coincidono sempre con gli assi di simmetria del corpo. Se gli assi principali di inerzia sono centrati nel baricentro, allora sono detti ASSI CENTRALI di INERZIA.

Rispetto ad una terza centrale di inerzia se P è:

$$\vec{L}_P = I_\lambda \vec{P} + I_\mu \vec{q} + I_\nu \vec{x} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} p &= \vec{\omega} \times \vec{\lambda} \\ q &= \vec{\omega} \times \vec{\mu} \\ x &= \vec{\omega} \times \vec{\nu} \end{aligned}$$

URTI

1) URTO ELASTICO



- Hp:
- si trascurano gli attriti
 - dopo l'urto i carrelli avanzano separati
 - caso ideale = non c'è perdita di energia dopo l'urto

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est,i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{est,i} = \frac{d\vec{Q}}{dt} \quad \text{cons. q di moto} \Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{Q} \text{ cost}$$

$$Q_i = Q_f$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (1)$$

$$E_{m,i} = E_{m,f} \\ \text{urto elastico}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (2)$$

$$v_{1f} = v_{1i}$$

$$\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

! sarebbe moto inalterato dopo l'urto
facciamamente non possibile che

$$v_{1f} = v_{1i}$$

$$v_{1f} = v_{1i} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

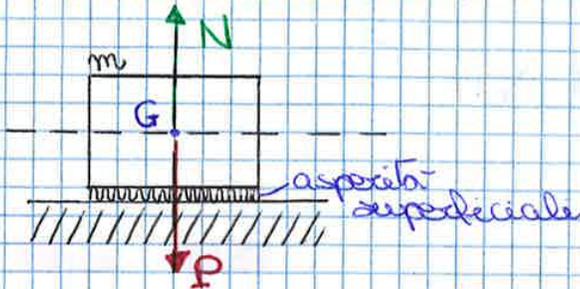
$$v_{2f} = v_{1i} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$$

ATTRITO

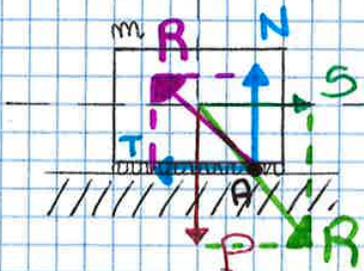
I fenomeni di attrito non sono lineari. I nostri modelli hanno attrito costante, nella realtà il calore e altri fenomeni lo modificano.

- 1) Attrito di aderenza o statico
 - 2) Attrito di strisciamento o radente
 - 3) Attrito volvente (corpi che rotolano)
- } f di attrito sono P reattive

1) ATTRITO di ADERENZA



$v=0$



S : forze di trazione che cerca di mettere in moto la cassa, ma questa rimane ferma

$v=0$

* Applico la forza S per mettere la cassa in moto!

* R : risultante di S e P individuando il punto A

* In A massimo le reazioni: T e N \perp aumenta

N : componente di R \perp al piano di appoggio

T : componente di R \parallel al piano di appoggio; è opposta a S e' la forza di attrito

$S \uparrow \Rightarrow T \uparrow$

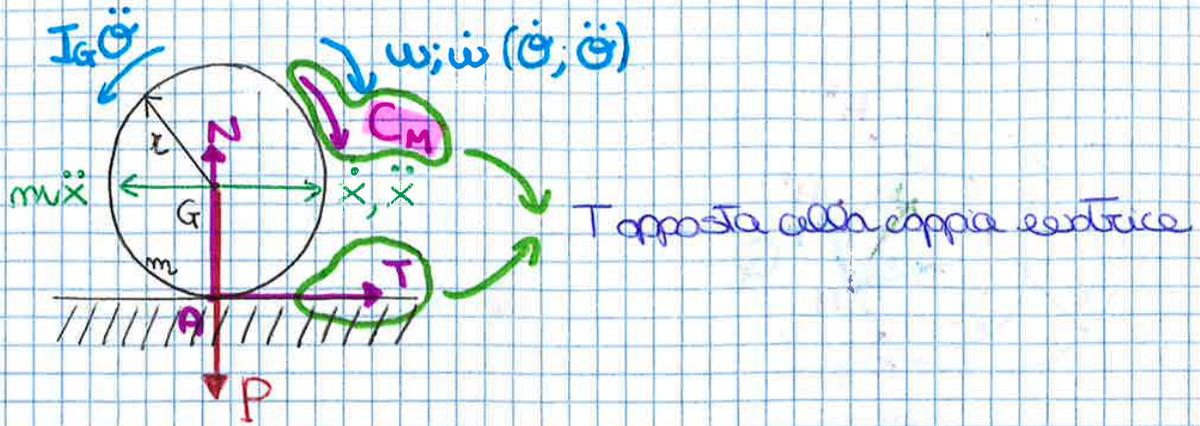
Tutto questo fenomeno che precede il moto è detto fenomeno di aderenza

• MODELLO MATEMATICO

$T \leq f_a \cdot N$

f_a : coefficiente di aderenza

RUOTA MOTTRICE



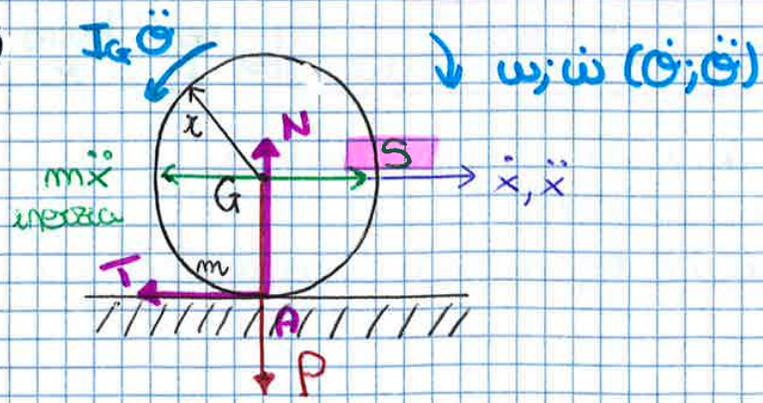
$$\begin{aligned}
 \downarrow^+ \quad & + C_M - T r - I_G \ddot{\theta} = 0 \quad (1) \\
 \uparrow^+ \quad & + N - P = 0 \quad (2) \\
 \rightarrow^+ \quad & + T - m \ddot{x} = 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Hp di aderenza: $T \leq f_a \cdot N$

puro rotolamento
 $\Rightarrow \ddot{x} = r \ddot{\theta}$ (egale) (4)
 $A \equiv G$

se invece $T > f_a \cdot N$
 slittamento
 $\Rightarrow \ddot{x} \neq r \ddot{\theta}$ (egale)
 $T = f N$ (4)

RUOTA TRASCINATA



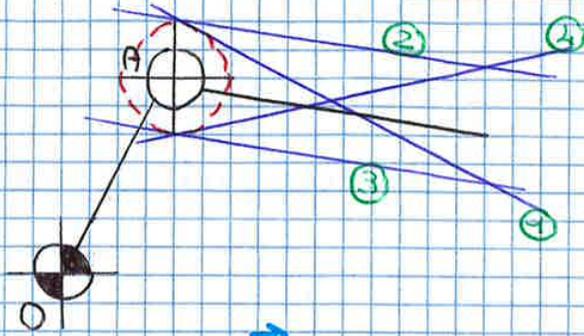
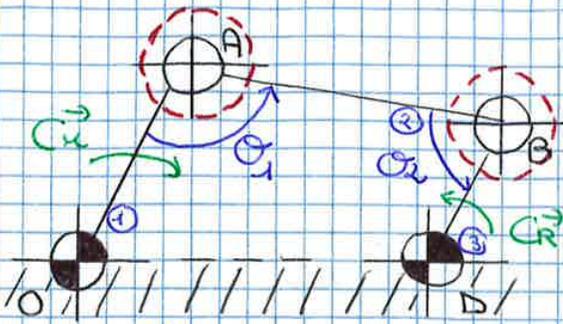
} Anche se $\ddot{\theta} = 0$ \exists una T
 attrito coesente

$$\begin{aligned}
 \downarrow^+ \quad & - I_G \ddot{\theta} + T r = 0 \quad (1) \\
 \uparrow^+ \quad & + N - P = 0 \quad (2) \\
 \rightarrow^+ \quad & + S - T - m \ddot{x} = 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

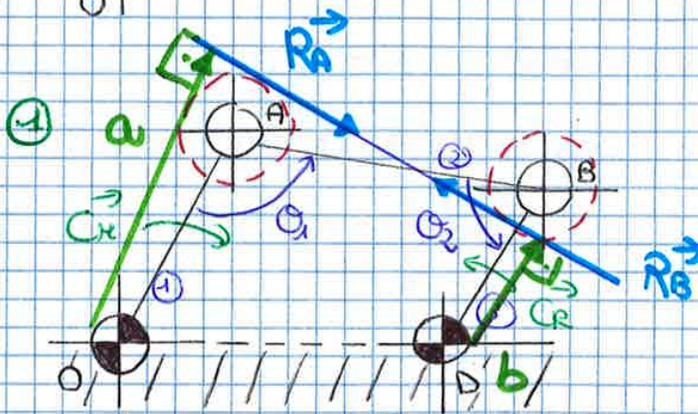
Hp di aderenza: $T \leq f_a \cdot N$ puro rotolamento $\Rightarrow \ddot{x} = r \ddot{\theta}$ (egale) (4)

QUADRILATERO ARTICOLATO con ATTRITO al perno

A e B con attrito al perno



R_A possibili

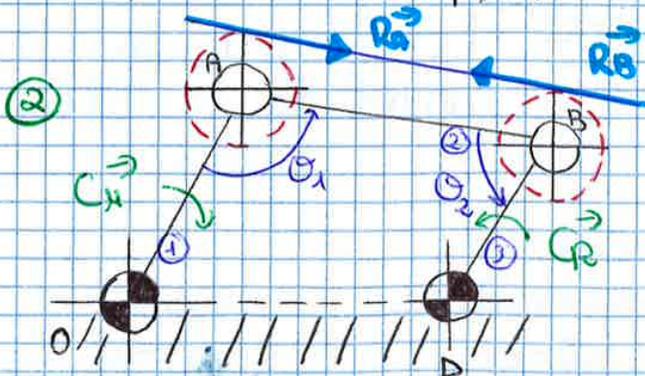


$$C_x = R_A \cdot a$$

a e b bracci

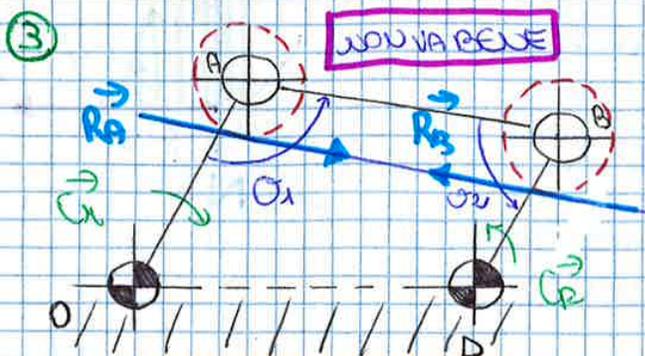
R_A e R_B rispettano le 3 regole di attrito al perno

VA BENE

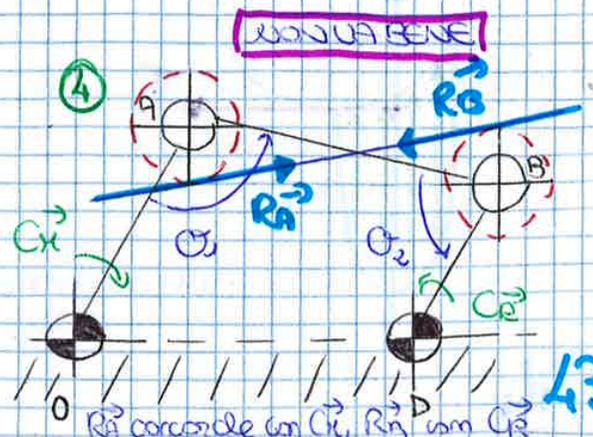


R_B coincide a C_x non rispetta le 3 regole

NON VA BENE



NON VA BENE



NON VA BENE

R_A coincide con C_x , R_B con C_x'

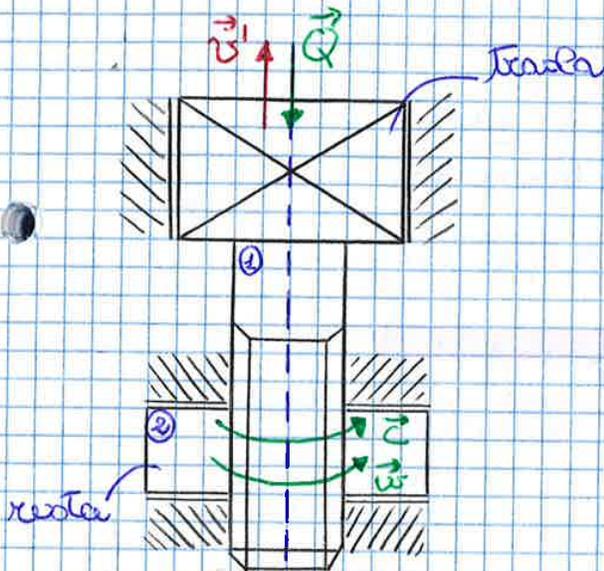
In entrambi i casi \vec{Q} $N \cdot u = T \cdot x$

$$T = N \frac{u}{x} = f_v \cdot N$$

$$f_v = \frac{u}{x}$$

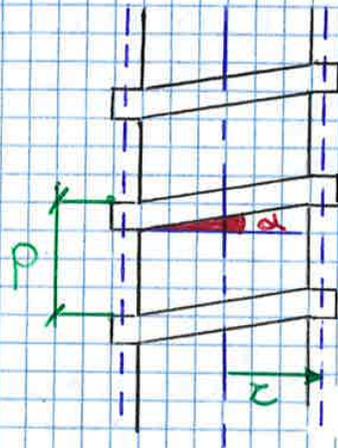
coefficiente di attrito
volvente

SISTEMA VITE-MADEREVITE



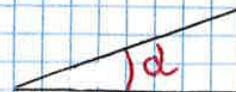
- ① vite
- ② madrevite

VITE a PROFILO RETTANGOLARE



x = raggio dell'elica mediana
 α = angolo di inclinazione del filetto
 p = passo della vite

sviluppo dell'elica HELIX sul PIANO



Studio il sistema trascinante i corredi equivalenti:

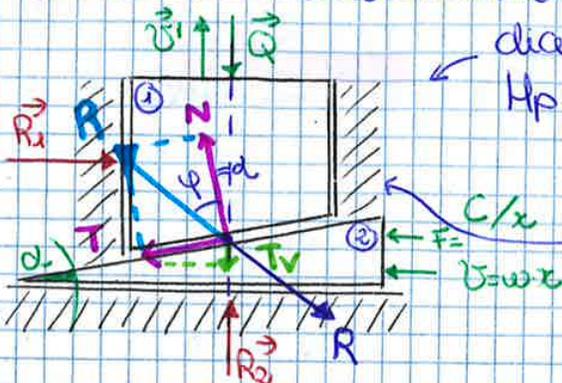


diagramma di corpi liberi della VITE
 H_p : binario senza attrito * R_0 le reazioni
 R_1 e R_2 (trascurata la componente t_g ,
 R_1 e R_2 sono componenti normali) dovute
 alle guide prismatiche
 * Azioni interne (N al piano ②), T t_g
 R per azione/reattione

CONTATTI ESTESI = FRENI e FRIZIONI

Occorre conoscere la distribuzione delle pressioni nella zona di contatto

$$\left(N = \int_A p \cdot dA \quad ; \quad T = f \cdot N \right)$$

↳ pressioni di contatto dobbiamo conoscere la distribuzione

Ipotesi:

a) della pressione uniforme ($p = \text{cost}$)

b) dell'usura o di REYE

Enunciato dell'Hp dell'usura:

il volume di materiale asportato nell'unità di tempo per usura è proporzionale al lavoro fatto dalle forze di attrito nella stessa unità di tempo.

In termini infinitesimali

$$dV^* = S dA = K dT \frac{ds}{dt} = K dT \overset{\substack{\text{forza di attrito} \\ \text{essenziale}}}{U_{rel}} = K \left(\int p dA \right) U_{rel}$$

$$\sigma = K \cdot f \cdot p \cdot U_{rel}$$

$$\sigma = \frac{dV^*}{dt}$$

spessore materiale
usurato (strati)

↳ pressione di
contatto

Tipi di FRENO:

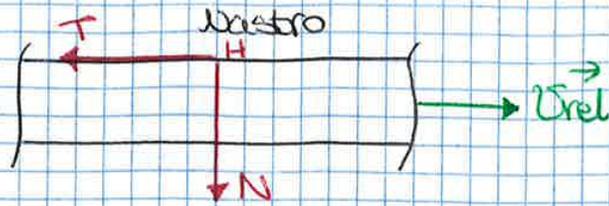
- 1) FRENO A PATTINO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO
- 2) FRENO A PATTINO AD ACCOSTAMENTO LIBERO
- 3) FRENO A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO
- 4) FRENO A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO LIBERO
- 5) FRENO A DISCO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO
- 6) FRENO A NASTRO

Tipi di FRIZIONE:

- 1) FRIZIONE PIANA
- 2) FRIZIONE PIANA a DISCHI MULTIPALI
- 3) FRIZIONE CONICA

$$N = \int_A p \cdot dA$$

$$T = f \cdot N$$

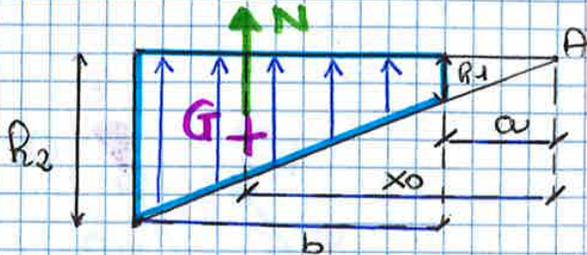


Sul pattino c'è azione/reazione.

$\vec{R} \perp \vec{R}_0$ facciamo una coppia opposta a \vec{C}
 $|\vec{R}_0| = |\vec{R}| \quad \vec{R}_0 \parallel \vec{R}$

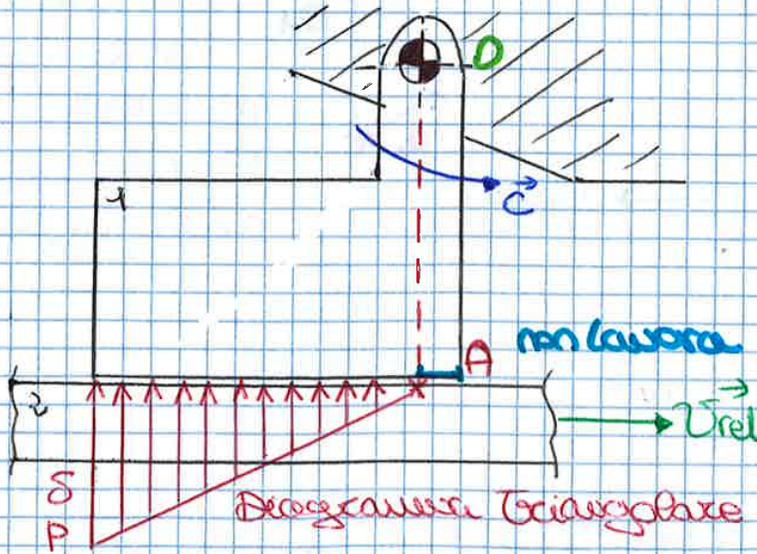
$\sum \vec{O}^+ \quad e = R \cdot d$
 $\sum \vec{O}^+ \quad e + T \cdot H - N \cdot x_0 = 0$

$$x_0 = \frac{2}{3} \frac{(a+b)^3 - a^3}{(a+b)^2 - a^2}$$



CASI PARTICOLARI

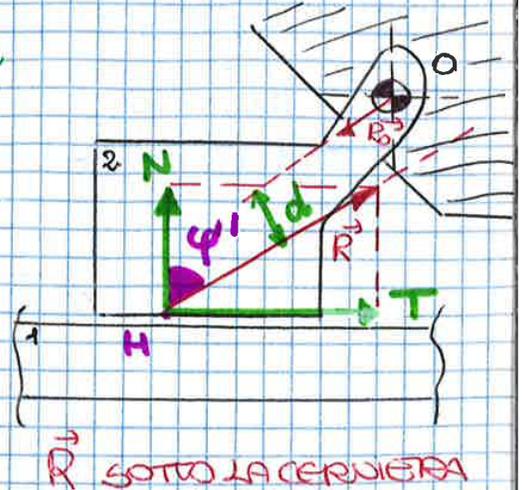
- PATTINO PARZIALIZZATO



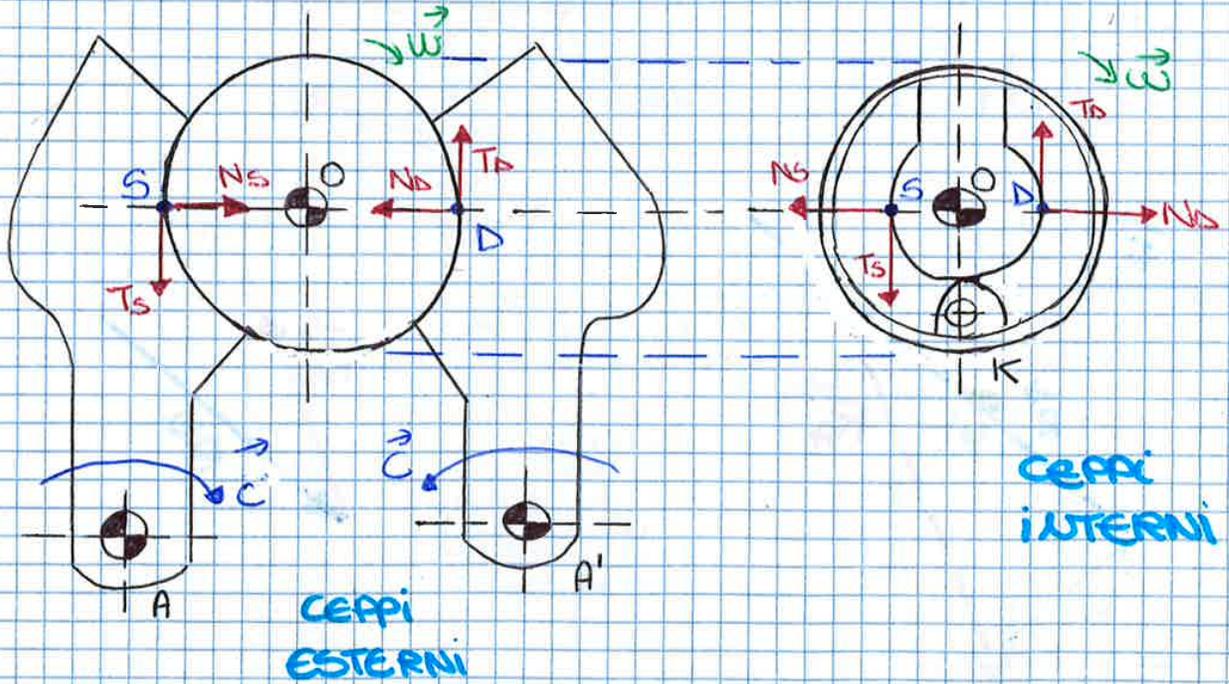
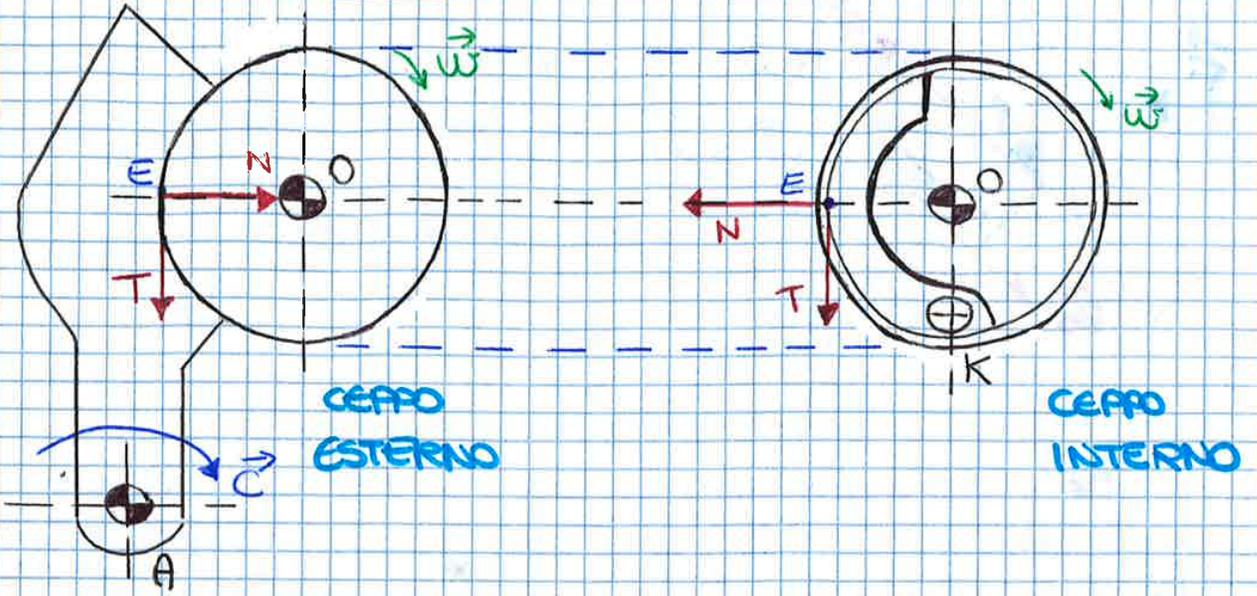
- AUTOINQUANTAMENTO

$\vec{R} \parallel \vec{R}_0 \quad |\vec{R}| = |\vec{R}_0| \rightarrow$ facciamo una coppia al posto di \vec{C}

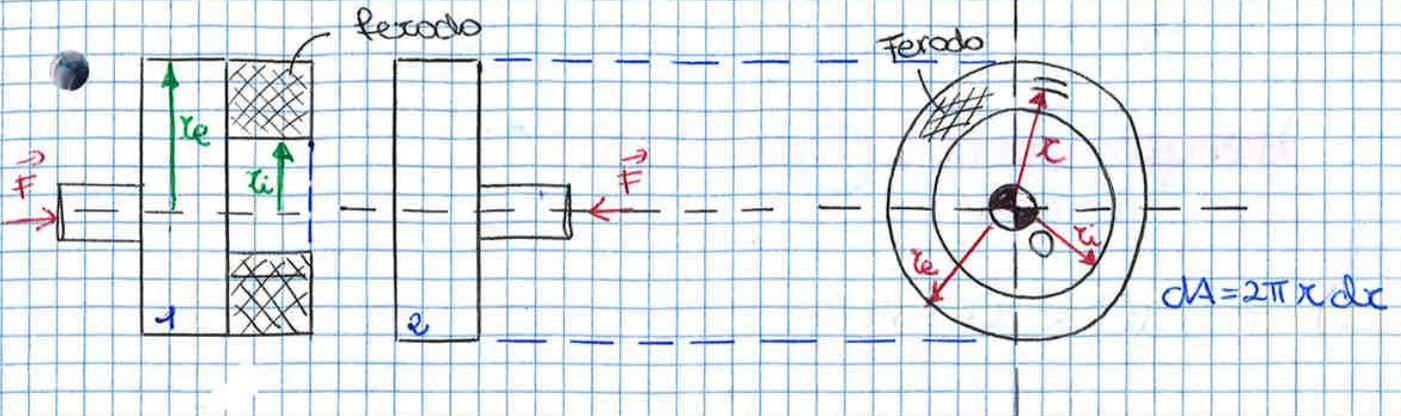
si trova un \vec{R} di uguale grandezza = se manca la corrente il pattino scivola sul mastro senza errori (\vec{C})



FRENO a TAMBURO



a) FRIZIONE PIANA



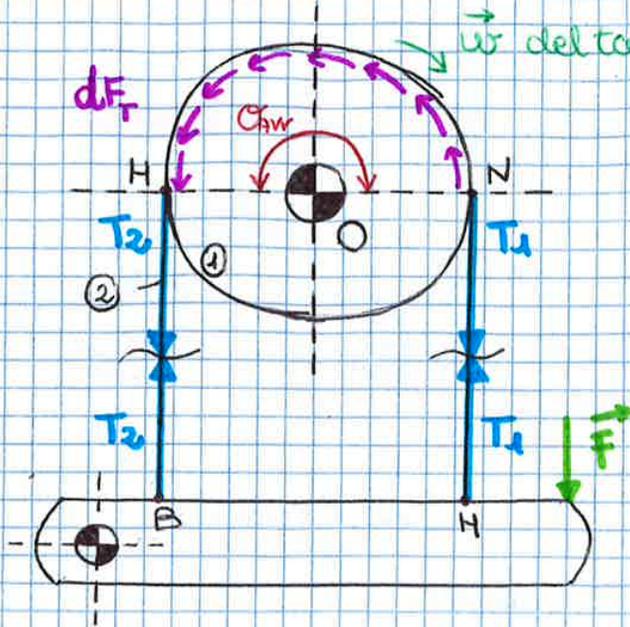
$$\rightarrow F = N = \int_A p \cdot dA = \int_{x_i}^{x_e} \frac{k'}{\pi} x \cdot dx \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$F = k' (2\pi) (x_e - x_i)$$

$$\begin{aligned} \text{M}(\text{frizione}) &= \int_A x (dF) = \int_A x (p \cdot dA) = \int_A x \left[f \frac{k'}{\pi} x \cdot dx \cdot d\theta \right] \\ &= \int_{x_i}^{x_e} \frac{fk'}{\pi} x^2 dx \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{fk'}{2} (x_e^2 - x_i^2) 2\pi = \\ &= \frac{fk'}{2} (2\pi) (x_e - x_i) \left(\frac{x_e + x_i}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{M}(\text{frizione}) = f F \left(\frac{x_e + x_i}{2} \right) *$$

f) FRENO a CINGHIA



$$T_2 > T_1$$

C_{avr} = avvezzamento

1: tamburo

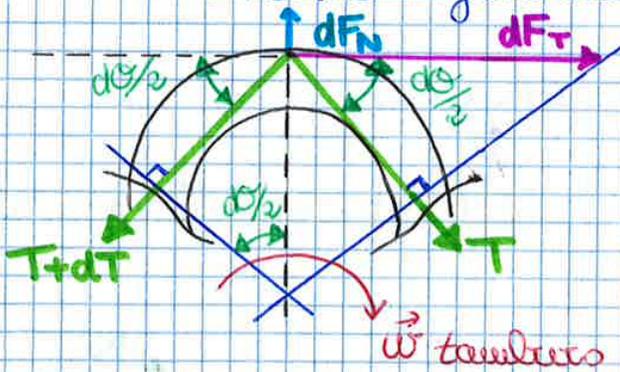
2: mastero

3: cerva

* sono le T di attrito tangenziali

EQUAZIONE dei FLESSIBILI

Stato em tratto infinitesimo di mastero



dF_T concorde con ω
 dF_N nasce dal fatto che il mastero viene premuto sul tamburo

T è una tensione

* T_2 si oppone a ω infatti è maggiore

$$\rightarrow + dF_T + T \cos \frac{d\theta}{2} - (T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (1) *$$

$$\uparrow + dF_N - T \sin \frac{d\theta}{2} - (T+dT) \sin \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (2) *$$

$$dF_T = \mu \cdot dF_N \quad (3) \text{ coefficiente di sfregamento (attrito)}$$

$d\theta$ è un angolo infinitesimo quindi $\begin{cases} \sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} * \\ \cos \frac{d\theta}{2} \approx 1 * \end{cases}$

Trascurare gli infinitesimi di ordine superiore *

$$+dF_T + T - T - dT = 0 \quad (1)$$

$$+dF_N - T \frac{d\theta}{2} - T \frac{d\theta}{2} - dT \frac{d\theta}{2} = 0 \quad (2)$$

$$-2T \frac{d\theta}{2}$$

perché moltiplica 2 infinitesimi

RAPPORTO di TRASMISSIONE di una trasmissione a CINGHIA

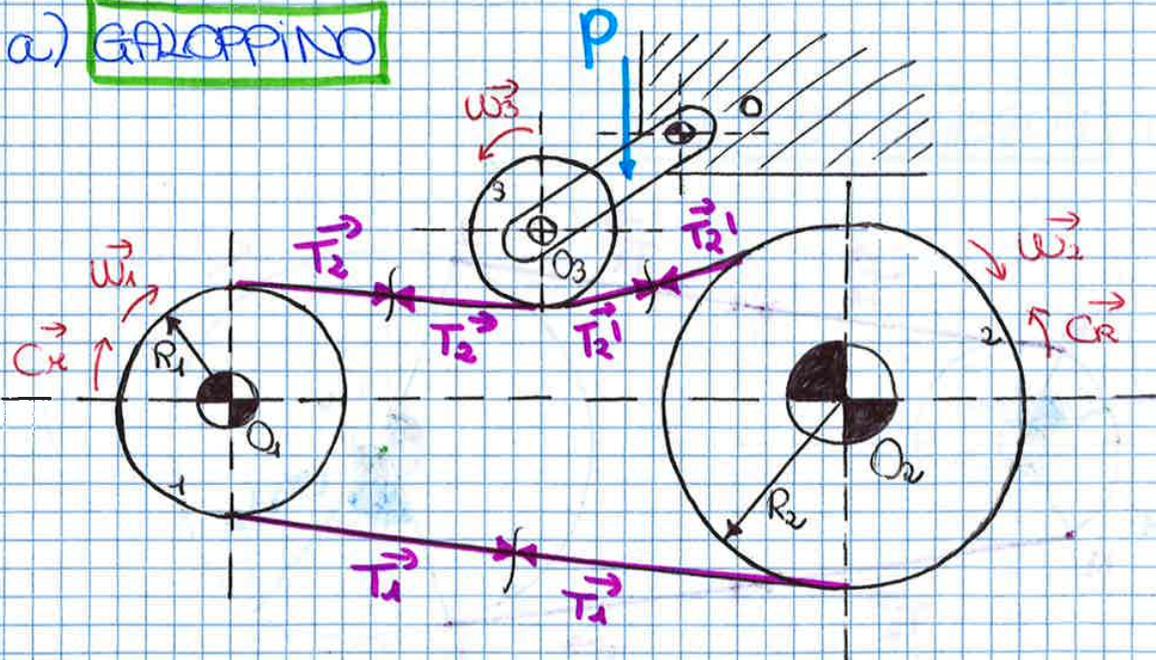
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \left(\frac{v_1}{R_1} \right) \left(\frac{R_2}{v_2} \right) = \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{v_1}{v_2} \right) = \frac{R_2}{R_1} \left[\frac{v_1}{v_2} \frac{(1 + F_1/ES)}{(1 + F_2/ES)} \right]$$

Se non conosciamo $\frac{F}{ES}$ trascuro il termine e $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{R_2}{R_1}$

TRE PRINCIPALI MODI per METTERE in TENSIONE una TRASMISSIONE a CINGHIA

- 1) GALOPPINO
- 2) TENITORE
- 3) FORBAMENTO INIZIALE

a) GALOPPINO

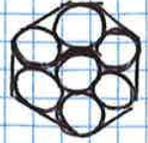


- 1: puleggia motrice
- 2: puleggia condotta
- 3: galoppino

Se sul galoppino non ci sono coppie esterne applicate; non ci sono inerzie; non c'è attrito al perno $\Rightarrow T_2 = T_2'$

TIPICI FUNI:

1) TREFOLI: più fili avvolti ad elica

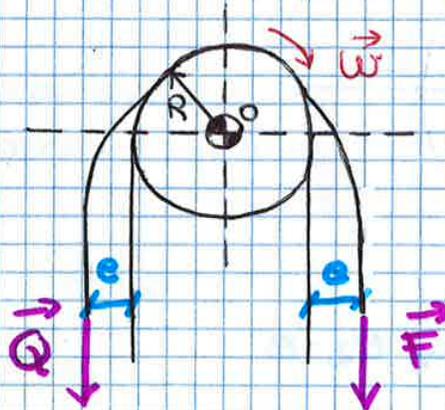


2) FUNI a TREFOLI: più trefoli avvolti a elica (attorno a una parte "moebiana")

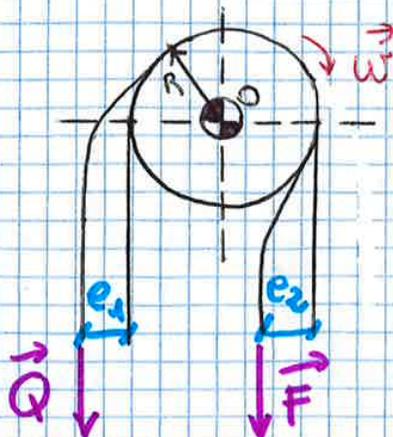


RIGIDEZZA della FUNE

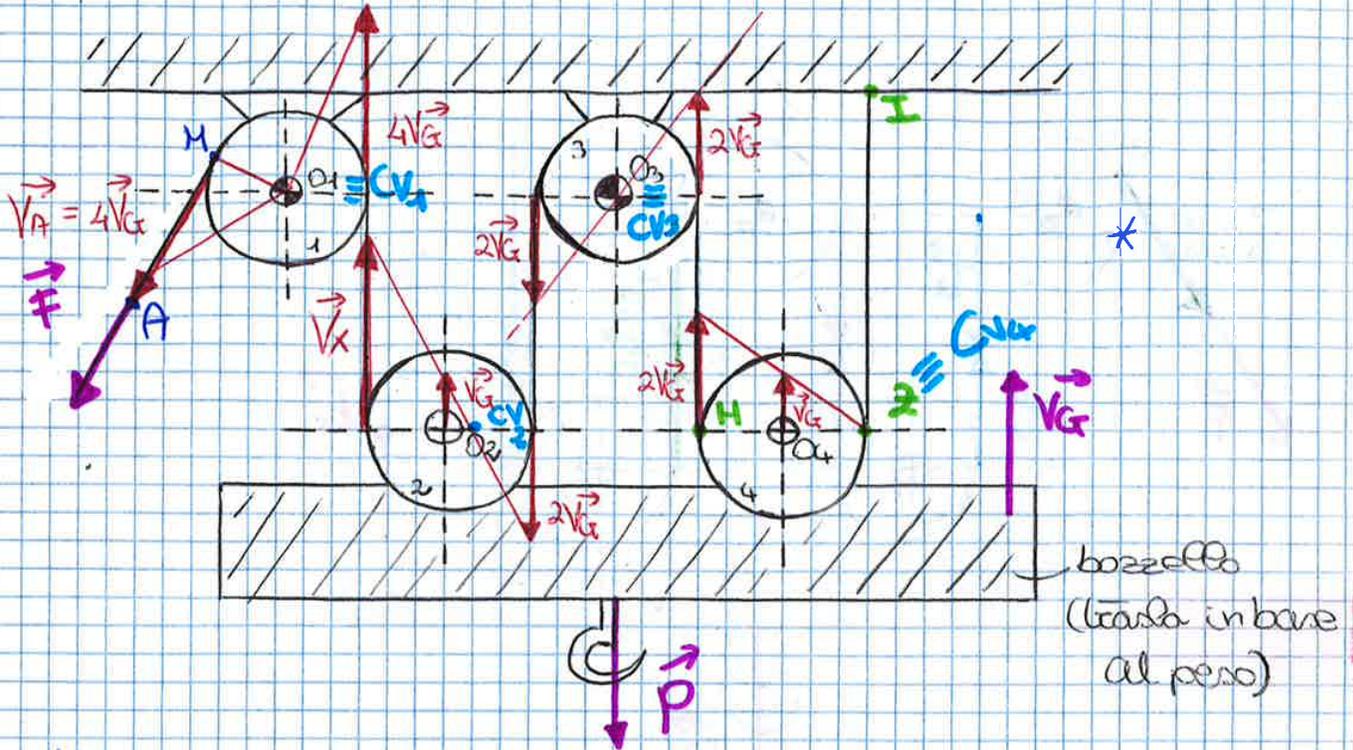
a) RIGIDEZZA ELASTICA (e): legata all'incampoleta flessibilità della fune



b) RIGIDEZZA ANELASTICA (e_1, e_2): legata all'attrito tra i fili ed agli scostamenti interni



PARANCHI di SOLLEVAMENTO

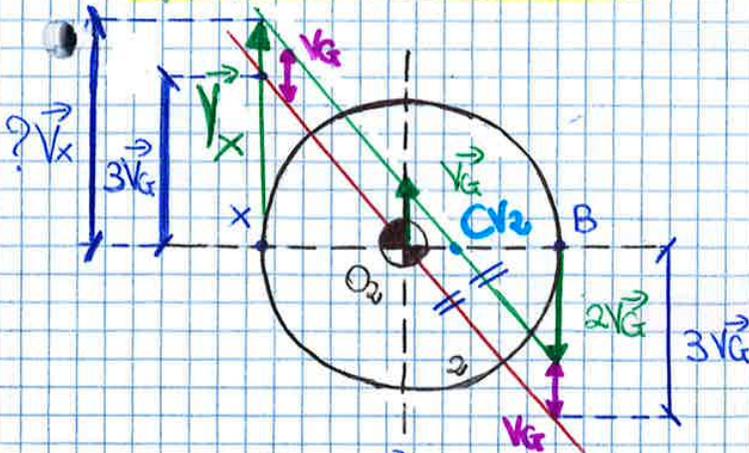


Hip: - carrolate con attrito al primo e rigidità fine $e_1 = e_2$
 - carrolate con uguale r_2 tra di loro

1-3: pulegge a centro fisso
 2-4: pulegge a centro mobile

FORMULE GENERALI

a) ANALISI CINEMATICA



$\Rightarrow \vec{V}_x = 4\vec{V}_G$
 La metà nel l' disegno

1) $V_A = n V_G$ ($n=4$)

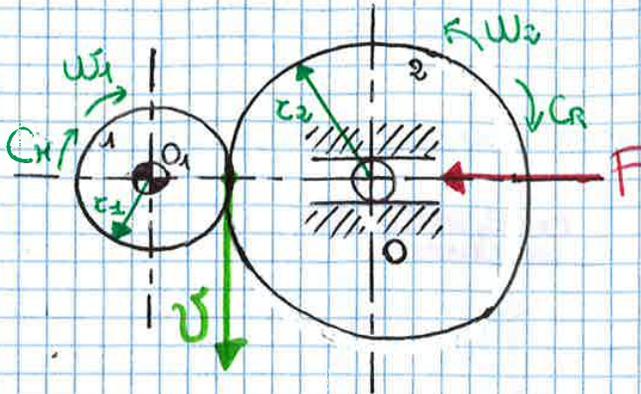
$n = n^\circ$ rami di fune appesi al bozzello

* ④ I2 fisso
 $Cv_4 = 2$ perché c'è puro rotamento
 Distribuzione lineare delle velocità
 $2V_G$ in M perché $Mz = 2zO_4$

* ③ $2V_G$ è opposta rispetto al centro
 * parallela alla distribuzione reale delle velocità che ho traslato nel centro *

RUOTE DENTATE

RUOTE di FRIZIONE

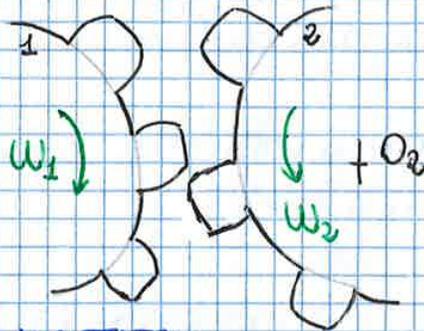


$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

nel punto di contatto c'è aderenza (uguale velocità 1 e 2)

Sostituiscono al contatto per aderenza senza dentatura
 ⇒ moto trasmesso per contatto rigido



TIPI di RUOTE DENTATE:

- 1) ASSI PARALLELI { - ruote dentate cilindriche a denti dritti } ^{esterne} interne
 { - ruote dentate cilindriche a denti elicoidali }

$$i = 5 \div 6 \text{ (max 10)}$$

- 2) ASSI CONCORRENTI: ruote coniche $i = 5 \div 10$

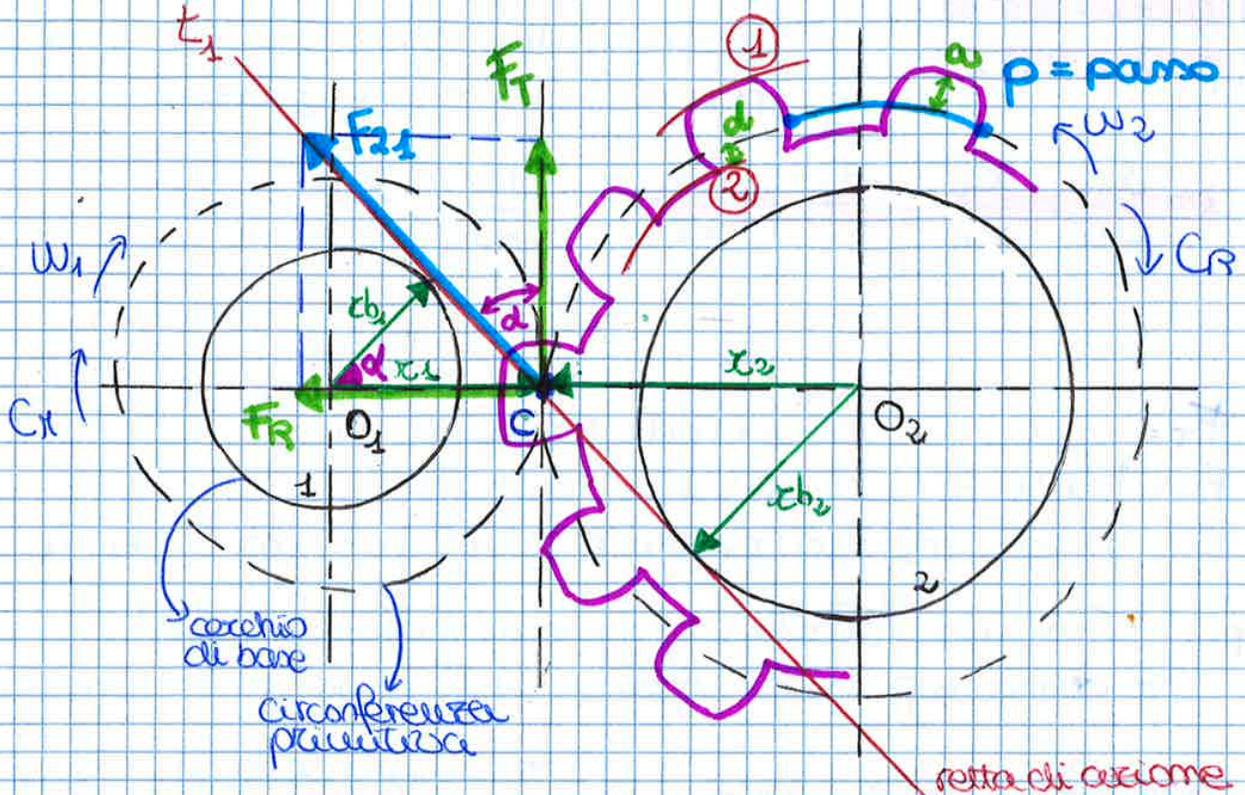
- 3) ASSI SOGHEMBI { - ruote con assi sghembi
 - vite senza fine
 - ruote a denti elicoidali }

$$i = 100$$

Zona comatelli = zona intera

Scelgo t_1 o t_2 in base } al verso di rotazione (si oppone a ω)
 a quale se ne è neutrice
 F_{21} / F_{12} discorde a C_M

RUOTE DENTATE CILINDRICHE ad assi a DENTI DIRITTI



RUOTE ESTERNE = i centri delle ruote sono esterni al punto C di contatto. Hanno direzione discorde.

a = angolo di pressione

x_{b1} e x_{b2} = raggi dei cerchi di base

$x_{b1} = x_1 \cos \alpha$

$x_{b2} = x_2 \cos \alpha$

C = centro di istantanea rotazione nel moto relativo

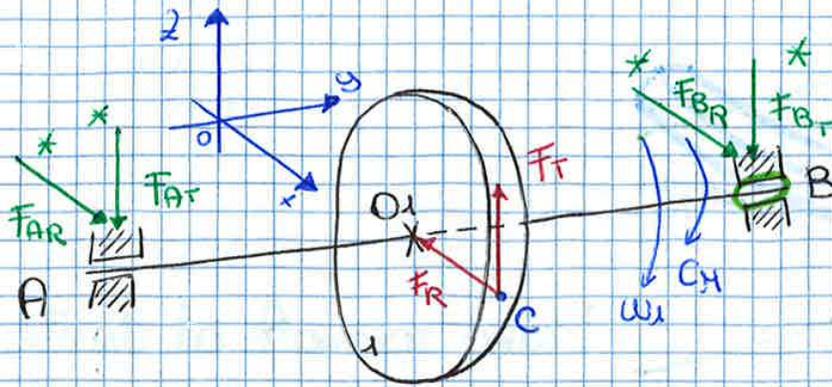
Im C = $v = x_1 \omega_1 = x_2 \omega_2$ $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{x_2}{x_1}$

① circonferenza di troncatura esterna

② circonferenza di troncatura interna

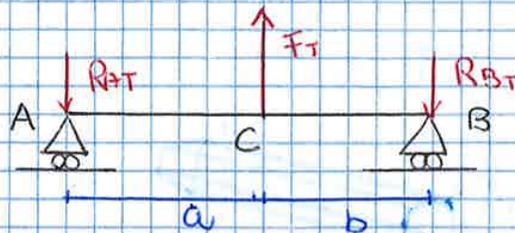
$a = ADDENDUM = m$ (modulo)
 $d = DEDENDUM = 1,25 m$ ($m =$ modulo)

REAZIONI SUI SUPPORTI



* Cuscinetti a sfera
 F_R radiale

PIANO [y, z]

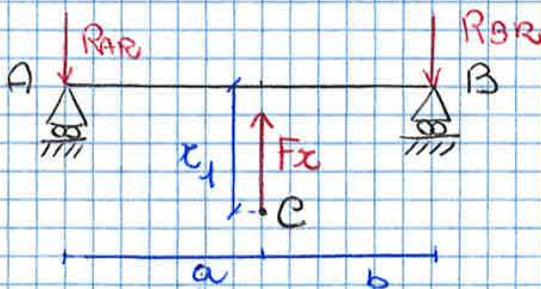


F_T non è applicata sull'albero come sembra in questo disegno

$$\begin{aligned} \uparrow^+ \quad & F_T = R_{AT} + R_{BT} \\ \text{A)}^+ \quad & -R_{BT}(a+b) + F_T \cdot a = 0 \end{aligned}$$

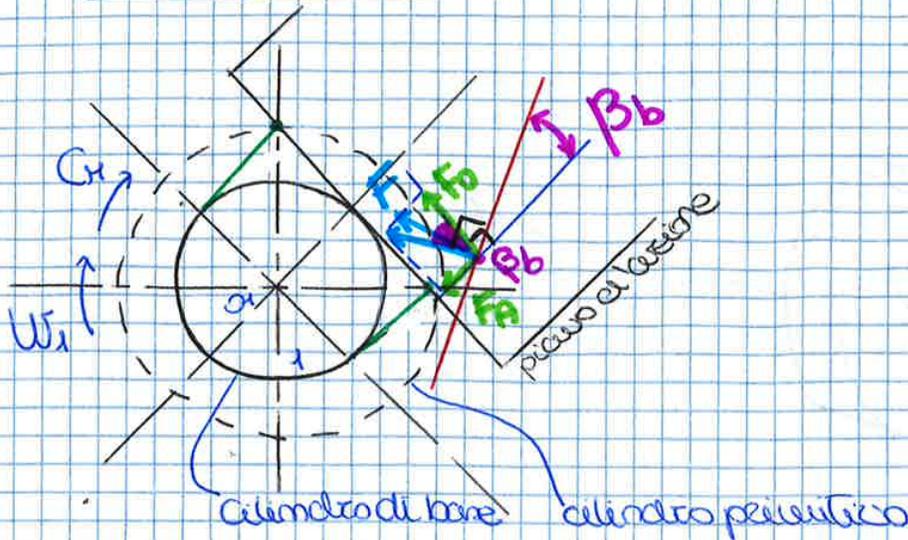
$$\Rightarrow R_{AT}, R_{BT}$$

PIANO [x, y] (dall'alto)



$$\begin{aligned} \uparrow^+ \quad & F_x = R_{AR} + R_{BR} \\ \text{A)}^+ \quad & F_x \cdot a - R_{BR}(a+b) = 0 \end{aligned} \Rightarrow R_{AR}, R_{BR}$$

FORZE SCARBIATE



- Hp:
- trascurare l'attrito e l'ingranamento
 - F è nel piano di azione, \perp al dente
 - 1 sola coppia di denti in presa
 - F applicata lungo la retta tangente a \odot cilindro primitivo e a metà levata

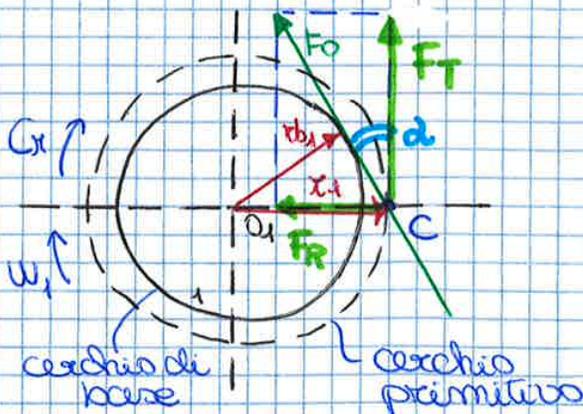
$$F_o = F \cos \beta_b$$

$F_o \perp$ asse ruota

$$F_A = F \sin \beta_b$$

F_A lungo l'asse della levata (componente assiale)

SEZIONE FRONTALE



$$O_1 \downarrow + \quad C_u = F_t \cdot r_1 = F_o \cdot r_{b1}$$

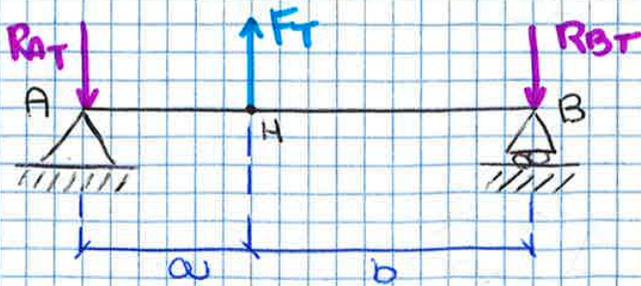
$$F_t = F_o \cos \alpha = (F \cos \beta_b) \cos \alpha$$

$$F_r = F_o \sin \alpha = (F \cos \beta_b) \sin \alpha$$

F_t componente tangenziale

F_r componente radiale

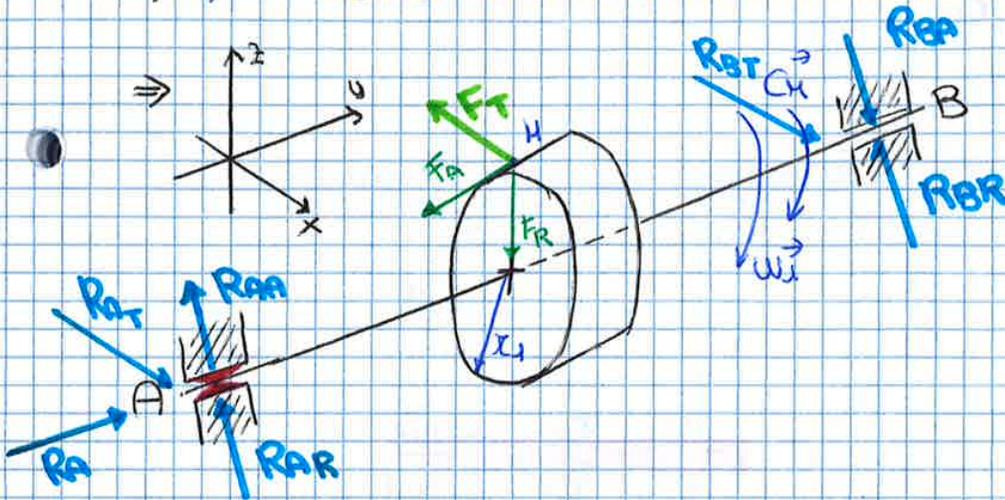
PIANO [x,y] (vista dall'alto)



* I supporti reagiscono a F_T

$\uparrow^+)$ $F_T = R_{AT} + R_{BT}$

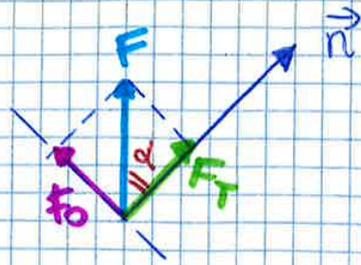
$\curvearrowright^+)$ $-R_{BT}(a+b) + F_T(a) = 0$



A $\begin{cases} |N_A| = |F_A| \\ |R_A| = \sqrt{(R_{AR} + R_{AR})^2 + (R_{AT})^2} \end{cases}$

(lungo z; sommate perché concordi)

B $R_B = \sqrt{(R_{BR} - R_{BR})^2 + (R_{BT})^2}$
 (discorde)



(n normale agli elementi)
 scompongo F (o F_o e F_t)
 lo ripeto sul disegno precedente
 e scompongo F_o

$$\left. \begin{aligned} F_t &= F \cos \alpha && \text{componente tangenziale} \\ F_o &= F \sin \alpha \\ F_A &= F_o \sin \alpha_1 = (F \sin \alpha) \sin \alpha_1 && \text{componente assiale} \\ F_R &= F_o \cos \alpha_1 = (F \sin \alpha) \cos \alpha_1 && \text{componente radiale} \end{aligned} \right\}$$

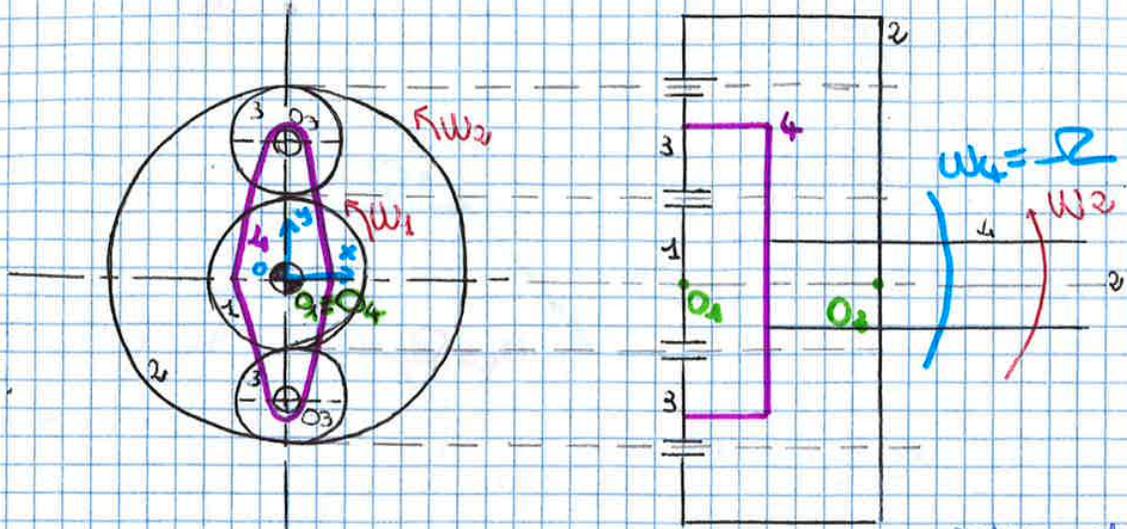
α è l'angolo delle sovrapposizioni (val. indietro)

Assi di $90^\circ \Rightarrow$ se sulla ruota $\hat{=}$ F_R , sulla z $\hat{=}$ F_A
 se sulla z $\hat{=}$ F_A , sulla r $\hat{=}$ F_R

HY

2) ROTISMI EPICICLOIDALI

A differenza dell'ordinaro, l'epicicloidale ha il portafreno



- 1: solare (asse fisso)
- 2: corona (dentatura interna)
- 3: satellite planetari
- 4: porta freno o porta satellite → braccio che accosta le ruote a 2 e 3; non è una ruota vera sostiene la ruota 3 e permette a queste di ruotare se si sfiora e intorno a O_2

* sistema di riferimento in base al portafreno

RAPPORTO DI TRASMISSIONE

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \left(\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} \right) \left(\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} \right)$$

velocità relative al portafreno

FORMULA di WILLIS ⇒ tecnica "ordinaria" e rotismo epicicloidale con 1 sistema di riferimento solidale al portafreno

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \left(i_{1,3} \right) \left(i_{3,2} \right) = \left(-\frac{z_3}{z_1} \right) \left(+\frac{z_2}{z_3} \right)$$

1,3: ruote esterne
2,3: ruote interne

in questa struttura $\Omega = \frac{z_1 \omega_1 + z_2 \omega_2}{z_1 + z_2}$

ROTISMO EPICICLOIDALE

per Willis

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} \quad i_{3,2} = \frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_2 - \Omega}$$

dot tra ingranzi
2
velocità

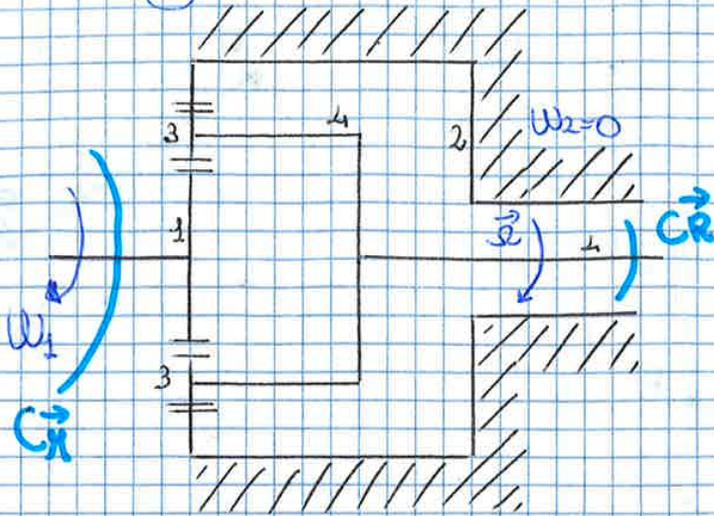
49

$$i_{1,3} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} \quad i_{1,4} = \frac{\omega_1}{\Omega}$$

tra ingranzi e portafreno
regressiva la 1/55

RIDUTTORE di VELOCITÀ EPICICLOIDALE

Impostazione $\omega_2 = 0$ fissare la corona 2 al telaio



$$\omega_2 = \omega_1 + 2\omega_3$$

ω_2 e ω_1 moto

z_2 è un braccio $\Rightarrow \frac{z_2}{z_1}$

RAPPORTO di TRASMISSIONE nel ROTAZIONE RESO ORDINARIO (Willis)

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_2 - \omega} = \left(-\frac{z_3}{z_1} \right) \left(+\frac{z_2}{z_3} \right) = \frac{-z_2}{z_1}$$

estre interne

RAPPORTO di TRASMISSIONE del RIDUTTORE ($\omega_2 = 0$)

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega}$$

$$\ast \frac{\omega_1 - \omega}{-\omega} = \frac{-z_2}{z_1}$$

$$\omega_1 z_1 - \omega z_1 = z_2 \omega$$

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{z_1 + z_2}{z_1}$$

$$i_{1,2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1}$$

RENDIMENTO del RIDUTTORE

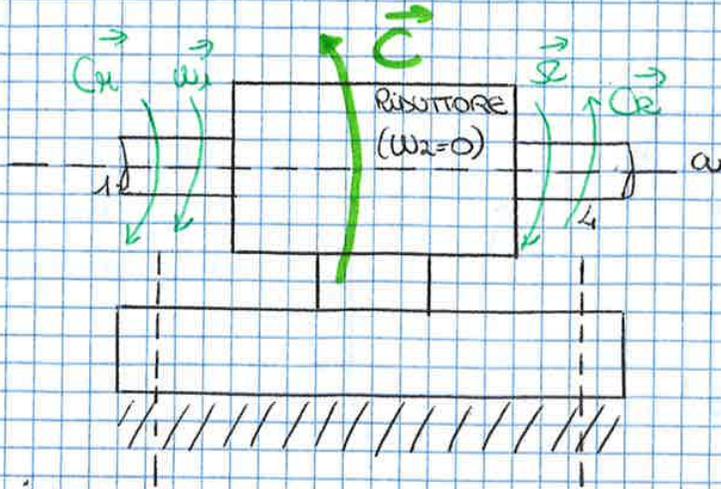
$$\eta_{RID} = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_R \omega}{C_H \omega_1} = \frac{C_R}{C_H i_{1,2}}$$

C_R = coppia resistente che nasce dagli attriti e dagli ingranaggi del riduttore

$$C_R = \eta_{RID} \cdot C_H \cdot i_{1,2}$$

$$\eta = 1 \Rightarrow C_R = i_{1,2} \cdot C_H$$

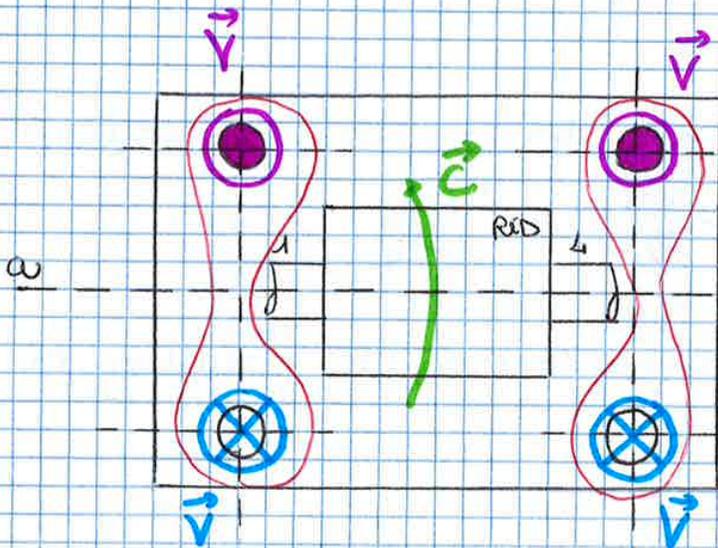
COPPIA TRASMESSA AL TELAI = \vec{C}



C_R sull'albero 4
 ω_1 sull'albero 1 $\Rightarrow i \neq 1$

$$i_{1/4} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

a) $C_x - C_R - C = 0$



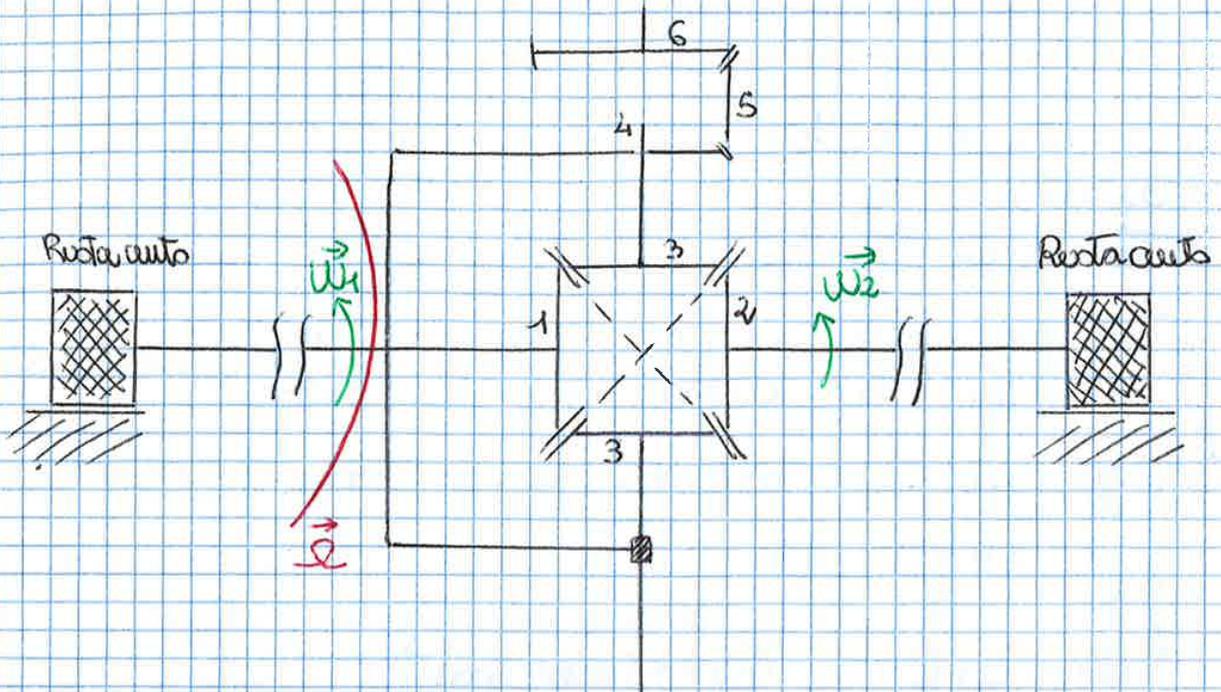
La C tende a comprimere
 la coppia di bulloni
 superiore *
 e mette in trazione
 i bulloni inferiori *

Da C si ripartisce in
 modo uniforme

In verticale * sono ugua
 C e opposte (distanzi
 braccio \leftarrow

$$V = \frac{C}{2b}$$

DIFFERENZIALE AUTODIREZIONANTE



- 1,2 solari (collegati agli alberi delle ruote)
- 3 satelliti (n° 2)
- 4 portatreno
- 5,6 coppia da cui deriva il vortice (conca)

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{z_2}{z_1} = -1$$

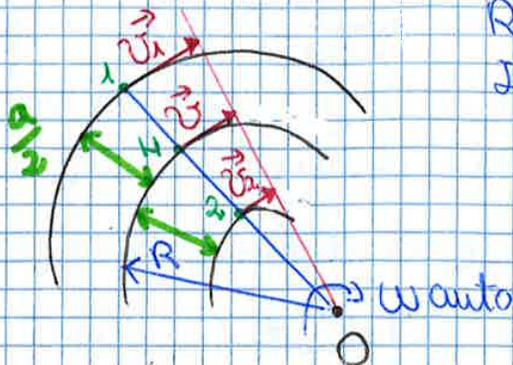
↳ Essenziale con ruote coniche (vortice nel) e ruote girano in senso opposto

$z_1 = z_2$

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

a) IN RETTILINEO $\omega_1 = \omega_2 = \Omega = \frac{v}{r}$ $r = \text{raggio ruota}$

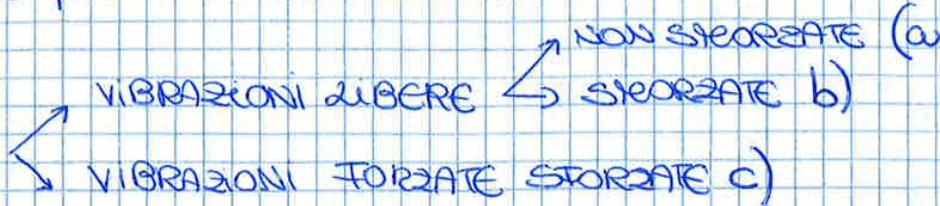
b) IN CURVA $a = \text{correggiata auto}$
 $R = \text{raggio curva}$
 In le 2 a sono le ruote



VIBRAZIONI

VIBRAZIONI LINEARI a 1 gdl

Q parametri concentrati



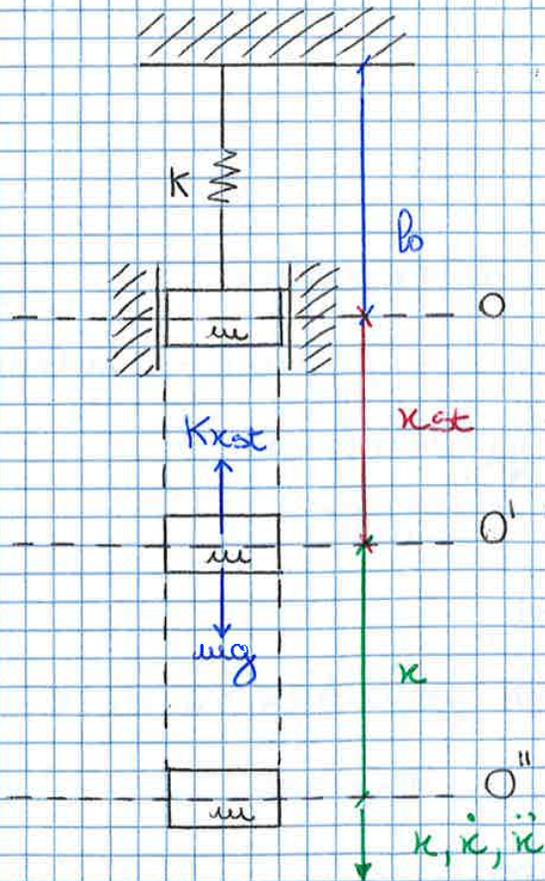
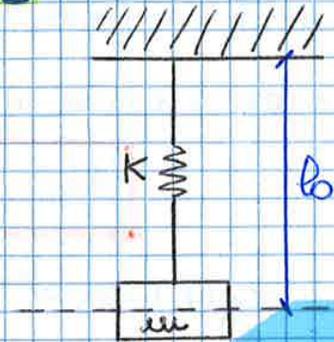
a) VIBRAZIONI LIBERE NON SMORZATE

$m = m_{massa}$

$K =$ rigidità elastica della molla

$b =$ lunghezza a riposo della molla

$$\vec{F}_{el} = -K\vec{x}$$



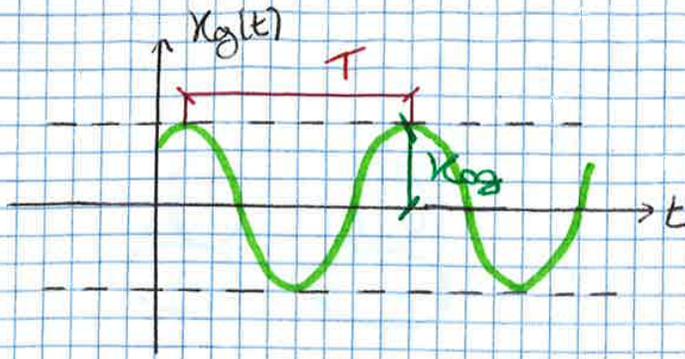
O: molla a riposo

O': condizione di ammortamento

O'': molla tirata

$$Kx_{st} = mg$$

$$x_{st} = \frac{mg}{K}$$



T: periodo di oscillazione libera non smorzata

$$[\omega_n(t+T) + \varphi_0] - [\omega_n t + \varphi_0] = 2\pi$$

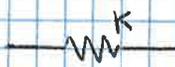
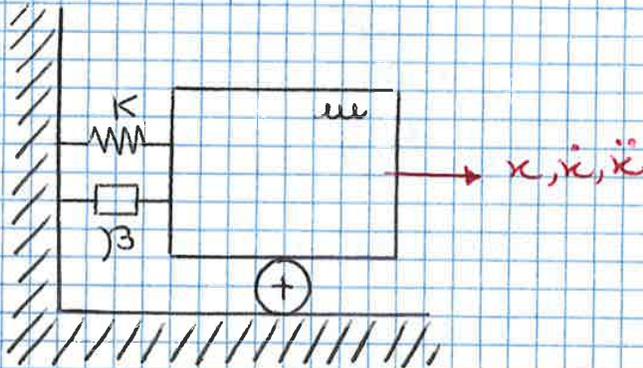
$$\omega_n t + \omega_n T + \varphi_0 - \omega_n t - \varphi_0 = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} \text{ [s]}$$

periodo

$f_n = \frac{1}{T} = \frac{\omega_n}{2\pi}$ [Hz]: frequenza naturale del sistema non smorzato

b) VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE



molla

$$F_{sx} = -Kx$$

$$K = \left[\frac{N}{m} \right]$$



smorzatore viscoso

$$F_{sx} = -\beta \dot{x}$$

β = cost di smorzamento

$$\beta \left[\frac{N}{m/s} \right]$$



stantuffo che comprime un fluido viscoso



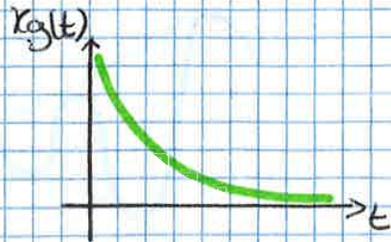
massa

$$F_{in} = -m\ddot{x}$$

1. $\zeta > 1$: $\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

$$x_g(t) = a \cdot e^{(-\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t} + b \cdot e^{(-\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$$



RUOTO APERIODICO

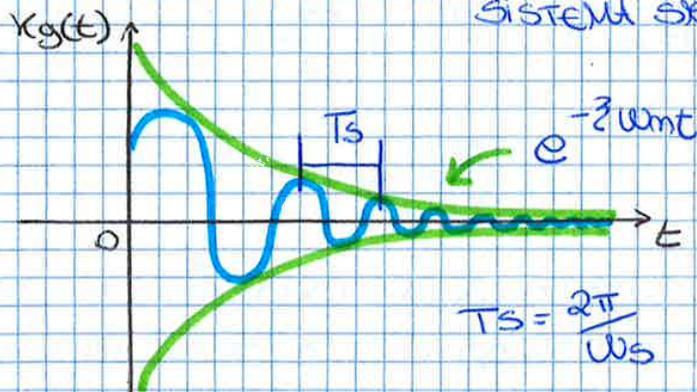
2. $\zeta < 1$: $\lambda_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

$$x_g(t) = a \cdot e^{(-\zeta \omega_n + i \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})t} + b \cdot e^{(-\zeta \omega_n - i \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})t}$$

$$x_g(t) = x_{g0} \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_s t + \varphi_0)$$

$$\omega_s = \omega_n \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$$

ROTAZIONE PROPRIA DEL SISTEMA SORRIZATO



3. $\zeta = 1$: $\lambda_{1,2} = -\omega_n$

$$x_g(t) = (a + bt) e^{-\omega_n t}$$

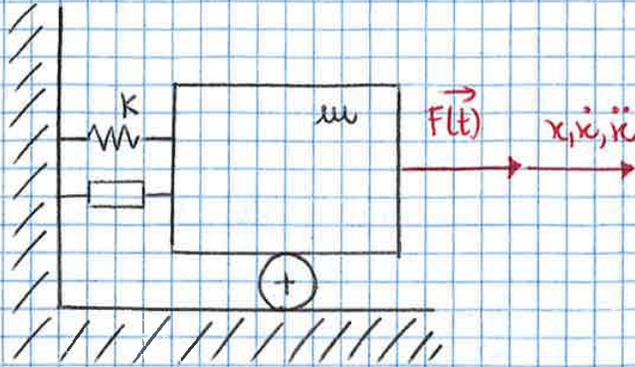
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0$$

($\beta = \beta_{critico}$)



RUOTO APERIODICO

c) VIBRAZIONI FORZATE SMORZATE



$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (\text{forzante})$$

Ω : pulsazione della forzante

$$\begin{aligned} F_x &= -kx \\ F_{sx} &= -\beta \dot{x} \\ F_{in} &= -m \ddot{x} \end{aligned}$$

$$x_{tot}(t) = x_g(t) + x_p(t) \quad \rightarrow \text{integrale particolare}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_g(t) = 0 \text{ si esaurisce}$$

$$x(t) = x_p(t)$$

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t) \quad (\text{IN})$$

$$x(t) = x_p(t) = x_0 \cos(\Omega t - \varphi) \quad (\text{OUT})$$

x_0 : ampiezza di oscillazione a regime

φ : sfasamento dovuto allo smorzamento

★ sfasamento pulsazione e forza d'impulso

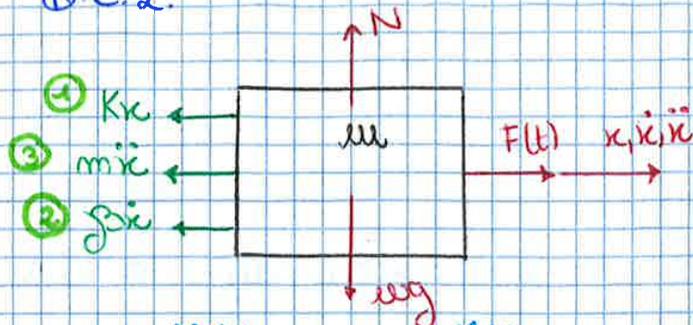
✖ ritardatore di fase

in elettronica può essere \pm

in macchine può solo ritardare (-) perché il

sistema può rispondere solo dopo

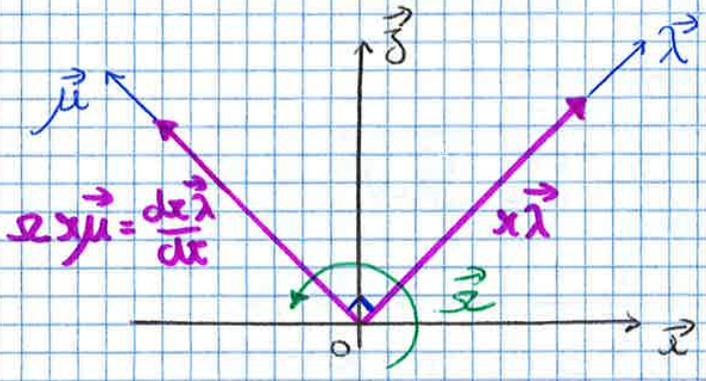
De2.



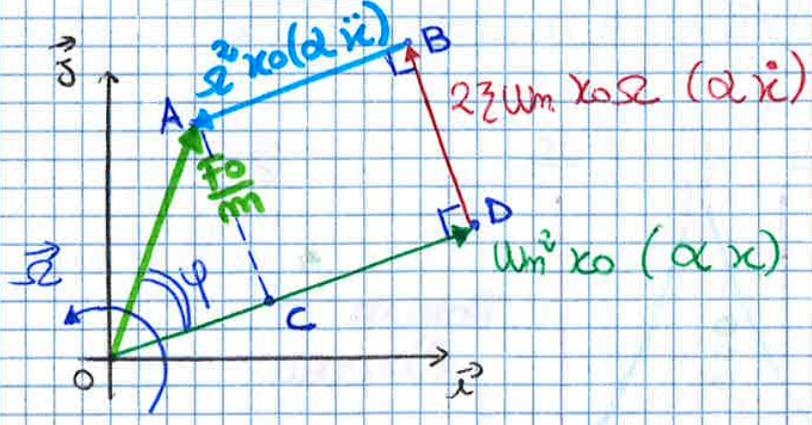
$$+ \leftarrow 1 \cdot \ddot{x} + (2 \zeta \omega_m) \dot{x} + (\omega_m^2) x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

$$- \Omega^2 x_0 \cos(\Omega t - \varphi) - (2 \zeta \omega_m) (\dot{x}_0 \Omega) \sin(\Omega t - \varphi) + (\omega_m^2) x_0 \cos(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t)$$

ETTORE ROTANTE



POLIGONO DEI VETTORI ROTANTI



Derivata 1^a
Derivata 2^a