



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1799A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Oberto Alessandro

MATERIA: Dinamica dei sistemi meccanici - prof. Fasana

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

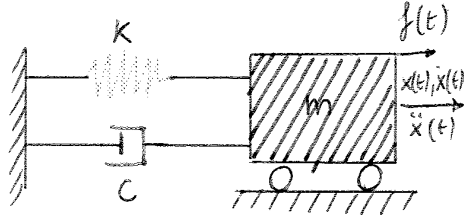
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# DINAMICA DEI SISTEMI

## MECCANICI

Studio di sistemi ad 1 GDL

SISTEMA A 1 GDL: oggetto la cui posizione nello spazio può essere descritta da una variabile dipendente dal tempo. In qualunque sistema vibrante può essere studiato come combinazione lineare di sistemi indipendenti, ciascuno con un solo GDL



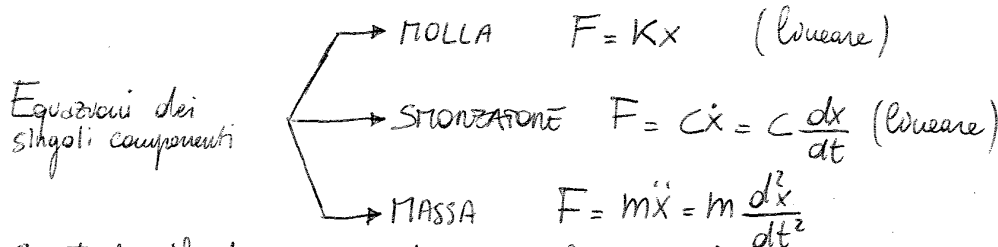
Sistemi a parametri concentrati: esso è caratterizzato dalla presenza di una massa  $m$  infinitamente rigida; dalla presenza di una molla lineare, priva di massa e ideale (senza dissipazione di energia) che produce una forza di richiamo elastico proporzionale alle tramite la rigidezza  $K$  allo spostamento relativo dei suoi estremi; della presenza di un elemento dissipatore viscoso anche esso lineare e privo di massa, deputato a rappresentare tutte le forme di dissipazione eventualmente presenti e che produce una forza proporzionale tramite la costante  $c$  alla velocità relativa dei suoi estremi. Può eventualmente essere presente una forzante esterna  $f(t)$

un elemento dissipatore viscoso anche esso lineare e privo di massa, deputato a rappresentare tutte le forme di dissipazione eventualmente presenti e che produce una forza proporzionale tramite la costante  $c$  alla velocità relativa dei suoi estremi. Può eventualmente essere presente una forzante esterna  $f(t)$

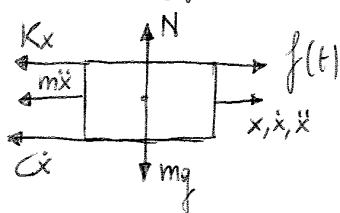
RISPOSTA LIBERA: andamento nel tempo del moto della massa a partire da generiche condizioni iniziali

RISPOSTA FORZATA: comportamento del sistema soggetto ad un'azione esterna

RISPOSTA IN FREQUENZA: moto della massa quando viene applicata una forza che segue una legge armonica nel tempo



Si studia il diagramma di corpo libero della massa



Quando la massa da una parte la molla mi fornirà una forza di richiamo in direzione opposta

$$\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{forzante}} = 0$$

$$\uparrow N - mg = 0$$

$$\leftarrow Kx + c\dot{x} + m\ddot{x} = f(t) \Rightarrow \text{equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti (K, m, c) e lineare perché x compare sempre al 1° grado. K, m, c = T1 = time invariant}$$

$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t)$  ha una soluzione esprimibile come

$$x(t) = Ae^{st}$$

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \underbrace{(\underbrace{a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t}_{\text{movimento armonico}})}_{\text{Come emerge la pulsazione è decrescente}}$$

$$a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t = A \sin(\omega_d t + \varphi) = A \cos(\omega_d t + \theta)$$

LA PARTE REALE CONTROLLA IL DECADIMENTO NEL TEMPO  
LA PARTE IMMAGINARIA CONTROLLA L'OSCILLAZIONE

$$\text{OSCILLAZIONE CONTINUA} \Rightarrow \omega_d = \omega_n \Rightarrow \zeta = 0$$

Analisi dei singoli sistemi

SISTEMA SOVRASMOZZATO

$$s_1 = -\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad s_2 = -\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-\zeta \omega_n - \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}) A_1 + (-\zeta \omega_n + \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}) A_2 = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{x_0}{2} - \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \\ A_2 = \frac{x_0}{2} + \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{2 \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}} \end{cases}$$

SISTEMA SOVRAZMOZZATO

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\omega_n t}$$

$$\begin{cases} A_1 = x_0 \\ A_2 = v_0 + \omega_n x_0 \end{cases}$$

con  $A_1$  e  $A_2$  ricavate rimpiazzando  $x_0$  e  $v_0$

SISTEMA SOTTOZMOZZATO

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -\zeta \omega_n \pm i \omega_d$$

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A_1 e^{-i \omega_d t} + A_2 e^{i \omega_d t})$$

$$x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} ((A_1 + A_2) \cos(\omega_d t) + i(A_2 - A_1) \sin(\omega_d t))$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\zeta \omega_n (A_1 + A_2) + i \omega_d (A_2 - A_1) = v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = x_0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} i(A_2 - A_1) = (v_0 + \zeta \omega_n x_0) / \omega_d \end{cases}$$

Perché  $x_0$  e  $v_0$  sono numeri reali è necessario che vengano rispettate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} (A_1 + A_2) \in \mathbb{R} \\ i(A_2 - A_1) \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \text{devono essere complessi coniugati con come lo sono } s_{1,2}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = a \\ i(A_2 - A_1) = b \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (a \cos(\omega_d t) + b \sin(\omega_d t))$$

Derivando l'espressione ottenuta si ottiene la velocità

$$\dot{x}(t) = -\zeta \omega_n e^{-\zeta \omega_n t} (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t) + \omega_d e^{-\zeta \omega_n t} (-a \sin(\omega_d t) + b \cos(\omega_d t))$$

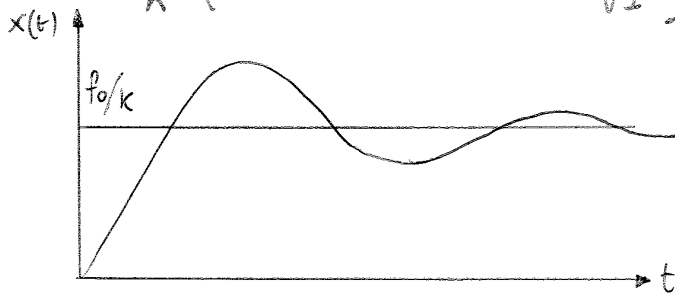
$$\begin{cases} a = x_0 \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{v_0 + \zeta \omega_n x_0}{\omega_d} \end{cases}$$

Impongo le condizioni iniziali e ottengo

$$\begin{cases} f_0/k + A = x_0 = 0 & \text{posizione} \\ -z\omega_n A + B\omega_d = v_0 = 0 & \text{velocità} \end{cases} \Rightarrow \text{determino } A \text{ e } B \text{ che mi forniscano la soluzione completa}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f_0}{k} \left( 1 - e^{-z\omega_n t} \left( \cos(\omega_d t) + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \sin(\omega_d t) \right) \right)$$



nel caso in cui il gradino sia unitario  $f_0 = 1$  e la risposta prende il nome di **AMMETTENZA INDICIALE**

Esempio

$$\omega_n = 20 \text{ rad/s}$$

$$z = 0,04$$

$$z_{critici} = 0,001$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-z^2} = 19,98 \text{ rad/s}$$

Si come il valore non è molto grande si tende a confondere  $\omega_d$  con  $\omega_n$ . In un tempo  $t \approx 3,76 \text{ s}$  e con un'oscillazione di 12 cicli l'ampiezza diventa il 5% di quella massima

Risposta alle forzanti armoniche

Qualunque funzione periodica può essere espressa, mediante una serie di Fourier, come una somma di funzioni armoniche opportunamente scalate. Poiché inoltre il sistema considerato è lineare è lecito applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.

Per rendere una forma periodica derivi da  $n$  che il suo periodo si ripeta all' $\infty$

$$\Rightarrow f(t) = f(t + T_0) \text{ con } T_0 = \text{periodo della forma / input / eccitazione}$$

Ma si può scrivere la funzione periodica come armonica

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_0 k t + b_k \sin \omega_0 k t) \text{ con}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \text{pulsazione fondamentale} \quad a_0 = \text{valor medio di } f(t)$$

$$k\omega_0 = k\text{-esima armonica}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos k\omega_0 t dt \quad b_k = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin k\omega_0 t dt$$

Esempio

Se la mia pulsazione fondamentale è  $5 \text{ rad/s} \Rightarrow$  posso scrivere la funzione come somma di serie di pulsazioni aventi pulsazione fondamentale  $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$  o multiple di esse

Si come il sistema è lineare  $\Rightarrow$  posso applicare la sovrapposizione degli effetti

INGRESSO

USCITA

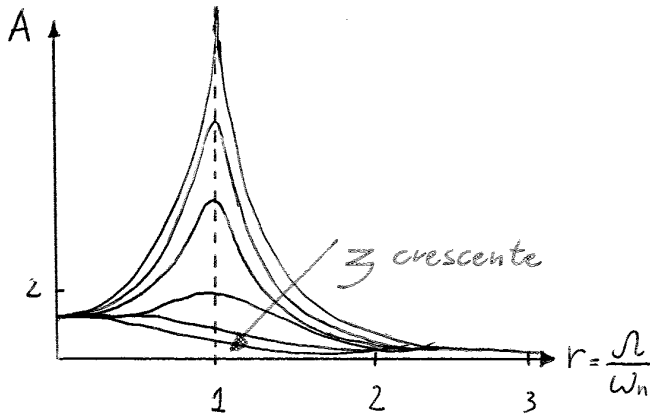
$$\begin{matrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{matrix} \Rightarrow \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \Rightarrow \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

Metto le equazioni di ingresso e uscita in altre che:

$$f_1(t) = a_1 \cos \omega_0 t \rightarrow x_1(t)$$

$$f_2(t) = b_3 \sin \omega_0 t \rightarrow x_2(t)$$

Principio: qualunque funzione periodica va scomposta con Fourier; ogni sistema lineare caratterizzato da un ingresso formerà un'uscita; si esegue la somma delle funzioni ottenute



$$A = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \text{Suppongo inoltre che } \zeta = 0$$

- Quando  $\Omega = \omega_n \Rightarrow r = 1 \Rightarrow$  denominatore nullo  $\Rightarrow$  rapporto tendente ad infinito (condizioni di risonanza)
- Se  $r = 0 \Rightarrow A = f_0/k$
- Se  $\Omega = 0 \Rightarrow$  la frequenza è bassa e pari a 0  $\Rightarrow$  forza costante  $\Rightarrow$  spostamento statico
- Se  $\Omega \rightarrow \infty \Rightarrow A = 0$

In presenza di smorzamento, la fase passa con continuità da 0 a  $-\pi$  annullando il valore  $-\pi/2$  con  $\Omega = \omega_n$  qualunque sia l'entità dello smorzamento, mentre l'ampiezza di oscillazione mostra un massimo finché  $\zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$  per poi annullare un andamento monotono decrescente.

Il partito di forza può ottenere uno spostamento grande o piccolo (se sono vicini alla risonanza o lontani da essa).

Al crescere della frequenza cresce la forza d'inerzia che dipende dal quadrato della frequenza  $\Rightarrow$  dove ottengo a partita di forza uno spostamento precedente è perché ho dissipato la maggior parte della forza come forza d'inerzia.

Calcolo dell'ampiezza massima

$$\ddot{x} = -\Omega^2 x e^{i\Omega t}$$

Per trovare l'ampiezza massima derivo l'espressione di A rispetto a r e uguaglio a zero. Tuttavia siccome il numeratore è una costante è sufficiente disporre che l'argomento della radice sia = 0

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \cancel{f} (1-r^2) (-\cancel{f} r) + \cancel{f} (2\zeta r) (\cancel{f} \zeta) = 0$$

$$r^2 - 1 + 2\zeta^2 = 0$$

$$r^2 = 1 - 2\zeta^2$$

$$\frac{\Omega^2}{\omega_n^2} = 1 - 2\zeta^2 \quad \Omega^2 = \omega_n^2 (1 - 2\zeta^2) \Rightarrow \Omega_{\text{risonanza}} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

La frequenza di risonanza è il valore di  $\Omega$  per cui A raggiunge il picco

$\Omega_{\text{risonanza}}$  vale finché  $\zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$  non può essere immaginaria.

L'ampiezza di risonanza si ha per un valore poco più piccolo della  $\omega_n$

$$A_{\text{risonanza}} = \frac{f_0/k}{\sqrt{(1-(1-2\zeta^2))^2 + 4\zeta(1-2\zeta^2)}} = \frac{f_0/k}{\sqrt{4\zeta^4 + 4\zeta^2 - 8\zeta^4}} = \frac{f_0/k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

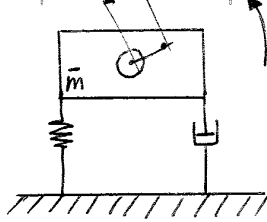
Da questa espressione emerge come l'ampiezza sia funzione dello smorzamento.

Se  $\zeta = 1 \Rightarrow$  la soluzione non è ammissibile perché deve essere rispettata la precedente condizione che imponeva  $\zeta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Nella progettazione si cerca di avere grandi smorzamenti perché con danno originale, in condizioni di risonanza, a piccoli di ampiezze minori.

Dal diagramma precedente si nota come al crescere di  $\Omega$  cresca la fase e al diminuire di  $\Omega$  diminuisca la fase

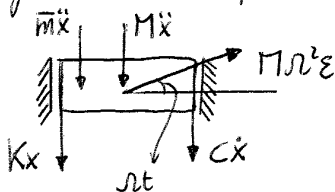
Esempio:  $\varepsilon$  lo squilibrio



$x, \dot{x}, \ddot{x}$  (Lo spostamento viene calcolato a partire dalla posizione di equilibrio statico)

Suppongo che il mio oggetto di massa  $\bar{m}$  contenga un motore elettrico non ben equilibrato, avente il baricentro delle masse rotanti spostato e non coincidente con l'asse di rotazione

Diagramma di corpo libero



Il moto della massa è dato dalla somma di 3 forze:

- $M \ddot{x}$  = traslazione
- $M R^2 \varepsilon$  = moto relativo
- $2 \omega \times v_R$  = Coriolis

L'accelerazione di Coriolis è nulla poiché il moto della massa è una traslazione verticale.

Scrivo l'equilibrio verticale della massa

$$\downarrow \quad \bar{m}\ddot{x} + M\ddot{x} + Kx + c\dot{x} - MR^2\varepsilon \sin \Omega t = 0 \quad \text{Chiamo } m = \bar{m} + M$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = MR^2\varepsilon \sin \Omega t \rightarrow \text{forzante con andamento armonico di ampiezza } MR^2\varepsilon$$

$$\Rightarrow f_0 = MR^2\varepsilon = \text{costante nel tempo per dipendendo del valore di } \Omega \text{ che è variabile}$$

$$f(t) = f_0 e^{i\Omega t}$$

$$x(t) = X e^{i\Omega t}$$

$$X = \frac{M\varepsilon R^2}{K - m\Omega^2 + i\Omega c}$$

Studio cosa succede alla forza trasmessa a terra

$$f_v(t) = Kx + c\dot{x} = \text{reazione vincolare verticale}$$

TRASMISSIBILITA' =  $\frac{Y(\Omega)}{Y_{RIF}(\Omega)}$  = rapporto tra una grandezza e il suo valore di riferimento.  $\varepsilon_{ref}$  è una variabile complessa dotata di modulo e fase

La trasmissibilità viene definita scritta rispetto ad un valore in ingresso. Per il mio sistema scrivo la trasmissibilità in funzione della frequenza propria del sistema poiché so che essa rimarrà costante. Anche la  $\Omega$  una volta fissato un valore rimarrà costante ma potrà variare (ammettere valori diversi)

$$T(\Omega) = \frac{Kx + c\dot{x}}{M\varepsilon \omega_n^2 e^{i\Omega t}} \quad (\text{forza di ampiezza costante})$$

$$x = X e^{i\Omega t} \quad \dot{x} = i\Omega X e^{i\Omega t} \Rightarrow \text{sostituisco nell'equazione della trasmissibilità}$$

L'impulso può anche essere definito come  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t) = \delta(t)$   
 $\epsilon \rightarrow 0$   
 $f \rightarrow \infty$

Si calcola ora la risposta all'impulso di un sistema massa-molla-smorzatore. Suppongo che inizialmente il sistema sia a riposo.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = \delta(t)$$

Se considero l'impulso come una martellata e il sistema inizialmente a riposo posso scrivere che:

$$\begin{cases} x(t=0^-) = 0 \\ \dot{x}(t=0^-) = 0 \end{cases}$$

Inoltre so che se  $t > \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$  perché l'impulso ha cessato la sua azione.  $x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)$  con  $a$  e  $b$  in funzione delle condizioni iniziali.

Considero il problema tra  $-\frac{\epsilon}{2} < t < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow$  quando agisce l'impulso  $\Rightarrow$  quando vale  $m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f_0$ .

1<sup>a</sup> INTEGRAZIONE TRA  $-\frac{\epsilon}{2}$  E UN GENERICO ISTANTE  $\tau$

$$\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} (m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f_0) dt = m \left[ \dot{x}(\tau) - \dot{x}\left(-\frac{\epsilon}{2}\right) \right] + c \left[ x(\tau) - x\left(-\frac{\epsilon}{2}\right) \right] + K \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} x(t) dt = f_0 \left( \tau + \frac{\epsilon}{2} \right)$$

$$\text{In } -\frac{\epsilon}{2} \Rightarrow t=0^- \Rightarrow \dot{x}=0, x=0$$

2<sup>a</sup> INTEGRAZIONE TRA  $-\frac{\epsilon}{2}$  E  $\frac{\epsilon}{2}$  IN  $d\tau$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ f \rightarrow \infty}} \left[ \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} m\dot{x}(\tau) + c x(\tau) + K \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} x(t) dt = f_0 \left( \tau + \frac{\epsilon}{2} \right) d\tau \right]$$

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ f \rightarrow \infty}} \left[ m \left[ x\left(\frac{\epsilon}{2}\right) - x\left(-\frac{\epsilon}{2}\right) \right] + c \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} x(\tau) d\tau + K \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \left( \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} x(t) dt \right) d\tau = f_0 \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \left( \tau + \frac{\epsilon}{2} \right) d\tau \right]$$

Se integro una funzione limitata nel tempo su un intervallo tendente a zero  $\Rightarrow$  l'area sarà 0 indipendentemente dall'andamento della funzione.

Se come il secondo membro dell'equazione rientra in questo caso  $\Rightarrow$  esso sarà nullo.

$$f_0 \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \left( \tau + \frac{\epsilon}{2} \right) d\tau = 0$$

Se come il secondo membro è nullo  $\Rightarrow$  anche il primo dovrà essere tale.

Se come la funzione  $x(\tau)$  è limitata  $\Rightarrow$  il suo integrale su un tempo infinitamente piccolo sarà nullo.

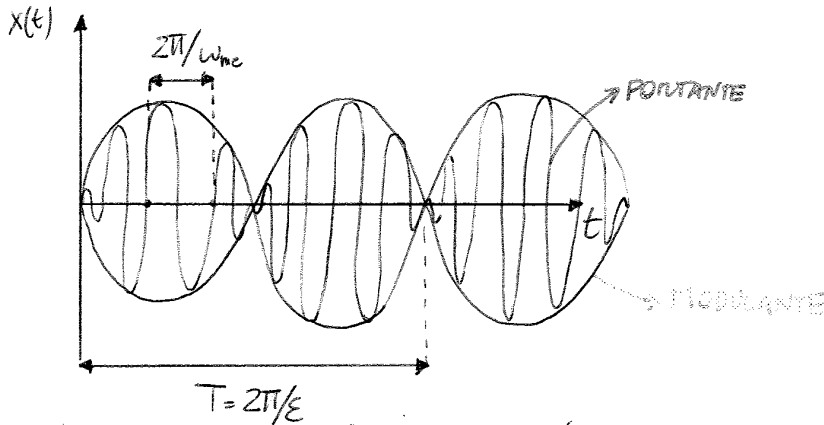
$$c \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} x(\tau) d\tau = 0, \quad K \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \left( \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\tau} x(t) dt \right) d\tau = 0$$

DALLE 2 INTEGRAZIONI SI RICAVALI QUINDI CHE  $m\dot{x}(0^+) = 0 \Rightarrow \dot{x}(0^+) = 0$

$\Rightarrow$  quando l'impulso termina la sua azione la massa non si è spostata.

Per il calcolo della velocità è sufficiente integrare l'equazione una volta sola.





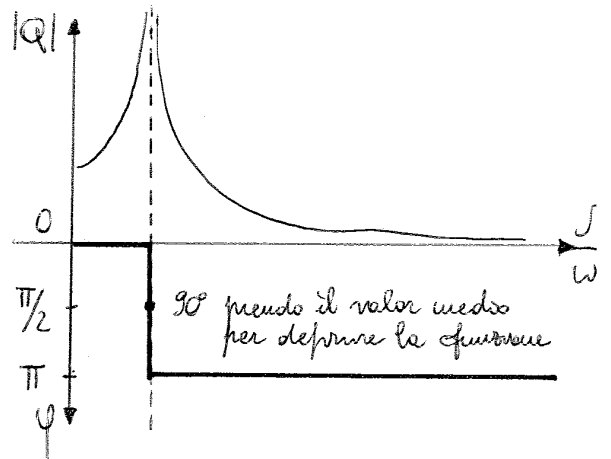
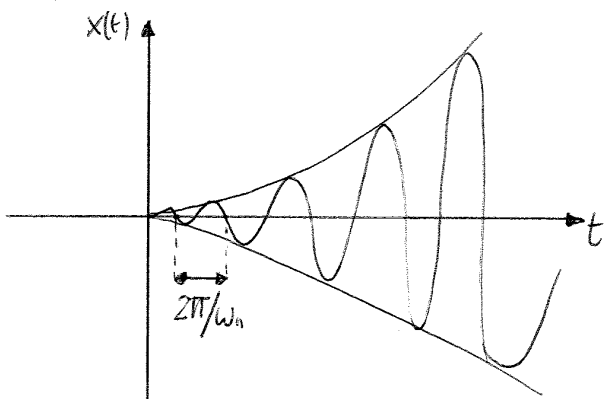
**BATTIMENTO:** fenomeno (acustico) ottenuto quando il segnale contiene 2 componenti armoniche a frequenza prossima e con ampiezza paragonabile che si sommano.

Nel caso in cui  $R = \omega_n$  il sistema va in risonanza e l'equazione  $x(t) = \frac{f_0}{K - mR^2} (\cos Rt - \cos \omega_n t)$  risulta essere indefinita  $\Rightarrow$  uso la regola di De l'Hopital e calcolo la derivata a numeratore e denominatore rispetto a  $R$

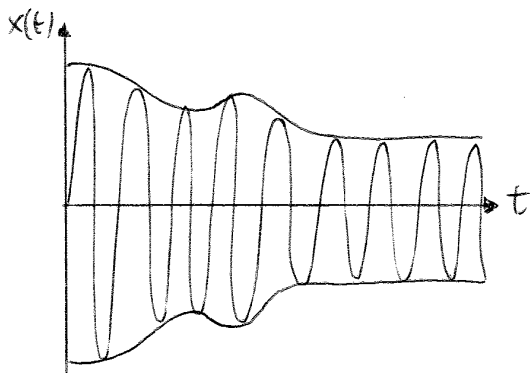
$$\lim_{R \rightarrow \omega_n} \frac{f_0}{K - mR^2} (\cos Rt - \cos \omega_n t) = f_0 \lim_{R \rightarrow \omega_n} \frac{\partial (\cos Rt - \cos \omega_n t) / \partial R}{\partial (K - mR^2) / \partial R} = f_0 \lim_{R \rightarrow \omega_n} \frac{-t \sin Rt}{-2mR} = f_0 \lim_{R \rightarrow \omega_n} \frac{-t \sin \omega_n t}{-2m\omega_n}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_n} t \sin(\omega_n t)$$

L'equazione definisce un'oscillazione alla pulsazione  $\omega_n$  con ampiezza crescente linearmente nel tempo; il sistema in risonanza tende ad assumere un'ampiezza di oscillazione infinita in un tempo infinito  $\Rightarrow$  il sistema dovrebbe incontro a rottura



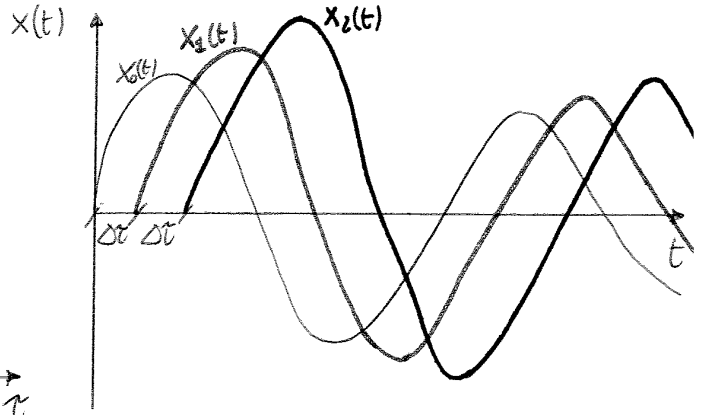
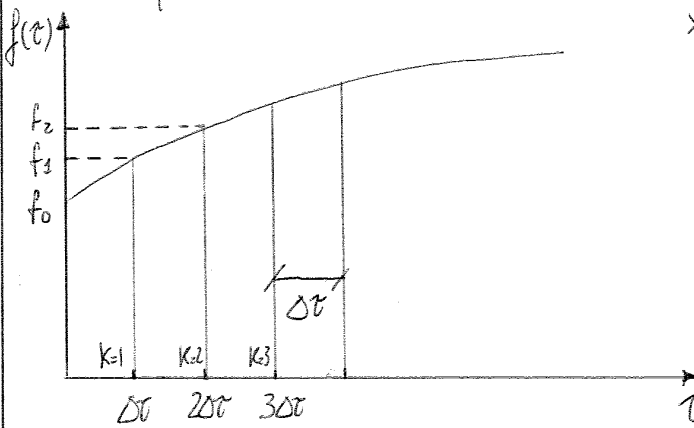
Esempio di grafico sul battimento



Funzione di risposta all'impulso

Considerando la funzione impulso, si erano trovati i seguenti valori per le variabili posizione e velocità:

espressa da  $x(t) = \int_0^t \Delta \tau h(t-\Delta \tau)$  con  $h(t-\Delta \tau) =$  valore che la risposta all'impulso assume quando è trascorso un tempo  $t - \Delta \tau$  dall'istante di applicazione.



$$I_0 = f_0 \Delta \tau \quad X_0(t) = I_0 h(t)$$

$$I_1 = f_1 \Delta \tau \quad X_1(t) = I_1 h(t - \Delta \tau)$$

$$I_2 = f_2 \Delta \tau \quad X_2(t) = I_2 h(t - 2\Delta \tau)$$

La risposta globale del sistema sarà la somma delle singole risposte date da ogni impulso

$$X(t) = X_0 + X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=0}^N I_k h(t - k\Delta \tau) = \sum_{k=0}^N f_k \Delta \tau h(t - k\Delta \tau)$$

Passando al limite si ha

$$\Delta \tau \rightarrow d\tau$$

$$k\Delta \tau \rightarrow \tau \Rightarrow \text{LA SOMMA SI TRASFORMA NELL'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE} \quad X(t) = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$N \rightarrow \infty$$

L'integrale di convoluzione consente di calcolare la risposta del sistema in qualunque istante di tempo  $t$  purché siano note le condizioni iniziali e sia nota la risposta all'impulso.

Se le condizioni iniziali non fossero note sarebbe sufficiente aggiungere all'espressione dell'integrale di convoluzione quella di risposta libera.

$$X(t=0) = X_0$$

$$\dot{X}(t=0) = V_0$$

Supponendo il sistema sottosmorzato con  $\zeta < 1$  si ha:

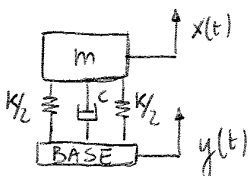
$$X(t) = \underbrace{\int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau}_{\text{REGIME}} + \underbrace{e^{-\zeta \omega_n t} (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)}_{\text{TRANSITORIO}}$$

Applico le condizioni iniziali e ottengo per  $t=0 \Rightarrow$  l'integrale vale 0

$$\Rightarrow X(0) = a$$

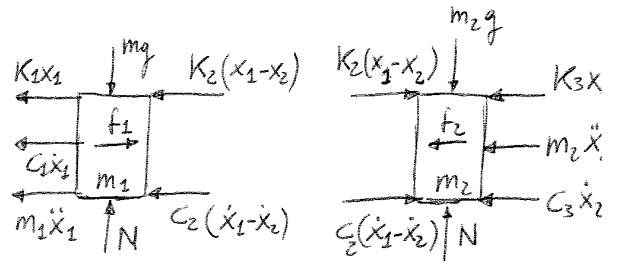
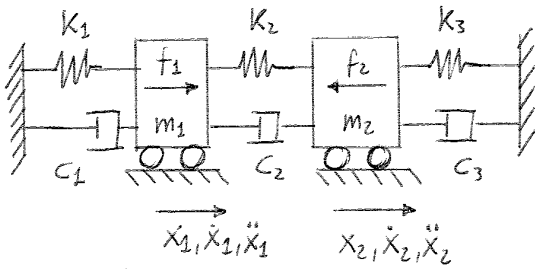
$$\begin{cases} a = X_0 \\ b = \frac{V_0 + \zeta \omega_n X_0}{\omega_d} \end{cases}$$

### Accelerometro e sismografo



La massa  $m$  è puntiforme ed è collegata attraverso una sospensione di rigidezza  $K$  e  $c$  ad un telaio mobile. La base è animata di moto armonico e il suo spostamento viene indicato come  $y(t)$  rispetto ad un sistema di riferimento inerziale

## Sistemi a molti gradi di libertà



Scrivo ora le equazioni del moto per le 2 masse

$$\leftarrow m_1 \ddot{x}_1 + C_1 \dot{x}_1 + C_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_1 x_1 + K_2 (x_1 - x_2) - f_1 = 0$$

$$\leftarrow m_2 \ddot{x}_2 + C_3 \dot{x}_2 - C_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + K_3 x_2 - K_2 (x_1 - x_2) + f_2 = 0$$

Le equazioni si dicono accoppiate poiché in esse vi sono entrambe le incognite  $\Rightarrow$  non possono essere risolte l'una indipendentemente dall'altra

Riscrivo le equazioni nel seguente modo

$$m_1 \ddot{x}_1 + (C_1 + C_2) \dot{x}_1 - C_2 \dot{x}_2 + (K_1 + K_2) x_1 - K_2 x_2 = f_1(t)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - C_2 \dot{x}_1 + (C_2 + C_3) \dot{x}_2 - K_2 x_1 + (K_2 + K_3) x_2 = -f_2(t)$$

Scrivo ora le equazioni in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 + C_2 & -C_2 \\ -C_2 & C_2 + C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ -f_2 \end{Bmatrix}$$

MATRICE  
DELLE  
MASSE

MATRICE  
DEGLI  
SMORZAMENTI

MATRICE  
DELLE  
RIGIDENZE

$$\{x(t)\} = \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

L'equazione che descrive il sistema può essere scritta come

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f(t)\}$$

Come emerge le matrici delle rigidezze e degli smorzamenti non sono diagonali; se queste fossero diagonali  $\Rightarrow$  le due equazioni sarebbero disaccoppiate.

Si conclude che l'unico modo di risolvere il sistema è per via numerica.

Una condizione sempre valida è che  $[m]$ ,  $[c]$ ,  $[k]$  siano sempre simmetriche reali, quadrate e definite positive  $\Rightarrow$  vale  $[m] = [m]^T$ ,  $[c] = [c]^T$ ,  $[k] = [k]^T$

La dimensione delle matrici dipende da  $n$  ovvero il numero di GDL del sistema

Una matrice è definita positiva se moltiplicata per un vettore trasposto e postulato, moltiplicata per lo stesso vettore un fornisce uno scalare  $> 0$ . Se la matrice è semi-definita positiva lo scalare che otterrò sarà  $\geq 0$

$$\{v\}^T [m] \{v\} > 0$$

$1 \times n \quad n \times n \quad n \times 1$

$$\{v\}^T [c] \{v\} \geq 0$$

$$\{v\}^T [k] \{v\} \geq 0$$

Le matrici semidefinite positive mi permettono di risolvere sistemi di questo tipo  $\begin{bmatrix} m_1 & -m_1 \\ -m_1 & m_2 \end{bmatrix}$  in cui una traslazione rigida, non causando alcuna deformazione elastica, non determina alcuna variazione di energia potenziale elastica.

Disaccoppiamento equazioni

$\bar{m}$  e  $\bar{K}$  sono gli scalari che ho ottenuto dai diversi prodotti. Si può inoltre aggiungere che!

$\bar{m}$  sicuramente sarà  $> 0$

$\bar{K}$  sicuramente sarà  $\geq 0$

$$\bar{m}\ddot{q} + \bar{K}q = 0 \Rightarrow \ddot{q}/q = \underbrace{-\frac{\bar{K}}{\bar{m}}}_{\substack{\text{rapporto} \\ \text{positivo}}} = -\omega^2$$

$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \Rightarrow$  è l'equazione di un sistema massa-molla che oscilla come un'armonica

$q(t) = q_0 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow$  soluzione sinusoidale

$$\{x(t)\} = \{A\} q_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Derivando due volte la precedente equazione ottengo:

$$\{\ddot{x}(t)\} = \{A\} q_0 \sin(\omega t + \varphi) \omega^2$$

$$[m]\{A\} q_0 (-\omega^2) \sin(\omega t + \varphi) + [K]\{A\} q_0 \sin(\omega t + \varphi) = \{0\}$$

**NON CAMBIARE MAI L'ORDINE DI MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI E VETTORI**

$$([K] - \omega^2 [m]) \{A\} q_0 \sin(\omega t + \varphi) = \{0\}$$

Cerco le soluzioni dell'equazione; due di esse saranno le soluzioni banali  $\Rightarrow$

$$\{A\} = 0, q_0 = 0$$

Possò quindi chiamare  $B$  il vettore nullo  $\{B\} = \{0\}$

La soluzione deve valere in ogni istante di tempo  $\Rightarrow \sin(\omega t + \varphi) = 0$

$$([K] - \omega^2 [m]) \{A\} = \{0\} \quad (\text{equazione 1})$$

La soluzione richiede che  $\det([K] - \omega^2 [m]) = 0$  per evitare la soluzione banale. L'equazione rappresenta un autovalore associato all'equazione differenziale che descrive il moto delle masse; il sistema viene studiato senza movimento, o meglio senza forzanti esterne.

$$\det \begin{pmatrix} K_1 + K_2 - m_1 \omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$$

ottengo l'equazione caratteristica della quale ne devo trovare gli zeri.

Si ottiene un polinomio caratteristico del tipo  $a_0 + a_1 \omega^2 + a_2 \omega^4 + \dots + a_n \omega^{2n} = 0$ . Ponendo il polinomio  $= 0$  esso mi fornisce l'equazione caratteristica.

Le soluzioni dell'equazione sono  $n, \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$  e vengono chiamate autovalori. Esse sono tutte  $\geq 0$ .

Sostituendo gli autovalori nell'equazione 1 ottengo gli autovettori

$$([K] - \omega_r^2 [m]) \{A\} = \{0\}$$

$\omega_r^2 \Rightarrow \{\Psi_r\} \rightarrow$  autovettore ottenuto risolvendo il sistema lineare di equazioni.

Il numero di GDL dipende dagli elementi in cui scompongo la trave (oneri dalle singole masse).

Costruisco una matrice avente per colonne i vettori autovevori

$$[\Psi] = [\{\Psi_1\}, \{\Psi_2\}, \dots, \{\Psi_n\}] = \text{MATRICE MODALE}$$

Per risolvere l'autoproblema ho bisogno di un'altra matrice (la matrice degli autovalori), diagonale e definita reale

$$[\Lambda] = \text{diag}(\omega_r^2) = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \omega_n^2 & \end{bmatrix}$$

La soluzione completa dell'equazione del moto è costituita dalla somma dei diversi contributi modali:

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^n A_r \cos(\omega_r t + \theta_r) \{\Psi_r\}$$

Se, dato un sistema con 2 masse e una molla, risolvo l'autoproblema scopro che  $\omega_1^2 = 0 \Rightarrow$  si deduce che le due masse possono traslare senza oscillare  $\Rightarrow$  si può avere un moto rigido traslando nella stessa direzione  $\Rightarrow$  è ammessa che il primo autovalore sia nullo.

### Ortogonalità dei modi propri

Alle caratteristiche delle matrici  $[m]$  e  $[k]$  sono legate alcune proprietà degli autovalori e autovevori: infatti la realtà e la simmetria delle matrici implica che gli autovalori e gli autovevori siano reali, mentre dal fatto che esse siano definite positive deriva la positività degli autovalori. Gli autovevori sono inoltre ortogonali rispetto alle matrici di massa e rigidezza pur non essendo tra loro.

Considero la seguente identità:

$$[k] \{\Psi_r\} = \omega_r^2 [m] \{\Psi_r\}$$

Scorro la stessa cosa per un altro tipo di moto (s)

$$[k] \{\Psi_s\} = \omega_s^2 [m] \{\Psi_s\}$$

Considerando le due equazioni posso scrivere il seguente sistema in cui prendo triplice la prima delle equazioni per  $\{\Psi_s\}^T$  e la seconda per  $\{\Psi_r\}^T$ .

$$\{\Psi_s\}^T [k] \{\Psi_r\} = \omega_r^2 \{\Psi_s\}^T [m] \{\Psi_r\}$$

$$\{\Psi_r\}^T [k] \{\Psi_s\} = \omega_s^2 \{\Psi_r\}^T [m] \{\Psi_s\}$$

Ciascuna delle equazioni rappresenta una relazione scalare; trasponendo la seconda si ottiene

$$\omega_s^2 \{\Psi_s\}^T [m]^T \{\Psi_r\} = \{\Psi_s\}^T [k]^T \{\Psi_r\}$$

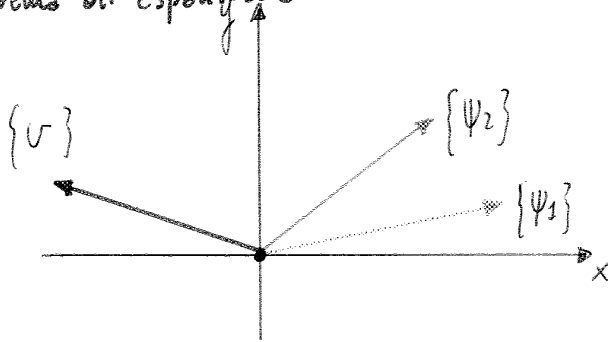
Sapendo poi che le matrici di massa e rigidezza sono simmetriche  $\Rightarrow$

$$[m]^T = [m] \quad \text{e} \quad [k]^T = [k]$$

$$[\Psi]^T [K] [\Psi] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & K_n \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} = \text{MATRICE DELLE RIGIDITÀE MODALI} = \text{diag}(K_r)$$

Ho ottenuto due matrici di massa e rigidezza che sono diagonali  
 Gli autovettori sono linearmente indipendenti

Teorema di espansione



Possiamo sommare 2 vettori paralleli per ottenere 0. Se questo non sono paralleli l'unico modo per avere una somma = 0 è avere tutte le costanti = 0

$$C_1 \{\Psi_1\} + C_2 \{\Psi_2\} + \dots + C_n \{\Psi_n\} = \{0\}$$

$$C_1 \{\Psi_r\}^T [m] \{\Psi_1\} + C_2 \{\Psi_r\}^T [m] \{\Psi_2\} + \dots + C_n \{\Psi_r\}^T [m] \{\Psi_n\} = \{\Psi_r\}^T [m] \{c\}$$

$$\Rightarrow C_r m_r = 0 \Rightarrow C_r = 0 \text{ con } r = 1, 2, \dots, n$$

Possiamo quindi scrivere un vettore come una combinazione lineare degli autovettori

$$\{u\} = \sum_{r=1}^n C_r \{\Psi_r\} \Rightarrow [m] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{0\}$$

$$\{x(t)\} = \{A\} \sin(\omega t + \varphi)$$

costante di moltiplicazione

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^n C_r \{\Psi_r\} \sin(\omega_r t + \varphi_r)$$

Da quest'ultima relazione si deduce che qualunque soluzione  $x$  può essere scritta come una combinazione lineare di autovettori, ciascuno associato ad una certa pulsazione naturale.

Riassunto problema agli autovalori e sua risoluzione

$$[m] \{\ddot{x}\} + [k] \{x\} = \{0\}$$

$$([k] - \omega^2 [m]) \{A\} = \{0\} \text{ EVP}$$

$$\omega_r^2, \{\Psi_r\} \text{ con } r = 1, 2, \dots, n$$

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] = \text{diag}(m_r)$$

$$[\Psi]^T [k] [\Psi] = \text{diag}(K_r)$$

$$\{\Psi_r\} = \begin{Bmatrix} \Psi_{1r} \\ \Psi_{2r} \\ \vdots \\ \Psi_{nr} \end{Bmatrix} \text{ con } 1^\circ \text{ pedice} = \text{costante} \text{ e } 2^\circ \text{ pedice} = \text{autovettore}$$

### La trasformazione modale

Grazie alla trasformazione modale è possibile risolvere il problema cogli autovettori braccopiando le equazioni del moto. In seguito un sistema vibrante non smorzato e non forzato si effettua l'analisi modale calcolando le matrici  $[\Psi]$ ,  $\text{diag}(m_r)$  e  $\text{diag}(K_r)$  e si applica la trasformazione modale diretta. Questa infatti permette di scrivere qualunque soluzione  $x(t)$  come combinazione lineare dei vari autovettori.

TRASFORMAZIONE MODALE DIRETTA:  $\{x(t)\} = [\Psi] \{\eta(t)\} =$

$$\{x(t)\} = \sum_{r=1}^n \{\psi_r\} \eta_r(t) =$$

$\nearrow$  costanti  $\in \mathbb{R}^{n \times 1}$       $n \times n$       $n \times 1$   
 $\searrow$  coefficiente che dà il peso da assegnare al singolo autovettore. Esso varia nel tempo poiché il valore dell'autovettore varia nel tempo

$$\{\eta(t)\}^T = [\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)]$$

dove  $\{\eta(t)\}$  è il vettore delle coordinate modali.

La trasformazione modale ci permette di passare alle coordinate reali  $x$  alle coordinate fittizie  $\eta$  (anche denominate coordinate modali).

Risolvere il problema riscrivendo al posto di  $x$  la variabile  $\eta$

$$[m][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [k][\Psi]\{\eta\} = \{0\}$$

Sfrutto il principio di ortogonalità moltiplicando per  $[\Psi]^T$

$$[\Psi]^T[m][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [\Psi]^T[c][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [\Psi]^T[k][\Psi]\{\eta\} = [\Psi]^T\{0\}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}\} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_n \end{bmatrix} \{\dot{\eta}\} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \{\eta\} = \{0\}$$

Moltiplicando per la  $r$ -esima riga per il vettore  $\eta$  ottengo

$$m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = 0 \quad \text{con } r=1, 2, \dots, n$$

Penso quindi ad un sistema avente  $n$  equazioni differenziali lineari di ordine 2. La soluzione dell'equazione è:

$$\eta_r(t) = e^{-z_r \omega_r t} (a_r \cos \omega_d t + b_r \sin \omega_d t) \quad \text{valida per sistema smorzato.}$$

$$z_r = \frac{c_r}{2m_r \omega_r} = \frac{c_r}{2\sqrt{k_r m_r}} = \text{FATTORE DI SMORZAMENTO MODALE}$$

↳ relativo all' $r$ -esimo grado di libertà.

$$\omega_d r = \omega_r \sqrt{1 - z_r^2} = \text{PULSAZIONE DEL SISTEMA SMORZATO}$$

L'uso delle coordinate modali è temporaneo perché alla fine devo ricadere alle  $x$  attraverso la trasformazione modale

$a_r, b_r$  dipendono dalle condizioni iniziali

Considero l'equazione

$$m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = 0$$

1) Determinazione di  $\{x(t)\}$  utilizzando la trasformazione modale

$$\{x(t)\}_{n \times 1} = \sum_{r=1}^n \{\Psi_r\} \eta_r(t) = [\Psi] \{\eta(t)\} \quad (\text{TRASFORMAZIONE MODALE})$$

l'equazione che descrive il uno sistema è:  $[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$   
 e determinazione di  $\{x(t)\}$  è funzione di tutte le diverse forze contenute in  $\{f(t)\}$   
 risolvere il problema passo alle coordinate ektorove:

$$[m] \sum_r \{\Psi_r\} \ddot{\eta}_r + [c] \sum_r \{\Psi_r\} \dot{\eta}_r + [k] \sum_r \{\Psi_r\} \eta_r = \{f(t)\}$$

sfruttando l'ortogonalità moltiplico 1° e 2° membro per  $\{\Psi_s\}^T$  e ottengo:

$$\{\Psi_s\}^T [m] \sum_r \{\Psi_r\} \ddot{\eta}_r + \{\Psi_s\}^T [c] \sum_r \{\Psi_r\} \dot{\eta}_r + \{\Psi_s\}^T [k] \sum_r \{\Psi_r\} \eta_r = \{\Psi_s\}^T \{f(t)\}$$

come  $\{\Psi_s\}^T \{\Psi_r\}$  sono tra loro ortogonali  $\Rightarrow$  tutti i prodotti saranno nulli fuori  $r \neq s$ . Solo quando  $r = s$  il prodotto sarà  $\neq 0$

$$\{\Psi_s\}^T [m] \sum_r \{\Psi_r\} \ddot{\eta}_r = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ m_r & \text{se } r = s \end{cases}$$

$$\{\Psi_s\}^T [c] \sum_r \{\Psi_r\} \dot{\eta}_r = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ c_r & \text{se } r = s \end{cases}$$

$$\{\Psi_s\}^T [k] \sum_r \{\Psi_r\} \eta_r = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ k_r & \text{se } r = s \end{cases}$$

prodotto nullo  
per colonne  $\Rightarrow$   
mi fornisce  
uno scalare

$$\Rightarrow m_r \ddot{\eta}_r + c_r \dot{\eta}_r + k_r \eta_r = \{\Psi_s\}^T \{f(t)\} = p_r(t)$$

$p_r$  rappresenta la  
forza esterna ed  
è il vettore delle forze  
dipendenti da  $r$  con  
 $r = 1, 2, \dots, n$

2) FINISCO  $p_r(t)$  LA FORZA MODALE

3) so scrivere la soluzione mediante l'integrale di convoluzione come:

$$\eta_r(t) = \int_0^t p_r(\tau) h_r(t-\tau) d\tau$$

$$\text{se } \zeta_r < 1 \Rightarrow h_r(t) = \frac{1}{m_r \omega_d r} e^{-\zeta_r \omega_n t} \sin \omega_d t \rightarrow \text{risposta per sistema sottosmorzato}$$

$$\text{con } \omega_d r = \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}, \quad \omega_r = \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}, \quad \zeta_r = \frac{c_r}{2 m_r \omega_r} = \frac{\alpha m_r + \beta k_r}{2 m_r \omega_r} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\omega_r} + \frac{1}{2} \beta \omega_r$$

4) calcolo può essere riassunto in 4 passaggi:

- 1) Calcolo degli autovettori
- 2) Ottengo la risposta all'impulso
- 3) Integro e ottengo gli spostamenti in coordinate modali
- 4) Riosstituisco nell'equazione e cerco  $\{x(t)\}$

5) Sidero ora che la forza agente nel uno sistema sia del tipo armonico

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F_0\} e^{i \omega t}$$

tutte le forze contenute in  $\{F_0\}$  hanno la stessa frequenza; tuttavia esse possono  
 avere fase diversa o essere in opposizione di fase. Un tempo ci si diceva che



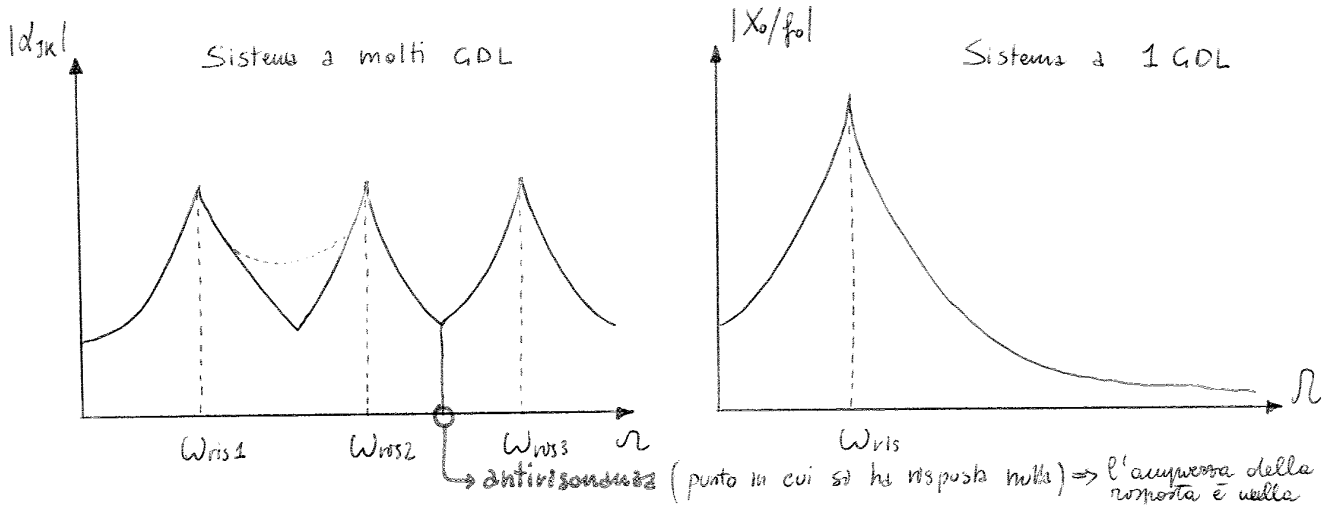
Invece di calcolare per ogni  $\Omega$  l'inversa di una matrice si può determinare uno qualunque degli elementi della matrice eseguendo semplicemente la moltiplicazione. Per ogni frequenza posso scrivere la receptanza.

**LA FORMULA PRECEDENTE VALE SOLO PER FORZANTI ARMONICHE**

Considerando la sommatoria posso dire che per  $r=1 \Rightarrow H_1(\Omega) = \frac{\Psi_{J1} \Psi_{K1}}{K_1 - m_1 \Omega^2 + i \Omega c_1}$

L'analogia esprime per un sistema a 1 GDL vale  $\frac{X_0}{f_0} = \frac{1}{K - m \Omega^2 + i \Omega c}$

Si nota che le due espressioni coincidono. Per  $r=2$  la struttura sarebbe la stessa la receptanza è combinazione di tante receptanze di sistemi a 1 GDL. La somma delle risposte dei sistemi a 1 GDL viene pesata dal coefficiente  $\Psi$  (positivo o negativo)



Il comportamento del sistema viene ottenuto ripetendo  $n$  volte il grafico del sistema a 1 GDL con  $n = \text{GDL del sistema}$ . Il sistema a più GDL avrà  $n$  pulsazioni di risonanza.

Se lo smorzamento introdotto è piccolo la pulsazione naturale è molto vicina a quella di risonanza. All'aumentare dello smorzamento l'ampiezza della risposta si riduce e il picco si sposta verso sinistra  $\Rightarrow$  vengono prodotti effetti gerganteschi nell'ampiezza della risposta.

**LA PRESENZA DI UNA FORZA AGENTE SU UN SOLO ELEMENTO DEL SISTEMA PROVOCA UN CAMBIAMENTO SU TUTTO IL SISTEMA**

$$[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{f(t)\}$$

Considero ora la risposta a regime più quella del transitorio

$$\eta_r(t) = \int_0^t p_r(\tau) h_r(t-\tau) d\tau + e^{-\zeta_r \omega_d t} (a_r \cos \omega_d t + b_r \sin \omega_d t)$$

Impugnando le condizioni iniziali posso aggiungere alla risposta a regime del sistema quella al transitorio

$$\begin{cases} \{x(t=0)\} = x_0 \\ \{\dot{x}(t=0)\} = v_0 \end{cases}$$

**TERMINE PARTE DI SOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI**

$$\boxed{dW} = m \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} dt = m \frac{d}{dt} r \cdot \dot{r} dt = m \dot{r} dr = \frac{1}{2} m d(\dot{r} \cdot \dot{r}) =$$

$$= d\left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v}\right) = d\left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2\right) = \boxed{dT} \rightarrow \text{variazione di energia cinetica}$$

$$d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\dot{r} \cdot \dot{r} + \dot{r} \cdot d\dot{r} = 2\dot{r} \cdot d\dot{r}$$

$$dW = dT$$

Dato un sistema di forze avente risultante  $F$ , il lavoro compiuto dalla forza è pari alla sua variazione di energia cinetica (funzione di massa e velocità)

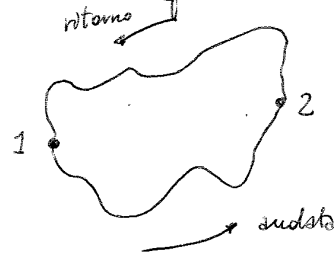
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{T_1}^{T_2} dT = T_2 - T_1 = \Delta T \quad (\text{variazione di energia cinetica})$$

Il lavoro compiuto dalle forze esterne dipende dal percorso scelto per andare dal punto iniziale a quello finale (solo per forze non conservative). Per le forze conservative vale invece:

$$\left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_I = \left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_II \Rightarrow \text{la risultante delle forze è conservativa}$$

$$\left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_I - \left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_II = 0$$

$$\left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_I + \left(\int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_II = 0$$



Una forza si dice conservativa se seguendo due diversi percorsi il lavoro svolto è lo stesso  $\Rightarrow$

$$\oint \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \Delta T = 0 \Rightarrow \text{se il percorso è chiuso l'energia cinetica è conservata}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_{REF}} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_{REF}}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_{REF}} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_{REF}} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = V_1 - V_2 = -\Delta V$$

punto fissato sul percorso

$\Delta V =$  variazione di energia potenziale

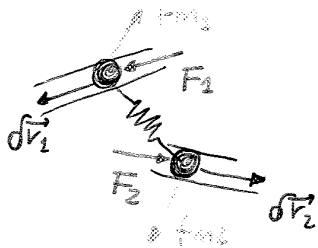
Solo con le forze conservative posso scegliere un punto intermedio lungo il percorso d'integrale di una forza conservativa. Lungo un percorso chiuso è una funzione chiamata energia potenziale.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}$$

$\Delta T$   $-\Delta V$

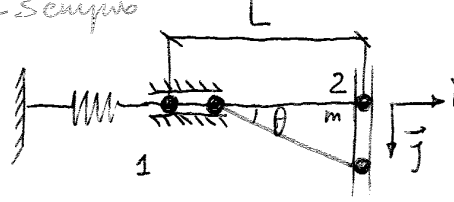
$$\Delta T = -\Delta V + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} = \Delta(T+V) = \boxed{\Delta E} \text{ energia totale}$$

$T+V =$  costante se non ho dissipazioni di energia  $\Rightarrow$  se non ho  $F_{nc}$



In questo esempio sono forze attive  $F_1, F_2, f_{m1}$  e  $f_{m2}$ .  
Le forze esercitate dalle melle sulle masse anche se solentiche in modulo non svolgono lo stesso lavoro virtuale poiché gli spostamenti sono diversi.

Esempio



Il punto 2 è dotato di massa  $m$  ed è collegato al punto 1 mediante un'asta rigida di lunghezza  $L$ .  
Applico il principio dei lavori virtuali per determinare la configurazione assunta dalla trave indeformata.

$F_1 = -K\Delta \vec{i}$  con  $\Delta =$  deformazione della molla  
 $F_2 = mg \vec{j}$   
 $\vec{r}_1 = -L \cos\theta \vec{i}$  = posizione occupata da 1  
 $\vec{r}_2 = L \sin\theta \vec{j}$   
 $\Delta = L - L \cos\theta$   
 $\delta \vec{r}_1 = L \sin\theta d\theta \vec{i}$   
 $\delta \vec{r}_2 = L \cos\theta d\theta \vec{j}$

Scrivo ora il principio dei lavori virtuali

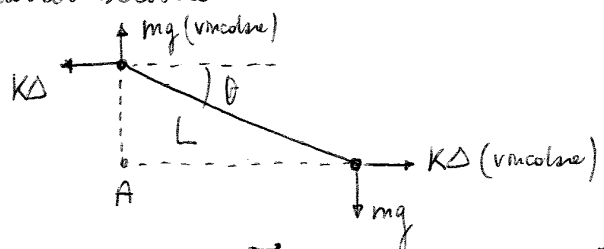
$$-KL(1 - \cos\theta) \cdot L \sin\theta d\theta \vec{i} + mg \vec{j} \cdot L \cos\theta d\theta \vec{j} = 0$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-K\Delta \delta r_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{mg \delta r_2}$

Sapendo che il prodotto scalare dei due vettori unitari  $(\vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1)$  posso scrivere che

$$KL(1 - \cos\theta) \tan\theta = mg$$

Se volevo risolvere il sistema scrivendo l'equilibrio delle forze attorno ad un punto dovrei scrivere



A)  $KL(1 - \cos\theta) \cdot L \sin\theta = mg L \cos\theta$   
 Quando un sistema sta accelerando  
 $\vec{R}_i = m \vec{a}_i = m \ddot{\vec{r}}_i$

Di conseguenza  $\vec{R}_i - m \ddot{\vec{r}}_i = 0 \Rightarrow \vec{R}_i + \vec{F}_i' = 0$   $\vec{R} + \vec{F}' =$  forza effettiva  
 $\hookrightarrow$  forza d'inertza



$$\delta W_{NC} - \delta V - \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N \delta T_i = 0$$

Proviamo il principio dei lavori virtuali:

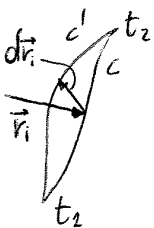
$$\delta T - \delta V + \delta W_{NC} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i)$$

DEFINISCO FUNZIONE LAGRANGIANA  $L = T - V$   $\delta(T - V) = \delta L$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{NC}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i) dt$$

Poiché gli spostamenti sono arbitrari svolgo l'integrale tra due istanti a scelta in cui

$$\delta \vec{r}_i(t = t_1) = 0 \quad \text{e} \quad \delta \vec{r}_i(t = t_2) = 0$$



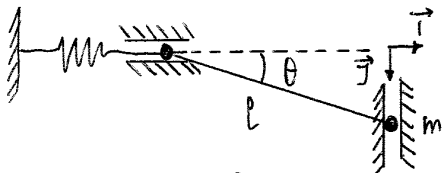
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i) dt = \sum_{i=1}^N (m_i \vec{r}_i \cdot \delta \vec{r}_i) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Sapendo che il secondo termine è nullo si giunge al

$$\text{PRINCIPIO DI HAMILTON} \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta L + \delta W_{NC}) dt = 0$$

Grazie al principio di Hamilton non si deve calcolare il lavoro svolto dalle forze non conservative e il lavoro virtuale delle forze di inerzia che confluisce in  $T$ . La scrittura dell'integrale un'è scritta solo per annullare il 2° membro

Esempio



$$y = l \sin \theta \quad x = l \cos \theta$$

- Suppongo che nel mio sistema agiscano solo forze conservative  $\Rightarrow \delta W_{NC} = 0$
- L'energia cinetica associata alla massa  $m$  sarà  $T = \frac{1}{2} m l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

• L'energia potenziale sarà somma di due contributi: la forza esercitata dalla molla e la forza di gravità

$$V = \frac{1}{2} K (l - l \cos \theta)^2 - m g l \sin \theta$$

Calcolo ora la Lagrangiana

$$\delta T = \frac{1}{2} m l^2 (-\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta \delta \theta + \cos^2 \theta 2 \dot{\theta} \delta \dot{\theta})$$

$$\delta V = \frac{1}{2} K l^2 \cdot 2(1 - \cos \theta) \sin \theta \delta \theta - m g l \cos \theta \delta \theta$$

Il principio di Hamilton siccome non ho forze non conservative vale

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0 \Rightarrow \text{metto insieme i termini in } d\theta \text{ e ottengo}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ -m l^2 \sin \theta \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 - K l^2 (1 - \cos \theta) \sin \theta + m g l \cos \theta \right] d\theta + m l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta} \delta \dot{\theta} dt$$

Si può quindi il lavoro delle forze non conservative come lavoro svolto dalle forze generalizzate negli spostamenti virtuali  $\delta q_k$ . Si può inoltre esprimere  $\vec{r}_i$  come:

$$\vec{r}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Ciascuna coordinata lagrangiana è indipendente dalle altre e dipende solo dal tempo.

Derivo l'ultima espressione rispetto alla velocità lagrangiana ed ottengo

$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \cdot 1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dq_1} + \dots + 0 \Rightarrow \text{otterrò una serie di zeri}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \Rightarrow \text{esprimo le forze generalizzate come } Q_k = \sum_{i=1}^N F_{i,nc} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k}$$

$$Q_k = \sum_{i=1}^N F_{i,nc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{i=1}^N F_{i,nc} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \delta L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) + \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \right] dt = 0$$

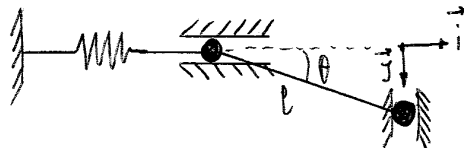
Prevedo appunto l'integrale = 0  $\Rightarrow$  deve essere verificata l'espressione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad \text{con } k=1, \dots, n$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$

Ma ciò permette di determinare il moto del sistema una volta note energia cinetica, energia potenziale, forze attive.

Esempio



$$\Delta = l - l \cos \theta$$

$$y_B = l \sin \theta \quad \dot{y}_B = l \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\theta = q_1$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}_B^2 = \frac{1}{2} m l^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2$$

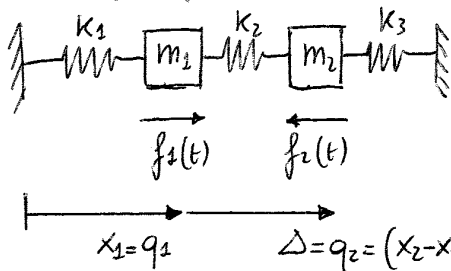
$$V = \frac{1}{2} K \Delta^2 = \frac{1}{2} K l^2 (1 - \cos \theta)^2 - m g l \sin \theta$$

Impulso  $Q_k = 0$  perché sono nulle le  $F_i$ ; utilizzo l'equazione di Lagrange

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \boxed{\frac{1}{2} m l^2 \cos^2 \theta \cdot 2 \dot{\theta}}$$

Il contributo dell'energia potenziale è nullo perché la derivata è rispetto a  $\theta$

Esempio (esercizio esame)



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1 + \dot{\Delta})^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_1 + \Delta)^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} c_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} c_2 \dot{\Delta}^2 + \frac{1}{2} c_3 (\dot{x}_1 + \dot{\Delta})^2$$

VALIDA IN PRESENZA DI SPALMATORI

$$Q_1 = f_1 \vec{i} \frac{\partial x_1 \vec{i}}{\partial q_1} - f_2 \vec{i} \frac{\partial (x_1 + \Delta) \vec{i}}{\partial q_1} = f_1 - f_2$$

Sto calcolando la prima forza generalizzata  $Q_1$  pertanto ne devo il termine rispetto a  $q_1$ .

Le forze generalizzate doppiamente coincidono con le forze reali

Precisazioni nell'esercizio

Le velocità sono:

- scrivere l'energia cinetica e potenziale utilizzando le coordinate  $q_1, q_2$
- determinare  $Q_1$  e  $Q_2$
- scrivere l'equazione del moto con le coordinate lagrangiane

$$\vec{f}_1 = f_1 \vec{i}$$

$$\vec{f}_2 = -f_2 \vec{i}$$

$$\vec{r}_1 = (l_1 + x_1) \vec{i}$$

$$\vec{r}_2 = (l_1 + l_2 + x_1 + \Delta) \vec{i}$$

$$Q_1 = f_1 - f_2 = f_1 \vec{i} \frac{\partial x_1 \vec{i}}{\partial q_1} - f_2 \vec{i} \frac{\partial (x_1 + \Delta) \vec{i}}{\partial q_1}$$

$$Q_2 = -f_2 = f_1 \vec{i} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} - f_2 \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} = f_1 \vec{i} \cdot 0 - f_2 \vec{i} \cdot \vec{i}$$

Scrivo l'equazione di Lagrange  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$

CALCOLO PER  $k=1$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} [m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{x}_1 + \dot{\Delta})] = (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{\Delta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \text{ poiché nell'energia cinetica compare solo } \dot{x}_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_3 (x_1 + \Delta)$$

$$\textcircled{1} (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{\Delta} + k_1 x_1 + k_3 (x_1 + \Delta) = f_1 - f_2$$

CALCOLO PER  $k=2$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta}} \right) = m_2 (\ddot{x}_1 + \ddot{\Delta}) = m_2 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{\Delta}$$

Ad esempio per  $l, k = 1, 2$  l'espressione precedente diventa:

$$M_{11} \dot{q}_1 \dot{q}_1 + M_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + M_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + M_{22} \dot{q}_2 \dot{q}_2 = 0$$

Uell'espressione data dalla somma delle  $T_{\Pi k}$  ha le dimensioni di una mano per una velocità.

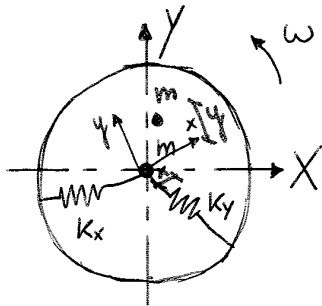
Si definisce SISTEMA NATURALE un sistema in cui  $T_2 \neq 0$  mentre  $T_1 = T_0 = 0$ .  
Sempre per il sistema naturale si può scrivere

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n M_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T [M] \{\dot{q}\}$$

La natura delle mani è simmetrica perché l'energia cinetica è in forma quadratica, mentre è definita positiva in quanto l'energia cinetica è sempre maggiore di zero.

Si può quindi concludere che l'energia cinetica è una funzione delle coordinate lagrangiane e delle loro derivate nel tempo.

### Esempio



Considero il seguente sistema composto da un anello che ruota attorno tramite due molle alla massa  $m$ .

$X-Y-Z =$  terza fissa

$x-y-z =$  terza rotante

$x \ll l_0$  con  $l_0 =$  lunghezza delle molle a riposo  
 $y \ll l_0$

Scrivo le equazioni utilizzando le coordinate del sistema mobile

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{r} = \dot{x}\vec{i} + x\omega\vec{k} \times \vec{i} + \dot{y}\vec{j} + y\omega\vec{k} \times \vec{j}$$

ottenuti derivando il vettore  
posizione

$$\vec{r} = \dot{x}\vec{i} + x\omega\vec{j} + \dot{y}\vec{j} - y\omega\vec{i}$$

$$\vec{r} = (\dot{x} - \omega y)\vec{i} + (\dot{y} + \omega x)\vec{j}$$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{r} \cdot \vec{r} = \frac{1}{2} m [(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2]$$

$$V = \frac{1}{2} K_x \Delta x^2 + \frac{1}{2} K_y \Delta y^2$$

$$\Delta x = l - l_0 = \sqrt{(l_0 + x)^2 + y^2} - l_0 = l_0 \sqrt{1 + \frac{2x}{l_0} + \frac{x^2}{l_0^2} + \frac{y^2}{l_0^2}} - l_0 \approx l_0 \sqrt{1 + \frac{2x_0}{l_0}} - l_0$$

$$\Delta x \approx l_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{x}{l_0}\right) - l_0 \approx l_0 + \frac{x}{l_0} - l_0 \approx x$$

Allo stesso modo  $\Delta y \approx y$

Se in parallelo alle molle si fossero due mazzette potrei scrivere

$$T_1 = \frac{1}{2} c_x \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c_y \dot{y}^2 \text{ (dipende dalla velocità relativa)}$$

Le due equazioni possono essere riscritte in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{x+h} & 0 \\ 0 & c_{y+h} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2mw \\ 2mw & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x - mw^2 & 0 \\ 0 & k_y - mw^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -wh \\ wh & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

MATRICE DEGLI STORZIAMENTI      MATRICE GYROSCOPICA (ANTINETICA)      MATRICE DI RIGIDEZZA      MATRICE CIRCOLATORIA

Il sistema di equazioni NON è formato da matrici simmetriche → non posso passare alle coordinate modali.

Se non ho il termine  $T_1 \Rightarrow$  scoppia la matrice giroscopica.

## SISTEMI CONTINUI

Mentre nei precedenti sistemi rigida, movimento e inerzia erano concentrati all'interno di un solo elemento, nei sistemi continui le proprietà di rigidità, inerzia e movimento sono distribuite in tutto il volume. In questo sistema verrà sempre trascurata la capacità di dissipare energia.

TRAVE: corpo in cui una dimensione prevale rispetto alle altre

Le travi considerate sono solitamente di tipo ad asse rettilineo e prismatiche, con sezione costante lungo l'asse e non svergolate.

ASTA: trave sottoposta a soli sforzi assiali

Ciascuna sezione della trave viene considerata come un corpo rigido di spessori infinitesimi avente sei gradi di libertà:

U	traslazione assiale	N	lungo x
V	traslazione trasversale	$T_y$	lungo y
W	traslazione trasversale	$T_z$	lungo z
$\theta_x$	rotazione torsionale	$M_x$	intorno a x
$\theta_y$	rotazione flessionale	$M_y$	intorno a y
$\theta_z$	rotazione flessionale	$M_z$	intorno a z

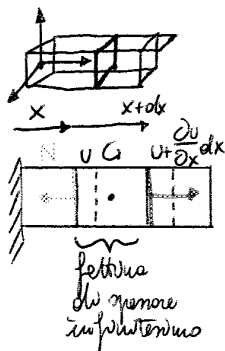
Per travi rettilinee la traslazione assiale è disaccoppiata dagli altri GDL.

Se si considerano sezioni aventi due assi di simmetria mutuamente ortogonali allora vale:

il grado di libertà torsionale è disaccoppiato dagli altri

il comportamento flessionale nel piano xy è disaccoppiato da quello in xz

### Vibrazioni assiali delle aste rettilinee



Considero la trave sottoposta ad uno sforzo solo assiale (come una asta) e ne estraccio una sezione.

Lo spostamento della sezione sarà verso destra di una quantità pari ad  $u$ ; inoltre il volume infinitesimale potrà allungarsi poiché è elastico e la parte di destra si può spostare di una quantità diversa da quella di sinistra.

MATERIALE ASTA  $\begin{cases} \rightarrow$  elastico \\ \rightarrow omogeneo \\ \rightarrow isotropo

due sezioni trasversali

$$dm = \rho dV = \rho A dx = \mu dx \quad \text{con } \mu = \rho A$$



Sostituendo le espressioni trovate nell'equazione delle onde si ottiene

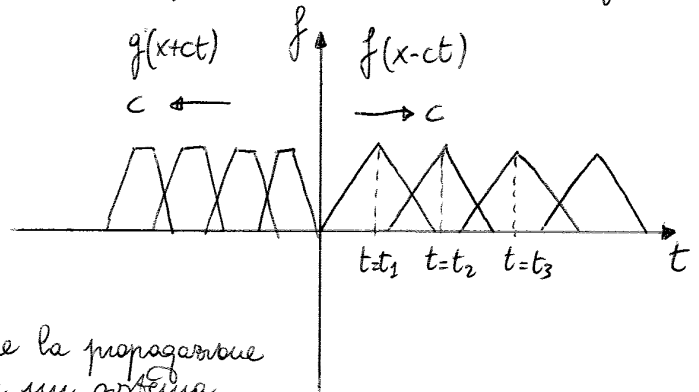
$$c^2 f'' \cdot 1 = c^2 f''$$

⇒ qualunque funzione  $f$  sarà soluzione dell'equazione ⇒ è importante fare un cambio di variabile

$$U(x,t) = g(x+ct) = g(\eta)$$

$$U(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$

In quest'ultima equazione  $f(x-ct)$  rappresenta un'onda progressiva mentre  $g(x+ct)$  rappresenta una onda regressiva.



La soluzione è quella ideale per descrivere la propagazione di un'onda in un mezzo elastico. In un sistema limitato le onde rimbombano avanti e indietro combinandosi poi linearmente. Siccome il sistema scambia sempre la presenza di nodi lungo la traiettoria, questo si può fare con il metodo delle variabili separabili.

## 2) Variabili separabili

$$U(x,t) = \phi(x) \cdot \eta(t)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} (\phi \cdot \eta) = \frac{\partial U}{\partial t} = \eta(t) \frac{d\phi(x)}{dx} \quad ? ?$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \eta(t) \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \eta \phi'' = \eta \phi_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \phi(x) \frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} = \phi \ddot{\eta} = \phi \eta_{tt}$$

$$c^2 \eta \phi'' = \phi \ddot{\eta}$$

Separa le variabili portando a 1° membro le funzioni e a secondo membro il tempo

$c^2 \frac{\phi''}{\phi} = \frac{\ddot{\eta}}{\eta}$  deve valere per ogni posizione e per ogni tempo ⇒ entrambe le funzioni devono essere uguali alla stessa costante

⇒  $c^2 \frac{\phi''}{\phi} = \frac{\ddot{\eta}}{\eta} = \text{costante}$ ; la costante vale  $-\omega^2$

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0 \quad c^2 \frac{\phi''}{\phi} = -\omega^2 \quad \phi'' + \left(\frac{\omega^2}{c^2}\right) \phi = 0$$

Con queste due equazioni sono riuscito a separare spazio e tempo

$\eta(t) =$  soluzione armonica =  $A \cos \omega t + B \sin \omega t$  → COORDINATA MODALE

$\phi(x) = E \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x$  → AUTOFUNZIONE

$A, B$  dipendono dalle condizioni iniziali mentre  $E, D, \omega$  dipendono dalle condizioni al contorno.

Si ottiene quindi

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{T}{r} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Considerando solamente travi aventi sezioni circolari o sezioni anulari sono valide la seguente relazione

$$M = G I_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \text{ con } I_p = \int_A r^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} r^3 dr d\alpha$$

Supponendo che la sezione considerata sia omogenea  $I_p = \rho I_p$

Risolviamo ora la prima equazione sostituendo  $\frac{\partial M}{\partial x}$  considerando  $G I_p = \text{costante}$

$$G I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \text{ che se diviso per } I_p \text{ mi fornisce}$$

$$G \frac{I_p}{I_p} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{I_p}{I_p} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \text{ con } I_p / I_p = \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Chiamando  $c^2 = \frac{G}{\rho}$  mi riconduco all'equazione delle onde  $c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$  nella quale la costante  $c$  ha sempre le dimensioni di una velocità.

ASTE

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$c^2 = \frac{E}{\rho}$$

TRAVI

$$\frac{\partial M}{\partial x} = I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

$$c^2 = \frac{G}{\rho}$$

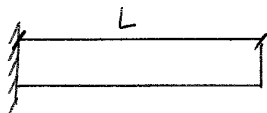
Possiamo risolvere la soluzione all'equazione delle onde separando le variabili

$$\theta(x,t) = \phi(x)\eta(t)$$

$$\theta(x,t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) (D \cos \frac{\omega}{c} x + E \sin \frac{\omega}{c} x) = \sin(\omega t + \varphi) (D \cos \frac{\omega}{c} x + E \sin \frac{\omega}{c} x)$$

Possiamo risolvere l'equazione imponendo le condizioni al contorno e le condizioni iniziali

Condizioni al contorno e modi delle travi



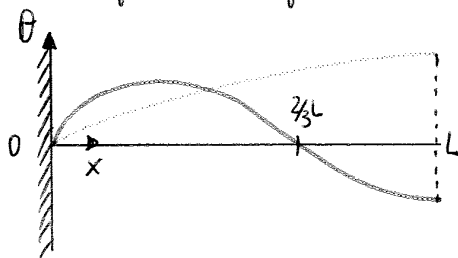
$$M_t(L,t) = 0 \quad \theta(0,t) = 0$$

Per una trave vincolata di lunghezza L potrei dire che il momento torcente nella sezione a  $x=L$  sarà nullo con ciò la rotazione nella sezione vincolata.

$$\theta(x,t) = \left[ -\sin(\omega t + \varphi) (D \cos \frac{\omega}{c} x + E \sin \frac{\omega}{c} x) \right] \text{ con } \omega_r = \frac{\pi c}{2L} r \text{ con } r=1,3,5,\dots$$

$c$  dipende dal materiale,  $\omega_r$  dipende dalla lunghezza  $\Rightarrow$  più la trave è lunga più la pulsazione diminuisce.

L'autofunzione o forma modale varia  $\phi_r = \sin \frac{\omega_r x}{c}$



MODO 1

$$r=1 \quad \phi_1 = \sin \frac{\omega_1 x}{c} = \sin \left( \frac{\pi c r}{2L c} x \right) = \sin \left( \frac{\pi x}{2L} \right)$$

MODO 2

$$r=3 \quad \phi_3 = \sin \frac{\omega_3 x}{c} = \sin \left( \frac{\pi c 3}{2L c} x \right) = \sin \left( \frac{3\pi x}{2L} \right)$$

$$-\frac{\partial M}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -f(x,t) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x,t)$$

Sostituendo ancora l'espressione trovata precedentemente per il momento si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x,t)$$

Se come le travi considerate sono omogenee e prismatiche si ottiene  $EI = \text{costante}$

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x,t)$$

**EQUAZIONE DEL MOTO DI UNA TRAVE DI EULERO-BERNOULLI PRISMATICA ED OMOGENEA**

L'equazione non è risolvibile <sup>con</sup> l'equazione delle onde mentre può essere risolta separando le variabili.

$$v(x,t) = \phi(x) \eta(t)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \phi \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \phi \ddot{\eta}$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{d^4 \phi}{dx^4} = \phi'''' \eta$$

$$EI \phi'''' \eta + \mu \phi \ddot{\eta} = 0 \text{ separo le variabili e ottengo } *$$

$$\frac{EI \phi''''}{\mu \phi} = - \frac{\ddot{\eta}}{\eta} = \omega^2$$

$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$  la cui soluzione sarà del tipo armonico

$$\eta(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \tilde{A} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{EI \phi''''}{\mu \phi} = \omega^2$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione \* come

$$\phi'''' - \frac{\mu \omega^2}{EI} \phi = 0 \text{ e chiamo } \beta^4 = \frac{\mu \omega^2}{EI}$$

$\phi'''' - \beta^4 \phi = 0$  una forma anche essa una soluzione di tipo armonico

$\phi(x) = C \cos \beta x + D \sin \beta x + F \cosh \beta x + G \sinh \beta x$  ottenuta cercando una soluzione nella forma  $\phi = \phi e^{xt}$

$$v(x,t) = \sin(\omega t + \varphi) (a \cos \beta x + b \sin \beta x + c \cosh \beta x + d \sinh \beta x)$$

Ho quindi 6 incognite che sono  $\varphi, \beta, a, b, c, d$  di cui 2 le trave impone do le condizioni ai terminali e 4 imponendo le condizioni al contorno

Trave libera-libera

Sviluppo ed ottengo

$$\underbrace{\cos^2 \beta L + \sin^2 \beta L}_1 + \underbrace{\cosh^2 \beta L - \sinh^2 \beta L}_1 - 2 \cosh \beta L \cos \beta L = 0$$

$$2 - 2 \cosh \beta L \cos \beta L = 0$$

$\cosh \beta L \cos \beta L - 1 = 0$  dalla quale ricaviamo  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$

$$U(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin(\omega_r t + \varphi_r) (a_r \cos \beta_r x + b_r \sin \beta_r x + c_r \cosh \beta_r x + d_r \sinh \beta_r x)$$

Se  $\omega = 0 \Rightarrow$  il sistema ha una frequenza di oscillazione nulla e la trave si muove traslando rigidamente, ruotando rigidamente o traslando e ruotando rigidamente.

$\cos \beta L = \frac{1}{\cosh \beta L}$  Le soluzioni sono prossime a  $\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$  e incrementando tendono ad essere sempre più precise. Le soluzioni possono essere riassunte con la seguente espressione  $\beta_r \approx (r + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2}$  con  $r = 1, 2, 3, \dots$

$$\phi^{IV} - \beta^4 \phi = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\phi^{IV} = 0 \Rightarrow \phi = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\phi^{III} = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$\phi' = b + 2cx + 3dx^2$$

$$\phi'' = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\phi'' = 2c + 6dx$$

$$\phi''' = 6d$$

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{\cos \beta_r L - \cosh \beta_r L}{\sinh \beta_r L - \sin \beta_r L}$$

La fase  $\varphi$  non viene fornita dalle condizioni ai vincoli.

### Vibrazioni dei sistemi continui

Le equazioni scritte finora sono tutte composte da due parti: una prima parte composta dal termine governante le accelerazioni e la seconda parte composta dal termine governante la rigidezza

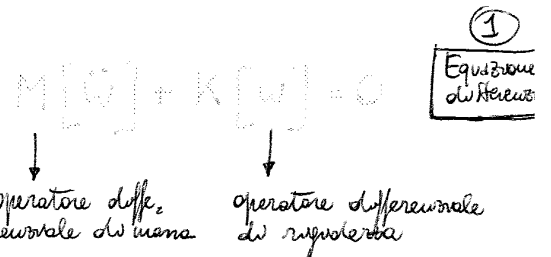
$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0$$

RIASSUMIBILI

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

NELLA

$$I_p \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$$



$\ddot{w} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w(x, y, z, t))$ ; nelle varie applicazioni si ammetterà che  $w$  dipende da una sola dimensione.

Identifico con  $B_i[w] = 0$  le condizioni al contorno

La soluzione dell'equazione verrà ottenuta separando le variabili

$$w(x, y, z, t) = \eta(t) \cdot \phi(x, y, z)$$

$$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \phi \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \ddot{\eta} \phi \text{ che se sostituito negli operatori mi dà}$$

②  
Soluzione con variabili separabili

Vibrazioni forzate di sistemi continui

Quando si applica una forzante ad un sistema continuo monodimensionale l'equazione diventa

$$M[\ddot{w}] + K[w] = f(x,t)$$

In teoria se il sistema non fosse monodimensionale  $w(x,y,z,t) = \phi(x,y,z)\eta(t)$ .  
Per sistemi monodimensionali posso cercare la soluzione nella forma

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\eta_i(t)$$

con  $\eta(t) = \sin(\omega t + \varphi)$

Considero ora due autofunzioni che sono anche due identità

$$K[\phi_r] = \omega_r^2 M[\phi_r]$$

$$K[\phi_s] = \omega_s^2 M[\phi_s]$$

$$r = 1, 2, 3, \dots$$

Calcolo ora le  $\phi$  sfruttando il fatto che  $M$  e  $K$  sono autoaggiunti e ottengo il principio di ortogonalità. Integro nel dominio  $D$

$$\int_D \phi_r M[\phi_s] dD = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ m_r & \text{se } r = s \quad (\text{MASSA MODALE}) \end{cases}$$

$$\int_D \phi_r K[\phi_s] dD = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ K_r = m_r \omega_r^2 & \text{se } r = s \quad (\text{RIGIDEZZA MODALE}) \end{cases}$$

Per derivare l'ortogonalità nel sistema continuo si fa riferimento ad opera, libro di mano e equazioni autoaggiunte.

Posso ora riscrivere l'equazione iniziale come

$$\sum_{i=1}^{\infty} M[\phi_i] \ddot{\eta}_i + \sum_{i=1}^{\infty} K[\phi_i] \eta_i = f(x,t)$$

Pre-moltiplico per  $\phi_s$  e integro nel dominio  $D$  ottenendo

$$\int_D \left( \phi_s \sum_{i=1}^{\infty} M[\phi_i] \ddot{\eta}_i + \phi_s \sum_{i=1}^{\infty} K[\phi_i] \eta_i \right) dD = \int_D \phi_s f dD$$

Nelle due equazioni sopra, sono tutti i termini della somma tranne quelli considerati.

Applicando la  $m$  e la  $K$  ortogonalità delle autofunzioni

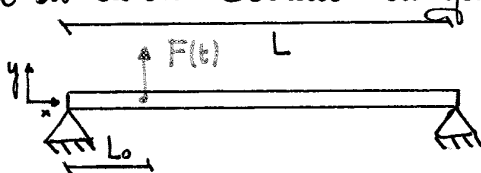
si ottiene un sistema di infinite equazioni differenziali ordinarie del tipo

$$m_r \ddot{\eta}_r + K_r \eta_r = \int_D \phi f dD = P_r(t) \quad (FORZA MODALE) \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Per risolvere questo sistema cerco di ricondurmi a tanti sistemi ciascuno con 1 solo GDL. La soluzione può essere ottenuta sommando i contributi dei vari modi

Carichi mobili su travi (carichi concentrati)

Lo studio dei carichi mobili sulle travi può essere simulato al passaggio di una vettura su un ponte. Il modello più semplice di ponte è rappresentato da una trave di Eulero-Bernoulli omogenea, prismaticca e su due appoggi.



$$\begin{array}{l} \text{CONDIZIONI} \\ \text{AL CONFINO} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \phi(0) = 0 & \phi''(0) = 0 \\ \phi(L) = 0 & \phi''(L) = 0 \end{array} \right.$$

$$EI, \mu = \text{costante}$$

Quando la trave è caricata solo in maniera la sommatoria va eseguita solo per valori dispari.

$$v(x,t) = \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} (cost) \sin\left(\frac{r\pi x}{L}\right) \sin\left(r\frac{\pi}{L}\right)$$

Tutte le somme con numeri pari hanno valore nullo in  $L/2 \Rightarrow$  non danno un contributo alle deformazioni della trave

$$v\left(\frac{L}{2}, t\right) = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (cost) \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right)^2 = \frac{F_0}{EI} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r\pi}{2}\right)^4}$$

Dalla letteratura si sa che  $\delta = \frac{F_0 L^3}{48EI}$  (freccia in maniera)

La soluzione si trova cercando il valore di  $r$  per cui vale la relazione

$$\frac{1}{48} = \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r\pi}{2}\right)^4}$$

Determinazione delle frequenze proprie

Si utilizza un metodo valido per sistemi conservativi (in cui non esistono forze esterne e non sono presenti sistemi dissipativi)

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0$$

Procedendo l'autoproblema ricavare gli autovettori e gli autovalori

$$\omega_r^2, \{\psi_r\} \text{ con } r = 1, 2, \dots, n$$

$$\omega_r^2 [m]\{\psi_r\} = [k]\{\psi_r\} \rightarrow \text{identità}$$

Pre-moltiplico per  $\{\psi_r\}^T$

$$\omega_r^2 = \frac{\frac{1}{2} \{\psi_r\}^T [k] \{\psi_r\}}{\frac{1}{2} \{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\}}$$

RAPPORTO TRA SCALARI  $\rightarrow$  energia potenziale elastica  $U$   
 RAPPORTO TRA MATRICI  $\rightarrow$  energia cinetica  $T$

Scrivo ora il precedente rapporto considerando un vettore generico  $\{u\} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$\omega^2 = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}} = R(\{u\}) = \text{QUOZIENTE DI RAYLEIGH}$$

Se  $\{u\}$  è soluzione di  $[m]\ddot{x} + [k]x = 0 \Rightarrow$  posso scrivere  $\{u\}$  come una combinazione lineare di autovettori

$$\{u\} = \sum_{r=1}^n \{\psi_r\} c_r = c_r \{\psi_r\} + \sum_{i \neq r} c_i \{\psi_i\}$$

molto in evidenza l'elemento  $r$ -esimo

Suppongo ora che  $\{u\}$  sia simile ad uno degli autovettori ( $\{\psi_r\}$ )

Definendo  $\epsilon_i = \frac{c_i}{c_r} \ll 1 \Rightarrow$  emerge come tratto i coefficienti  $c_i$  sono trascurabili rispetto a  $c_r$

Se valgono queste assunzioni  $\omega^2 \approx \omega_r^2 + \sum_{i \neq r} \epsilon_i^2 (\omega_i^2 - \omega_r^2)$

Se commetto un errore piccolo scrivendo che  $\{u\}$  coincide con  $\{\psi_r\}$  analogamente commetterò un errore piccolo con il calcolo delle  $\omega$ . Questo errore sarà tanto più piccolo quanto più i due vettori sono simili.

$$\begin{aligned} \cdot NUN &= \int w k [W] dD = \int_0^L \phi G I_P \frac{d^2 \phi}{dx^2} dx = \phi G I_P \frac{d\phi}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \phi' G I_P \phi' dx = \text{integro per parti} = \\ &= (G I_P \phi \phi') \Big|_{x=L} - \underbrace{(G I_P \phi \phi') \Big|_{x=0}}_{\substack{\text{per le condizioni} \\ \text{al contorno}}} = \int_0^L G I_P \phi'^2 dx \end{aligned}$$

Condizioni al contorno  $\theta(x=0, t) = 0$  e  $\phi(0) = 0$



$$(M + I \ddot{\theta})_{x=L} = 0 \quad \left( G I_P \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_{x=L} + \left( I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right)_{x=L} = 0$$

$$(G I_P \phi' + I \omega^2 \phi)_{x=L} = 0$$

$$\phi(x=0) = \phi_{x=0} = 0$$

$$(G I_P \phi)_{x=L} = (I \omega^2 \phi)_{x=L}$$

$$\int_0^L G I_P \phi'^2 dx = I \omega^2 \phi_{x=L}^2 - \int_0^L G I_P \phi' dx$$

$$\cdot DEN = \int_D w M [W] dD = \int_0^L \phi (-I \mu) \phi dx = - \int_0^L I \mu \phi^2 dx$$

$$\omega^2 = \frac{I \omega^2 \phi_{x=L}^2 - \int_0^L G I_P \phi'^2 dx}{- \int_0^L I \mu \phi^2 dx}$$

Trattazione alternativa

$$\omega^2 \left( \int I \mu \phi^2 dx + I \phi_{x=L}^2 \right) = \int_0^L G I_P \phi'^2 dx \Rightarrow \omega^2 = \frac{\int_0^L G I_P \phi'^2 dx}{I \phi_{x=L}^2 + \int_0^L I \mu \phi^2 dx}$$

$$T = \left( \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \right)_{x=L} + \frac{1}{2} \int_0^L I \mu \dot{\theta}^2 dx$$

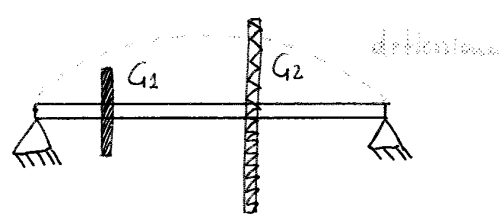
↓  
potenzia

$$T_{max} = \frac{1}{2} I \omega^2 \phi_{x=L}^2 + \frac{1}{2} \int I \mu \omega^2 \phi^2 dx = \frac{1}{2} \omega^2 \left( I \phi_{x=L}^2 + \int I \mu \phi^2 dx \right)$$

$$V_{max} = \text{CLAPEYRON} = \frac{1}{2} \int_0^L G I_P \phi'^2 dx$$

## DINAMICA DEI ROTORI

ROTORE :



Suppongo che il mio sistema sia caratterizzato da un albero nullo, da una trascurabile rispetto alla massa degli altri elementi che sono ad esso vincolati.

CASO IDEALE: dischi con baricentro nell'axe di rotazione, ortogonali rispetto all'axe  
 $\Rightarrow$  sistema caratterizzato da forze d'inertza nulle e momento risultante delle forze d'inertza nullo.

$$\begin{cases} \dot{x}_a = \dot{x}_c - \varepsilon \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{y}_a = \dot{y}_c + \varepsilon \dot{\psi} \cos \psi \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{x}_a = \ddot{x}_c - \varepsilon \ddot{\psi} \sin \psi - \varepsilon \dot{\psi}^2 \cos \psi \\ \ddot{y}_a = \ddot{y}_c + \varepsilon \ddot{\psi} \cos \psi - \varepsilon \dot{\psi}^2 \sin \psi \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{VARIA ANCHE} \\ \text{L'ANGOLO} \end{array}$$

Suppongo che la coppia rotoria sia costante  $\Rightarrow M = \text{costante} \Rightarrow \omega = \dot{\psi} = \text{costante}$   
 $\Rightarrow$  si annullano tutti i termini in  $\dot{\psi}$

$$\begin{cases} \ddot{x}_a = \ddot{x}_c - \varepsilon \dot{\psi}^2 \cos \psi \\ \ddot{y}_a = \ddot{y}_c - \varepsilon \dot{\psi}^2 \sin \psi \end{cases}$$

Sostituendo nelle equazioni i vincoli ottengo

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + c\dot{x}_c + kx_c = m\varepsilon \dot{\psi}^2 \cos \psi \\ m\ddot{y}_c + c\dot{y}_c + ky_c = m\varepsilon \dot{\psi}^2 \sin \psi \end{cases} \quad \text{che si possono scrivere in funzione di } \omega \text{ come}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + c\dot{x}_c + kx_c = m\varepsilon \omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y}_c + c\dot{y}_c + ky_c = m\varepsilon \omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

$x_c$  e  $y_c$  descrivono dove si porta C al variare del tempo  $\Rightarrow$  ne descrivono la sua traiettoria.

Moltiplico ora la seconda equazione per l'unità immaginaria e la sommo alla prima ottenendo

$$m(\ddot{x}_c + i\ddot{y}_c) + c(\dot{x}_c + i\dot{y}_c) + k(x_c + iy_c) = m\varepsilon \omega^2 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

Chiamo  $z = x_c + iy_c$  e ottengo

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\varepsilon \omega^2 e^{i\omega t}$$

Studio solo l'integrale particolare perché quello generale va ridotto a zero a causa della presenza della molla.

SOLUZIONE A REGIME

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t} = |z_0| e^{i(\omega t - \varphi)}$$

$$[(k - m\omega^2) + i\omega c] z_0 e^{i\omega t} = m\varepsilon \omega^2 e^{i\omega t} \quad \text{dalla quale ricavo } z_0$$

$$z_0 = \frac{m\varepsilon \omega^2}{(k - m\omega^2) + i\omega c} = |z_0| e^{i\varphi} \quad \text{FASE SETIPRIMA NEGATIVA}$$

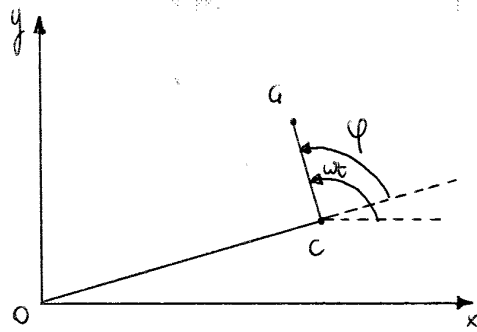
Le equazioni sono disaccoppiate e sono equivalenti a quelle di un sistema "molla-massa smorzata" fissato

$$\begin{cases} x_c = A_1 \cos(\omega t - \alpha_1) \\ y_c = A_2 \sin(\omega t - \alpha_2) \end{cases} \Rightarrow \text{si ottiene} \quad \begin{cases} A_1 = A_2 = \delta = \frac{m\varepsilon \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\omega c)^2}} = |z_0| \\ \tan \alpha_1 = \tan \alpha_2 = \tan \varphi = \frac{\omega c}{k - m\omega^2} \end{cases}$$

Si riconosce che la traiettoria seguita dal centro C del disco è una traiettoria circolare percorsa alla velocità angolare  $\omega$ . Poiché il segmento CG, solido al disco, ruota con velocità angolare  $\omega$  risulta che i segmenti OC e OG non hanno moto relativo in quanto il ritardo di fase  $\varphi$  è costante rispetto al tempo con  $\omega$  fissato  $\Rightarrow$  la spirale OCG ruota con velocità  $\omega$ . Si chiama MOTO SINCRONO quello in cui il punto della deformata ruota con la stessa velocità angolare del disco.



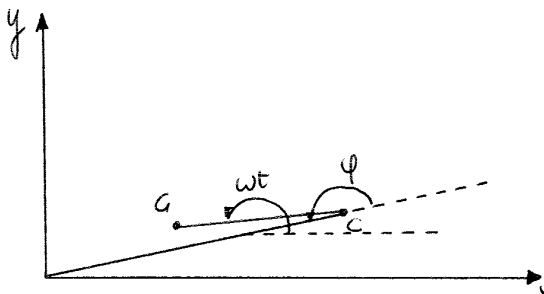
$\omega = \omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$   $\Rightarrow$  viene amplificata la deflessione  $\Rightarrow |z_0| \gg \varepsilon$



$\dot{\psi} \equiv \omega$   
 $\delta \gg \varepsilon$   
 $\psi = \pi/2$

In questo caso il baricentro precede il centro di rotazione di  $90^\circ$

③  $\omega \gg \omega_c \Rightarrow$  la deflessione reale  $|z_0| \approx \varepsilon$



$\dot{\psi} \equiv \omega$   
 $\omega \gg \omega_c$   
 $\delta \approx \varepsilon \quad \psi \approx \pi$

Il baricentro in questo caso torna indietro  $\Rightarrow$  PER  $\omega$  MOLTO ELEVATE IL BARICENTRO TORNA INDIETRO RIPORTANDOSI SULL'ASSE DI ROTAZIONE  $\Rightarrow$  COMPORTAMENTO AUTOCENTRANTE  
 L'aumento della deflessione viene limitata ad  $\varepsilon$ .

In quest'ultimo caso poiché le  $\omega$  sono molto elevate si devono tenere in considerazione le forze di inerzia che ruotano con l'albero  $\Rightarrow$  si possono generare dei picchi di forza nei cuscevoli. Il picco di forza nei cuscevoli si ha per  $\omega = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$  e vale  $F_{supp} = \frac{1}{2} K \delta$

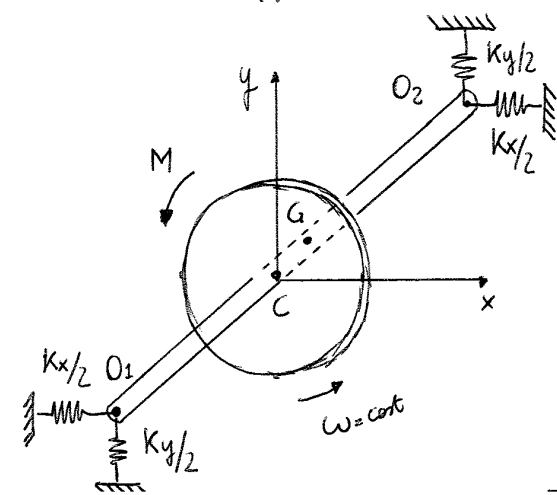
La velocità critica corrisponde quindi ad un caso di risonanza e pertanto per valori piccoli dell'eccentricità associati a grandi ampiezze dissipative si hanno forze elastiche contenute.

Alla velocità critica  $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$  si verifica un massimo della deflessione dell'albero che dipende dall'eccentricità  $\varepsilon$ . Di conseguenza una centratura molto accurata limita la forza che si scarica nei cuscevoli. L'albero può ruotare alla velocità critica senza che si verifichino inconvenienti per un tempo breve.

In un caso ideale di smorzamento nullo e perfetta centratura  $\text{ovvero } \zeta = \varepsilon = 0$  si deduce che la freccia elastica è sempre nulla eccetto nel caso in cui  $\omega = \omega_c$ . In quest'ultimo caso la freccia risulta avere una espressione indeterminata. La condizione

$\omega^2 = \omega_c^2 = \frac{K}{m}$  indica che per un qualunque valore della freccia  $\delta$  si ha equilibrio tra la reazione elastica dell'albero  $K\delta$  e la forza centrifuga  $m\delta\omega^2 \Rightarrow$  SITUAZIONE DI EQUILIBRIO INDIFFERENTE

Influenza dei supporti elastici



Nell'esempio si considera un albero in forma di disco avente due cuscevoli di estremità. Proiettando le forze dovute all'uso lubrificati ad una relazione lineare attraverso i coefficienti di rigidezza e di smorzamento. Trascurando il termine relativo allo smorzamento il problema si riconduce allo studio del moto di un albero rigido sostenuto da supporti elastici, con costanti di elasticità differenti nei due piani. Il disco di massa  $m$  è calibrato in corrispondenza della massa dell'albero e il suo baricentro non coincide con l'asse di rotazione.

Casi particolari

A	+	$\omega_x$	-	$\omega_y$	-
B	+		+		-
$\beta$	+		-		+
	(1)		(2)		(3)

①  $\omega < \omega_x < \omega_y \Rightarrow A > B > 0 \Rightarrow$  ellisse con semiasse maggiore orizzontale e baricentro sempre all'esterno dell'asse dell'albero. L'albero ruota in senso antiorario e anche l'ellisse che descrive le posizioni di C è percorsa in verso antiorario

②  $\omega_x < \omega < \omega_y$  la velocità di rotazione dell'albero è compresa tra i due valori di velocità critica e l'albero ruota in verso antiorario ma sia G sia C percorrono la traiettoria in verso orario. Si ha la condizione di PRESSIONE DISCONDE o BACKWARD WHIRL

③  $\omega > \omega_y > \omega_x \Rightarrow B < A < 0$ . In questo caso risulta che  $|B| > |A| \Rightarrow$  il semiasse maggiore giace lungo l'asse y. In questo caso il baricentro è all'interno della traiettoria ellittica percorsa da C. La traiettoria è percorsa in verso antiorario e il verso di rotazione del disco.

Nel caso ② considerando l'ansima di smorzamento in anni

$$\begin{cases} x_c = A \cos(\omega t) \\ y_c = B \sin(\omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} x_G = x_c + E \cos \omega t \\ y_G = y_c + E \sin \omega t \end{cases} \quad \begin{cases} x_G = (A+E) \cos \omega t \\ y_G = (B+E) \sin \omega t \end{cases}$$

$$\omega_{cx} = \frac{\omega_x}{\sqrt{1 - 2\zeta_x^2}} \quad \omega_{cy} = \frac{\omega_y}{\sqrt{1 - 2\zeta_y^2}}$$

Lo smorzamento causa uno spostamento degli assi dalla posizione iniziale.

Calcolo del momento risultante delle forze di inerzia

Definisco  $M_o'$  = momento risultante delle forze d'inerzia calcolate rispetto ad O

$$M_o' = - \frac{dK_o}{dt} - \vec{v}_o \times \vec{Q}$$

$\downarrow$  velocità del polo       $\downarrow$  quantità di moto

$$\vec{Q} = m\vec{v}_G$$

$K_o$  = momento della quantità di moto

Tengo conto del momento del rotore nello spazio con una terna destrorsa centrata in O e rotante con il corpo. Il rotore si muoverà con una velocità  $\vec{\omega}$  pari a:

$$\vec{\omega} = p\vec{i}_1 + q\vec{j}_1 + r\vec{k}_1 \quad \text{con } \vec{i}_1 - \vec{j}_1 - \vec{k}_1 = \text{terna destrorsa centrata in O}$$

Definisco  $[I]$  il tensore d'inerzia

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

È bene tenere conto della geometria del corpo.

MOmenti DI INERZIA

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_m (y^2 + z^2) dm \\ I_{yy} &= \int_m (x^2 + z^2) dm \\ I_{zz} &= \int_m (x^2 + y^2) dm \end{aligned}$$

MOmenti DI INERZIA CENTRALI

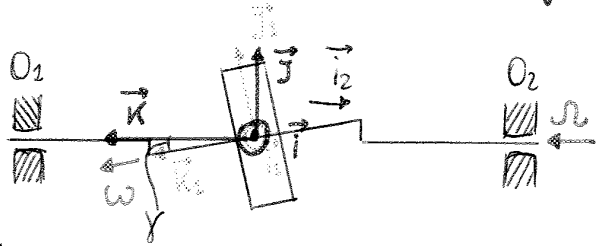
$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_m -xy dm = I_{yx} \\ I_{xz} &= \int_m -xz dm = I_{zx} \\ I_{yz} &= \int_m -yz dm = I_{zy} \end{aligned}$$

Spostando il punto O il tensore che ottengo sarà differente

$$\vec{K}_o = K_x \vec{i}_1 + K_y \vec{j}_1 + K_z \vec{k}_1 \quad \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{Bmatrix} = [I] \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$$

Se scelgo una terna fissa nel baricentro occupare il secondo termine dell'Espressione di  $M_o'$

### Combinazione di due velocità angolari



$\vec{\omega}$  = velocità angolare propria o velocità relativa  
 $\vec{\Omega}$  = velocità angolare di precessione o velocità di trascorrimento.  
 Se il disco fosse solidale all'albero avere solo la velocità di trascorrimento

$\delta$  = ANGOLO DI NUTAZIONE = separa l'asse della velocità di trascorrimento da quello della velocità relativa

$$\vec{\omega}_{Tot} = \vec{\omega} + \vec{\Omega} = \omega \vec{k}_1 + \Omega \vec{k}$$

$$\vec{M}'_G = - (I_P - I_d) \Omega^2 \sin \delta \cos \delta \vec{i}_2 - (I_P \omega \Omega \sin \delta) \vec{i}_2$$

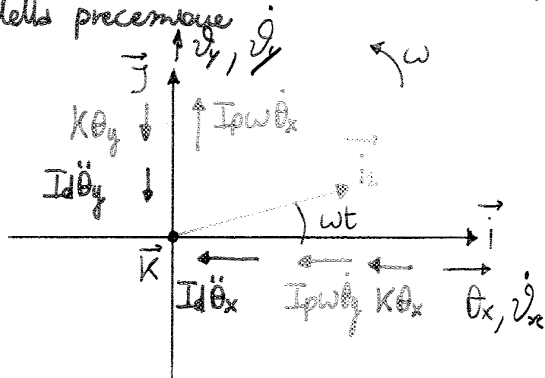
Momento giroscopico che nasce dall'interazione tra le due velocità

$\vec{i}_2$  = terra rotante con  $\Omega$

Si come solitamente  $\omega \gg \Omega \Rightarrow$  l'effetto giroscopico è trascurabile  
 Sono ad ora ho intuito che gli alberi fessero insufficientemente rigidi

- il disco viene calibrato in massa  $\Rightarrow$
- non ho equilibrio statico
- $\delta \ll 1 \Rightarrow \cos \delta \approx 1, \sin \delta \approx \delta$
- $I_P, I_d, \omega = \text{costante}$
- $K =$  rigidezza a flessione dell'albero

Applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti per la determinazione della precessione



$$\vec{M}'_G = (I_P - I_d) \omega^2 \delta \vec{i}_2 \quad \text{con } \delta \vec{i}_2 = \vec{\gamma}$$

rotante con velocità  $\vec{\omega}$

$$\vec{i}_2 = \cos \omega t \vec{i} + \sin \omega t \vec{j}$$

$$\vec{M}'_G = - (I_P - I_d) \omega^2 \delta \cos \omega t \vec{i} - (I_P - I_d) \omega^2 \delta \sin \omega t \vec{j}$$

ottenuto scomponendo il vettore del momento risultante

Considero ora di avere un albero non sufficientemente rigido  $\Rightarrow$  esso flette.

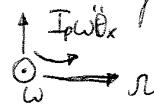
Rigidezza  $\neq$  come attorno a z

gli effetti non comparano tutti nello stesso momento e non è detto che si sommino linearmente.

Suppongo che valga il principio di sovrapposizione degli effetti, applicabile solo se suppongo che il sistema si comporti linearmente

Chiamo  $M = K\theta$  il momento di richiamo elastico con  $K =$  rigidezza a flessione

Per l'effetto giroscopico  $\omega$  tende a portarmi su  $\Omega$



$$\vec{i} \leftarrow I_d \ddot{\theta}_x + I_P \omega \ddot{\theta}_y + K \theta_x + (I_P - I_d) \omega^2 \delta \cos \omega t = 0$$

$$\vec{j} \downarrow I_d \ddot{\theta}_y - I_P \omega \ddot{\theta}_x + K \theta_y + (I_P - I_d) \omega^2 \delta \sin \omega t = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_P \omega \\ -I_P \omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = - (I_P - I_d) \omega^2 \delta \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix}$$

Il punto di intersezione tra le rette e le curve rappresentano le velocità critiche dell'albero  $\Rightarrow$  le condizioni in cui questo può divergere. Tutto ciò vale solo per la risposta libera

**Equazione completa e equilibrio dinamico**

$$I_d \ddot{\theta} - i I_p \omega \dot{\theta} + K \theta = - (I_p - I_d) \omega^2 \gamma e^{i \omega t}$$

$$\theta = \theta_0 e^{i \omega t}$$

$$(-I_d \omega^2 + I_p \omega^2 + K) \theta_0 = - (I_p - I_d) \omega^2 \gamma \Rightarrow \theta_0 = \frac{- (I_p - I_d) \omega^2 \gamma}{K - \omega^2 (I_d - I_p)}$$

= ampiezza dell'oscillazione, reale. Può andare a  $\infty$  se il denominatore si annulla

Se

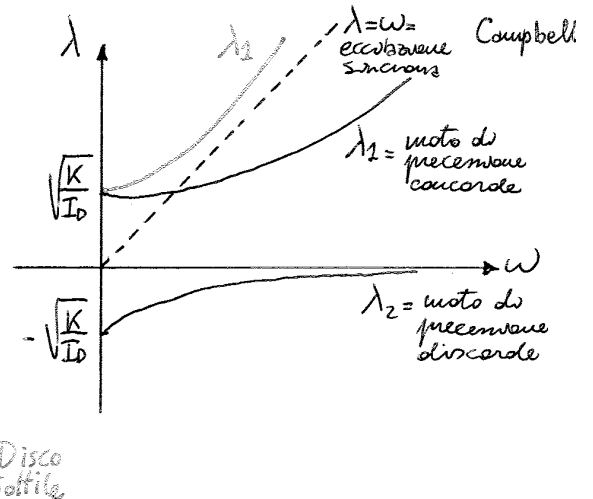
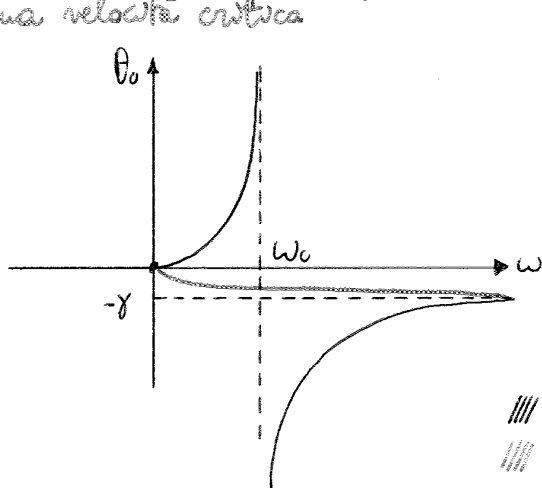
$$K - \omega^2 (I_d - I_p) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{I_d - I_p} \Rightarrow \theta_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{K}{I_d - I_p}}$$

ad una certa velocità si hanno oscillazioni molto elevate

$$I_p^2 \omega^2 + 4 K I_d = 4 I_d^2 \omega^2 + I_p^2 \omega^2 - 4 I_p I_d \omega^2$$

$$K = \omega^2 (I_d - I_p) \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{I_d - I_p} = \text{intersezione della retta di eccentricità zero e } \lambda$$

La condizione relativa alla velocità critica risulta valida solo se ho a che fare con dischi spessi per cui  $I_d > I_p$ . Nel caso di dischi sottili non ho una velocità critica



$\gamma$  viene mantenuto fono,  $\theta$  invece varia aumentando e diminuendo il disallineamento del disco.

Se  $\omega = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$

All'aumentare di  $\omega$  si ha l'autocentraggio  $\Rightarrow \theta_0$  tende al valore di  $-\gamma$

Tuttavia si è considerato il caso in cui il rotore era centrato al centro dell'albero.

Anche se l'albero presentava deflessione l'asse di rotazione continuava ad essere parallelo all'asse principale

Le equazioni che ne descrivono il moto sono:

$$\overline{M} \ddot{z} + \overline{K} z = \overline{M} \epsilon \omega^2 e^{i \omega t}$$

$$I_d \ddot{\theta} - i \omega I_p \dot{\theta} + K \theta = (I_d - I_p) \omega^2 \gamma e^{i(\omega t + \epsilon)}$$

aggiunto per tener conto di un possibile disallineamento tra forze di inerzia e momento resistito dalle forze di inerzia

Le due rigidezze  $K$  non coincidono poiché la prima indica una rigidezza e si misura in N/m mentre la seconda è una rigidezza a momento e si misura in Nm/rad

$F_R =$  forze dissipative rotante  $= C_R \dot{y}$  con  $y =$  velocità relativa  
 Sono  $y$  in funzione di  $z$  e passo dal piano mobile al piano fisso  
 $y = \dot{z} e^{-i(\omega t - d)} - i \omega z e^{-i(\omega t - d)}$

$F_R = C_R (\dot{z} - i \omega z) e^{-i(\omega t - d)}$  VALIDA PER PIANO MOBILE

$F_R = C_R (\dot{z} - i \omega z)$  VALIDA PER PIANO FISSO

$m \ddot{z} + C_N \dot{z} + K z + C_R (\dot{z} - i \omega z) = m E \omega^2 e^{i \omega t}$

$m \ddot{z} + (C_N + C_R) \dot{z} + (K - i \omega C_R) z = m E \omega^2 e^{i \omega t}$

effetto positivo →  
 cresce lo smorzamento

minore rigidità  
 (data da un termine immaginario)

$i = e^{i \pi/2}$

$i z = \sigma e^{i \pi/2} e^{i \beta} = \sigma e^{i(\pi/2 + \beta)}$

**A REGIME**

$z = z_0 e^{i \omega t}$

$-m \omega^2 + i \omega (C_N + C_R) + (K - i \omega C_R) z_0 = m E \omega^2$

$z_0 = \frac{m E \omega^2}{K - m \omega^2 + i \omega C_N}$

Stessa soluzione ottenuta in presenza di forze rotante e valida solo per  $\omega =$  costante

descrive la traiettoria percorsa dal centro del disco

**TRANSITORIO**

VELOCITÀ DI SOGLIA: velocità oltre la quale il sistema diventa instabile

Ho 3 possibilità per la risoluzione dell'equazione:

① SCONSIGLIATA POICHÉ MOLTO DIFFICILE

Divido parte reale da parte immaginaria →  $z = x_c + i y_c$  → calcolo il polinomio di grado 4 e applicando il metodo di Routh-Hurwitz scopro quando la soluzione è stabile o instabile.

② SCONSIGLIATA POICHÉ DIFFICILE

Sono  $z = A e^{st}$  → sostituisco e ottengo un polinomio di grado 2 a coefficienti complessi.

③ CONSIGLIATA

Sono  $z = A e^{st}$  se  $S_R > 0 \Rightarrow$  instabilità

$S = S_R + i S_I$  se  $S_R < 0 \Rightarrow$  stabilità

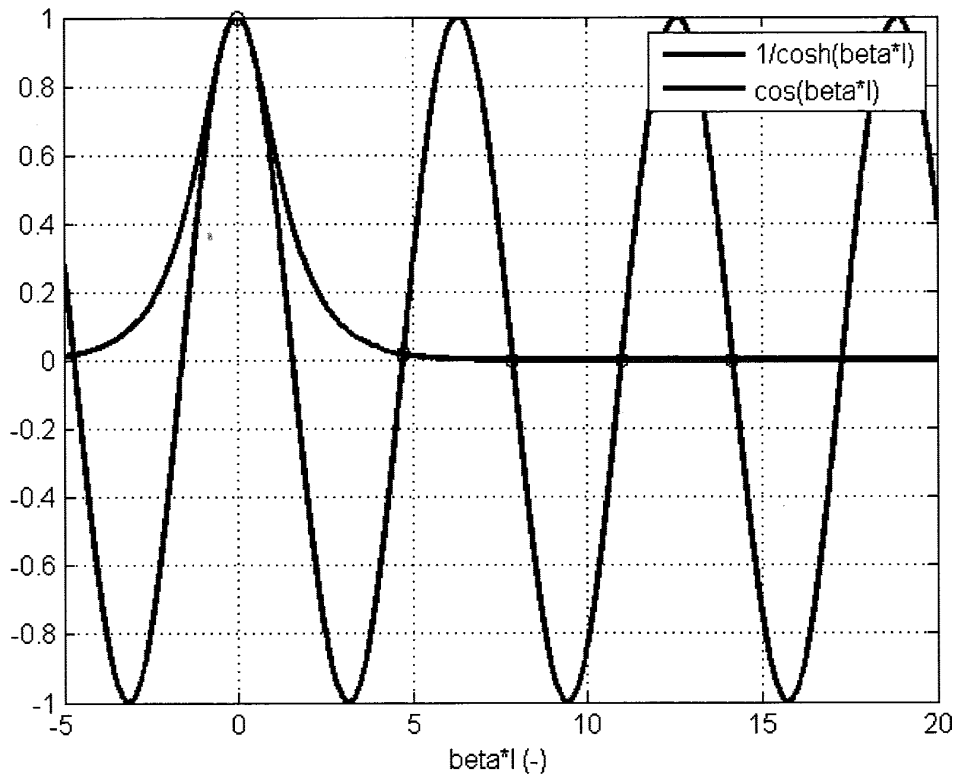
$S_R = 0$  mi fornisce la soglia tra stabilità e instabilità

$z = A e^{i \lambda t} \Rightarrow$  vedo per quali condizioni ho una soluzione di questo tipo.  $\lambda$  indica la velocità con la quale viene percorsa la traiettoria descritta da  $z$

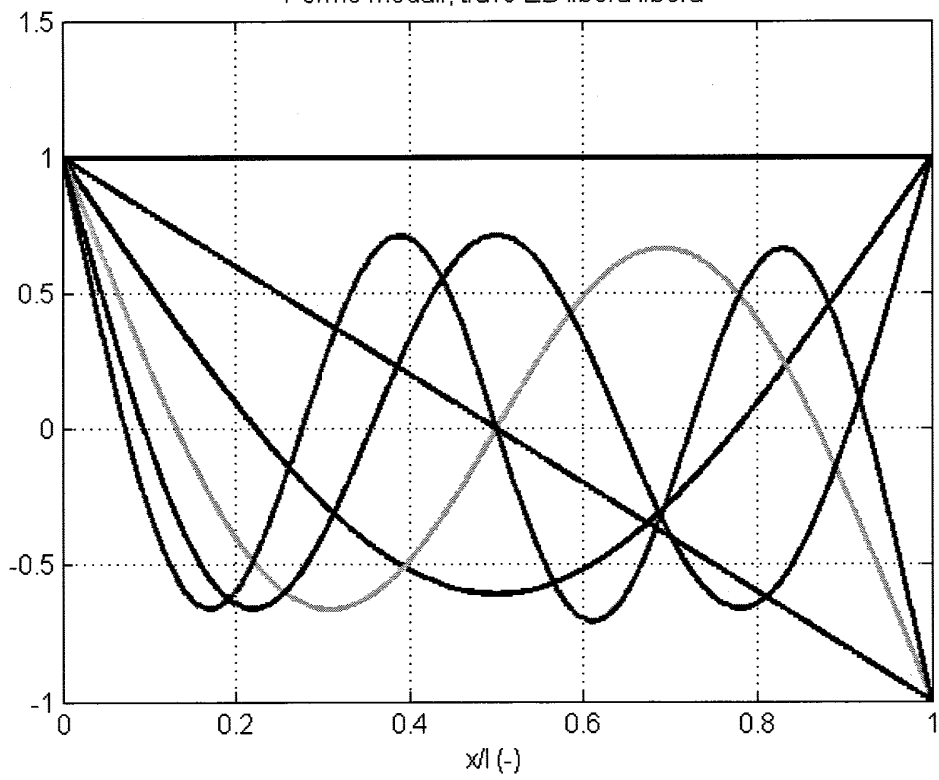
Cerco  $\lambda \in \mathbb{R}$

$-\lambda^2 m + i \lambda (C_R + C_N) + (K - i \omega C_R) = 0$

Divido parte reale e parte immaginaria e ottengo



Forme modali, trave EB libera libera



$2(\theta_0) - 4(\theta_0) - 5 \text{ lbf} - 7 \text{ forte}$

## Vibrazioni di sistemi a un grado di libertà

### 1 Oscillazioni libere torsionali

Nel sistema di figura il rotore R è supportato dall'albero AB al quale è solidale. L'albero AB è incastrato alle due estremità.

Determinare: il periodo dell'oscillazione T.

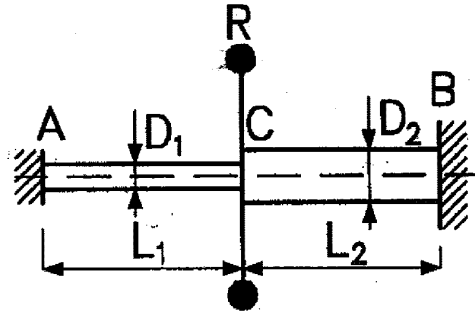
Dati:

$L_1 = 0.9 \text{ m}$ ,  $L_2 = 1.5 \text{ m}$ ,  $D_1 = 10 \text{ mm}$ ,  $D_2 = 12 \text{ mm}$ ;

$m = 200 \text{ kg}$ ,  $\rho = 450 \text{ mm}$  (massa e raggio di inerzia del rotore R);

$G = 80000 \text{ N/mm}^2$  (modulo di elasticità tangenziale del materiale).

$[T = 2.86 \text{ s}]$



### 2 Oscillazioni forzate

Il sistema rappresentato in figura si muove su un piano orizzontale e può compiere piccole oscillazioni intorno ad un asse verticale passante per O.

Al punto B viene applicata una forza  $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$ .

Si consideri trascurabile la massa dell'asta AB.

Disegnare il diagramma di corpo libero del sistema.

Calcolare: la pulsazione naturale del sistema  $\omega_n$ , la costante di smorzamento  $\beta$  per avere un fattore di smorzamento  $\zeta = 0.5$ , l'ampiezza  $\theta_0$  delle oscillazioni ed il ritardo di fase  $\varphi$  a regime.

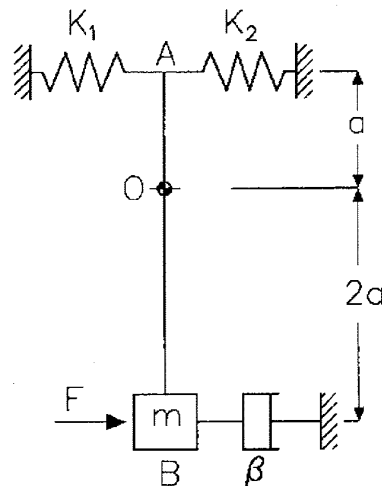
Dati:

$k_1 = 100 \text{ N/m}$ ;  $k_2 = 300 \text{ N/m}$ ;

$a = 0.1 \text{ m}$ ;  $m = 1 \text{ kg}$ ;

$F_0 = 1 \text{ N}$ ;  $\Omega = 2 \text{ rad/s}$ .

$[\omega_n = 10 \text{ rad/s}$ ;  $\beta = 10 \text{ Ns/m}$ ;  $\vartheta_0 = 0.051 \text{ rad}$ ;  $\varphi = 11.77^\circ$ ]



### 3 Oscillazioni libere smorzate

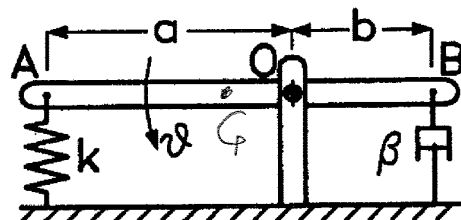
L'asta rappresentata in figura, di lunghezza  $(a+b)$  e massa  $m$  uniformemente distribuita, è in posizione orizzontale e può ruotare intorno alla cerniera O. In A è collegata una molla di rigidezza  $k$  e in B è collegato uno smorzatore con costante di smorzamento  $\beta$ .

Disegnare il diagramma di corpo libero dell'asta; determinare l'equazione delle piccole oscillazioni che compie l'asta intorno ad O e il valore della costante di smorzamento  $\beta$  per avere un fattore di smorzamento  $\zeta = 0.5$ .

Dati:

$a = 1.2 \text{ m}$ ,  $b = 0.8 \text{ m}$ ;  $m = 80 \text{ kg}$ ;  $k = 50 \text{ kN/m}$ .

$[I_O \ddot{\vartheta} + b^2 \beta \dot{\vartheta} + ka^2 \vartheta = 0$ ;  $\beta = 2291 \text{ Ns/m}]$



#### 4 Oscillazioni forzate

L'asta rappresentata in figura, di lunghezza  $(a+b)$  e massa  $m$  uniformemente distribuita, è in posizione orizzontale e può ruotare intorno alla cerniera  $O$ . In  $A$  è collegata una molla di rigidità  $k$  e in  $B$  è collegato uno smorzatore con costante di smorzamento  $\beta$ .

In  $A$  è applicata una forza verticale  $F = F_0 \sin(\Omega t)$ .

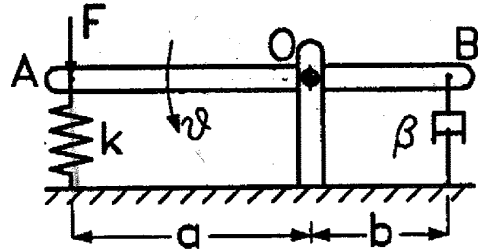
Disegnare il diagramma di corpo libero dell'asta; determinare l'equazione delle piccole oscillazioni che compie l'asta intorno ad  $0$  e la risposta del sistema a regime (ampiezza  $\theta_0$  e ritardo di fase  $\varphi$ ).

Dati:  $a = 1.2$  m,  $b = 0.8$  m;  $m = 80$  kg;  $k = 50$  kN/m;

$\beta = 2291$  Ns/m;  $F_0 = 200$  N,  $f = 13$  Hz (ampiezza e frequenza della forzante).

$$[I_O \ddot{\vartheta} + b^2 \beta \dot{\vartheta} + ka^2 \vartheta = aF_0 \sin(\Omega t);$$

$$[\vartheta_0 = 0.00137 \text{ rad}; \varphi = 136.73^\circ]$$



#### 5 Oscillazioni forzate

*CALCOLO  $\theta_0$*

L'asta rappresentata in figura, di lunghezza  $(a+b)$  e massa  $m$  uniformemente distribuita, è in posizione orizzontale e può ruotare intorno alla cerniera  $O$ . In  $A$  è collegata una molla di rigidità  $k$  e in  $B$  è collegato uno smorzatore con costante di smorzamento  $\beta$ . All'estremità libera della molla è imposto un moto verticale  $x = x_0 \sin(\Omega t)$ .

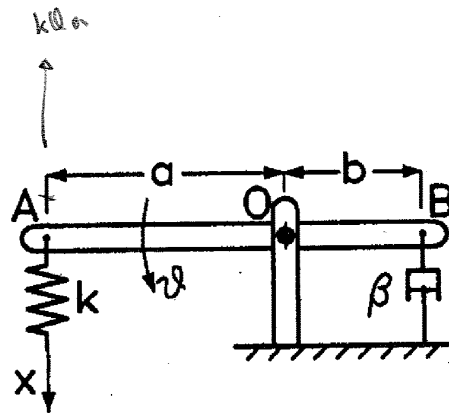
Disegnare il diagramma di corpo libero dell'asta; determinare l'equazione delle piccole oscillazioni che compie l'asta intorno ad  $0$  e la risposta del sistema a regime (ampiezza  $\theta_0$  ritardo di fase  $\varphi$ ).

Dati:

$a = 1.2$  m,  $b = 0.8$  m;  $m = 80$  kg;  $k = 50$  kN/m;  $\beta = 2291$  Ns/m;  $x_0 = 10$  mm,  $f = 7$  Hz.

$$[I_O \ddot{\vartheta} + b^2 \beta \dot{\vartheta} + ka^2 \vartheta = kax_0 \sin(\Omega t);$$

$$[\vartheta_0 = 0.0091 \text{ rad}; \varphi = 77.56^\circ]$$



#### 6 Integrale di convoluzione

*PASSAGGIO INTERMEDIO*

Assegnato un sistema ad un grado di libertà di massa  $m$  e rigidità  $k$  non smorzato, si calcoli la risposta alla forzante  $f(t) = F_0 \sin(\omega_n t) \cdot u(t)$  con condizioni iniziali nulle e  $\omega_n = \sqrt{k/m}$ . A tale scopo si applichi l'integrale di convoluzione e si confronti la soluzione con quella ottenuta applicando un metodo alternativo.  $u(t)$  è la funzione gradino unitario.

$$\left[ x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \left( -\frac{1}{2} t \cos(\omega_n t) + \frac{1}{2\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \cdot u(t) \right]$$

**6bis** Per lo stesso sistema si calcoli con l'integrale di convoluzione la risposta alla forzante

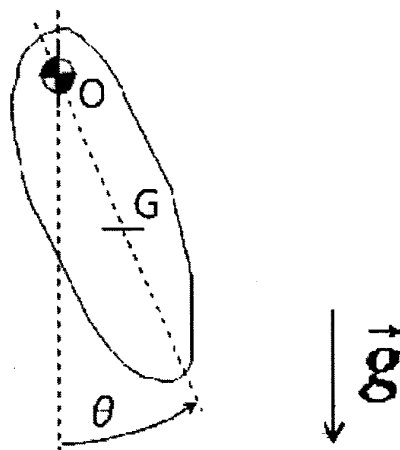
$$f(t) = F_0 \sin(\omega t) \cdot u(t): \quad \left[ x(t) = \frac{F_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right) \cdot u(t) \right]$$



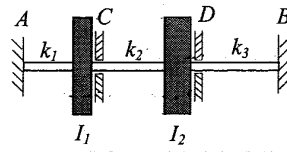
## 8 Pendolo composto

E' assegnato un pendolo fisico di cui si conosce la massa complessiva  $m$ , il momento di inerzia baricentrico  $I_G$  e la distanza tra il baricentro e la cerniera  $OG = l$ . Si assuma come coordinata del moto l'angolo  $\vartheta$  formato tra la retta congiungente il baricentro G e la cerniera O e la retta verticale, come illustrato nella figura. Si richiede di svolgere i seguenti punti:

- disegnare il diagramma di corpo libero del pendolo
- ricavare l'equazione del moto nella coordinata  $\vartheta$
- individuare le posizioni di equilibrio e studiarne la stabilità
- linearizzare l'equazione nell'intorno del punto di equilibrio stabile e calcolare la pulsazione naturale.



✓ 4 Oscillazioni torsionali di alberi elastici



CALCOLO  
DI Br

Come funzione  
metto sempre  
zero?

Si consideri il sistema rappresentato nella figura, costituito da due dischi aventi momenti di inerzia  $I_1$  e  $I_2$  e calettati rigidamente su di un albero, il quale a sua volta è incastrato alle estremità A e B, mentre è impedita la sua traslazione laterale in C e D. Le tre parti dell'albero hanno rigidità torsionale  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ . Si ricavino le equazioni del moto, assumendo come coordinate lagrangiane le rotazioni assolute dei dischi.

Ipotezzando inoltre che le tre porzioni di albero abbiano la stessa rigidità  $k$ , e che  $I_2 = 2I_1$ :

1) si ricavino gli autovalori e la matrice modale;

$$\left[ \begin{array}{l} \omega_1^2 = 0.634k/I_1; \omega_2^2 = 2.366k/I_1 \\ [\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.366 & -0.366 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

2) si calcoli la frequenza di antirisonanza del sistema supponendo di applicare una coppia armonica al

disco 1;  $\left[ f_{ar} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k_1/I_1} \right]$

3) si supponga che l'intero sistema stia ruotando alla velocità angolare costante  $\dot{\vartheta}_0$  (i vincoli in A e B sono rimossi) quando improvvisamente l'albero viene bloccato nei punti A e B: si calcoli la risposta libera che ne consegue;

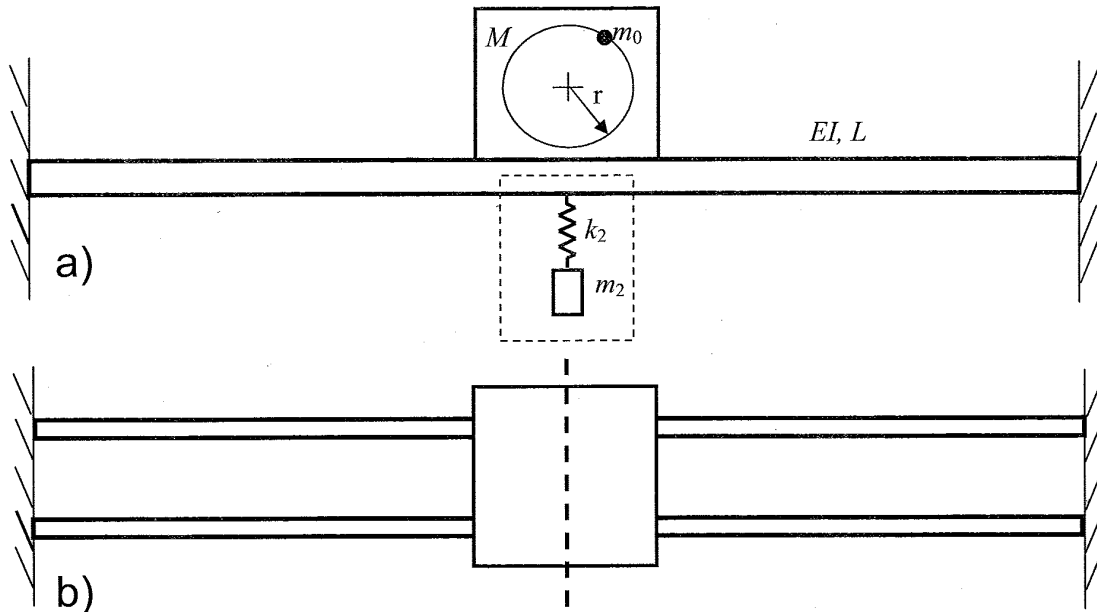
$$\left[ \begin{array}{l} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{l} 0.9905 \sin \omega_1 t + 0.1374 \sin \omega_2 t \\ 1.353 \sin \omega_1 t - 0.0503 \sin \omega_2 t \end{array} \right\} \dot{\vartheta}_0 \sqrt{\frac{I_1}{k_1}}$$

4) si calcolino infine i valori numerici delle pulsazioni proprie, assumendo i seguenti dati:

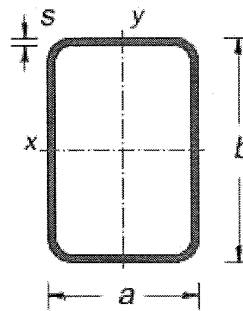
Momento di inerzia disco 1:  $I_1 = 40.5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ ;  
 diametro albero:  $d = 10 \text{ mm}$ , lunghezza di ciascun tratto dell'albero:  $l = 900 \text{ mm}$ ,  
 modulo di elasticità tangenziale  $G = 80000 \text{ N/mm}^2$ .  
 $[\omega_1 = 1.17 \text{ rad/s}; \omega_2 = 2.26 \text{ rad/s}]$

Pulsazione  
orizzontale

✓ 2 Assorbitore dinamico



b x a mm	s mm	Sezione metallica cm <sup>2</sup>	Momento di inerzia	
			I <sub>x</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>
50 x 20	2,0	2,640	7,850	1,760
	3,0	3,840	10,90	2,330
60 x 20	2,0	3,040	12,60	2,090
	3,0	4,440	17,60	2,760
80 x 20	2,0	3,840	26,80	2,740
	3,0	5,640	38,10	3,640



Si supponga di dover montare rigidamente un motore elettrico di massa  $M = 100$  kg su due travi incastrate identiche (vista frontale a), di lunghezza  $L$  e con sezione scatolare come riportato nella figura. Le due travi sono disposte parallelamente l'una all'altra (vedi vista in pianta b) e dunque ciascuna è soggetta a metà del carico statico. Noto il modulo elastico delle travi  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> e la loro lunghezza  $L = 3$  m, si chiede di individuare nella tabella la sezione dello scatolato in modo che la freccia massima, dovuta al peso del motore situato in mezzeria, sia inferiore a  $\delta_{max} = 1$  mm. La rigidezza di ciascuna trave con le descritte condizioni di vincolo e di carico è data dall'espressione  $k_0 = 192EI/L^3$ . [sezione 80 x 20,  $s = 3$ ]

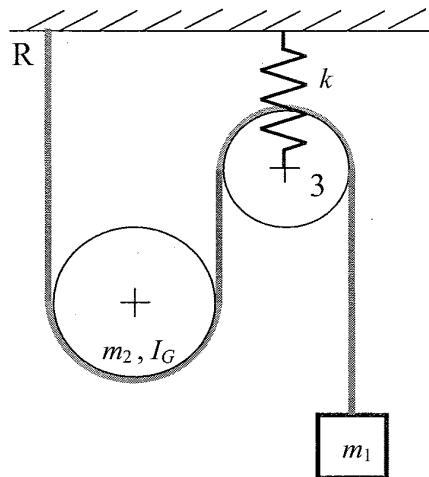
Per il sistema così costruito, supponendo le travi non inerti, si calcolino:

- la pulsazione propria delle oscillazioni flessionali nel piano verticale [ $\omega_0 = 106.67$  rad/s]
- la pulsazione propria delle oscillazioni flessionali nel piano orizzontale [ $\omega_{orizz} = 32.97$  rad/s]
- la pulsazione propria  $\omega_{ass}$  delle oscillazioni assiali [ $\omega_{ass} = 1777.2$  rad/s]
- la velocità di rotazione del motore per cui si verifica la risonanza flessionale [ $n_0 = 1018.7$  rpm]

Per consentire al sistema di lavorare esattamente alla velocità  $n_0$  (e solo a quella) si decide di progettare un assorbitore dinamico in modo da sintonizzarlo sulla pulsazione di risonanza flessionale del sistema principale. Conoscendo il valore dello squilibrio statico del motore, pari a  $m_0 \cdot r = 5$  kg·mm, si scelgano il valore della massa e della rigidezza del sistema secondario in modo che l'ampiezza di oscillazione della massa aggiunta alla velocità  $n_0$  sia inferiore a 1 cm.

[Una possibile soluzione è  $m_2 = 0.5$  kg e  $k_2 = 5689.6$  N/m]

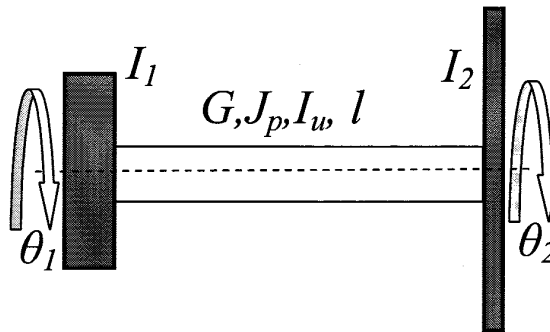
#### 4 Sistema a due gradi di libertà



Si consideri il sistema costituito da un corpo 1 di massa  $m_1 = 20$  kg, collegato ad un flessibile privo di massa ed inestensibile, che a sua volta si avvolge sulle pulegge 2 e 3 ed è collegato al telaio nel punto R. La puleggia 2 ha massa  $m_2 = 40$  kg, momento di inerzia baricentrico  $I_G = 0.196$  kg·m<sup>2</sup> e raggio  $R_2 = 150$  mm. Inoltre la puleggia 3 ha massa trascurabile ed è sostenuta da una molla di rigidezza  $k = 10$  kN/m. Supponendo che i baricentri dei tre corpi possano descrivere esclusivamente traiettorie verticali (per effetto di vincoli non rappresentati nella figura), si determinino le pulsazioni proprie del sistema descritto, utilizzando sia l'approccio lagrangiano sia quello newtoniano per ricavare le equazioni del moto.

$$[f_1 = 0, f_2 = 2.89 \text{ Hz}]$$

### ✓ 3 Oscillazioni torsionali di un albero con due volani



Il sistema rappresentato nella figura è costituito da un albero di lunghezza  $l$ , modulo di elasticità tangenziale  $G$ , momento di inerzia polare di massa per unità di lunghezza  $I_u$  e momento di inerzia polare di area  $J_p$ . Le estremità dell'albero sono collegate rigidamente a due dischi di momento di inerzia polare (di massa)  $I_1$  e  $I_2$ . I dati del problema sono:

$$I_1 = 8.85 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}; I_2 = 1.90 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}; I_u = 1.107 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^2;$$

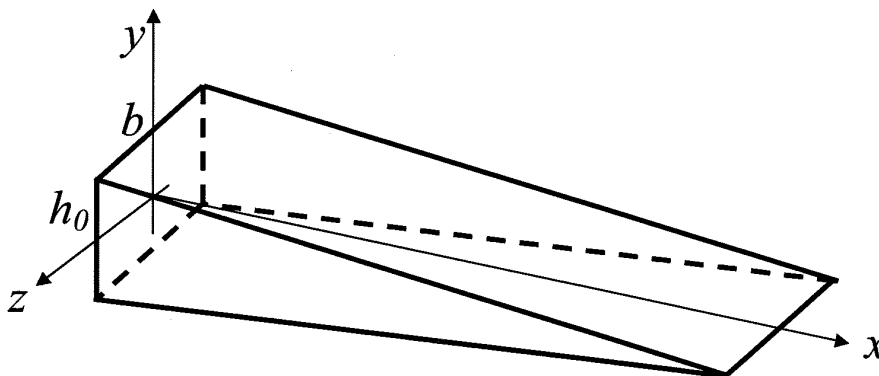
$$J_p = 4.02 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4; G = 2700 \text{ kg/mm}^2; l = 28 \text{ cm}.$$

Si calcoli il valore della prima pulsazione propria di torsione con i seguenti tre metodi:

1. albero elastico non inerte [ $\omega = 8013 \text{ rad/s}$ ]
2. metodo dell'energia di Rayleigh [ $\omega = 7783.3 \text{ rad/s}$ ]
3. metodo "esatto" [ $\omega = 7786.1 \text{ rad/s}$ ]

✓ Per il metodo di Rayleigh si assuma una deformata lineare, che si annulla nella sezione individuata applicando il metodo 1 e corrispondente alla torsione nulla.

### ✓ 4 Oscillazioni flessionali di un modello d'ala



Si consideri il modello d'ala in legno rappresentato nella figura, in cui si approssima l'ala con una trave incastrata ad un estremo (alla fusoliera) con sezione rettangolare di altezza variabile linearmente lungo l'asse  $x$ . I dati del problema sono:

Lunghezza dell'ala:  $L = 8 \text{ m}$ ; dimensioni della sezione di incastro:  $b = \text{costante}$ ,  $h_0 = 17 \text{ cm}$ ;  
 modulo elastico:  $E = 185000 \text{ kg/cm}^2$ ; densità del materiale:  $\rho = 900 \text{ kg/m}^3$ .

Si calcoli il valore della prima frequenza propria flessionale utilizzando il metodo approssimato dell'energia di Rayleigh e assumendo diverse funzioni di tentativo  $f(X)$ , dove  $X = x/L$ .

$$[f(X) = X^2/2 - X^3/6; f_1 = 3.21 \text{ Hz}]; [f(X) = X^2; f_1 = 3 \text{ Hz}]; [f(X) = X^3; f_1 = 3.18 \text{ Hz}]$$

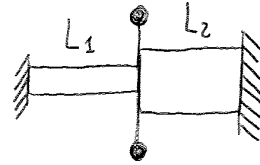
# DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI

## ESERCIZI

1

$L_1 = 0,9m$     $m = 200kg$   
 $L_2 = 1,5m$     $\rho = 450mm$   
 $D_1 = 0,01m$     $G = 80000MPa$   
 $D_2 = 0,012m$

$T = ?$



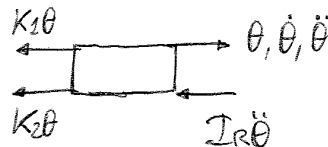
$K_{T1} = \frac{GI_p}{L_1}$     $K_{T2} = \frac{GI_p}{L_2}$    È come se fossero in parallelo

$K_{eq} = K_{T1} + K_{T2} = \left( \frac{GI_p L_2 + GI_p L_1}{L_1 L_2} \right) = 87200 + 108480 = 195680 Nm^2$

$I_R = m \rho^2 = 40,5 kgm^2$

$I_R \ddot{\theta} + (K_{T1} + K_{T2}) \theta = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{K_{T1} + K_{T2}}{I_R} \theta = 0$



$I_{p1} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{D_1}{2} \right)^4 = 982 mm^4$

$I_{p2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{D_2}{2} \right)^4 = 2034 mm^4$

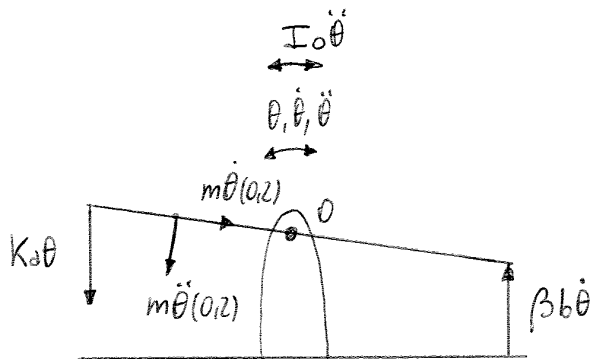
$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m}} = \sqrt{\frac{195680}{40,5}} = 2,198 \frac{1}{s}$

$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2,86 s$

3

$a = 1,2m$   
 $b = 0,8m$   
 $m = 80kg$   
 $K = 50000N/m$

$\beta = ?$



$I_a = \frac{m l^2}{12} = 26,7 kgm^2$

$\zeta = 0,5$

$K a^2 \theta + \beta b \dot{\theta} + m \ddot{\theta} (a,2) (a,2) + I_a \ddot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} (0,04m + I_a) + \beta b^2 \dot{\theta} + K a^2 \theta = 0$

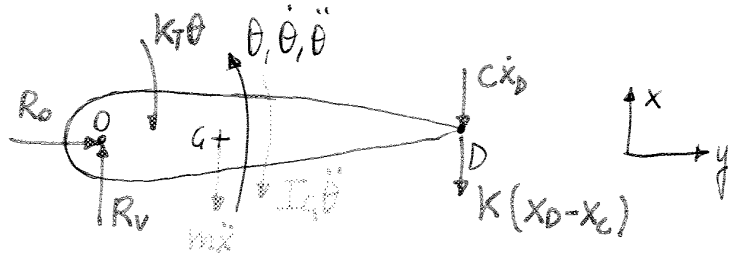
$\omega_n = \sqrt{\frac{K a^2}{m (0,04)}} = 49,07 \frac{1}{s}$

$\zeta = \frac{\beta b^2}{2 \sqrt{K m}} \Rightarrow \beta = \frac{2 \zeta}{b^2} \sqrt{K a^2 (I_a + m (0,04))} = 229 \frac{Ns}{m}$

(7)

- $OD = L = 0,5m$
- $K = 40 \text{ Kg/mm}$
- $R = 0,05m$
- $\mu = \mu_0 (1 - y/L)$
- $\mu_0 = 100 \text{ kg/m}$
- $\theta_{max} = 5^\circ$
- $\zeta = 0,6$

- $K_T = ?$
- $\omega_n = ?$
- $\omega_{vis} = ?$
- $\varphi = ?$
- $F_{s0} = ?$



$K_T \theta = \text{coppia esercitata dai comandi}$   
 Si presume che  $x_D > x_c \Rightarrow$  la molla si allunga  $\Rightarrow$  la forza applicata sarà diretta verso il basso

$$\circlearrowleft K_T \theta + I_G \ddot{\theta} + m O G \ddot{x}_G + c \dot{x}_D L + K (x_D - x_c) L = 0$$

Però ricondurre  $x$  alle  $\theta$

Si presume che proceda oscillazione  $\Rightarrow x_D \approx L \theta, \dot{x}_D \approx L \dot{\theta}, x_G \approx O G \theta$

$$(I_G + m O G^2) \ddot{\theta} + c L^2 \dot{\theta} + (K_T + K L^2) \theta = K L R \sin \omega t$$

$$I_0 = I_G + m \overline{OG^2}$$

$I_0$  può essere calcolato come:

$$I_0 = \int_0^L \mu dy y^2 = \mu_0 \int_0^L (1 - y/L) y^2 dy = \mu_0 \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4L} \right] = \frac{1}{12} \mu_0 L^3 = 1,042 \text{ Kg m}^2$$

$$I_0 \ddot{\theta} + c L^2 \dot{\theta} + K_{eq} \theta = K L R \sin \omega t$$

con  $K_{eq} = K_T + K L^2$ ,  $F_c = K L R$  (ampiezza del momento)

La forza considerata per intero è data da  $F = K L R \sin \omega t$

$$I_0 \ddot{\theta} + c L^2 \dot{\theta} + K_{eq} \theta = F_c e^{i \omega t}$$

$$\theta = \theta_0 e^{i \omega t}$$

$$(K_{eq} - I_0 \omega^2 + i \omega c L^2) \theta_0 = F_c$$

L'ampiezza dell'oscillazione vale 
$$\theta_0 = \frac{F_c}{(K_{eq} - I_0 \omega^2 + i \omega c L^2)}$$

$$|\theta_0| = \frac{K L R / K_{eq}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2 \zeta r)^2}}$$

$$|\theta_0|_{max} = \frac{K L R / K_{eq}}{2 \zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\omega_{vis} = \omega_n \sqrt{1 - 2 \zeta^2}$$

$$K_{eq} = \frac{K L R}{2 \zeta \theta_{max} \sqrt{1 - \zeta^2}} = 117100 \text{ Nm/rad} \rightarrow \text{rigidezza torsionale}$$

Impulso che  $\dot{\theta}_{eq} = 0 \Rightarrow \theta_{eq} = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

Le soluzioni sono:  $\theta_{eq1} = 0$  (soluzione banale)

$$\theta_{eq2} = \pi$$

Uso gli sviluppi di Taylor

$$f(\theta, \dot{\theta}) = f(\theta_{eq}, 0) + \left. \frac{\partial f(\theta, \dot{\theta})}{\partial \theta} \right|_{eq} (\theta - \theta_{eq}) + \left. \frac{\partial f(\theta, \dot{\theta})}{\partial \dot{\theta}} \right|_{eq} \dot{\theta} =$$

$$= 0 - mgl/I_0 \cos \theta_{eq} (\theta - \theta_{eq}) + 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I_0} \cos \theta_{eq} (\theta - \theta_{eq}) = 0$$

$$\theta_{eq1} = 0 \quad \ddot{\theta} + \frac{mgl}{I_0} \theta = 0 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{I_0}}$$

$$\theta(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t$$

Il sistema è del tipo stabile  $\Rightarrow \theta_{eq1}$  è stabile

Considero ora la posizione  $\theta_{eq1} = \pi$

I coefficienti delle derivate devono avere tratto lo stesso segno

$$\ddot{\theta} - \frac{mgl}{I_0} (\theta - \pi) = 0 \quad \theta - \pi = y \Rightarrow \dot{y} = \dot{\theta} \Rightarrow \ddot{y} = \ddot{\theta}$$

$$\ddot{y} - \frac{mgl}{I_0} y = 0 \quad y = A e^{st}$$

$$\left( s^2 - \frac{mgl}{I_0} \right) A e^{st} = 0 \quad A = 0 \Rightarrow \theta = \pi \text{ sempre}$$

$$s^2 = \frac{mgl}{I_0} \Rightarrow s_1 = -\sqrt{\frac{mgl}{I_0}} \quad s_2 = \sqrt{\frac{mgl}{I_0}}$$

$$y(t) = A e^{-\sqrt{\frac{mgl}{I_0}} t} + B e^{\sqrt{\frac{mgl}{I_0}} t}$$

Per  $|y(t)| = \infty \Rightarrow$  la risposta diverge  $\Rightarrow$  il punto di equilibrio è instabile

La linearizzazione può essere fatta solo nella posizione di equilibrio

2

$$\zeta = 0,5 \quad \Omega = 2 \text{ rad/s}$$

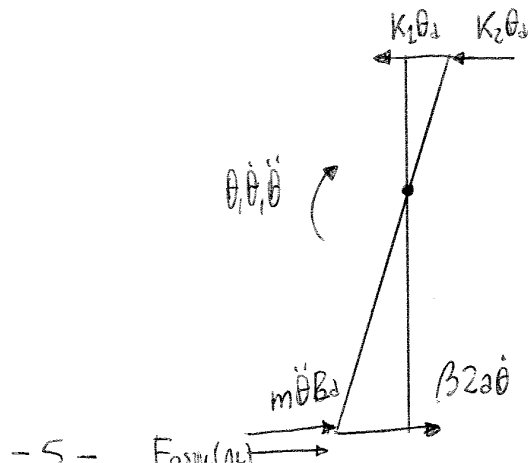
$$K_1 = 100 \text{ N/m}$$

$$K_2 = 300 \text{ N/m}$$

$$d = 0,1 \text{ m}$$

$$m = 1 \text{ kg}$$

$$F_0 = 1 \text{ N}$$





$$= \frac{\sin^3 \omega_n t}{2\omega_n} - \frac{1}{2} \cos \omega_n t + \frac{\cos \omega_n t \cancel{2\omega_n \omega_n t \cos \omega_n t}}{\cancel{2} \cdot 2\omega_n} =$$

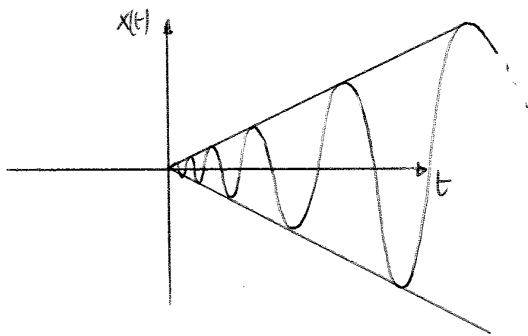
Sapendo che vale la relazione  $\sin^2 + \cos^2 = 1 \Rightarrow$  sommo primo e terzo termine raccogliendo  $\sin \omega_n t$  e ottengo

$$= \frac{\sin \omega_n t}{2\omega_n} - \frac{1}{2} t \cos \omega_n t$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \left[ \frac{\sin \omega_n t}{2\omega_n} - \frac{1}{2} t \cos \omega_n t \right] U(t)$$

$U(t)$  va messo solo perché per applicare l'integrale di convoluzione prima dello  $F$  deve essere nullo

Per  $t \rightarrow \infty$  l'ampiezza dell'oscillazione tende a  $\infty$  perché essa è somma di un termine limitato ( $\frac{\sin \omega_n t}{2\omega_n}$ ) e un termine illimitato ( $-\frac{1}{2} t \cos \omega_n t$ )



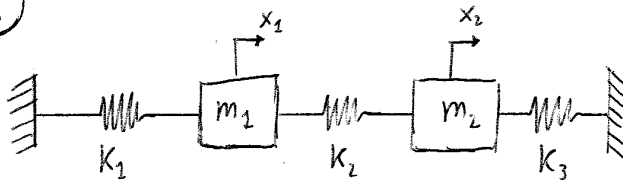
$$x(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t + a \cos \omega t + b \omega \sin \omega t$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \text{ e } \omega \rightarrow \omega_n$$

trovo  $a=0, b \neq 0$  ed il limite viene  $0/0 \Rightarrow$  devo usare De L'Hopital

## 2ª ESERCITAZIONE

1

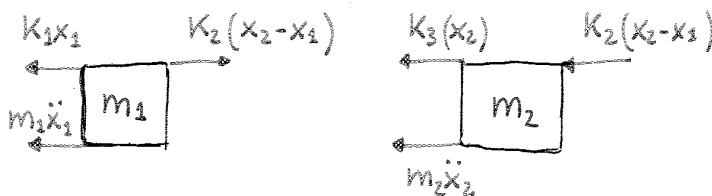


$$\begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases} = ?$$

$$\begin{aligned} m_1 &= 5 \text{ kg} \\ m_2 &= 10 \text{ kg} \\ K_1 = K_2 &= 2 \text{ N/m} \\ K_3 &= 4 \text{ N/m} \end{aligned}$$

caso 1  $\{x_0\} = [0 \ 0]^T \quad \{u_0\} = [2 \ 2]^T$

caso 2  $\{x_0\} = [1 \ 0]^T \quad \{u_0\} = [0 \ 0]^T$



$$K_1 x_1 + m_1 \ddot{x}_1 + K_2 (x_1 - x_2) = 0$$

$$K_3 x_2 + m_2 \ddot{x}_2 + K_2 (x_2 - x_1) = 0$$

Supponendo che  $x_2 > x_1 \Rightarrow$  la molla va dilatata secondo l'equazione del moto

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_3 + K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Sapendo che  $[\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$  calcolo la matrice delle masse modali

$$[M_r] = [\Psi]^T [m] [\Psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15/2 \end{bmatrix}$$

Le masse modali devono venire positive e valgono  $M_1 = 15 \text{ kg}$  e  $M_2 = 15/2 \text{ kg}$ .  
 Si può ora procedere scegliendo 2 strade:

① Calcolo la risposta passando attraverso l'inversa della matrice  $\Rightarrow [\Psi]^{-1}$

$\{X\} = [\Psi] \{\eta\}$  Trasformazione modale diretta

$\{\eta\} = [\Psi]^{-1} \{X\}$  Trasformazione modale inversa

$$[\Psi]^{-1} = \frac{\text{Adj}[\Psi]}{\det[\Psi]}$$

spazio delle configurazioni

L'obiettivo è ottenere  $\eta$ . Per farlo trasferisco le coordinate da  $X$  a  $\eta \rightarrow$  spazio modale

$$[\Psi]^{-1} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Considero il caso 1 in cui  $\{X_0\} = [0 \ 0]^T$   $\{v_0\} = [2 \ 2]^T$

$\hookrightarrow$  impulso velocità non nulle per ogni massa

Calcolo  $\eta$  con la trasformazione modale inversa

$$\{\eta(t)\} = [\Psi]^{-1} \{x(t)\} \quad \begin{Bmatrix} \eta_{10} \\ \eta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \eta_{10}(0) \\ \eta_{20}(0) \end{Bmatrix} = [\Psi]^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [0 \ 0]^T$$

Condizioni iniziali per  $\eta$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\eta}_{10} \\ \dot{\eta}_{20} \end{Bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = [2 \ 0]^T$$

Ora ho ottenuto le 4 condizioni iniziali nello spazio modale

$$M_r \ddot{\eta}_r + K_r \eta_r = 0 \quad \text{con } r = 1, 2$$

$$\eta_r(t) = A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t$$

$$\eta_r(0) = A_r$$

$$\dot{\eta}_r(0) = \omega_r B_r$$

$\eta_{10}$  e  $\eta_{20}$  sono le A

$$\eta_1(0) = 0 = A_1 \quad \dot{\eta}_1(0) = \omega_1 B_1$$

$$\eta_2(0) = 0 = A_2 \quad \dot{\eta}_2(0) = \omega_2 B_2$$

Dalle condizioni iniziali ottenute per le coordinate modali si ha  $A_1 = A_2 = B_2 = 0$

$$\omega_1 B_1 = 2 \Rightarrow B_1 = \frac{2}{\omega_1} = \frac{2}{\sqrt{2/5}} = \sqrt{10}$$

$$\eta_1(t) = \sqrt{10} \sin \omega_1 t$$

$$\eta_2(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \text{il secondo modo non è eccitato}$$

Ritorno alle coordinate dello spazio delle configurazioni