NUMERO: 1794A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Massara Andrea

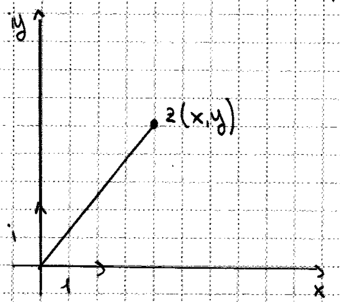
MATERIA: Metodi matematici per l'ingegneria, Analisi complessa + Probabilità - prof. Fagnani, Pellerey

METODI MATEMATICI (LEZ. 1)

03.03.15

AC 1: Richiami sui numeri complessi e complementi

• DEF: I numeri complessi sono punti del piano, contenuti in $\mathbb{C}$



$1 = (1,0)$ UNITÀ REALE

$i = (0,1)$ " IMM.

$$\Rightarrow z(x,y) = \underbrace{x}_{Re(z)} + i\underbrace{y}_{Imm(z)}$$

• SOMMA e PRODOTTO: * la somma usa la regola del parallelogramma:

$$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$$

$$\downarrow$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

* il prodotto parte dall'assunto $i^2 = -1$:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_2y_1 + ix_1y_2 - y_1y_2$$

$$= \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{Re(z_1z_2)} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{Im(z_1z_2)}$$

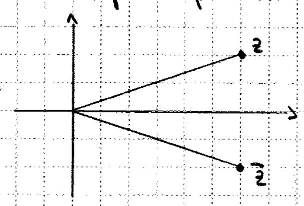
$\Rightarrow$ Dunque $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo: quello dei numeri complessi

tale campo ha le proprietà note

• CONIUGATO e MODULO: * coniugato:

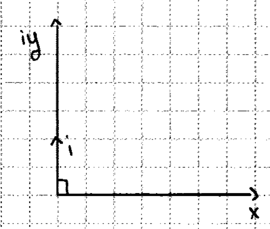
dato $z = x + iy$ sarà $\bar{z} = x - iy$

(ossia cambia il segno la parte immaginaria)



ESEMPIO: $z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$ ossia il quadrato del modulo $|z|^2$

$z^3 = i$

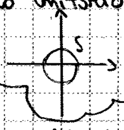


$|i| = 1$

$\arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $i = \rho e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

se $z = \rho e^{i\theta}$ ho che $z^3 = \rho^3 e^{i3\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

NB: $S = \{ z = e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R} \}$ è l'insieme dei numeri complessi di modulo unitario (circ. unitaria)

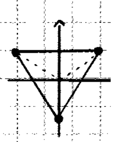


$$\begin{cases} \rho^3 = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \rho = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$k=0$ $\theta = \pi/6$

$k=1$ $\theta = 5/6\,\pi$

$k=2$ $\theta = \frac{3}{2}\pi$



OSS: se $w \in \mathbb{C}$ le soluzioni di $z^n = w$ formano sempre un poligono regolare di n vertici con il baricentro in $(0,0)$

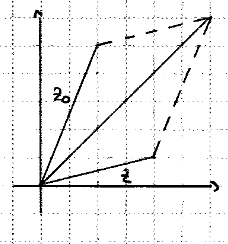
NB: studieremo funzioni definite su $\mathbb{C}$

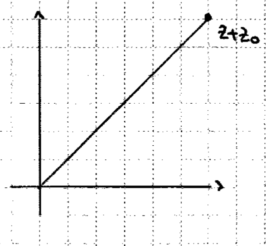
$$\downarrow$$

$$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ESEMPIO: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ del tipo $f(z) = \gamma z + z_0$ dove γ e z_0, $\in \mathbb{C}$, sono fissati

(rinuncio a vedere il grafico di f perché sarebbe in $\mathbb{R}^4$ $(\mathbb{C} \cdot \mathbb{C})$ e mi limito a vedere come evolve z)





* $\gamma = 1$ $\quad f(z) = z + z_0$

TRASL. DEL PIANO

* $z_0 = \phi$ $\quad f(z) = \gamma z$

uso l'esponenziale e $z = \rho e^{i\theta}$ e $\gamma = r e^{i\tau}$

$\Rightarrow f(z) = \rho r e^{i(\tau + \theta)}$

se $r = 1$ $(|\gamma| = 1)$, l'effetto è una rot. di z di angolo in senso antiorario

ROTAZIONE PURA

se $r \neq 1$ $(|\gamma| \neq 1)$, oltre alla rot. c'è un effetto ampl. o contrattivo

ROTO OMOTETIE

Ma qual è il motivo? TRASL. e ROT. vivono sul piano, RIFLESSIONE necessita la terza dimensione

A breve scriveremo formalmente tale motivazione

... INTUITIVAMENTE ...

NOTAZIONI SULLE FUNZIONI:

Data una funzione $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in generale si può rappresentare usando le coordinate cartesiane nel dominio e nel codominio:

$z = x+iy \qquad f(z) = u + iv$ funzioni variabili della variabile dipendente

u e v sono funzioni di z dunque della coppia (x, y)

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Tornando all'esempio precedente ho:

$f(z) = \gamma z + z_0$ con $\gamma = \kappa e^{i\tau} = \kappa\cos\tau + i\kappa\sin\tau$

con $z_0 = x_0 + y_0$

(1) GENERICA

Vogliamo scrivere $f(z) = u + iv$ a partire da $z = x+iy$

$$\Rightarrow \gamma z + z_0 = (\kappa\cos\tau + i\kappa\sin\tau)(x+iy) + (x_0 + y_0)$$

$$= (\kappa\cos\tau \cdot x - \kappa\sin\tau y + x_0) + i(\kappa\sin\tau \cdot x + \kappa\cos\tau \cdot y + y_0)$$

Quindi $u(x,y) = \kappa\cos\tau \cdot x - \kappa\sin\tau \cdot y + x_0$

$v(x,y) = i(\kappa\sin\tau \cdot x + \kappa\cos\tau \cdot y + y_0)$

$\Downarrow$

RISCRIVIBILE IN FORMA MATRICIALE DI $\mathbb{R}^2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}}_{f(z)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \kappa\cos\tau & -\kappa\sin\tau \\ \kappa\sin\tau & \kappa\cos\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\gamma \cdot z} + \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{z_0}$$

matrice di rotazione di angolo τ (e se porto fuori lo scalare κ è l'omotetia)

$$\det \begin{pmatrix} \kappa\cos\tau & -\kappa\sin\tau \\ \kappa\sin\tau & \kappa\cos\tau \end{pmatrix} = \kappa^2 \geq 0 \quad \forall \kappa$$

$\boxed{\text{TRASLAZIONI hanno determinante positivo!}}$

__Osservazione:__ Tutte le funzioni razionali del tipo $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ hanno la proprietà di trasformare rette e cerchi in rette e cerchi e mantengono gli angoli tra vettori.
Sono dette trasformazioni __CONFORMI__, tipo le omotetie o le rotoomotetie

3 Funzioni esponenziali:

$$f(z)=e^z$$

$$z=x+iy \qquad f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

$$f(z)=e^x\cdot e^{iy} \qquad \text{(DEFINIZIONE)}$$

$$=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$$

$$\boxed{\begin{cases} u(x,y)=e^x\cos y \\ v(x,y)=e^x\sin y \end{cases}}$$

L'esponenziale complesso gode di proprietà:

1. $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$
2. $e^0=1$ → DI FATTO COME QUELLO REALE
3. $e^{-z}=\frac{1}{e^z}$

NOTAZIONE: • $\mathring{A}$ indica l'insieme dei punti interni (= parte interna di A)

• ∂A " " " " di frontiera (= frontiera di A)

• non c'è una notazione particolare per gli esterni poichè sono gli interni del complementare $\mathring{A}^c$

DUNQUE: ① insiemisticamente scrivo $\mathbb{C} = A \cup A^c$

② Topologicamente scrivo $\mathbb{C} = \mathring{A} \cup \underbrace{\partial A}_{} \cup A^{\overset{\circ}{c}}$

$\overset{\circ}{c}$ = indica che faccio prima il complementare e poi ne prendo gli interni

punti che a seconda dei casi possono essere sia di A che di A^c nella descrizione insiemistica

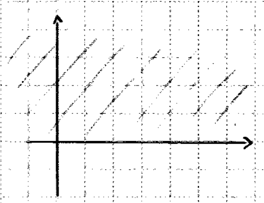
Esempi: ① $A = \mathbb{C}$

* $\mathring{A} = A$
* $\partial A = \emptyset$
* $A^{\overset{\circ}{c}} = \emptyset$

② $A = \emptyset$

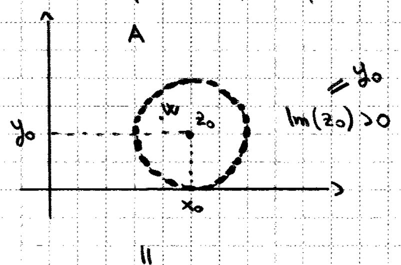
* $\mathring{A} = \emptyset$
* $\partial A = \emptyset$
* $A^{\overset{\circ}{c}} = \mathbb{C}$

③ $A = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0 \}$



* $\mathring{A} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \}$
* $\partial A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \}$
* $A^{\overset{\circ}{c}} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0 \}$

Dimostriamo quanto sopra ipotizzato:



$\Downarrow$

Mostriamo che $B_{y_0}(z_0) \subseteq A$

Sia $w \in B_{y_0}(z_0) \Rightarrow w = z_0 + re^{i\theta}$ per qualche $r < y_0$ (mi sto spostando nelle circ. concentriche)

$\operatorname{Im} w = \operatorname{Im} z_0 + r \sin\theta$

$\operatorname{Im}(r(\cos\theta + i \sin\theta)) = r \sin\theta$

$\operatorname{Im} w \geq y_0 - r > 0$ poichè $y_0 > r$ $\Rightarrow$ QUINDI $\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0 \} \subseteq \mathring{A}$

caso limite per $\sin\theta = -1$

ALTRI CONCETTI

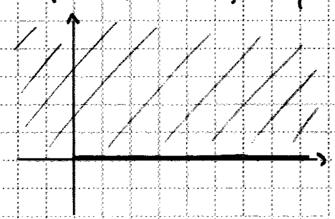
1. $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice APERTO se $A = \mathring{A}$ (= tutti i punti sono interni)

2. $A \subseteq \mathbb{C}$ " " CHIUSO " $\partial A \subseteq A$ (= contiene la frontiera)

esempi: * $\mathbb{C}, \emptyset, B_r(z_0), \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sono APERTI

* $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$; $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$, $\mathbb{C}, \emptyset$ sono CHIUSI

esempio: $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z = 0 \text{ e } \mathrm{Re}\, z > 0\}$



* vedi dopo

$\mathring{A} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$

$\partial A = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z = 0\}$ → non importa che la semiretta - non sia in A, tanto se centro z_0 su x ho sempre un pezzo dentro e un pezzo fuori

⇓

NON È NÉ CHIUSO NÉ APERTO!

NOTAZIONE:

se $A \subseteq \mathbb{C}$:

$\boxed{\bar{A} = A \cup \partial A}$ ed è chiamato CHIUSURA DI A!

Quindi A è chiuso se e solo se $A = \bar{A}$

PROPRIETÀ DEI CONCETTI ESIBITI:

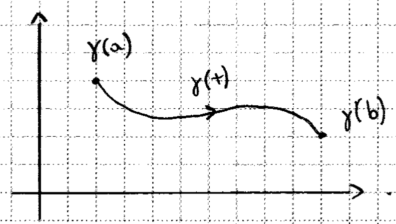
1. A è APERTO $\Longleftrightarrow$ A^c CHIUSO
2. A, B APERTI $\Longrightarrow$ $\left.\begin{matrix} A \cup B \\ A \cap B \end{matrix}\right\}$ APERTI
3. A, B CHIUSI $\Longrightarrow$ $\left.\begin{matrix} A \cup B \\ A \cap B \end{matrix}\right\}$ CHIUSI
4. $\mathring{A}$ APERTA (sempre) (deriva da $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$)
5. $\bar{A}$ CHIUSA (sempre) (deriva da $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$)

METODI MATEMATICI (LEZ.3) 10.03.15

AC 4: Curve

DEFINIZIONE: Una curva in $\mathbb{C}$ è una funzione continua γ definita su intervallo chiuso e limitato a valori in $\mathbb{C}$

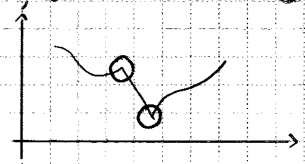
$$\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$$



$\gamma(t) \in \mathbb{C}$ (t varia tra a e b)

NOTAZIONI: $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$ dove $x(t), y(t)$ sono funzioni continue in una variabile reale

DEFINIZIONE:
- γ si dice di CLASSE C^1 se $x(t)$ e $y(t)$ sono di classe C^1
- γ si dice C^1 A TRATTI se x e y sono continue e C^1 tranne in un numero finito di punti, con discontinuità di tipo "salto"



$\gamma(t) \in C^1$ a tratti

- $\gamma'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$
- Il SUPPORTO di una curva γ è l'immagine di essa entro $\mathbb{C}$, cioè l'insieme dei punti che assume $\{\gamma(t) \mid t \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{C}$

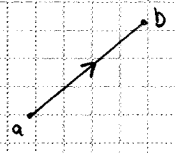
NB: La curva è qualcosa DI PIÙ DEL suo supporto!

INTERPRETAZIONE FISICA DI SUPPORTO! $\left\{\right.$ Se $\gamma(t)$ è la posizione di un corpo su $\mathbb{C}$ al tempo t, il supporto dà solo informazioni sul percorso fatto senza dire nulla su aspetti tipo la velocità

↳ so che c'è stato spostamento da A a B ma non so come, ne che percorso ha fatto!

Esempio: le curve rettilinee come sono?

$$\gamma(t) = z_0 + t\,(z_1 - z_0)$$



- semplici ✓
- chiuse ✗

Esempio: le circonferenze come sono?

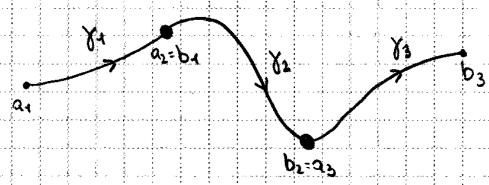
$$\gamma(t) = z_0 + r e^{it} \qquad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

- semplici ✓
- chiuse ✓

↓

di Jordan ✓ (tranne in a e b non passa mai per lo stesso punto)

CONCATENAZIONI DI CURVE



$\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$

$\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$

$\gamma_3 : [a_3, b_3] \to \mathbb{C}$

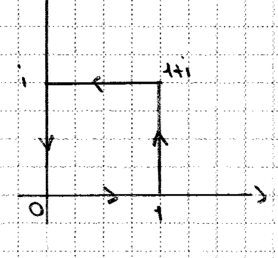
$$\begin{cases} a_2 = b_1 \\ a_3 = b_2 \end{cases} \quad \text{CONDIZIONE!}$$

Si può considerare $\gamma : [a_1, b_3] \to \mathbb{C}$ tale che

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{se } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t) & \text{se } t \in [a_2, b_2] \\ \gamma_3(t) & \text{se } t \in [a_3, b_3] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ se γ_i sono C^1 a tratti lo è anche γ

Esempio:



- Scrivere esplicitamente una curva con supporto tale quadrato (utilizzando la concatenazione)

Userò $\gamma(t) = z_0 + t\,(z_1 - z_0)$ e $\gamma(t) = z_0 + (t - t_0)(z_1 - z_0)$

traslo il tempo!

OUTLOOK

Ω regione, $z_0 \in \Omega$

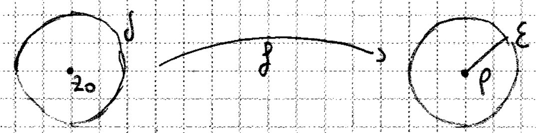
$f: \Omega \to \mathbb{C}$

- LIMITE
- CONTINUITÀ
- DERIVATA

figo di operare sui reali e non sui complessi

DEFINIZIONE: si dice che f tende ad ℓ, se z tende a z_0, ovvero se:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \text{ e } z \in R \implies |f(z) - \ell| < \varepsilon$$



ESERCIZIO 5

Determinare le radici complesse di

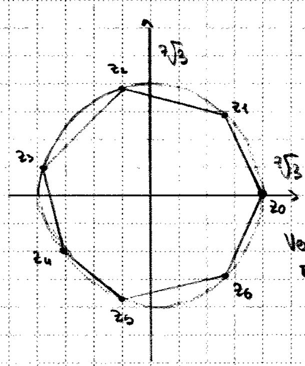
- $z^7 = +3i$ $\qquad z = \rho e^{i\theta} \rightarrow z^7 = \rho^7 e^{i7\theta} = 3i$

$$\begin{cases} \rho^7 = 3 \\ 7\theta = 2k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt[7]{3} \\ \theta = \frac{2k\pi}{7} \end{cases}$$

- $k=0$ $\quad \theta = 0$
- $k=1$ $\quad \theta = (2/7)\pi$
- $k=2$ $\quad \theta = (4/7)\pi$
- $k=3$ $\quad \theta = (6/7)\pi$
- $k=4$ $\quad \theta = (8/7)\pi$
- $k=5$ $\quad \theta = (10/7)\pi$
- $k=6$ $\quad \theta = (12/7)\pi$
- k va fino a $n-1$ perchè poi torno al primo $(k=0)$

$z_0 = \sqrt[7]{3}$ $\quad z_1 = \sqrt[7]{3}\, e^{i\frac{2}{7}\pi}$ $\quad z_2 = \sqrt[7]{3}\, e^{i\frac{4}{7}\pi}$ $\quad z_3 = \sqrt[7]{3}\, e^{i\frac{6}{7}\pi}$ $\quad z_4 = \sqrt[7]{3}\, e^{i\frac{8}{7}\pi}$ $\quad z_5 = \sqrt[7]{3}\, e^{i\frac{10}{7}\pi}$

$z_6 = \sqrt[7]{3}\, e^{i\frac{12}{7}\pi}$

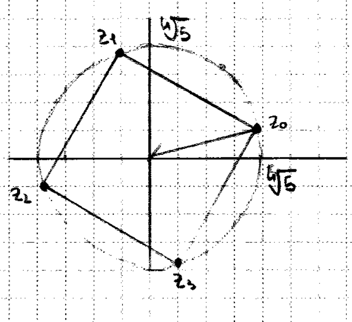


Vertici di un ETTAGONO

- $z^4 = 3 + 4i$ $\qquad z^4 = \rho^4 e^{i4\theta}$ $\qquad z^4 = \rho e^{ic}$

$$\begin{cases} \rho^4 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ 4\theta = c \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt[4]{5} \\ \theta = \frac{c + 2k\pi}{4} \end{cases}$$

- $k=0$ $\quad \theta = c/4$
- $k=1$ $\quad \theta = c/4 + \frac{\pi}{2}$
- $k=2$ $\quad \theta = c/4 + \pi$
- $k=3$ $\quad \theta = c/4 + \frac{3}{2}\pi$



NB $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ VALE ANCHE SU $\mathbb{C}$ $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

Funzioni iperboliche

$$\boxed{\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}}$$

uguali alle reali ma con variabile complessa

ESERCIZIO 8

Determinare le soluzioni di:

$\cosh(z) = 0$ (in $\mathbb{R}$ $\cosh(x) = 0$ $\nexists x \in \mathbb{R}$)

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 0$$

$e^z + e^{-z} = 0$ con $z = x + iy$

$e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy} = 0$

$$e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\underbrace{\cos(-y)}_{=\cos y} + i\underbrace{\sin(-y)}_{=-\sin y}) = 0$$

$\cos y(e^x + e^{-x}) + i\sin y(e^x - e^{-x}) = 0$

$$\begin{cases} \cos y(e^x + e^{-x}) = 0 \\ \sin y(e^x - e^{-x}) = 0 \end{cases}$$

$\cos y = 0$ $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

caso a) $\sin y = -1$ $-e^x + e^{-x} = 0$ $x = 0$

$z = x + iy = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i$

caso b) $\sin y = 1$ $e^x - e^{-x} = 0$

$z = x + iy = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i$

$\Rightarrow$ come mi aspettavo le soluzioni sono puramente immaginarie!

ESERCIZIO 9

Determinare le soluzioni di:

$\sinh(z) = i$

$\sinh = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i$

$e^z - e^{-z} = 2i$ ($z = x + iy$)

$e^x e^{iy} - e^{-x} e^{-iy} = 2i$

$e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)) = 2i$

$e^x(\cos y + i\sin y) - e^{-x}(\cos y - i\sin y) = 2i$

$\cos y(e^x - e^{-x}) + i\sin y(e^x + e^{-x}) = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{cases} \cos y(e^x - e^{-x}) = 0 \\ \sin y(e^x + e^{-x}) = 2 \end{cases}$$

$y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

a) se $\sin y = 1$

$e^x + e^{-x} = 2 \rightarrow x = 0$

b) se $\sin y = -1$

$-e^x - e^{-x} = 2$

$(e^x + e^{-x}) = -2$ $\nexists$

ESERCIZIO 13

Trovare α tale che:

$P(z) = z^3 - z^2 + z + 1 + \alpha$ abbia $-i$ come radice

• $P(z) = (z+i) \cdot \underbrace{Q(z)}_{\text{pol di grado } n-1}$ • oppure sostituisco $-i$

$z^3 - z^2 + z + 1 + \alpha \;|\; z+i$

$z^3 + iz^2 \qquad\qquad | \; z^2 + z(-1-i)$

$// \; z^2(-1-i) + z + 1 + \alpha$

$z^2(-1-i) + z(-i+1)$

$// \; iz + 1 + \alpha$

$iz - 1$

$// \; 2 + \alpha$

$\alpha = -2$

ESERCIZIO 14

Rappresentare nel piano di Gauss

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid \underbrace{z\bar{z} \le 4}_{①} ; \underbrace{i(z+\bar{z})(z-\bar{z}) \ge 0}_{②} \}$$

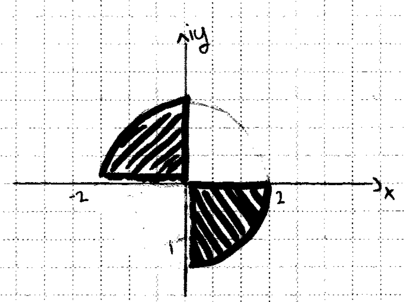
① $|z|^2 = z \cdot \bar{z} \le 4 \qquad |z| \le 2$

circonferenza di raggio 2

② $i(x+iy+x-iy)(x+iy-x+iy) \ge 0$

$i(2x)(2iy) \ge 0$

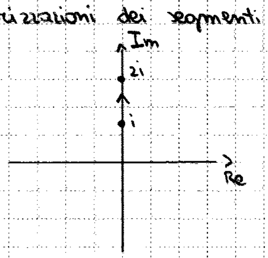
$-4xy \ge 0 \qquad xy \le 0 \qquad$ II e IV QUADRANTE



ESERCIZIO 15

Rappresentare le parametrizzazioni dei segmenti di estremi:

1) i ; $2i$



$z(t) = x(t) + i\,y(t)$

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 1+t \end{cases} \quad \text{con } t \in [0,1]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 258

METODI MATEMATICI (LEZ. 4)
17.03.15

AC 5: Limiti e continuità e derivabilità

Ω regione $\subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \overline{\Omega}$:

LIMITE: Sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$ si dice che f tende ad $\ell \in \mathbb{C}$ per $z \to z_0$ se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che

$$\begin{cases} z \in \Omega \\ |z - z_0| < \delta \\ z \neq z_0 \end{cases} \Rightarrow |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell}$$

OSSERVAZIONE

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell \iff \lim_{z \to z_0} (f(z) - \ell) = \emptyset$$

$$\iff \lim_{z \to z_0} |f(z) - \ell| = \emptyset$$

Dato $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ con $z = x + iy$ ed $\ell = \mathrm{Re}(\ell) + i\,\mathrm{Im}(\ell)$
si osservi che $|f(z) - \ell| = \sqrt{(u(x,y) - \mathrm{Re}(\ell))^2 + (v(x,y) - \mathrm{Im}(\ell))^2}$, che se $\lim_{z \to z_0} |f(z) - \ell| = \emptyset$. Ciò è uguale a dire che $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \sqrt{(u(x,y) - \mathrm{Re}(\ell))^2 + (v(x,y) - \mathrm{Im}(\ell))^2} = \emptyset$

$\Downarrow$

LIMITE NEL SENSO DELL'ANALISI 2

PROPOSIZIONE: sono fatti equivalenti

1. $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$
2. $\lim_{z \to z_0} |f(z) - \ell| = \emptyset$
3. $\begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = \mathrm{Re}(\ell) \\ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = \mathrm{Im}(\ell) \end{cases}$

Ora li dimostro!

DERIVABILITÀ

Se $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $z_0 \in D$ e $f: D \to \mathbb{C}$

si dice che f è derivabile in z_0 se esiste $\boxed{\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}$. Tale limite (se esiste) si indica $f'(z_0)$ e si chiama derivata di f in z_0

* Come nel caso reale valgono le usuali regole di derivazione (f, g funzioni derivabili in z_0, allora $f+g$, $f \cdot g$ sono derivabili):

$(f+g)' = f' + g'$ calcolate nel punto z_0

$(f \cdot g)' = f'g + g'f$ " " " "

$\to$ Dimostrabili come nei reali!

NB: funzioni polinomiali, razionali, esponenziali sono derivabili nel dominio e valgono le usuali regole:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \to f'(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot (k)\, z^{k-1} \quad \forall z$$

$\Rightarrow$ Si può leggere la derivabilità di f sulle componenti u e v, come in limite e continuità?

RICHIAMI: $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio

$(x_0, y_0) \in D$ $\quad u \in D \to \mathbb{R}$, si dice che u è DIFFERENZIABILE in (x_0,y_0) se

$\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tale che $u(x,y) = u(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$

Inoltre, se accade, necessariamente:

$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \beta = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

OSSERVAZIONE: se u e v di classe C^1 su $D \Rightarrow u, v$ differenziabile su D

se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x+iy$ e $z_0 = x_0+iy_0$, allora f è derivabile in z_0 è uguale a dire u e v differenziabili in (x_0,y_0)?

Si osservi che $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right] = \phi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0} = 0$ cioè $f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0) = o(z-$

da cui $\boxed{f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)}$ $\Longrightarrow$ = SVILUPPO DI TAYLOR AL I ORDINE CON RESTO DI PEANO

Ora passo alle coordinate:

$u(x,y) + i\,v(x,y) = u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + (\mathrm{Re}\, f'(z_0) + i\, \mathrm{Im}\, f'(z_0))(x-x_0+i(y-y_0)) + o(z-z_0)$

separo Re e Im

$u(x,y) = u(x_0,y_0) + \mathrm{Re}\, f'(z_0)(x-x_0) - \mathrm{Im}\, f'(z_0)(y-y_0) + \omega_1(x,y)$ $\qquad o(z-z_0) = \omega_1(x,y) + i\omega$

$v(x,y) = v(x_0,y_0) + \mathrm{Im}\, f'(z_0)(x-x_0) + \mathrm{Re}\, f'(z_0)(y-y_0) + \omega_2(x,y)$

verificando che ω_1 e ω_2 sono resti corretti è garantita la differenziabilità di u e v

METODI MATEMATICI (LEZ. 5)
20.3.2015

AC 6: Funzioni olomorfe (e ...)

DEFINIZIONE:

$D \subseteq \mathbb{C}$ dominio e $f: D \to \mathbb{C}$

Si dice f "OLOMORFA" se è derivabile in D (e ha derivata $f'(z)$ continua su D)

OSSERVAZIONE:

La parte in parentesi è in realtà superflua in quanto è dimostrabile che se $f'(z)$ esiste in D, essa è automaticamente continua. Tale fenomeno distingue nettamente le funzioni derivabili di variabile reale e complessa.

Su questi fenomeni di "autoregolarizzazione" ritorneremo in seguito

TEOREMA 2 $\longrightarrow$ Riformulo 1 con la definizione di olomorfia

Data $f: D \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ con $z = x+iy$, i seguenti fatti sono equivalenti:

① f è olomorfa su D

② u e v sono di classe C^1 su D e valgono dunque le condizioni di CR:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{su } D$$

Esempio: $f(z) = z^2$, dimostro che è olomorfa su D.

$$z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

$u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono di classe C^∞ poiché polinomi e calcolando le derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

... mi accorgo che valgono le condizioni CR, quindi f è olomorfa su $\mathbb{C}$!

Esempio: $f(z) = \bar{z} = x - iy$

$u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$

come prima calcolo le derivate parziali di $f(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \ \times \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ \checkmark$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ \checkmark \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -1 \ \times$$

... mi accorgo che non valgono le CR, quindi f non è derivabile su nessun punto di $\mathbb{C}$!

Esempio: e^z è olomorfa $\Rightarrow$ $\begin{cases} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{cases}$ sono armoniche

Data $f(z)$ olomorfa allora le sue comp. reali e imm. sono armoniche

Non posso mettere a caso insieme una parte reale e una immaginaria
↓
Ne nasce il "problema del completamento armonico":

Data $u: D \to \mathbb{R}$ armonica ci chiediamo se è possibile trovare un'altra funzione armonica $v: D \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$$

sia olomorfa.

$\Rightarrow$ Le v con tali proprietà sono dette complementi armonici di u

Esempio: $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ è armonica, come costruisco il complemento armonico v? Impongo le condizioni di CR a v

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

calcolo le parziali rispetto a x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x+1 \end{cases}$$

Come risolvo?

può essere $f(y)$ perché y l'ho tenuto costante!

- $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y \qquad v(x,y) = \int 2y \, dx = 2yx + c(y)$

NB
il fatto che io sia partito da una funzione armonica mi permette di trovare $c(y)$. In caso contrario NO!

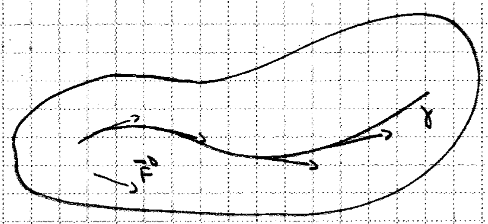
Usando ora la II eq.: $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x+1 = 2x + c'(y) \Rightarrow c'(y) = 1 \Rightarrow c(y) = y + $

Segue che $v(x,y) = 2yx + y + c$

DEFINIZIONE:

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio $\quad \gamma : [a,b] \to D$, curva regolare:

$\vec{F} : D \to \mathbb{R}^2$ è detto CAMPO



$$\boxed{\begin{gathered} \vec{F}(x,y) = \big(\alpha(x,y)\,,\ \beta(x,y)\big) \quad e \quad \gamma(t) = x(t) + i y(t) \\ \int_\gamma \vec{F}(x,y)\, d\vec{P} = \int_a^b \Big(\alpha\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t) + \beta\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\, dt \end{gathered}}$$

$\Rightarrow$ INTEGRALE DI LINEA di $\vec{F}$ lungo γ anche detto LAVORO di $\vec{F}$ lungo γ

2) Studiare la derivabilità in $\mathbb{C}$ di:

$$f(z) = e^z$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{u(x,y)} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}$$

Applico le condizioni di CR:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$$

$\to$ le condizioni CR sono soddisfatte, quindi c'è $\underbrace{\text{olomorfismo su } \mathbb{C}}$

$\boxed{= \text{FUNZIONE INTERA}}$

3) Determinare la derivabilità di:

- $f(z) = \sin z =$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}\cdot e^{-y} - e^{-ix}\cdot e^{y}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos(-x) + i\sin(-x))}{2i} = \frac{e^{-y}\cos x + ie^{-y}\sin x - e^{y}\cos(-x) - ie^{y}\sin(-x)}{2i}$$

$$= \frac{(e^{-y} - e^{y})\cos x + i(\sin x(e^{-y} + e^{y}))}{2i} = + \frac{\sin x(e^{-y}+e^{y})}{2} - \frac{i\cos x(e^{-y} - e^{y})}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\cos x(e^{-y}+e^{y})}{2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sin x(e^{-y} - e^{y})}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin x(-e^{-y} + e^{y})}{2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\cos x}{2}(-e^{-y} - e^{y}) = \frac{\cos x}{2}(e^{-y} + e^{y})$$

$\to$ olomorfismo su $\mathbb{C}$ = FUNZIONE INTERA

- $f(z) = \cos z$

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y} + e^{-ix}e^{y}}{2} = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos(x) - i\sin x)}{2}$$

$$= \frac{\cos x(e^{y} + e^{-y})}{2} + \frac{i\sin x(e^{-y} - e^{y})}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sin x}{2}(e^{y} + e^{-y}) \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos x}{2}(e^{-y} - e^{y})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos x}{2}(e^{y} - e^{-y}) \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x(-e^{-y} - e^{y})$$

$\to$ olomorfismo su $\mathbb{C}$ = FUNZIONE INTERA

$$\begin{cases} -3x^2-y^2=-x^2-3y^2 \\ -2xy=2xy \end{cases}$$

se $x=0$ $\quad -y^2=-3y^2 \quad -2y^2=0 \quad y=0$

se $y=0$ $\quad -3x^2=-x^2 \quad x=0$

l'unico punto di derivabilità è $z=\emptyset$

$\Downarrow$

NON è olomorfa

(6) Determinare tutte le funzioni olomorfe

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tali che $Re(f(z))=-1+Im(z)$

$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$

$u(x,y)=-1+y \leftarrow$ condizione fornita

affinché sia olomorfa devono valere le CR:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\emptyset \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=?$

$\frac{\partial u}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=?$

impongo che $\frac{\partial v}{\partial y}=0$ e $\frac{\partial v}{\partial x}=-1$, ossia che $v=-x+c$

$\Rightarrow f(x+iy)=\underbrace{-1+y}_{Re(f(z))}+i\underbrace{(-x+c)}_{Im(f(z))}$

* come posso riscriverla in funzione di z?

$f(z)=-iz-1+ic$

(7) Determinare tutte le funzioni olomorfe

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tali che $Re(f(z))=Im(z)$ e $f(0)=i$

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$u(x,y)=y \leftarrow$ condizione data

$\frac{\partial u}{\partial x}=\emptyset \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=?$

$\frac{\partial u}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=?$

come prima impongo le CR $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y}=\emptyset \\ \frac{\partial v}{\partial x}=-1 \end{cases} \Rightarrow v=-x+c$

11) Verifico che $u(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y$ è un polinomio armonico e ne trovo l'armonica coniugata tale che $v(0,0) = \emptyset$

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0 \quad \to \text{armonico!}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y - 2 \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = ?$$

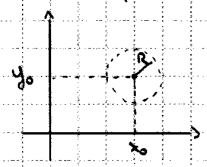
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - 2x + 3 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = ?$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} = 2x - 2y - 2 & v = 2xy - y^2 - 2y + c(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + 2x - 3 & v = 2xy + x^2 - 3x + c(y) \end{cases}$$

$$v = x^2 - y^2 - 3x - 2y + 4xy + \underbrace{c(x) + c(y)}_{c}$$

$$v(0,0) = c(x) + c(y) = 0 \qquad c(x) = -c(y) \qquad v = x^2 - y^2 - 3x - 2y + 4xy$$

12) Determinare la parametrizzazione di una circonferenza di raggio 5 e centro $-3 + i$



$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R\cos t \\ y(t) = y_0 + R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

= PARAMETRIZZAZIONE DELLA CIRCONFERENZA!

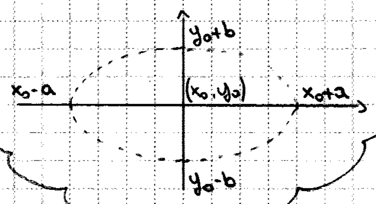
Dunque $\quad \gamma(t) = (-3 + 5\cos t) + i\,(1 + 5\sin t)$

13) Determinare la natura della curva

$$\gamma(t) = (2 + 3\cos(t)) + i\,(-1 + \sin(t))$$

ELLISSE

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



Segue che:

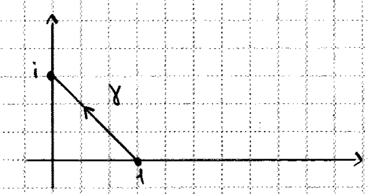
$$\int_\gamma f(z)\,dz = A + iB \quad \text{dove} \quad A = \int_a^b \left[u(x(t),y(t))\cdot x'(t) - v(x(t),y(t))\cdot y'(t) \right] dt = \int_\gamma \overrightarrow{(u,-v)}\, d\vec{P}$$

$$\text{dove} \quad B = \int_a^b \left[v(x(t),y(t))\cdot x'(t) + u(x(t),y(t))\cdot y'(t) \right] dt = \int_\gamma \overrightarrow{(v,u)}\, d\vec{P}$$

integrali di linea classici

Esempio:

$$f(z) = z^2 + 1 \quad e \quad \gamma(t) = 1 + t(i-1) \qquad t \in [0,1]$$



$$\int_\gamma f(z)\,dt = \int_0^1 \underbrace{\left[\left(1 + t(i-1)\right)^2 + 1 \right]}_{f(\gamma(t))} \underbrace{(i-1)}_{\gamma'(t)}\, dt$$

$$= (i-1) \int_0^1 \left[1 + t^2 (i-1)^2 + 2(i-1)t + 1 \right] dt = \text{e calcolo quanto fa!}$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

① Linearità rispetto ad $f(z)$

$f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ continua, $\gamma : [a,b] \to D$ regolare, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\int_\gamma \left[\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z) \right] dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1(z)\,dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2(z)\,dz}$$

segue dall'integrale di Riemann

② Additività rispetto alla concatenazione tra cammini

$f : D \to \mathbb{C}$ continua

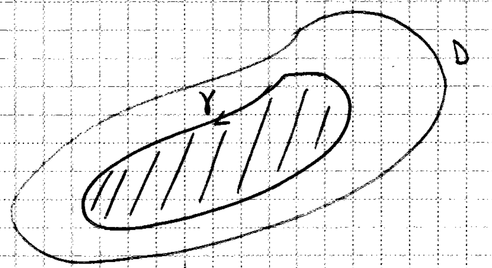
$\gamma_1 : [a,b] \to D$, $\gamma_2 : [b,c] \to D$ curve regolari tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

Indichiamo con $\gamma_1 \vee \gamma_2$ la concatenazione delle due curve, allora

$$\boxed{\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

segue dall'additività dell'integrale di Riemann

$f: D \to \mathbb{C}$, olomorfa e $\gamma: [a,b] \to D$ curva di Jordan, $\text{Int}\,\gamma \subseteq D$



TEOREMA DI CAUCHY-GOURSAT

Date quelle ipotesi: $\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \emptyset}$

Dimostrazione: $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \overrightarrow{(u,-v)}\,d\ell + i \int_\gamma \overrightarrow{(v,u)}\,d\ell =$

$$\stackrel{\text{Green}}{=} \iint_{\text{Int}\,\gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx\,dy + i \iint_{\text{Int}\,\gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx\,dy$$

utilizzando le codizioni di CR date dall'ipotesi di olomorfia della funzione

$$\stackrel{CR}{=} \emptyset + i \cdot \emptyset = \emptyset$$

COROLLARIO

$D \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso

$f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa, $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ curva di Jordan

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \emptyset$$

- esempio:

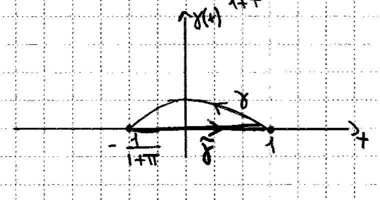
$f(z) = z^2 e^z + 18 z^3 \sinh z$ — per quanto difficile sia l'espressione di $f(z)$, CG garantisce la nullità del suo integrale su γ!

$\gamma(t) = R e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \emptyset$$

- Esempio:

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C} \qquad \gamma(t) = \frac{e^{it}}{1+t} \qquad t \in [0, \pi]$



$\int_\gamma z^2\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{2it}}{(1+t)^2} \cdot \left(\frac{e^{it}}{1+t} \right)' dt$ non è risolubile

Considero $\tilde{\gamma}: [0,1] \to \mathbb{C} \qquad \tilde{\gamma}(t) = -\frac{1}{1+\pi} + t \left[1 + \frac{1}{1+\pi} \right]$

$\tilde{\gamma}(1) = -\frac{1}{1+\pi} + \frac{2+\pi}{1+\pi} = \frac{-1+2+\pi}{1+\pi} = \frac{1+\pi}{1+\pi} = 1$

METODI MATEMATICI
31.03.2015

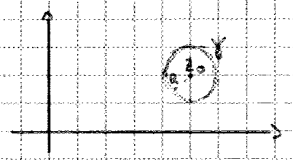
AC 8: · Dominio con Bordo
· Formula di Cauchy

Riporto da quello che è stato fatto l'ultima volta.

$z_0 \in \mathbb{C}$

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$



$$\Rightarrow \int (z-z_0)^k \, dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } k = -1 \end{cases}$$

($k \geq 0$ segue da Cauchy-Goursat) $= \emptyset$

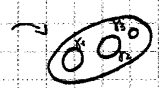
DEFINIZIONE

$D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, si dice "DOMINIO CON BORDO" se la sua frontiera è l'unione di un numero finito di supporti di curve di Jordan disgiunte a due a due

Cioè: $\exists\, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_R$ curve di Jordan in $\mathbb{C}$ tali che:

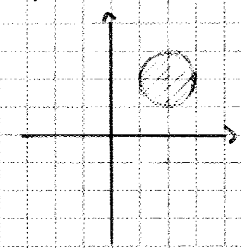
supporto $(\gamma_i) \cap$ supporto $(\gamma_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j$

$\partial D = \bigcup_{i=1}^{n}$ supporto (γ_i)



Esempi:

① $D = B_R(z_0)$

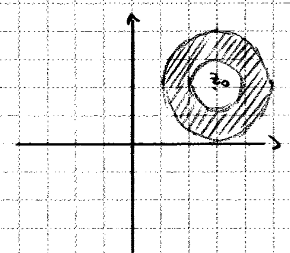


$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$

$\partial D =$ supporto (γ)

$\Rightarrow$ HA DOMINIO CON BORDO

② $D = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R \}$ con $0 < r < R$



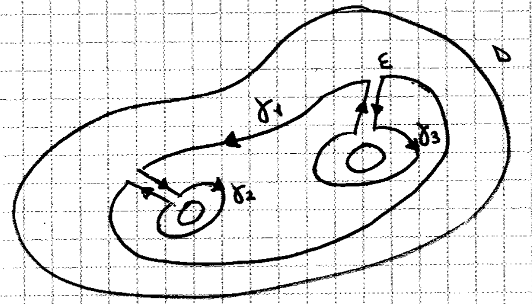
$\gamma_1(t) = z_0 + re^{it}$

$\gamma_2(t) = z_0 + Re^{it}$

$\partial D =$ supporto $(\gamma_1) \cup$ supporto (γ_2)

$\Rightarrow$ HA DOMINIO CON BORDO

La somma degli integrali è $\emptyset$ per l'operazione "chirurgica" che segue:



γ_ε è la curva di Jordan ottenuta dal taglio di lunghezza $\varepsilon > 0$ e collegamento tra le γ_i

$\int_{\gamma_\varepsilon} f(z) = \emptyset$ per Cauchy-Goursat

NB: ai fini del calcolo integrale le varie γ_ε non variano il risultato perché sono curve uguali ma percorse in senso opposto

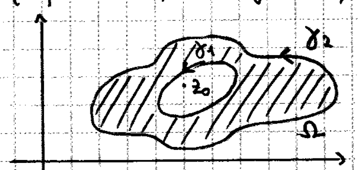
$\varepsilon \to \emptyset$

$\gamma_\varepsilon \to \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee \uparrow\downarrow$ → curve di connessione percorse nei due sensi non contribuiscono al calcolo di $\int f(z)$

COROLLARIO

$f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, olomorfa, con γ_1 e γ_2 curve di Jordan, $z_0 \in Int(\gamma_i)$ $i = 1,2$ e supporto $\gamma_1 \cap$ supporto $\gamma_2 = \emptyset$

CONDIZIONE DI DISGIUNZIONE!

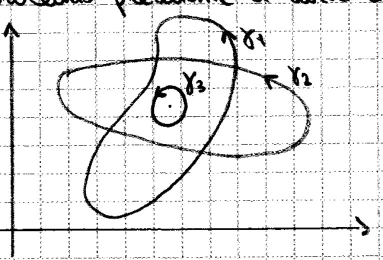


$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

Sia $\Omega = Int(\gamma_2) \cap Int(\gamma_1)^c$. $\partial\Omega$ è parametrizzato con orientamento positivo delle curve γ_2 e $-\gamma_1$

$$CG \Rightarrow \boxed{0 = \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz}$$

Posso estendere il corollario precedente a curve che si intersecano? Sì, prendo una curva di Jordan che non interseca nessuna delle due!



Dopodiché applico il precedente risultato alle 2 coppie distinte e per la prop. trans. ho solo le ...

METODI MATEMATICI
10.06.15

AC 9: Formula di Cauchy

PROPOSIZIONE:

condizione di limitatezza della funzione

D dominio $\subseteq \mathbb{C}$

$f: D \to \mathbb{C}$, continua e tale che $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in D$

Sia $\gamma: [a,b] \to D$ una curva regolare, allora:

$$\boxed{\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq M \cdot L(\gamma)}$$

Dimostrazione:

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \right|$$

DIS. TRIANGOLARE

$$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\, dt$$

$$\leq \int_a^b M\, |\gamma'(t)|\, dt = M \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = M \cdot L(\gamma)$$

da ipotesi

RICHIAMO SULLA FORMULA DI CAUCHY

D dominio sempl. connesso

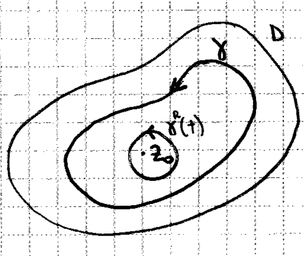
$f: D \to \mathbb{C}$, olomorfa

γ curva di Jordan in D (percorsa in senso antiorario)

$z_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$, allora:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$$

DIMOSTRAZIONE CAUCHY



$t \in [0, 2\pi]$

$\gamma^R(t) = z_0 + Re^{it}$

$\mathrm{supp}\, \gamma^R \subseteq \mathrm{Int}(\gamma)$

estensione di Cauchy-Goursat

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

LAVORO CON γ^R, MI DIMENTICO γ!!

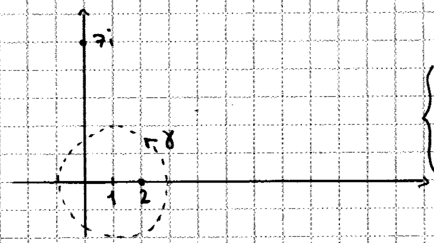
Segue che ...

Esempio:

$\gamma(t) = 1 + 2e^{it} \qquad t \in [0, 2\pi]$

Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{(z-7i)(z-2)}\, dz$

quoziente di funzioni olomorfe $\Rightarrow$ olomorfa ovunque meno che negli zeri del denominatore ossia 2 e $7i$



$\begin{cases} 2 \in \text{Int}(\gamma) \\ 7i \notin \text{Int}(\gamma) \end{cases}$

Se poniamo $f(z) = \dfrac{e^z}{z-7i}$, f è olomorfa su $\text{Int}(\gamma)$ e:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-7i)(z-2)}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-2} = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i \, \frac{e^2}{2-7i}$$

ho applicato Cauchy

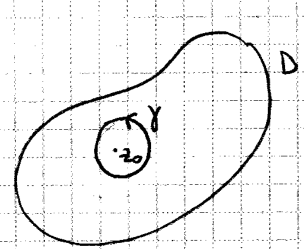
usando come singolarità, attorno a cui γ gira, il punto 2! Posso farlo perché $7i \notin \text{Int}(\gamma)$!

Se anche $7i \in \text{Int}(\gamma)$ non avrei saputo come gestire Cauchy con due singolarità!

CONSEGUENZE FORMULA DI CAUCHY

1. $f : D \to \mathbb{C}$, olomorfa, $z_0 \in D$

$\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ $\quad$ ($\text{supp}(\gamma) \subseteq D$) e $\text{Int}(\gamma) \subset D$



$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{f(z_0 + Re^{it})}{\cancel{Re^{it}}}}_{f(\gamma(t))/z-z_0} \cdot \underbrace{\cancel{Re^{it}}}_{\gamma'(t)}\, dz$$

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dz} = \text{FORMULA DELLA MEDIA}$$

Si ottiene anche:

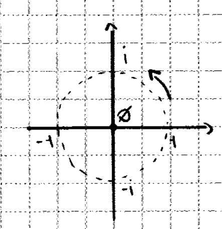
$$\text{Re}(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}\left(f(z_0 + Re^{it})\right) dt$$

Quindi anche le funzioni armoniche godono della proprietà della media: il valore che assumono in un punto z_0 è la media dei valori che assumono su una qualunque circonferenza centrata in z_0

ESERCITAZIONE 3
10.04.15

① Determinare l'indice di avvolgimento della curva

$$\gamma : [0, 4\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \mapsto e^{it}$$



$$\boxed{I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz} = \text{INDICE DI AVVOLGIMENTO!}$$

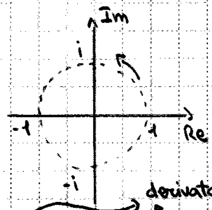
NB: z_0 deve essere $\mathrm{Int}(\gamma)$ sennò non si annulla mai $z - z_0$!

Nel nostro caso $z_0 = \emptyset$!

$$I_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{4\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}}\cdot \cancel{i e^{it}}\,dt = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$$

② Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma (2\bar{z} + 3)\,dz \quad \text{dove} \quad \gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \quad \text{e} \quad t \mapsto e^{it}$$



derivata $\gamma'(t)$

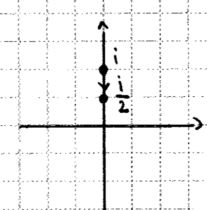
$$I = \int_\gamma 2\bar{z} + 3\,dz = i\int_0^{2\pi} \underbrace{(2e^{-it} + 3)}_{2\bar{z}+3}\, e^{it}\,dt$$

$$= 2i\int_0^{2\pi} dt + 3i\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt$$

$$= 4i\pi + \cancel{e^{it}\Big|_0^{2\pi}}^{\,\emptyset} = 4i\pi$$

③ Calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma e^{\pi z}\,dz \qquad \text{dove } \gamma \text{ è il segmento di estremi } i \text{ e } \frac{i}{2}$$



scelgo a caso la curva che parametrizza f ⟶ $\gamma(t) = i - \frac{t}{2} i$ con $t \in [0, 1]$ $\qquad dz = -\frac{i}{2}\,dt$

$$I = \int_0^1 e^{\pi\left(i - t\cdot\frac{i}{2}\right)}\left(-\frac{i}{2}\right)dt = -\frac{i}{2}\overset{-1}{\left(e^{\pi i}\right)}\int_0^1 e^{-\frac{\pi}{2}t i}\,dt = \frac{\cancel{i}}{\cancel{2}}\left[\frac{e^{-\pi \frac{t}{2} i}}{-\frac{\pi}{\cancel{2}}\cancel{i}}\right]_0^1 = -\frac{1}{\pi}\left(e^{-\pi\frac{i}{2}} - 1\right)$$

dall'ipotesi precedente

$$I = -\int_{\tilde{\gamma}} (2 - i\bar{z})\, dz \qquad \tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C} \quad \text{con } t \mapsto 1-t$$

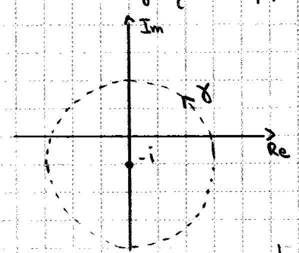
$$dz = -dt$$

$$= -(-1)\int_0^1 \left(2 - i(1-t)\right) dt$$

$$= \int_0^1 2 - i + it\, dt = \left[2t - it + i\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 2 - i + \frac{i}{2} = 4 - i$$

⑦ Calcolare

$$I = \int_\gamma \frac{\sin z}{z+i}\, dz \qquad \text{dove} \qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| = 3\} \text{ senso antiorario}$$



uso Cauchy perché ho la singolarità dentro γ!

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

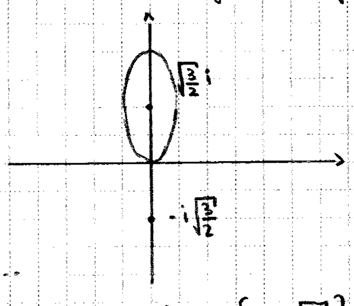
$$f(z) = \sin z \quad \leftarrow \text{olomorfa!}$$

$$\sin(-i) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin z}{z+i}\, dz$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\sin z}{z+i}\, dz = \sin(-i)\cdot 2\pi i = 2\pi i\left[\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right]_{t=-i} = \cancel{2}\pi \cancel{i}\ \frac{e^{1} - e^{-1}}{\cancel{2}\cancel{i}} = \pi\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

⑧ Calcolare

$$I = \int_\gamma \frac{e^z (z^2 - 3)}{2z^2 + 3}\, dz \quad \text{dove } \gamma \text{ ha sostegno } \left\{z = x + iy \;\middle|\; x^2 + \frac{2}{3}\left(y - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 1\right\}$$



è olomorfa, ma ...

verifico che $2z^2 + 3 \neq 0 \quad \forall z \setminus \left\{\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$

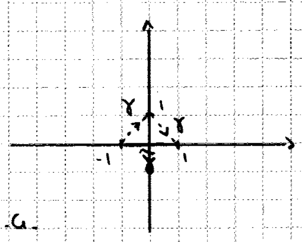
$$I = \frac{1}{2}\int \underbrace{\frac{e^z(z^2-3)}{z + i\sqrt{\frac{3}{2}}}}_{f(z)} \cdot \frac{1}{z - i\sqrt{\frac{3}{2}}}\, dz \qquad \text{e uso il teorema di Cauchy}$$

$$f\left(i\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z(z^2-3)}{\left(z + i\sqrt{\frac{3}{2}}\right)} \cdot \frac{1}{z - i\sqrt{\frac{3}{2}}}\, dz \quad \Rightarrow \quad I = \pi i \cdot f\left(i\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \pi i\, \frac{e^{i\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{3}{2} - 3\right)}{i\sqrt{\frac{3}{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{9}{2\sqrt{6}}\, e^{i\sqrt{\frac{3}{2}}} \cdot \pi$$

11) Calcolare

$$I = \int_\gamma \cos(z)\, dz$$ dove γ è la spezzata passante per $-1, i, 1$



come l'esercizio 6!

γ NON è CHIUSA $\to$ NO C.G.

concateno $\tilde{\gamma}$ a γ!

$\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C} \quad t \mapsto 1-2t$

$dz = -2\, dt$

uso C.G.:

$$0 = \int_{\gamma \cup \tilde{\gamma}} \cos(z)\, dz = \int_\gamma \cos z\, dz + \int_{\tilde{\gamma}} \cos z\, dz$$

$$I = -\int_{\tilde{\gamma}} \cos z\, dz = 2\int_0^1 \cos(1-2t)\, dt = -\sin(1-2t)\Big|_0^1 = 2\sin(1)$$

② • Se (z_n) è una qualunque successione si può usare la tecnica della "convergenza assoluta"

DEFINIZIONE

Si dice che la serie associata ad una successione (z_n) converge assolutamente se risulta convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$ ← serie a termini + che studio con il confronto!

$\Rightarrow$ Se una serie converge assolutamente allora converge (normalmente)

DIMOSTRAZIONE

$$z_n = a_n + i\, b_n$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + i \sum_{k=1}^{n} b_k$$

cateto ≤ dell'ipotenusa!

Si osservi che $|a_k| \leq |z_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

Quindi se $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge, anche $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ poiché + piccoli!

Da ciò segue che per il discorso sull'assoluto $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergono da cui converge la loro somma!

ESEMPIO:

• $z \in \mathbb{C}$ con $|z| < 1$ ← serie geometrica di ragione z!

Studiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$

Osserviamo che la successione $(z^n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \emptyset$ in quanto $|z^n| = |z|^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

per la convergenza della serie è necessaria la convergenza a $\emptyset$ del suo termine generale ma ciò non è condizione suff.!

$\Rightarrow z^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \emptyset$

Si noti ora che: $\sum_{k=0}^{n} z_k = \dfrac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{-1}{z-1} = \dfrac{1}{1-z}$ (identico al caso reale)

$\Rightarrow$ Quindi la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ è convergente se $|z| < 1$ e vale:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1}$$

NB: In realtà si può anche far vedere che la serie converge assolutamente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n = \frac{1}{1-|z|} \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1$$

• se $|z| \geq 1$?

$$|z^n| = |z|^n \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} \emptyset \Rightarrow z^n \not\xrightarrow[n \to +\infty]{} \emptyset \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \text{ non può convergere}$$

poiché non converge il suo termine generale

② Si osservi che nella serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n z^{2n}}{2^n}$ se considerassimo (sbagliando) che $a_n = \frac{i^n}{2^n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{i^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{i^n}\right| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} \quad R = 2 \ \underline{\text{NO!}}$$

deve venire $\sqrt{2}$
ed ecco che poiché $a_n = \emptyset$
non è valido il criterio
del rapporto!

- $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ serie esponenziale! dove $a_n = \frac{1}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} = \emptyset = l$$

$R = +\infty$ perciò $B_R(z_0) \equiv \mathbb{C}$ e la serie converge su tutto $\mathbb{C}$!

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot z^{2k}$ dove $a_n = \begin{cases} a_{2n+1} = \emptyset \\ a_{2n} = (-1)^k \end{cases}$ $\Rightarrow$ NON USO RAPPORTO!

Di fatto è però una serie geometrica con ragione $(-z^2)^k$

$w = -z^2$, che converge se $|w| < 1 \Rightarrow |z| < 1$

$\Rightarrow$ la serie converge se $|z| < 1$ e la sua somma sarà:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \frac{1}{1+z^2} \quad \forall z : |z| < 1$$

se la scrivo per $z = x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad |x| < 1}$$

sviluppo in serie di Taylor della serie di potenze

perché proprio < 1 il modulo?

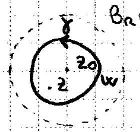
Perché sui reali non lo noto ma sul piano complesso incontro i e $-i$ che sono zeri del denominatore poiché c'è $z \Rightarrow$ in quei punti non può esistere lo sviluppo perciò mi fermo!

Vediamo ora che vale l'inverso: ogni funzione olomorfa è somma di una serie di potenze (che quindi sarà la sua serie di Taylor)

TEOREMA

Sia $f: B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora vale $*$

Dimostrazione:



dove $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ con $|z - z_0| < r < R$

perché in $*$ compare $f^{(k)}(z_0)$ che voglio dunque introdurre. Ciò me lo permette Cauchy

Considero la formula di Cauchy:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} \, dw$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k = \frac{1}{2\pi i} \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \int_\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \cdot \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw$$

$=$

$$= \frac{1}{2\pi i} \boxed{\int_\gamma \sum_{k=0}^{+\infty}} \frac{f(w)}{(w-z_0)} \cdot \left(\frac{z-z_0}{w+z_0}\right)^k dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)} \cdot \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k} dw$$

serie geometrica convergente, se $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1$!

Di fatto lo è poiché la figura evidenzia che $|z-z_0| < |w-z_0|$!

Questa serie è sommabile e:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{w-z_0}{w-z}$$

questa quantità la sostituisco sopra!

Quindi:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{\cancel{w-z_0}} \cdot \frac{\cancel{w-z_0}}{w-z} \, dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

integrale di Cauchy fatto nel punto z rispetto alla curva γ

$$= f(z)$$

Esempio: FUNZIONE ESPONENZIALE

$f(z) = e^z \qquad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Applico il teorema!

Determiniamo la sua serie di potenze centrata in $\emptyset$:

$f'(z) = e^z$, ..., $f^{(k)} = e^z \qquad f^{(k)}(0) = 1 \quad \forall k$!

Quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ è la sua serie di Taylor!

$$\Rightarrow \boxed{e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

METODI MATEMATICI
15.04.2015

meccanismo che permette di definire le funzioni olomorfe meno la singolarità

AC 12: Singolarità e serie di Laurent

Siano f e $g : D \to \mathbb{C}$, olomorfe, g non è nulla!

Considero:

zeri isolati

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \quad \text{dove } h \text{ è definita su } D \setminus \{z \in D \mid g(z) = \emptyset\}$$

Sia $z_0 \in D : g(z_0) = \emptyset$

Sappiamo che possiamo scrivere:

$$g(z) = (z - z_0)^{m_0} \cdot \tilde{g}(z)$$

dove $\tilde{g}(z) \neq 0 \ \forall z \in B_r(z_0)$ — qualcosa che in z_0 è $\neq 0$!

Sostituisco e ho:

$\tilde{h}(z)$ che è olomorfa su $B_r(z_0)$

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{(z-z_0)^{m_0}\tilde{g}(z)} = (z-z_0)^{-m_0} \cdot \frac{f(z)}{\tilde{g}(z)}$$

= di fatto abbiamo estratto tutta la parte olomorfa e distinto dalla non olomorfa con singolarità

Quindi $\tilde{h}(z)$ è scrivibile in serie di potenze poiché olomorfa:

$$\tilde{h}(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m (z - z_0)^m$$

Sostituendo:

$$h(z) = (z-z_0)^{-m_0} \sum_{m=0}^{+\infty} b_m (z-z_0)^m$$

cambio "etichetta"

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} b_m (z-z_0)^{m-m_0} \qquad m - m_0 = k$$

$$\boxed{= \sum_{k=-m_0}^{+\infty} b_{k+m_0} (z-z_0)^k \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}}$$

= SERIE DI LAURENT DI $h(z)$ CENTRATA IN z_0

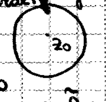
$$= \sum_{k=-m_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{dove } a_k = b_{k+m_0}$$

Si osservi che:

perché quella è l'espressione del termine generale della serie di potenze

$$a_k = b_{k+m_0} = \frac{\tilde{h}^{(k+m_0)}(z_0)}{(k+m_0)!}$$

uso Cauchy generalizzato



$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^{k+m_0+1}} \, dz$$

sostituisco l'espressione di $\tilde{h}(z)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z) \cdot \cancel{(z-z_0)^{m_0}}}{(z-z_0)^{k+\cancel{m_0}+1}} \, dz$$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz}$$

e in particolare $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma h(z) \, dz$ dove

a_{-1} è detto il "RESIDUO DI $h(z)$ in z_0" $\Rightarrow a_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0}($

Esempio: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{z_0 = \emptyset\}$

Dunque è esprimibile in serie di Laurent centrata in $\emptyset$:

$$e^{w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

tutte potenze negative! ecco perché perde l'olomorfia

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \dots$$

$$\int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \, a_{-1} = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

il coefficiente di a_{-1} è 1 poiché è z^{-1}!

NOMENCLATURA

se $f : B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ è olomorfa e $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$,

possono accadere varie situazioni:

① $a_k = \emptyset \quad \forall k < \emptyset$ — SINGOLARITÀ APPARENTE O ELIMINABILE

è dunque una serie di potenze, e perciò è olomorfa anche su z_0!

Ciò vuol dire che la f originale è estendibile ad una funzione olomorfa su $B_R(z_0)$

② $\exists m_0 : a_k = \emptyset \quad \forall k < -m_0$ — POLO (z_0) ed m_0 è detto MOLTEPLICITÀ DEL POLO (se $m_0 = 1$, POLO SEMPLICE)

$$f(z) = \underbrace{a_{-m_0}}_{\neq \emptyset} (z - z_0)^{-m_0} + a_{-m_0+1} (z - z_0)^{-m_0+1} + \dots$$

③ Vi sono infiniti termini a potenza negativa nello sviluppo di Laurent — SINGOLARITÀ ESSENZIALE

Si osservi che nel caso del polo di molteplicità m_0, si ha che:

$$(z - z_0)^m \cdot f(z) = g(z) \text{ è ora olomorfa perché ho solo potenze } +!$$

uccido la singolarità moltiplicando la $f(z)$ per $(z - z_0)^m$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}$$

$a_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0}(f)$ è il RESIDUO e $\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \cdot a_{-1}$

rapida crescita dei termini generali $(R=\phi)$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} \cdot z^n = S(z)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{(n+1)^2}}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2+2n+1}}{2^{n^2}} = 2^{2n+1} = +\infty \qquad R=\phi$$

$\Rightarrow$ $S(z)$ converge solo se $z=\phi$

rapida decrescenza dei termini generali $(R=+\infty)$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} z^n$

criterio radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^{-n^2}} = \sqrt[n]{2^{-1}}\,\sqrt[n]{2^{n^2}} = 2^{-\frac{n^2}{n}} = \phi \qquad R=+\infty$$

$\Rightarrow$ $S(z)$ converge su $\mathbb{C}$

⑤ Determinare la serie di Taylor di:

- $\sin(z)$

$$= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}}{2i} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[i^n - (-1)^n i^n\right] z^n \cdot \frac{1}{n!}$$

se $n=2k$, $(-1)^{2k}=1$, $= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left[i^n - i^n\right] = \phi$ $\Rightarrow$ considero solo i termini dispari!

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(i^{2n+1} + i^{2n+1}\right)\cdot\frac{1}{(2n+1)!}\cdot z^{(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot(-1)^n\cdot i}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

NB: $R=+\infty$

$$\boxed{\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}$$

SERIE DI TAYLOR DEL $\sin(z)$

- $\cos(z)$

$$= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n\left(1+(-1)^n\right)}{n!} z^n$$

se $n=2k+1$, $(-1)^{2k+1}=-1$, $=\sum_{n=0}^{\infty} 0 = \phi$ $\Rightarrow$ considero i soli termini pari

$$\boxed{\cos(z) = \frac{1}{2}\sum_{2n=0}^{\infty}\frac{2\,i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{2n=0}^{\infty}\frac{i^{2n}}{(2n)!} z^{2n}}$$

NB: $R=+\infty$

SERIE DI TAYLOR DEL $\cos(z)$

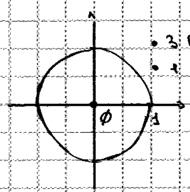
7) Si studi lo sviluppo di Laurent in $\{|z|>1\}$ di: (non serve calcolarne il residuo (a_{-1}) perché lo calcolo per $|z|>1$!)

$$f(z)=\frac{1}{iz^2-z^5}$$

$$f(z)=\frac{1}{z^2(i-z^3)}=\frac{1}{z^5\left(-1+\frac{i}{z^3}\right)}$$

semplice se $|z^3|<1$, $|z|<1$ — semplice se $\left|\frac{i}{z^3}\right|<1$, $|z|>1$

$\Rightarrow$ studio la II perché è richiesto per $|z|>1$!



- 3 POLI DOVE $i-z^3=\emptyset$
- 1 POLO PER $z=\emptyset$

$$f(z)=\frac{1}{z^5\left(-1+\frac{i}{z^3}\right)}=-\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{1-\frac{i}{z^3}}\right)$$

$\Rightarrow \frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ se $|z|<1$ = serie geometrica

$\left|\frac{i}{z^3}\right|<1$ poiché $|z|>1 \Rightarrow =\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{i}{z^3}\right]^n$

$$f(z)=-\frac{1}{z^5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{3n}}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{3n+5}}$$

8) Studiare lo sviluppo di Laurent in $\{|z|<1\}$ di:

$$f(z)=\frac{1}{iz^2(1+iz^3)}$$ e determinarne il residuo

$$f(z)=\frac{1}{iz^2}\cdot\frac{1}{1+iz^3}=\frac{1}{iz^2}\cdot\frac{1}{1-(-iz^3)}$$

$=\frac{1}{iz^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-iz^3)^n$ se $|-iz^3|<1$ ossia se $|z|<1$

$=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n\cdot z^{3n-2}$

$$3n-2=\begin{cases}-2 & \text{se } n=0\\ 1 & \text{se } n=1\end{cases}$$

il termine di grado -1 ha coeff nullo

$\Rightarrow \mathrm{Res}_0(f)=\emptyset$ e $z=0$ è POLO DI ORDIN

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 258

(13) Studiare lo sviluppo di Laurent in $\{|z|>1\}$

$$f(z)=\frac{1}{z^{15}-z^{16}}$$ → quando la $f(z)$ è nella forma $\frac{1}{---}$ devo ricordarmi alla serie geometrica

$$f(z)=\frac{1}{z^{16}}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)$$

$$=\frac{1}{z^{16}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+16}}$$

(14) Classificare la singolarità in $z=\frac{\pi}{2}$

$$f(z)=\frac{\cos(z)}{\left(z^2-\frac{\pi^2}{4}\right)^2}$$

$$f(z)=\frac{\cos\left(z-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{\cancel{\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}}^{\,0}-\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cancel{\sin\frac{\pi}{2}}^{\,1}}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

sviluppo di $\sin\left(z-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=-\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}$$ Polo di ordine uno! polo semplice!

$2n-1=-1$, $2n=\phi$, $n=\phi$

$$\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}}(f)=-\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)^2}=-\frac{1}{\pi^2}$$

(15) Classificare la singolarità e determinare il residuo al variare di a

$$f(z)=(a-3)\,z\cosh\left(\frac{1}{z}\right)-\frac{a}{z}$$

(18) Determinare la natura delle singolarità

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

e^z è intera ⇒ NON HA POLI ⇒ l'unico punto pericoloso sarà $z=0$ dove $\frac{1}{z}$ non è definit

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n-2}}}_{\infty \Rightarrow \text{ESSENZIALE}} \cdot \frac{1}{n!}$$

(19) Determinare la natura delle singolarità

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$$

$z=0$ è il punto pericoloso

$$= e^z e^{\frac{1}{z}}$$

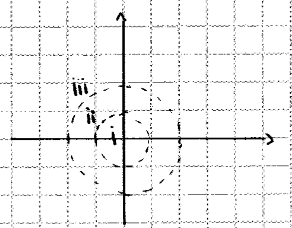
$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}_{\neq 0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{n!}}_{\text{discontinuità essenziale}}$$

DISCONTINUITÀ ESSENZIALE

(20) Studiare lo sviluppo della funzione in i) $\{|z|<1\}$

ii) $\{1<|z|<2\}$

iii) $\{|z|>2\}$



$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$= \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)}$$

i) $\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ perché $|z|<1$

$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$ perché $|z|<1$ contiene anche $\left|\frac{z}{2}\right|<1$!

$$f(z) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

ii) $1<|z|<2$

$\frac{1}{z-1} = +\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$

$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n =$$

ESERCITAZIONE 6
21.04.2015

① Calcolare i residui di:

$$f(z) = \frac{\cosh(z)}{3+2iz}$$

$$\begin{cases} \cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2} \neq 0 \ \forall z \quad \Rightarrow \text{olomorfo} \\ 3+2iz = \text{olomorfo} \end{cases}$$

$3+2iz=0 \qquad z = -\frac{3}{2i}$ semplice

Calcolo il residuo:

$$\lim_{z \to -\frac{3}{2}i} \left(z+\frac{3}{2}i\right) \cdot \frac{\cosh z}{2i\left(z+\frac{3}{2i}\right)} = \lim_{z\to \frac{3}{2}i} \cancel{\left(z+\frac{3}{2}i\right)} \frac{\cosh z}{2i\cancel{\left(z+\frac{3}{2}i\right)}} = \frac{\cosh\left(\frac{3}{2}i\right)}{2i}$$

② Calcolare i residui di:

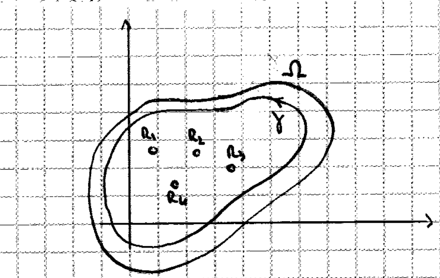
$$f(z) = (z+i)^2 \cdot \frac{1}{(z-i)^2} \qquad \text{polo doppio in } z=1$$

$$g(z) = \cancel{(z-1)^2}\ (z+1)^2 \cdot \frac{1}{\cancel{(z-1)^2}} = (z+1)^2$$

$$g'(z) = 2(z+1)$$

$$g'(1) = 2(1+1) = 4$$

TEOREMA DEI RESIDUI



$I = \int_\gamma f(z)\, dz$ con f olomorfa in $\Omega \subseteq \gamma$ tranne che in R_1, R_2, R_3 ed R_4 dove ha dei poli!

Definisco R_i il residuo nel punto P_i e ho:

$$\boxed{I = 2\pi i \left(\sum_i R_i\right)}$$

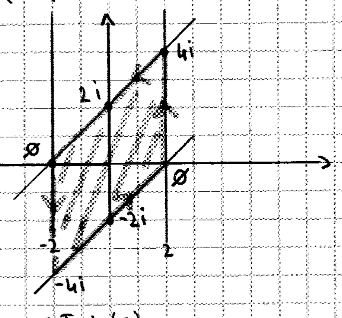
③ Calcolare l'integrale

$$I = \int_C \frac{e^{\pi z}}{z(z-i)^2}\, dz \qquad \text{dove} \qquad C = \partial\{z = x+iy,\ x,y\in\mathbb{R},\ |y-x| \le 2,\ |x| \le 2$$

$$-2 \le y-x \le 2$$

$$\begin{cases} y-x=-2 \\ y-x=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2+x \\ y=2+x \end{cases}$$

Faccio il disegno così da capire dove sono i residui! Se dentro o fuori (bordo escluso)



POLI: $\cdot\ z=0$ semplice $\in \text{Int}(C)$

$\cdot\ z=i$ doppio $\in \text{Int}(C)$

- $Res_{-i}(f) = \lim_{z \to -i} (z+i)\, f(z) = \dfrac{1}{(z+5)(z-10i)} = -\dfrac{1}{(-i+5)(11i)}$

- $Res_{-5}(f) = \lim_{z \to -5} (z+5)\, f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z-10i)} = \dfrac{1}{(-5+i)(-5-10i)}$

- $Res_{10i}(f) = \lim_{z \to 10i} (z-10i)\, f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z+5)} = \dfrac{1}{(11i)(10i+5)}$

(2) caso 2:

$$I = 2\pi i \left(Res_{-i}(f) \right)$$

(3) caso 3:

$$I = 2\pi i \left(Res_{-i}(f) + Res_{-5}(f) \right)$$

(4) caso 4:

$$I = 2\pi i \left(Res_{-i}(f) + Res_{-5}(f) + Res_{10i}(f) \right)$$

(1) caso 1:

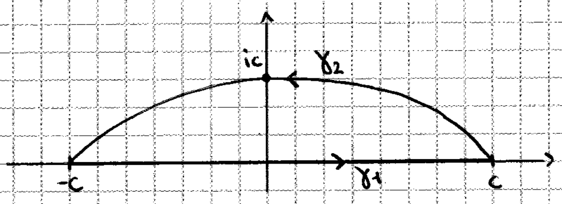
$I = \emptyset$ funzione olomorfa

(6) Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}\, dz$$

integrale reale $\int_{-\infty}^{\infty}$! come uso il teorema dei residui?

CREO UN CAMMINO CHIUSO!



$$I = \lim_{c \to \infty} \int_{-c}^{c} \frac{z(z+i)}{(z^2+1)^2}\, dz$$

ma cosa sono γ_1 e γ_2?

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = t & \text{con } t \in [-c, c] \\ \gamma_2(t) = c e^{it} & \text{con } t \in [0, \pi] \end{cases} \Rightarrow |\gamma_2(t)| = c \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

POLI: • $z^2 + 1 = 0$ $\quad z = \pm i$ doppio

visto il cammino $z = -i$ è fuori e non ci interessa!

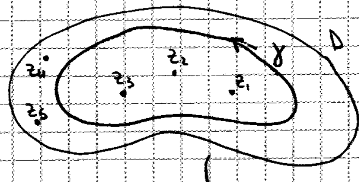
$$g(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{z(z+i)}{(z+i)^2}$$

$$g'(z) = \frac{(2z+1)(z+i)^2 - (2z+2i)(z^2+z)}{(z+i)^4} = \cancel{(z+i)} \cdot \frac{1}{(z+i)^{3}} \left[\cancel{2z^2} + 2zi + z + i - \cancel{2z^2} - 2z \right] = \frac{z(2i-1)+i}{(z+i)^3} = \frac{-2-i+i}{(z+i)^3}$$

METODI MATEMATICI
24.03.2015

AC 12: Teorema dei residui e applicazioni

TEOREMA DEI RESIDUI



considero i residui delle singolarità interne a γ (z_1, z_2 e z_3)!

$Int(\gamma) \cap D^c = \{z_1, z_2, z_3\}$

$D \subseteq \mathbb{C}$ dominio

$f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa

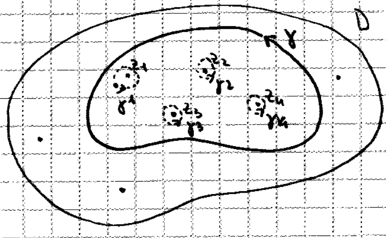
γ curva di Jordan

$Int(\gamma) \cap D^c$ è al più finita (# finito di punti)

Allora:

$$\boxed{I = \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \left(\sum_{\substack{z \in Int(\gamma) \\ z \notin D}} Res_z(f) \right)}$$

Dimostrazione:



Disegno delle circonferenze piccole (da non toccare γ) γ_k

per ogni k-esima singolarità! $\gamma_k: z_k + re^{it}$ con r piccolo per

$\Omega = Int\, \gamma \cap Int(\gamma_1)^c \cap Int(\gamma_2)^c \cap Int(\gamma_3)^c \cap \ldots \cap Int\, \gamma_k^c$

dominio con bordo e $\gamma \cup -\gamma_1 \cup -\gamma_2 \cup \ldots \cup -\gamma_k$ è il bordo con l'orientamento positivo!

$\Rightarrow$ Per Cauchy-Goursat $\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = \emptyset$

Tale integrale è uguale a scrivere:

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz + \sum_{i=1}^{k} \int_{-\gamma_i} f(z)\, dz$$

integrale dei residui!

$$= \int_\gamma f(z)\, dz - \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f(z)\, dz$$

$$= \int_\gamma f(z)\, dz - \sum_{i=1}^{k} 2\pi i \left(Res_{z_k}(f) \right) = \emptyset$$

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{k} 2\pi i \left(Res_{z_k}(f) \right)$$

Se invece z_0 è un polo di f con molteplicità m_0, allora:

$$f(z) = (z-z_0)^{-m_0} \cdot \tilde{f}(z)$$

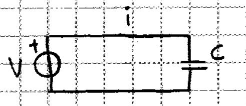
$\tilde{f}(z)$ è olomorfa in un intorno di z_0 e non si annulla $\tilde{f}(z_0)$

$\Rightarrow$ Ripetendo il conto di prima si ottiene che:

$$\text{Res}_{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = -m_0$$

MOTIVAZIONI PER ESTENDERE IL CONCETTO DI FUNZIONE

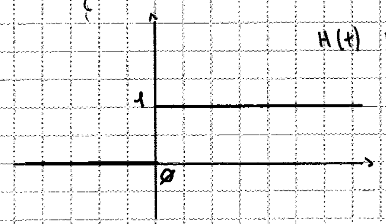
1



$i = C \cdot V'$

$V' = \frac{i}{C}$

$V(t) = \bar{V} H(t)$



$H(t)$ Heavyside $\begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t>0 \end{cases}$

Quindi $i(t) = C\, V'(t)$

$= C \cdot \bar{V} H'(t)$

$= \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq Ø \\ \text{non derivabile in } t=0 \end{cases}$

$V'(t) = \frac{i}{C}$

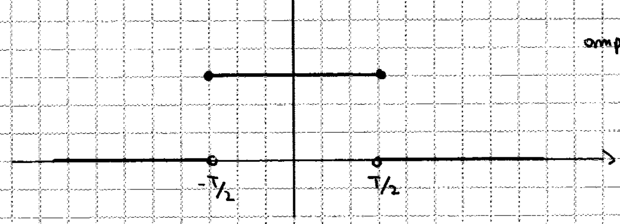
$V(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{i(s)}{C}\, ds \overset{?}{=} \bar{V} H(t)$

ammeno che io dia un senso a questo integrale non troverò mai $\bar{V}H(t)$, che dunque viene perso!

i non dipende da $\bar{V}$, perciò troverò sempre Ø e non c'è modo di ricostruire il potenziale d'inizio, con le regole matematiche che ho ora, per funzioni che presentano picchi come questo

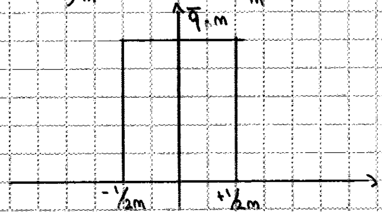
PROBLEMA 1 $\Leftarrow$

2



funzione porta di ampiezza T: $P_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

funzione densità di carica $\rightarrow \rho_n(x) = \bar{q} \cdot n\, P_{\frac{1}{n}}(x)$



modo per rappresentare la carica puntiforme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x)\, dx = \bar{q} \cdot \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} = \bar{q}$$

PROPRIETÀ ELEMENTARI DI $\mathcal{D}$

1. • $\mathcal{D}$ è uno spazio vettoriale: una combinazione lineare di funzioni test è ancora una funzione test

2. • $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \underbrace{\varphi(x-x_0)}_{=\text{traslazione}} \in \mathcal{D} \quad \forall x_0$

3. • $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \underbrace{\varphi(ax)}_{=\text{riscalamento}} \in \mathcal{D}$
   $a \neq 0$

4. • $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in C^\infty \Rightarrow (\varphi \cdot \psi) \in \mathcal{D}$

5. • $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}$ ← il supporto può solo aumentare, non diminuire!

Esempio: $\varphi_1(x) \cdot \sin x + \varphi'(x) \cdot e^x$ è una funzione test come c.l. di tutte le proprietà su scritte

DISTRIBUZIONE

una distribuzione T è una qualunque funzione così data:
ha come dominio le funzioni test e ad esse associa un valore reale

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

Essa deve però soddisfare:

LINEARITÀ E CONTINUITÀ SONO CIÒ CHE GARANTISCONO L'AUTENTICITÀ DI UNA FUNZIONE TEST

1. • $T(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda T(\varphi_1) + \mu T(\varphi_2)$ ← linearità!

2. • $\varphi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi \Rightarrow T(\varphi_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(\varphi)$ ← continuità

   (φ_n) è una successione convergente a φ

   volgarmente dico che se misuro due φ "vicini" anche le loro risposte di T saranno "vicine"

Per definire quel concetto di continuità faccio dei richiami sul concetto di convergenza di funzioni:

DEFINIZIONE DI CONV. PUNTUALE

$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ succ. di funzione

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ <u>PUNTUALMENTE</u> se $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ cioè se

$\forall x, \forall \varepsilon, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$

differenza → ($\bar{n}$ prima dipendeva da x, dopo no) → differenza

DEFINIZIONE DI CONV. UNIFORME

$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ <u>UNIFORMEMENTE</u> se $\forall \varepsilon, \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq \bar{n}, \forall x$

Possiamo riformulare la convergenza uniforme nel seguente modo:

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

si definisca $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ norma ∞ di f

Allora, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ <u>UNIFORMEMENTE</u> $\Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_\infty$ –

$T: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ per essere una distribuzione deve essere lineare e continua, che significa esattamente $\underbrace{\varphi_m \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi}_{\text{richiesta forte}} \Rightarrow \underbrace{T(\varphi_m) \xrightarrow[m \to +\infty]{} T(\varphi)}_{\text{richiesta debole}}$

Più il mio strumento di misura è preciso e convergente all'idealità e più la misura sarà corretta e reale

+ io richiedo convergenza in $\mathcal{D}$ e più è facile che ci sia la distribuzione associata

Purché sia lineare quasi tutto è una distribuzione! BENE!

NOTAZIONE

$$\boxed{T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle}$$

"T per φ", come se il segnale T e il profilo di misura φ siano nello stesso piano e dalla loro combinazione nasce la misura

Esempio: "DELTA DI DIRAC"

$x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \delta_{x_0}: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ prende φ e la valuta impulsivamente in x_0

chi è $\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) = \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$

- è una distribuzione?
  - $\delta_{x_0}(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda\varphi_1(x_0) + \mu\varphi_2(x_0) = \lambda\delta_{x_0}(\varphi_1) + \mu\delta_{x_0}(\varphi_2)$ linearità ✓
  - $\varphi_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \varphi$, $\varphi \Rightarrow \delta_{x_0}(\varphi_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \delta_{x_0}(\varphi)$ = è ciò che devo verific

    cioè $\varphi_m(x_0) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \varphi(x_0)$? continuità ✓ (= converge anche puntualmente, fa anche di +)

$\Rightarrow \delta_{x_0}$ è una distribuzione!

NB funzioni continue

$$\boxed{C(I) \subseteq R^1_{loc}(I)}$$

Esempio 1: $\sin x \notin R^1(I)$

Esempio 2: $\frac{1}{1+x^2}$ è integrabile $\Rightarrow \in R^1(\mathbb{R})$

Esempio 3: 1 non è integrabile $\Rightarrow \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$ perchè a $+\infty$ da $+\infty$

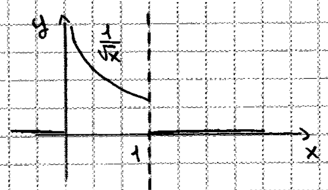
$\in R^1(\mathbb{R})$

$\mathbb{1}$ è la funzione indicatrice:

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

un esempio è la funzione di Heavyside

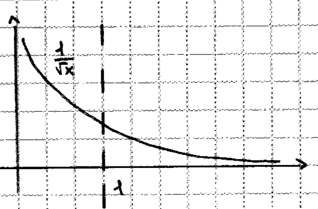
Esempio 4: $\frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x)$



$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 2-0 = 2$$

- $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha < 1$ è integrabile $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x) \in R^1(\mathbb{R})$

Esempio 5: $\frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$



$$\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \left[2 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_0^{+\infty} = +\infty - 0 = +\infty$$

$\notin R^1(\mathbb{R})$

$\in R^1_{loc}(\mathbb{R})$

DISTRIBUZIONI REGOLARI

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

e $f \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$

Ad f associamo la seguente distribuzione:

$$T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

Dire come agire T_f contro le test vuol dire fare l'integrale del loro prodotto

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \boxed{T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx}$$

Verifiche da fare:

1) L'integrale ha senso
2) Vale la linearità
3) Vale la continuità

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 258

esempio: $T = \delta_2 + T_{\sin x}$ è una distribuzione:

$$T(\varphi) = \varphi(2) + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, \varphi(x) \, dx$$

② TRASLAZIONE DI DISTRIBUZIONI

Caso regolare: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x-x_0)$

$$T_{f(x-x_0)}(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x_0)\,\varphi(x)\,dx$$

se $x - x_0 = y$

$$T_{f(x-x_0)}(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\varphi(y+x_0)\,dy$$

distribuzione associata a $T_{f(y)}\,\varphi(y+x_0)$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T_{f}(x-x_0), \varphi(x) \rangle = \langle T_{f(x)}, \varphi(x+x_0) \rangle}$$

traslare in un lato T_f è uguale a traslare in modo opposto φ

Dunque se T è una generica distribuzione, spesso useremo la scrittura $T(x)$ anche se T formalmente non è di variabile x, solo per ricordare, che "x" è la variabile nella funzione test di accoppiamento con la distribuzione T!

Data T e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce la "distribuzione traslata" di T in x_0 e si indica con $T(x-x_0)$ quella che sulle funzioni test agisce come segue:

$$\boxed{\langle T(x-x_0), \varphi(x) \rangle := \langle T(x), \varphi(x+x_0) \rangle}$$

Devo verificare che sia continua e lineare:

- $\langle T(x-x_0), \lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) \rangle =$

  $= \langle T(x), \lambda\varphi_1(x+x_0) + \mu(\varphi_2(x+x_0)) \rangle =$ traslazione

  $= \lambda \langle T(x), \varphi_1(x+x_0) \rangle + \mu \langle T(x), \varphi_2(x+x_0) \rangle$ perché T è lineare

  $= \lambda \langle T(x-x_0), \varphi_1(x) \rangle + \mu \langle T(x-x_0), \varphi_2(x) \rangle$ def. di traslazione

  ✓ linearità verificata

- $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ (perché la linearità è già stata verificata)

  $\langle T(x-x_0), \varphi_n(x) \rangle = \langle T(x), \underbrace{\varphi_n(x+x_0)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ in } \mathcal{D}} \rangle$

  Poiché T è continua, allora quest'ultima espressione $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

  ✓ continuità verificata

METODI MATEMATICI
05.05.2015

AC 15: Derivata di una distribuzione

Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ funzione test

e T distribuzione definita come

$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle$

DERIVATE DI UNA DISTRIBUZIONE

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata $f' \in \mathbb{R}^1_{loc}$

Considero $T(f')$:

$$\langle T(f'), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

integrale per parti

$$= f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$\varphi(x)$ è una funzione test che a $\pm\infty$ si appiattisce

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

$$= -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

$$\boxed{\langle T_{f'}, \varphi \rangle = - \langle T_f, \varphi' \rangle}$$

Data dunque una distribuzione T, definiamo la sua derivata come la distribuzione T':

$$\boxed{\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle}$$

Verifichiamo che questa è una buona definizione:

- Ha senso perché $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}$
- Linearità (esercizio): $\langle T', \lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 \rangle = \dots$
- Continuità

se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \emptyset$, $\langle T', \varphi_n \rangle \to \emptyset$?

Si osservi che:

$\langle T', \varphi_n \rangle = - \langle T, \varphi'_n \rangle$

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ ← c'è uguaglianza con le derivate di φ (c'è conv. uniforme)
← c'è equilimitatezza dei supporti

Poiché $\varphi'_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \emptyset \Rightarrow \langle T, \varphi'_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \langle T', \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \emptyset$

→ TUTTE LE DISTRIBUZIONI SONO DERIVABILI.

Calcoliamo T_f':

Osservare che si può considerare $T_{f'}$.

f non è derivabile! $(T_f)' = T(f')$? in generale NO, vedi la funzione $H = D_{NO}$!

Allora $\Rightarrow$ $\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$ ← nel caso di H era facile perché vale 1 per $t > \emptyset$! ma ora?

$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$ ← NON POSSO USARE PER PARTI SU R perché R include x_0! e in x_0 non è derivabile! $\Rightarrow$ spezzo e integro per parti

$$= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

per parti!

$$= -\left[f(x)\varphi(x)\Big|_{\cancel{-\infty}}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx \right] - \left[f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{\cancel{+\infty}} - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx - f(x_0^-)\varphi(x_0) + f(x_0^+)\varphi(x_0)$$

in x_0 $f(x)$ può essere discontinua e con dei salti, perciò quando integro devo fermarmi un po' prima di x_0

è C^∞ e non ha problemi

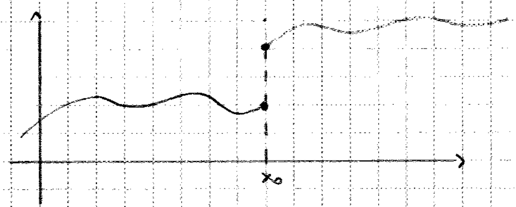
uguale a prima ma vado un pelo dopo x_0

$$= \langle T_f', \varphi \rangle + [f(x_0^+) - f(x_0^-)] \cdot \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

Quindi:

$$\boxed{(T_f)' = \underbrace{T(f')}_{\text{parte regolare}} + \underbrace{[f(x_0^+) - f(x_0^-)]}_{\text{ampiezza del salto}} \cdot \delta_{x_0}}$$ parte singolare

, dove $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$



se f è continua in x_0, allora $T_f' = T_{f'}$, come visto nel caso 2

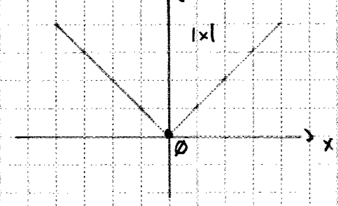
In generale se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è C^1 tranne che in $x_1, x_2, \dots, x_n$, dove presenta eventuali salti e se inoltre $f' \in R^1_{loc}$, allora:

$$\boxed{(T_f)' = T(f') + \sum_{k=1}^{s} \left([f(x_k^+) - f(x_k^-)] \cdot \delta_{x_k} \right)}$$

- esempio:

$f(x) = |x|$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \\ \nexists & x = 0 \end{cases}$$



Quindi: $(T_f)' = T(f') + \emptyset = T(f')$