NUMERO: 1788A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Iannizzi Giada

MATERIA: Biomeccanica dei fluidi + esercitazioni - prof. Gallo.

BIOMECCANICA dei FLUIDI

Idrostatica

FLUIDO: è un mezzo continuo nel quale, in equilibrio, gli sforzi siano sempre NORMALI alle rispettive superfici (= $\perp$ perché il fluido è in quiete).

DENSITÀ:

Varia molto poco al variare della p e T

liquidi → $\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$, $\frac{kg}{m^3}$ (SI) $\frac{g}{cm^3}$ (cgs) $= 10^3 \frac{kg}{m^3}$

VALORE QUASI SEMPRE COST

gas → $pV = nRT$, $n = \frac{m}{M}$

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

$$\boxed{\frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT} = \rho}$$

NO VALORE COST DELLA ρ PERCHÈ DIPENDE DALLA T e DALLA p.

PESO SPECIFICO:

$$\boxed{\gamma = \frac{P}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g}$$, $\frac{N}{m^3}$ (SI) $\frac{dyn}{cm^3}$ (cgs) $= 10 \frac{N}{m^3}$

COMPRIMIBILITÀ:

Esprime quanto varia %mente il volume il volume di un fluido a causa di una variazione di pressione:

Modulo di comprimibilità: (Modulo di elasticità di volume) $\boxed{E = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}} = -\frac{dp}{dV/V}$, Pa (SI) !

per $dp > 0$ ho $dV < 0$

Coefficiente di comprimibilità: $\boxed{\beta = \frac{1}{E}}$

E : piccolo per i gas

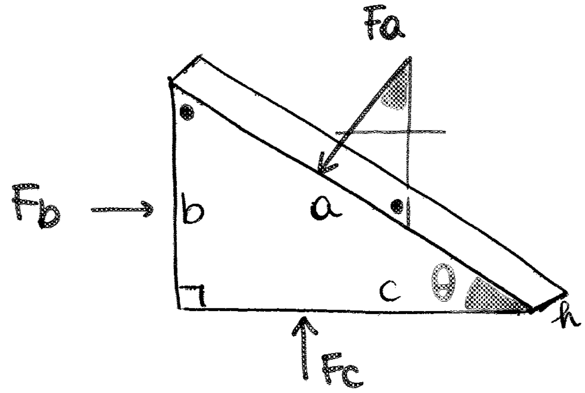
E : grande per i liquidi

COEFFICIENTE DI DILATAZIONE DI V:

$$\boxed{\alpha_V = \frac{\Delta V / V}{\Delta T}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 76

Non direzionalità della pressione, DIMOSTRAZIONE: (3)



(*) La pressione in un p.to di un fluido è una quantità scalare: il suo valore può dipendere dalla posizione del punto, ma non dalla direzione

$\uparrow \quad F_c = F_a \cos\theta \qquad F_a = p_a a h \qquad b = a \sin\theta$

$\rightarrow \quad F_b = F_a \sin\theta \qquad F_b = p_b b h \qquad c = a\cos\theta$

$F_c = p_c c h$

Sostituendo:

$\uparrow \quad p_c \cancel{a} \cancel{\cos\theta} \cancel{h} = p_a \cancel{a} \cancel{h} \cancel{\cos\theta}$

$p_c = p_a$

$\rightarrow \quad p_b \cancel{a} \cancel{\sin\theta} \cancel{h} = p_a \cancel{a} \cancel{h} \cancel{\sin\theta}$

$p_b = p_a$

$\Rightarrow \boxed{p_a = p_b = p_c}$

IL RISULTATO NON DIPENDE DA:
- AREA
- ANGOLI
- ORIENTAZIONE delle SUPERFICI

ATTENZIONE:
Non sono state considerate le forze di volume, perchè:

Pensando che $\lim_{a,b,c,h \to 0}$ ↓ Il prisma collassa ad un punto

$\uparrow \quad F_c = F_a\cos\theta + \rho g dV$
$\qquad \qquad \qquad \quad \text{"} \; \rho g \frac{1}{2} bch \to 0$

$\Rightarrow dV = o(dS)$ (*)

⇓

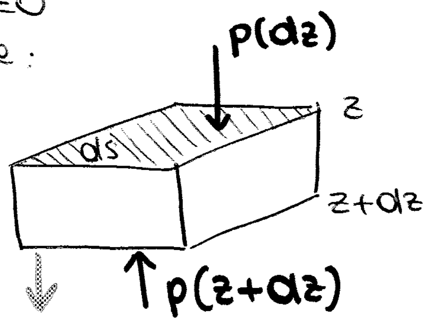
forze di volume possono ESSERE TRASCURATE

EQUILIBRIO STATICO DI UN FLUIDO:
come varia la p nel fluido in quiete in funzione della posizione?

Per un punto: $F_p + F_v = 0$

Per un elemento di volume:

f_z = forza di volume



$f_z \rho \, dV = F_z dm$ ↓

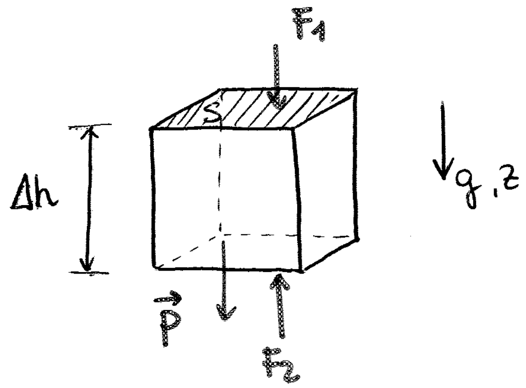
→

Legge di Stevino

5

Enunciato: In un fluido pesante (fluido soggetto a forze di superficie e forze di volume) la differenza di pressione tra 2 punti del fluido è direttamente $\propto$ al dislivello tra i 2 punti.

DIM:



$\uparrow \quad F_2 = F_1 + P$

$F_1 = p_1 S$

$F_2 = p_2 S$

$P = \rho g V$

Sostituendo:

$$p_2 S = p_1 S + \rho g V$$

Inoltre sappiamo che:

$$S = \Delta h^2 \quad , \quad V = \Delta h^3$$

Sostituiamo:

$$p_2 \cancel{\Delta h^2} = p_1 \cancel{\Delta h^2} + \rho g \, \Delta h^{\cancel{3}}$$

$$p_2 = p_1 + \rho g \Delta h$$

$$\boxed{p_2 - p_1 = \rho g \Delta h}$$

CVD

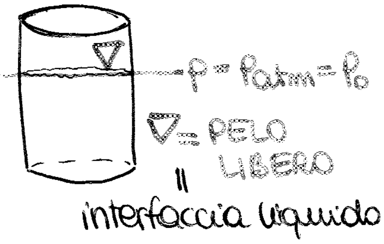
Attenzione:

$z \uparrow \ \downarrow g \qquad p_2 = p_1 - \rho g \Delta h$

$z \downarrow \ \downarrow g \qquad p_2 = p_1 + \rho g \Delta h$

Conseguenza: **2 punti alla stessa altezza hanno la stessa pressione.**

PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI : $p_2 - p_1 = \rho g \cancel{\Delta h} \Rightarrow p_2 = p_1$



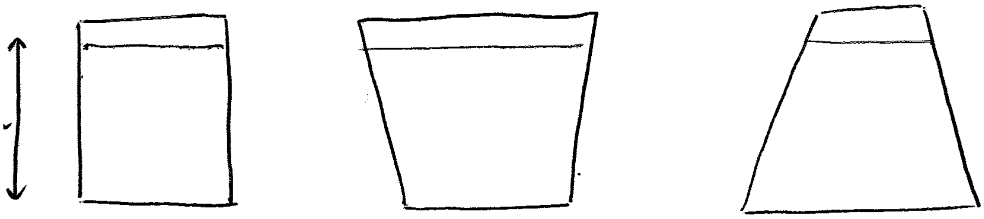
∇ : la pressione atmosferica è uguale alla pressione del liquido per cui i vari punti si trovano alla stessa altezza

$\longrightarrow$

$\rho g A h = p A$

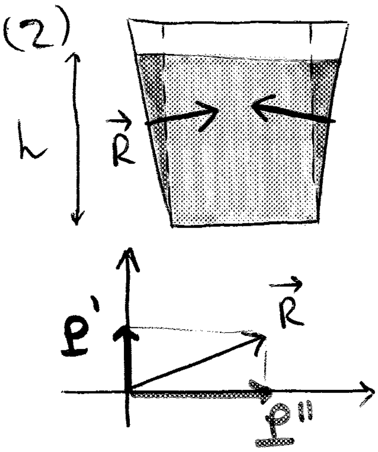
$\boxed{p = \rho g h}$ Nonostante i pesi diversi

Questo è valido per ogni recipiente di forma ≠ (purchè A =)



(1) (2) (3)

(2)



Peso del liquido > del peso del liquido (1)

Parte del peso del liquido contenuto è sostenuto dalla forza normale R, avente componente P' ↑ esercitata dalle pareti del recipiente stesso

= sostenuta dai lati del recipiente

La componente P' si sottrae al peso del liquido e quindi la forza F avrà intensità pari al recipiente (1)

Idem per (3).

Legge di Pascal

Enunciato: Qualsiasi variazione di pressione esterna si trasmette uniformemente a tutti i punti del fluido.

$P_0 = P_{ext}$

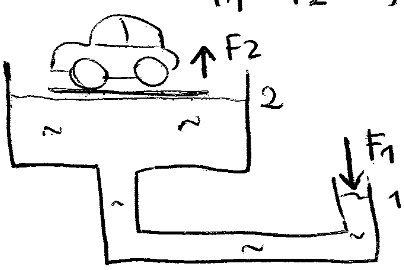
$\boxed{P} = P_0 + \Delta p$

variando P_0 di Δp, VARIA

ES: elevatore idraulico

$P_1 = P_2$, $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1$ V=cost

$F_2 \gg F_1$



→

$$\ln p - \ln p_0 = -g \frac{\rho_0}{p_0} z$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -g \frac{\rho_0}{p_0} z$$

$$e^{-g \rho_0 / p_0 z} = \frac{p}{p_0}$$

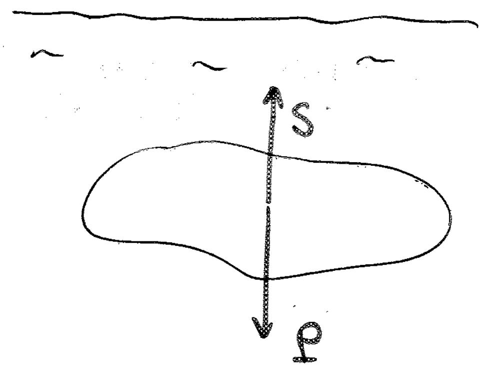
$$\boxed{p = p_0 \, e^{-gz \, \rho_0 / p_0}} \Rightarrow$$ Nell'atmosfera la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza

Principio di Archimede

ENUNCIATO: Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del fluido spostato.

DIM :

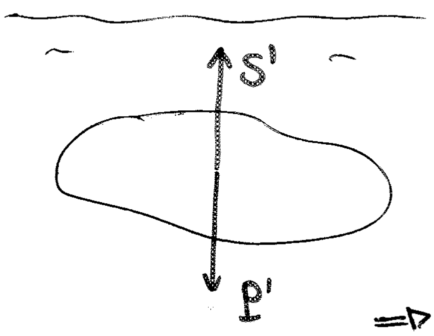
S = spinta



$\uparrow P = S$

$mg = \rho V g = S$

Sostituiamo il corpo con uno di FORMA e VOLUME UGUALI, ma DENSITÀ $\neq$:



$\rho' \neq \rho$

$V' = V \Rightarrow S' = S$ perchè forma' = forma e $V' = V$

$P' \neq P$

$\Rightarrow S = P'$, $m\cancel{g} = m'\cancel{g} \rightarrow m = m'$

$\rho \cancel{V} = \rho' \cancel{V} \Rightarrow \rho = \rho'$ IL CORPO È IN EQUILIBRIO

Se NON HO EQUILIBRIO:

$R = P' - S'$, $R = (m' - m) g = \underbrace{(\rho' - \rho)} V g$

$\rho' > \rho \Rightarrow R \downarrow$, IL CORPO VA A FONDO

$\rho' < \rho \Rightarrow R \uparrow$, " " GALLEGGIA $\Rightarrow$

Quindi:

$$\frac{dU_V}{dt} = \sum_i \dot{m}_{IN}\left(U_{IN} + gz_{IN} + \frac{1}{2}w_{IN}^2\right) - \sum_j \dot{m}_{OUT}\left(u_{OUT} + gz_{OUT} + \frac{1}{2}w_{OUT}^2\right) + \dot{Q} + \dot{L}$$

Assumendo condizioni stazionarie, $t=0$, e 1 USCITA e 1 ENTRATA: $\dot{m}_{IN} = \dot{m}_{OUT} = \dot{m}$

$$0 = \dot{m}\left(u_1 + \frac{1}{2}w_1^2 + gz_1\right) - \dot{m}\left(u_2 + gz_2 + \frac{1}{2}w_2^2\right) + \dot{Q} + \dot{L}, \quad \frac{\ }{\dot{m}}$$

$$\left(u_1 + \frac{1}{2}w_1^2 + gz_1\right) - \left(u_2 + gz_2 + \frac{1}{2}w_2^2\right) + \underbrace{Q_{12} + L_{12}}_{\text{dobbiamo esprimerli}} = 0$$

$L = L_p + L_m \rightarrow$ lavoro dovuto ad organi meccanici in movimento

L_p: lavoro di pulsazione (da forze di pressione)

$$\underbrace{\dot{L}_p}_{\text{potenza}} = \overbrace{pA}^{\text{forza}}\overbrace{w}^{\text{vel}} = p\dot{V} = \dot{m}pv, \quad v = \frac{1}{\rho} \text{ volume specifico}$$

$$p\frac{\dot{m}}{\rho} = \dot{m}p \cdot \underbrace{\frac{1}{\rho}}_{v}$$

$$L_p = pv$$

$$L_{12} = L_{p_{12}} + L_{m_{12}} = p_1v_1 - p_2v_2 + L_{m_{12}}$$

Quindi:

$$\left(u_1 + p_1v_1 + gz_1 + \frac{1}{2}w_1^2\right) - \left(u_2 + p_2v_2 + gz_2 + \frac{1}{2}w_2^2\right) + Q_{12} + L_{m_{12}} = 0$$

Altra hp: fluido incomprimibile $\rightarrow \rho = 0 \rightarrow v_1 = v_2 = v$

Dovendo determinare Q_{12} si utilizza il II Principio della termodinamica:

$$ds = \frac{du + \cancel{pdv}^{\,0}}{t}$$

Integriamo tra 1 e 2:

$$\int_1^2 tds = \int_1^2 du \rightarrow \int_1^2 tds = u_2 - u_1 = Q_{12} + L_W$$

Lavoro delle resistenze passive = incremento di entropia dovuto ai fenomeni irreversibili (esprime dissipazioni

$$Q_{12} = u_2 - u_1 - L_W$$

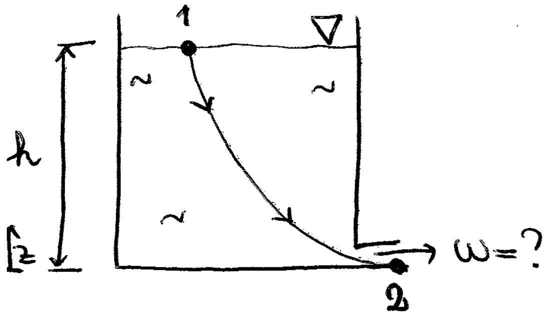
Sostituiamo:

$$\cancel{u_1} + gz_1 + \frac{1}{2}w_1^2 + p_1v\Big) - \left(\cancel{u_2} + gz_2 + \frac{1}{2}w_2^2 + p_2v\right) + \cancel{u_2} - \cancel{u_1} - L_{W_{12}} + \cancel{L_{m_{12}}}^{=0} = 0$$

$$\left(p_1v + gz_1 + \frac{1}{2}w_1^2\right) - \left(gz_2 + \frac{1}{2}w_2^2 + p_2v\right) - L_{W_{12}} = 0, \text{ divido per } v:$$

$$\left(p_1 + \frac{gz_1}{v} + \frac{1}{2}\frac{w_1^2}{v}\right) - \left(\frac{g}{v}z_2 + \frac{1}{2}\frac{w_2^2}{v} + p_2\right) - \Delta p_R = 0 \quad \rightarrow$$

2) Serbatoio con apertura sul fondo:

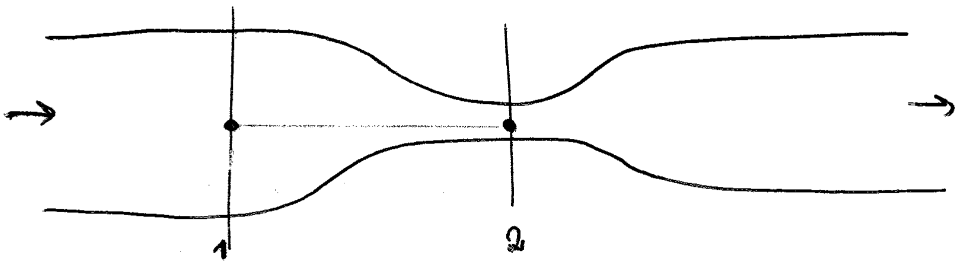


$$\underbrace{(\cancel{p_2-p_1})}_{=0}+\frac{1}{2}\rho\big(\omega_2^2-\underbrace{\cancel{\omega_1^2}}_{\simeq 0}\big)+\rho g\underbrace{(z_2-z_1)}_{-h}=0$$

$$\frac{1}{2}\cancel{\rho}\omega_2^2-\cancel{\rho}gh=0$$

$$\boxed{\omega=\sqrt{2gh}}$$ **LEGGE di TORRICELLI**

3) Tubo con strizione:



$\omega_2=?$

p_1, ω_1, z_1 $\quad p_2, \omega_2, z_2$ $\quad z_1=z_2$

Noto $\Delta p = p_1-p_2$

$\dot V_1=\dot V_2$

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{1}{2}\omega_1^2+\cancel{gz_1}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{1}{2}\omega_2^2+\cancel{gz_2}$$

Abbiamo bisogno di un'altra eq: conservazione massa:

$$A_1\omega_1=A_2\omega_2$$

Xciò:
$$\begin{cases}\omega_2^2-\omega_1^2=\dfrac{2\Delta p}{\rho}\\[2mm] \omega_1=\dfrac{A_2}{A_1}\omega_2\end{cases}$$

$$\omega_2^2-\left(\frac{A_2}{A_1}\omega_2\right)^2=\frac{2\Delta p}{\rho}\ ,\quad \left(1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)\omega_2^2=\frac{2\Delta p}{\rho}\ ,$$

$$\omega_2^2=\frac{2\Delta p}{\rho}\cdot\frac{1}{1-(A_2/A_1)^2}\Rightarrow\omega_2=\sqrt{\frac{2\Delta p/\rho}{1-(A_2/A_1)^2}}$$

→

· Perdite concentrate

Brusche variazioni di E:

$$\boxed{\Delta p_{f conc} = \sum_i \xi \frac{\omega^2}{2g}}$$

ξ → coeff di resistenza localizzata

Dovute a: curve, gomiti, strozzature, bruschi allargamenti, valvole, filtri, ...

ξ = valori sperimentali

· Perdite distribuite

Dovute ad attrito del fluido sulla superficie del condotto

$$\boxed{\Delta p_{f distr} = \lambda \frac{\omega^2}{2g} \frac{L}{D}}$$

λ → **coeff di attrito.**

Dipendono dalle modalità con le quali avviene il movimento del fluido, che a loro volta dipendono: caratt fisiche fluido, sup di contorno, ω del fluido.

$$\lambda = f(Re, \varepsilon/D)$$

Re → numero di Reynolds

ε/D → Rugosità relativa

scabrezza relativa

Esistono 3 REGIMI DI MOTO:

1. MOTO LAMINARE: filetti fluidi // alle pareti del condotto
2. MOTO DI TRANSIZIONE: filetti fluidi che diventano + instabili all'aumentare di ω.
3. MOTO TURBOLENTO: non ∄ filetti fluidi.

Re serve a discriminare i 3 regimi:

1 → $Re < 2000$

2 → $2000 < Re < 10000$

3 → $Re > 10'000$

$$Re = \frac{\rho \omega D}{\mu}$$

$\rho \omega D$ → forze d'inerzia

μ → forze viscose (viscosità)

Per il moto laminare, λ vale:

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re}}$$

Re basso

Come determinare λ in fnz di Re e ε/D? **ABACO di MOODY**

Sommando $\Delta p_{f conc}$ e $\Delta p_{f distr}$ otteniamo:

$$\Delta p_f = \left(\sum_i \xi + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{\omega^2}{2g}$$

Bernoulli: (17)

$$H = (z_2 - z_1) + \left(\sum \xi + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{Q_V^2}{2A^2 g}$$

$$\sum \xi = \xi_{imb} + \xi_{sb} + 3\xi_g = 1 + 1 + 3 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$$

$$\frac{L}{D} = \frac{5\,m}{50 \cdot 10^{-3}\,m} = 100$$

$$A = \pi r^2 = 0{,}078\ m^2 \Rightarrow A^2 = 6{,}17\ m^2$$

$\lambda \Rightarrow$ ABACO di MOODY:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{150 \cdot 10^{-6}\,m}{50 \cdot 10^{-3}\,m} = 3 \cdot 10^{-3} = 0{,}003$$

$$Re = \frac{\rho \omega D}{\mu} = \frac{1000\ kg/m^3 \cdot \omega \cdot 50 \cdot 10^{-3}\,m}{0{,}001\ Pa\,s} = 76500$$

$$\omega = \frac{Q_V}{A} = \frac{3\ kg/s \,/\, 1000\ kg/m^3}{0{,}078\ m^2} = 1{,}53\ m/s$$

$$\frac{\cancel{kg}}{s} \cdot \frac{m^{\cancel{3}}}{\cancel{kg}} \cdot \frac{1}{\cancel{m^2}} = \frac{m}{s} \quad \text{Ok}$$

portata volumica!

$$Q_V = \frac{Q_M}{\rho}$$

Noti $Re = 76500$ e $\varepsilon / D = 0{,}003 \rightarrow \lambda = 0{,}028$

Posso quindi calcolare H:

$$H = 30{,}8\ m$$

$$W_e = \dot{m} g H$$

→

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g h_2} + p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g h_1} + p_1 \\ A_1 v_1 = A_2 v_2 = Q_v \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\rho \frac{Q_v^2}{A_2^2} + p_2 = \frac{1}{2}\rho \frac{Q_v^2}{A_1^2} + p_1$$

$$\frac{1}{2}\rho \left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2} \right) Q_v^2 = p_1 - p_2$$

$$\frac{1}{2}\rho \frac{1}{A_2^2} \left[1 - \frac{1}{(A_1/A_2)^2} \right] Q_v^2 = p_1 - p_2$$

$$\frac{1}{2}\rho \frac{1}{A_2^2} \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \right] Q_v^2 = p_1 - p_2$$

$$\boxed{Q_v = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \frac{1}{A_2^2}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}} = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]}}}$$

Manometro differenziale: $p_1 - p_2 = \rho_M g h$ ← densità del fluido manometrico

Leggendo la quota h si risale alla portata.

ESERCIZI:

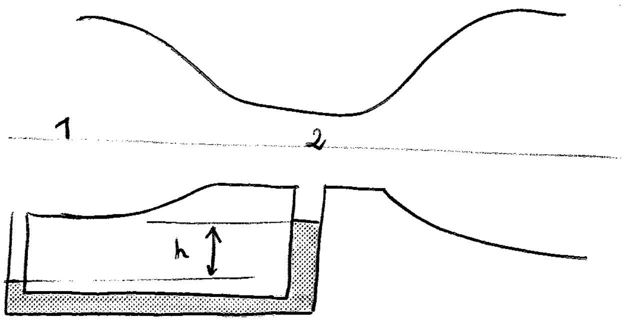
1. $\rho_0 = 800\ kg/m^3$

$h = 4\ cm = 0{,}04\ m$

$A_1 = 0{,}8\ m^2$

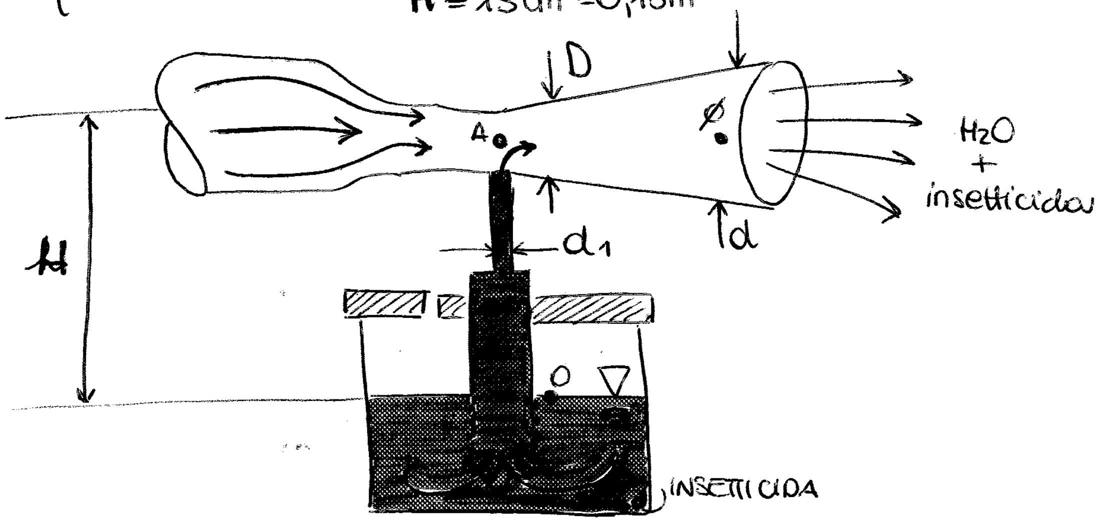
$A_2 = 0{,}6\ m^2$

$Q_M = ?$



$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g h_1} + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g h_2} + p_2 \\ Q_v = A_1 v_1 = A_2 v_2 \\ p_1 - p_2 = \rho_m g h \end{cases}$$

5. $\begin{cases} Q_{i_V} = 75\ ml/min \\ Q_{a_V} = 4\ l/min \end{cases}$ $d = 2{,}5\ mm = 0{,}0025\ m$; $d_1 = 0{,}4\ mm = 0{,}0004\ m$; $H = 15\ cm = 0{,}15\ m$ $\begin{cases} P_A = ? \\ D = ? \end{cases}$ (21)



Bernoulli tra A e O:

I = insetticida

$$P_O + \frac{1}{2}\rho V_O^2 + \rho g z_O = P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g z_A$$

$$\cancel{\frac{P_O}{\rho}}_{0} + \cancel{\frac{1}{2} V_O^2}^{\approx 0} + g z_O = \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} V_{A,I}^2 + g z_A$$

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} V_{A,I}^2 + g \underbrace{(z_A - z_O)}_{H} = 0$$

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} V_{A,I}^2 + gH = 0$$

- $Q_{i_V} = V_{A,I} \cdot A = V_{A,I} \cdot \pi \frac{d_1^2}{4} \Rightarrow V_{A,I} = \frac{4Q_i}{\pi d_1^2} = 9{,}95\ m/s$

- $\boxed{P_A = \left(-\frac{1}{2} V_{A,I}^2 - gH\right)\rho = -50'972\ Pa}$

- $Q_i + Q_A = V_u \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow V_u = 13{,}8\ m/s$

- $P_A + \frac{1}{2}\rho V_{A,a}^2 + \cancel{\rho g z_A} = \cancel{P_O}^{0} + \frac{1}{2}\rho V_u^2 + \cancel{\rho g z_u} \Rightarrow V_{Aa} = \sqrt{-P_A - V_u^2} = 17\ m/s$

- $Q_{AV} = A \cdot V_A^2 = \pi \frac{D^2}{4} \cdot V_A^2 \Rightarrow \boxed{D = \sqrt{\frac{4 Q_{AV}}{\pi V_A^2}} = 2{,}23\ mm}$

→

Unità di misura:

SI: $\mu = \frac{N}{m^2 s} = \frac{kg}{ms} = Pa\,s$

$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{s}$

$\tau = Pa = \frac{N}{m^2} =$

$= kg \frac{m}{s^2} \frac{1}{m^2} =$

$= \left[\underbrace{\left(kg \frac{m}{s}\right)}_{qdm} \frac{1}{s} \right] \frac{1}{m^2}$

flusso di qdm

flusso di qdm / unità di superficie

cgs: $\tau = \frac{dyn}{cm^2}$

$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{s}$

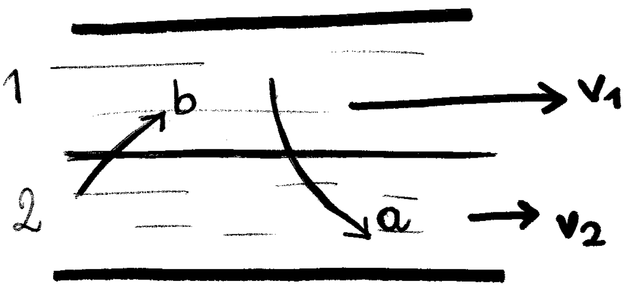
$\mu = \frac{g}{cm\,s} = \frac{dyn}{cm^2} s = \boxed{POISE}\ (P)$

Più utilizzato: $cP = 0{,}01\ P$

⇒ Pertanto possiamo dare un'interpretazione fisica diversa:

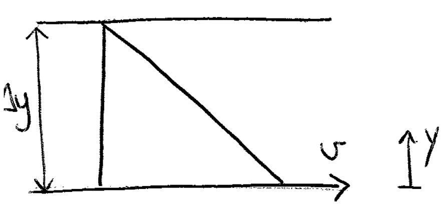
$\tau = \frac{Forza}{Superficie} = \frac{Flusso\ qdm}{Superficie}$

↑ media statistica di ciò che accade a livello molecolare



VISCOSITÀ CINEMATICA: $\frac{\mu}{\rho} = \nu \left[\frac{m^2}{s}\right]$

ESEMPIO:



$v = 0{,}3\ m/s$

$\Delta y = 0{,}3\ mm$

$\mu = 0{,}7\ cP = 0{,}0007\ Pa\,s$

0,001 P
0,007 P

$\tau = ?$

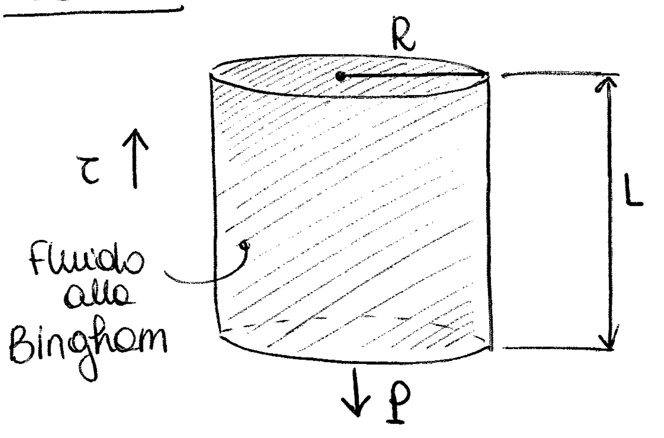
Profilo lineare: $\frac{dv_x}{dy} = \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \frac{0{,}3\ m/s}{0{,}0003\ m} = \frac{3 \cdot 10^{-1}\ m/s}{3 \cdot 10^{-4}\ m} = 1000\ s^{-1}$

$\tau_{yx} = \mu \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = 0{,}0007\ Pa\,s \cdot 1000\ \frac{1}{s} = 0{,}7$

→

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 76

ESEMPIO



$P = mg = V \rho g = \pi R^2 L \rho g$

F = forza sulla superficie laterale che viene scambiata tra il tubo e il fluido: dipende dal prodotto del valore della superficie per la τ =

$= \text{Area} \cdot \tau = 2\pi R L \tau$

Non è necessario moto relativo tra fluido e parete: valore limite x cui si verifica l'assenza di moto dall'equilibrio:

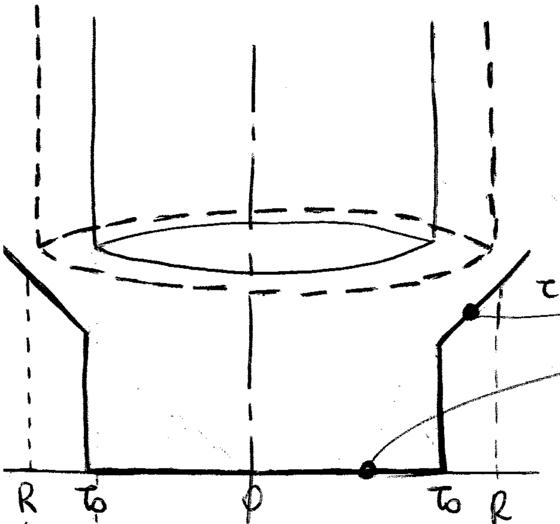
$$P = F \rightarrow \cancel{\pi} R^{\cancel{2}} \cancel{L} \rho g = 2 \cancel{\pi} \cancel{R} \cancel{L} \tau$$

$$R \rho g = 2\tau$$

RAGGIO LIMITE:

$R = \frac{2\tau}{\rho g}$, per $R > \frac{2\tau_0}{\rho g}$, il valore di τ_0 non è + suff. x impedire il moto relativo tra fluido e parete del tubo.

$\tau = \frac{R \rho g}{2} = \frac{\rho g}{2} R \Rightarrow$ isolando un cilindretto di fluido qst è sostenuto dalle τ, ma essendo all'interno le τ saranno + piccole rispetto a quelle corrispondenti ad R limite, τ dinamicamente diminuiscon al diminuire di R



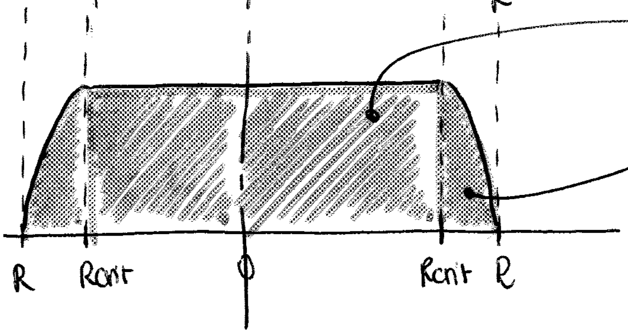
— $R = R_{crit}$

- - - $R > R_{crit}$

$\frac{dv}{dy} \neq 0$ (retta)

$\frac{dv}{dy} = 0$

Profilo delle τ



integro: $\frac{dv}{dy} = 0 \Rightarrow V = \underline{\underline{cost}}$

integro: $\frac{dv}{dy} = \tau_{yx} \Rightarrow V = \underline{\underline{PARABOLA!}}$

↑ retta

Profilo di velocità

BILANCIO DELLA QUANTITA' DI MOTO

Quantità di moto: $\vec{q} = m\vec{v}$

Se m=cost, possiamo scrivere la II legge della dinamica in termini di qdm:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{q}}{dt}}$$

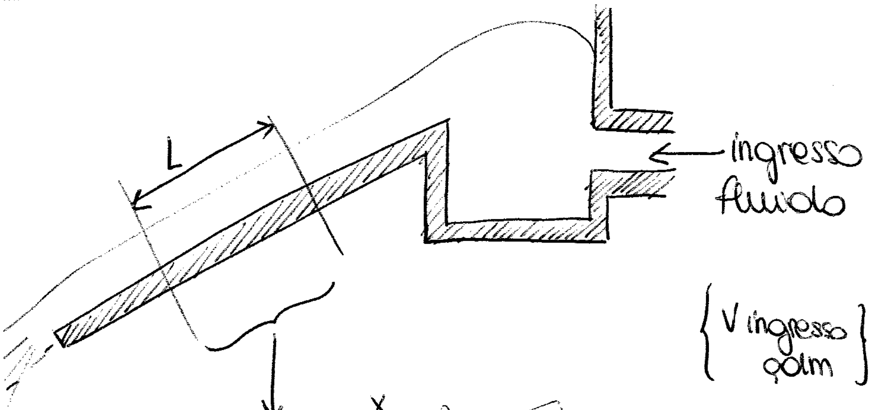
Vogliamo dimostrare che $\vec{F}$ è equivalente, con m=cost, al flusso di qdm

Sist aperto: $\left\{\begin{matrix}\text{V di accumulo} \\ \text{della qdm}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{V d'ingresso} \\ \text{qdm}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{V d'uscita} \\ \text{qdm}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\Sigma \text{ forze esterne} \\ \text{agenti (sup, volume)}\end{matrix}\right\}$

Regime stazionario: no variaz del patrimonio di qdm all'interno del volume di controllo → il bilancio diventa flusso di qdm:

entrante − uscente + Σ forze esterne = 0

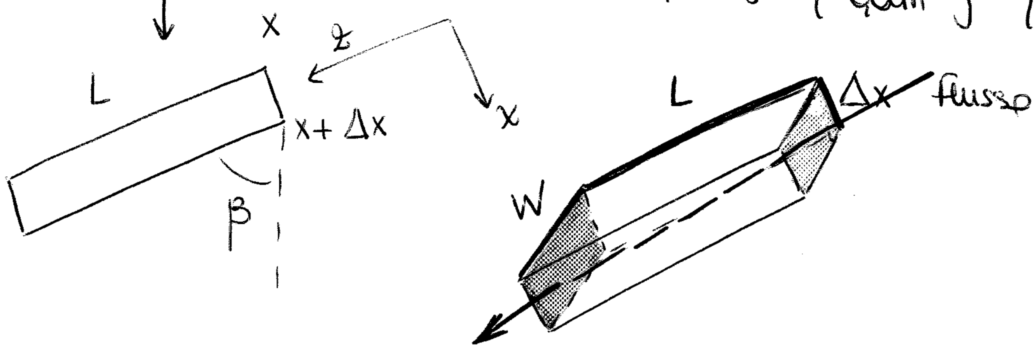
APPROCCIO MECCANICO: bilancio di forze



Nella zona L le velocità sono costanti

Siamo in condizioni stazionarie:

$\left\{\begin{matrix}\text{V ingresso} \\ \text{qdm}\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}\text{V uscita} \\ \text{qdm}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\Sigma \text{ forze} \\ \text{agenti}\end{matrix}\right\} = 0$



INGRESSO: flusso di qdm in direzione z entrante

$$\dot{M}v_z = \dot{V}\rho v_z = \boxed{\Delta x W \rho v_z|_{z=0}\, v_z}$$

USCITA: flusso di qdm in direzione z uscente

$$\dot{M}v_z = \dot{V}\rho v_z = \boxed{\Delta x W v_z|_{z=L}\, \rho v_z}$$

→

$$\int \rho g \cos\beta = \int \frac{d\tau_{xz}}{dx}$$

$$\int \rho g \cos\beta \, dx = \int d\tau_{xz}$$

$$\boxed{\tau_{xz} = \rho g \cos\beta x + C_1}$$

Devo determinare C_1 imponendo le condizioni iniziali:

BC1 $\quad \tau_{xz}(x=0) = C_1 = 0 \quad$ Il fluido spostandosi non muove l'aria intorno

Sostituendo:

$$\boxed{\tau_{xz} = \rho g \cos\beta x}$$

Volendo determinare le velocità (distribuzione, $v_z(x)$) dobbiamo introdurre l'eq costitutiva. Supponiamo che il fluido sia newtoniano:

$$\tau_{xz} = -\mu \frac{dv_z}{dx} \quad \rightarrow \quad -\mu \frac{dv_z}{dx} = \rho g x \cos\beta$$

$$\frac{dv_z}{dx} = -\frac{\rho g}{\mu} x \cos\beta$$

Integro in dx:

$$\int dv_z = \int -\frac{\rho g}{\mu} x \cos\beta \, dx$$

$$v_z(x) = -\frac{\rho g}{2\mu} x^2 \cos\beta + C_2$$

Per determinare C_2:

BC2: il fluido a contatto con la parete ha velocità nulla

$$v_z(x=\delta) = 0$$

↑ h dello strato

$$0 = -\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2 \cos\beta + C_2$$

$$C_2 = \frac{\rho g}{2\mu}\delta^2 \cos\beta$$

Quindi:

$$v_z(x) = -\frac{\rho g}{2\mu} x^2 \cos\beta + \frac{\rho g}{2\mu}\delta^2 \cos\beta$$

$$\boxed{v_z(x) = \frac{\rho g}{2\mu}\cos\beta\left(\delta^2 - x^2\right) = \frac{\rho g}{2\mu}\cos\beta\,\delta^2\left[1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]} \rightarrow$$

- portata in massa USCENTE da dV attraverso la sup in y: $\rho V_y|_{y+dy}\, dx\, dz$
- " " " ENTRANTE in dV " " " " z: $\rho V_z|_z\, dx\, dy$
- " " " USCENTE da dV " " " " z: $\rho V_z|_{z+dz}\, dx\, dy$

Pertanto:

$$dx\,dy\,dz \frac{\partial \rho}{\partial t} = dy\,dz\left(\rho V_x|_x - \rho V_x|_{x+dx}\right) + dx\,dz\left(\rho V_y|_y - \rho V_y|_{y+dy}\right) + dx\,dy\left(\rho V_z|_z - \rho V_z|_{z+dz}\right)$$

/dV

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho V_x|_x - \rho V_x|_{x+dx}}{dx} + \frac{\rho V_y|_y - \rho V_y|_{y+dy}}{dy} + \frac{\rho V_z|_z - \rho V_z|_{z+dz}}{dz}$$

Trattandosi di infinitesimi, nell' hp di continuo, si può passare ai limiti per calcolare la massa accumulata nel volume infinitesimo x effetto delle portate in direzione x:

$$\lim_{\Delta V \to 0}: \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \underbrace{\lim_{dx\to 0} \frac{\rho V_x|_x - \rho V_x|_{x+dx}}{dx}} + \underbrace{\lim_{dy\to 0} \frac{\rho V_y|_y - \rho V_y|_{y+dy}}{dy}} + \underbrace{\lim_{dz\to 0} \frac{\rho V_z|_z - \rho V_z|_{z+dz}}{dz}}$$

Per ognuno troviamo la definizione di derivata:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} - \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} - \frac{\partial \rho V_z}{\partial z}$$

Ricordando che: $d(fg) = f\,dg + df\,g$:

$$\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = -\cancel{V_x \frac{\partial \rho}{\partial x}} - \cancel{V_y \frac{\partial \rho}{\partial y}} - \cancel{V_z \frac{\partial \rho}{\partial z}} - \rho \frac{\partial V_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial V_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Introduciamo l' hp di fluido incomprimibile: $\boxed{\rho = cost}$

$$\cancel{\rho}\left[\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right] = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{V} = 0\end{gathered}}$$

BILANCIO DI MASSA PER FLUIDI INCOMPRIMIBILI

→

$$-\rho\left[v_x\underbrace{\cancel{\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)}}_{=0}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right]$$

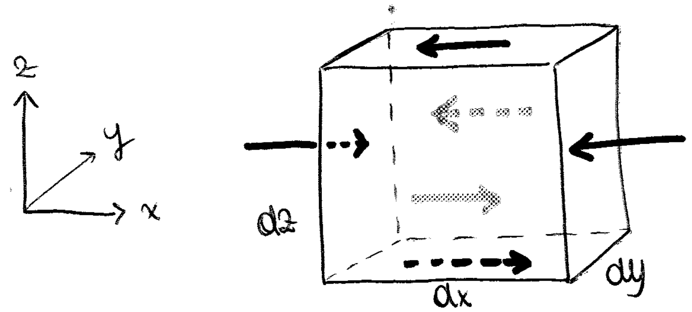
x bilancio di massa :
div $\vec{v}=0$

Possiamo aggiungere al trasporto convettivo, l'accumulo nel tempo:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t}+\rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\Rightarrow \text{DERIVATA SOSTANZIALE } \rho\frac{Dv_x}{Dt}$$

2. Trasporto molecolare

Ricordiamo che τ_{yx} è il flusso della componente della qdm in direzione x attraverso una superficie perpendicolare all'asse y :



$\rightarrow \tau_{yx}|_y \quad \leftarrow \tau_{yx}|_{y+dy}$

$\rightarrow \tau_{zx}|_z \quad \leftarrow \tau_{zx}|_{z+dz}$

$\rightarrow \tau_{xx}|_x \quad \leftarrow \tau_{xx}|_{x+dx}$

- flusso entrante in y : $dx\,dz\;\tau_{yx}|_y$
- " uscente da y : $-dx\,dz\;\tau_{yx}|_{y+dy}$
- " entrante in z : $dx\,dy\;\tau_{zx}|_z$
- " uscente da z : $-dx\,dy\;\tau_{zx}|_{z+dz}$
- " entrante in x : $dy\,dz\;\tau_{xx}|_x$
- " uscente da x : $-dy\,dz\;\tau_{xx}|_{x+dx}$

$$dy\,dz\left(\tau_{xx}|_x-\tau_{xx}|_{x+dx}\right)+dx\,dz\left(\tau_{yx}|_y-\tau_{yx}|_{y+dy}\right)+dx\,dy\left(\tau_{zx}|_z-\tau_{zx}|_{z+dz}\right)$$

$/dV$

$$\frac{\tau_{xx}|_x-\tau_{xx}|_{x+dx}}{dx}+\frac{\tau_{yx}|_y-\tau_{yx}|_{y+dy}}{dy}+\frac{\tau_{zx}|_z-\tau_{zx}|_{z+dz}}{dz}$$

$$\lim_{\Delta V\to 0}:\quad -\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\qquad \text{trasporto molecolare}$$

$\rightarrow$

Dobbiamo sostituire le precedenti espressioni in:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Otteniamo:

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = -\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\right)\right]}_{-\mu\left[2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}\right]} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z}}_{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = 0}$$

$=0$ x bilancio di massa $\nabla \vec{v} = 0$

Quindi sostituendo otteniamo:

$$\boxed{\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x + \mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]}$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES Componente x **(x fluidi newtoniani)**

In forma vettoriale completa

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v}}$$

Se espandiamo $\frac{Dv_x}{Dt}$:

$$\boxed{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t}} + \boxed{\rho\left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)} = \boxed{\rho g_x} - \boxed{\frac{\partial p}{\partial x}} + \boxed{\mu\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]}$$

- forze inerziali transitorie
- **forze convettive**
- **forze di gravità**
- forze di pressione
- **forze viscose**

BC1: $r=0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L} r = 0$$

Integro in dr:

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) r^2 + C_2$$

BC2: $v_R(R) = 0$

$$0 = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) R^2 - C_2$$

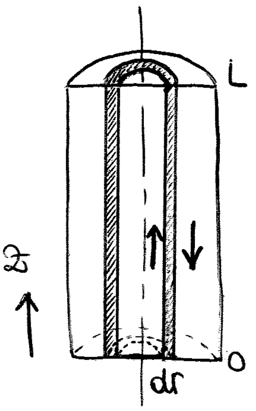
$$C_2 = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) R^2$$

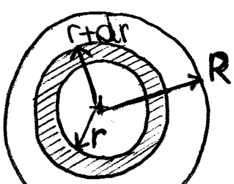
Quindi:

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) r^2 + \frac{1}{4\mu L}(P_0 - P_L) R^2$$

$$\boxed{v_z(r) = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \frac{r^2}{R^2}\right]}$$

2. <u>Condotto cilindrico : approccio meccanico</u>





$v_z = v_z(r)$

Bilancio di forze (τ, forze di p, forze di volume)

– fluido di qdm parete laterale r (interno)

$2\pi r L \tau_{rz}|_r$ (concorde con z)

– fluido di qdm parete laterale r+dr (esterno)

$2\pi (r+dr) L \tau_{rz}|_{r+dr}$

– forza di pressione z=0

Area corona circolare · P_0 =

$= (\pi(r+dr)^2 - \pi r^2) P_0 = (\cancel{\pi r^2} + \cancel{\pi dr^2} + 2\pi r dr - \cancel{\pi r^2}) P_0$

$= (2\pi r dr) P_0$

– forze di pressione z = L:

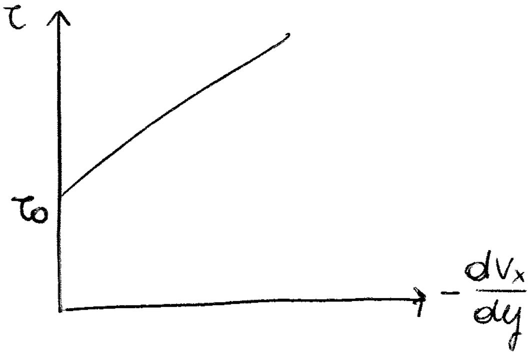
$- 2\pi r \, dr \, P_L$

$\Rightarrow$

3. Condotto cilindrico: fluido alla Bingham

Ricordiamo che per un fluido alla Bingham:

$$\begin{cases} \tau_{yx} = -\mu_0 \dfrac{dv_x}{dy} + \tau_0 & r > r_0 \\ \dfrac{dv_x}{dy} = 0 & r < r_0 \end{cases}$$



Partendo da: $\boxed{\tau_{rz} = \left(\dfrac{P_0 - P_L}{2L}\right) r}$ Vale ∀ tipo di fluido

Per $\boxed{r > r_0}$: $\tau_{rz} = \tau_0 - \mu \dfrac{dv_z}{dr} = \left(\dfrac{P_0 - P_L}{2L}\right) r$

$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{\mu}\left[-\left(\frac{P_0 - P_L}{2L}\right) r + \tau_0\right] \quad , \quad \int dr$$

$$v_z(r) = \frac{1}{\mu}\left[-\left(\frac{P_0 - P_L}{4L}\right) r^2 + \tau_0 r\right] + C_2$$

BC2: $v_z(r = R) = 0 \rightarrow C_2 = \dfrac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 - \dfrac{\tau_0}{\mu} R$

$$\boxed{v_z(r) = \underbrace{\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}_{\text{come per un fluido newtoniano}} - \frac{\tau_0}{\mu} R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)\right]}$$

LEGGE DI BUCKINGAM-REINER

Per $\boxed{r < r_0}$:

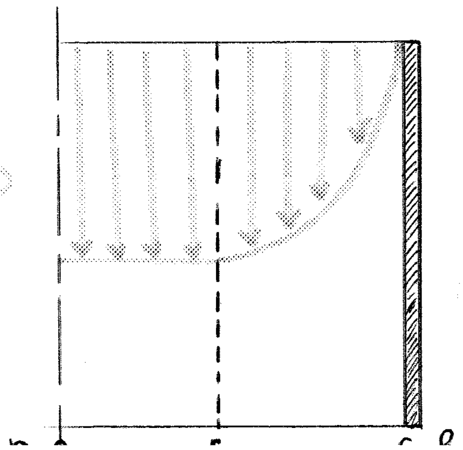
$$\boxed{v_z(r) = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right] - \frac{\tau_0}{\mu} R \left[1 - \frac{r_0}{R}\right]}$$

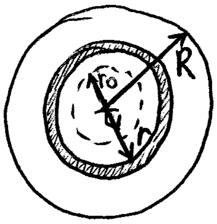
VALORE DI VELOCITA' COSTANTE

PROFILO DI VELOCITÀ:

$r > r_0$: PROFILO PARABOLICO

$r < r_0$: COSTANTE





$$\begin{cases} - \\ C_2 = + \dfrac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 + \dfrac{C_1}{\mu} \ln R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{P_0 - P_L}{4\mu L} k^2 R^2 - \ln k \dfrac{C_1}{\mu} - \cancel{\ln R \dfrac{C_1}{\mu}} + \cancel{\dfrac{C_1}{\mu} \ln R} + \dfrac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left(-k^2 + 1\right) - \frac{\ln k}{\mu} C_1 = 0 \rightarrow C_1 = \left[\frac{P_0 - P_L}{4L} R^2 \left(-k^2 + 1\right)\right] \frac{1}{\ln k}$$

$$C_1 = \frac{P_0 - P_L}{4L} R^2 \frac{(-k^2 + 1)}{\ln k}$$

$$C_2 = + \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 + \frac{\ln R}{\mu} \left[\frac{P_0 - P_L}{4L} R^2 \frac{(-k^2 + 1)}{\ln k} \right]$$

$$C_2 = + \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 + \ln R \left[\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \frac{(-k^2 + 1)}{\ln k} \right]$$

$$C_2 = + \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[\frac{-k^2 + 1}{\ln k} \ln R + 1 \right]$$

$$C_2 = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \ln R \right]$$

Quindi:

$$C_1 = \frac{P_0 - P_L}{4L} R^2 \frac{k^2 - 1}{\ln k}$$

$$C_2 = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \ln R \right]$$

$$\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} r^2 - \frac{\ln r}{\mu} \left(- \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \right) + \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \ln R \right]$$

$$\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \frac{\ln r}{\cancel{\mu}} + 1 - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \ln R \right]$$

$$\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right]$$

Pertanto:

$$\boxed{v_z(r) = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{1 - k^2}{\ln(1/k)} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \right]}$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES

$$\underbrace{\rho \frac{Dv_x}{Dt}}_{\text{F. inerziali}} = \underbrace{\rho g_x}_{\text{Gravità}} - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{\text{pressione}} + \underbrace{\mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right]}_{\text{Forze viscose}}$$

Adimensionalizziamo:

$$x' = \frac{x}{L}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad v'_x = \frac{v_x}{|v|}, \quad P' = \frac{P}{\rho |v|^2}, \quad t' = t\omega$$

freq angolare

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)+\frac{P_1-P_2}{\mu \ell}=0$$

ω = velocità
ℓ = lunghezza condotto

$$\frac{1}{r}\left(\cancel{\frac{\partial r}{\partial r}}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\left(r\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}\right)+\frac{P_1-P_2}{\mu \ell}=0$$

1

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}+\frac{P_1-P_2}{\mu \ell}=0$$

$$\omega(r)=\frac{P_1-P_2}{4\mu L}\left(R^2-r^2\right)$$

In condiz <u>non stazionarie</u>:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}+\frac{P_1-P_2}{\mu \ell}=\frac{1}{\nu}\frac{\partial \omega}{\partial t}$$

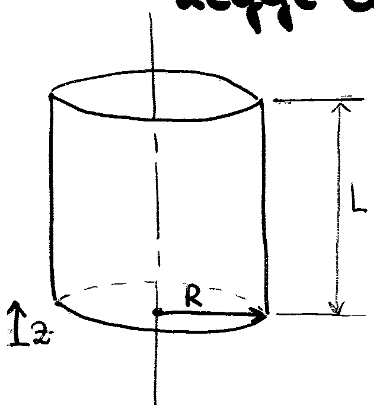
ν = viscosità cinematica

α^2 dice quanto pesano le varie componenti:

- se $\alpha^2 \downarrow$ / se $r \downarrow$ — f. viscose >> f. inerziali transitorie
- se $r \uparrow$ / se $\alpha^2 \uparrow$ — f. inerziali transitorie >> f. viscose

MOTO DI UN FLUIDO IN UN CONDOTTO CILINDRICO

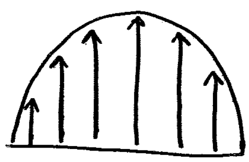
Legge di Poiseuille



$$\frac{\Delta P}{L}=\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\right]$$

Assunzioni:
- $V_z = V_z(r)$
- fluido newtoniano

$$V_z(r)=\frac{\Delta P R^2}{4\mu L}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$



Profilo delle velocità parabolico:

$$V_{max}\Big|_{r=0}=\frac{\Delta P R^2}{4\mu L}$$

Portata volumica:

$$Q=\int_0^R \underbrace{2\pi r}\,\underbrace{V_z(r)}\,dr$$

$$Q=2\pi\frac{\Delta P R^2}{4\mu L}\int_0^R\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr$$

→

MOTO TURBOLENTO

Turbolenza → moto non stazionario, irregolare e apparentemente caotico di un fluido.

↓

Può essere descritta solo STATISTICAMENTE!

Ricorda:

→ fenomeno STAZIONARIO: processo aleatorio si dice stazionario in senso stretto quando il comportamento statistico è invariante rispetto alla traslazione dall'origine dei tempi.
La media e le grandezze di ordine superiore devono essere uguali a zero. Le proprietà caratteristiche del segnale devono essere tutte contenute nell'intervallo di tempo considerato.

→ fenomeno stazionario in senso debole: solo la media e la funz di autocorrelazione sono indipendenti dal tempo.

→ fenomeno STAZIONARIO ed ERGODICO: quando solo una misura è rappresentativa di tutto il processo in generale.

Basta una piccolissima perturbazione al sistema che tutte le caratteristiche si modificano.

ESPERIENZA di REYNOLDS (1883)

$$\boxed{Re = \frac{\rho V D}{\mu} = \frac{V D}{\nu} = \frac{\text{forze inerziali}}{\text{forze viscose}}}$$

Se $Re = 1$: forze inerziali e viscose sono comparabili.

Reynolds fece esperimenti molto semplici: tubo cilindrico con all'interno un fluido e un filo di inchiostro. Facendo varie misure ha ottenuto (variando D, v e ν):

- $Re < 2000$: il filetto d'inchiostro rimane rettilineo e segue il moto laminare del fluido. Da qui il MOTO LAMINARE: lamine rettilinee che scorrono le une sulle altre, interagiscono solo attraverso gli sforzi tangenziali.
- $2000 < Re < 4000$: pur mantenendo una linea sottile, la streakline diventa ondulata. MOTO TRANSISIONALE
- $Re > 4000$: dopo un tratto iniziale con oscillazioni di ampiezza crescente, la streakline viene diffusa vigorosamente in tutta la sezione trasversale fino ad una distribuzione omogenea.
  ↳ MOTO TURBOLENTO.

Prendo NS e sostituisco:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad , \nabla \cdot V = 0$$

Notaz. vettoriale:

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

Sostituiamo le grandezze:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar{V}_x + V'_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{V}_y + V'_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{V}_z + V'_z) = 0$$

Integriamo nell'intervallo di tempo caratteristico $t_0 \equiv T$:

$$\int_T \frac{\partial}{\partial x}(\bar{V}_x + V'_x)dt + \int_T \frac{\partial}{\partial y}(\bar{V}_y + V'_x)dt + \int_T \frac{\partial}{\partial z}(\bar{V}_z + V'_z)dt = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\underbrace{\int_T \bar{V}_x dt}_{cost} + \cancel{\int_T V'_x dt}^{\,0}\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[\underbrace{\int_T \bar{V}_y dt}_{cost} + \cancel{\int_T V'_y dt}^{\,0}\Big] + \frac{\partial}{\partial z}\Big[\underbrace{\int_T \bar{V}_z dt}_{cost} + \cancel{\int_T V'_z dt}^{\,0}\Big]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{V}_x \int_T dt + \frac{\partial}{\partial y}\bar{V}_y \int_T dt + \frac{\partial}{\partial z}\bar{V}_z \int_T dt = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{V}_x \cancel{T} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{V}_y \cancel{T} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{V}_z \cancel{T} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\bar{V}_x + \frac{\partial}{\partial y}\bar{V}_y + \frac{\partial}{\partial z}\bar{V}_z = 0}$$ Non ho + le fluttuazioni

Eq di momento: sviluppiamo solo lungo la componente x

$$\frac{\partial}{\partial t}v_x + \rho\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial y} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\nabla^2 v_x$$

sostituiamo:

$\bar{V}_x\bar{V}_x + 2\bar{V}_x V'_x + V'^2_x$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{V}_x + V'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{P} + P') - \Big[\frac{\partial}{\partial x}\rho(\bar{V}_x + V'_x)(\bar{V}_x + V'_x) + \frac{\partial}{\partial y}\rho(\bar{V}_y + V'_y)(\bar{V}_x + V'_x) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\rho(\bar{V}_z + V'_z)(\bar{V}_x + V'_x)\Big] + \mu\nabla^2(\bar{V}_x + V'_x)$$

Integriamo nel tempo $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_T(\underset{cost}{\bar{V}_x} + \underset{0}{V'_x})dt$

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \Big[\rho\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int_T \bar{V}_x\bar{V}_x dt + 2\int \bar{V}_x V'_x dt + \int V'_x V'_x dt\Big) + \dots\Big] + \mu\nabla^2\bar{V}_x$$

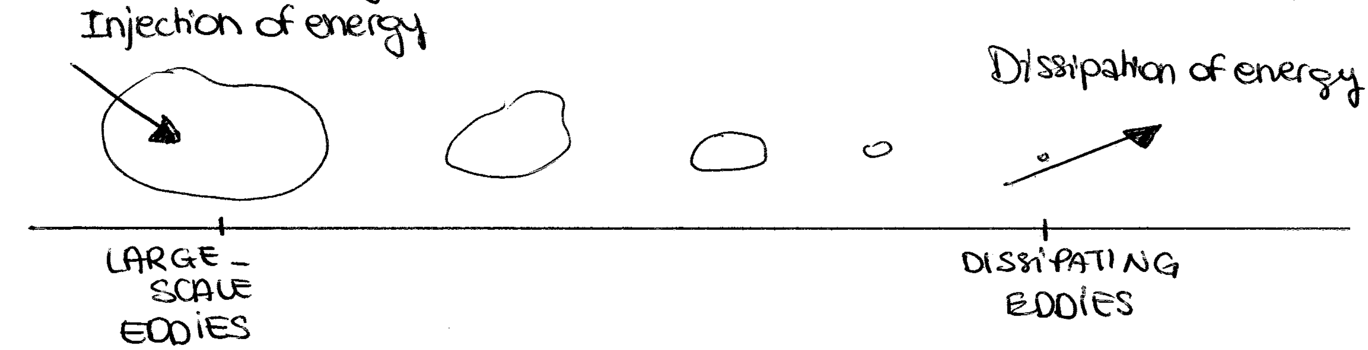
$\longrightarrow$

se sostituisco nella generale [v·τ''] dipendente dalle medie di defor-
mazione, ma avrò cmq come incognita μ_t che NON è proprietà fisica del sistema → nuovi modelli.

Teoria di Kolmogorov

$\boxed{\text{EDDY}}$: la teoria descrive come l'E viene trasferita dagli eddies + grandi a quelli + piccoli, quanta E è contenuta in essi e quanta E è dissipata dagli eddies + piccoli.

Scala di Kolmogorov:



Teoria che si basa solo su analisi dimensionale:

- Moto turbolento complet. sviluppato:

$$Re = UL/\nu \quad , U = \text{velocità media} \quad Re > 4000$$

- la turbolenza può essere rappresentata da eddies di varie taglie
- Def. eddy: moto turbolento, localizzato in una regione di taglia l (= scala spaziale rappresentativa) che è coerente in quella regione almeno.
- Un eddy di dim. l ha: velocità caratteristica $u(l)$ e una scala temporale caratteristica $\tau(l) = l/u(l)$
- Eddy + grandi hanno una scala di lunghezza l_0 che è comparabile alla scala di lungh del flusso, L.
- la velocità caratteristica $u_0 \equiv u(l_0)$ è dell'ordine di grandezza del valore rms dell'intensità di turbolenza $u' \equiv (2k/3)^{1/2}$ $[k = E_k]$ che è comparabile con U, velocità media.
- Energia cinetica turbolenta: $E_k = k = \frac{1}{2}\langle u_i u_i \rangle = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}\right)$
- Re x gli eddy + grandi: $Re_0 = \frac{u_0 l_0}{\nu} \simeq$ Re del moto generale
- Siccome $Re_0 \simeq Re \Rightarrow Re_0 \uparrow$ (dal momento che $Re \uparrow$) →

(49)

PROBLEMI

dimensione degli eddies alla quale avviene dissipazione?

sappiamo che passiamo da eddy + grandi a + piccoli x diminuzione di Re, ma i trend di velocità e tempo?

Kolmogorov's Theory

IPOTESI di KOLMOGOROV

- Turbolenza è isotropa: $\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$
- Qualunque tipo di polarizzazione derivante da una direzione precisa del moto viene persa nel passaggio alle scale + piccole.
- Hp di isotropia → per Re↑ i moti turbolenti su piccola scala sono statisticamente isotropi.
- Larga scala → ANISOTROPA
- l_{EI} = lungh caratteristica per cui abbiamo divisione tra scale grandi e scale piccole.
- **1^ HP DI SIMILARITÀ:**
  - ✓ Passando ad eddies + piccoli perdo info sulla direzionalità (vedi sopra) e sulla GEOMETRIA.
  - ✓ Strutture su scale + piccole hanno una statistica di tipo universale (non dipendono dalla forma né dalla direzione)
  - ✓ "In every turbolent flow at sufficiently high Reynolds number, the statistic of the small scale motions ($l < l_{EI}$) have universal form that is uniquely determinated by ε and ν.

SCALA DI KOLMOGOROV = scala + piccola

Re = 1, Def una scala di kolmogorov:

η = lungh caratteristica

u_η = veloc. caratt.

τ_η = tempo caratt

Hp:

$$Re_\eta = \frac{\eta u_\eta}{\nu} = 1 \Rightarrow$$

$$u_\eta = \frac{\nu}{\eta}$$

$$\varepsilon = \frac{k}{\tau_\eta} = \frac{u_\eta^2}{\tau_\eta} = u_\eta^2 \cdot u_\eta/\eta = \frac{u_\eta^3}{\eta} \Rightarrow (\varepsilon\eta)^{1/3} = u_\eta$$

$\tau_\eta = \eta / u_\eta$

$$(\varepsilon\eta)^{1/3} = \frac{\nu}{\eta}$$

posso ricavare scala di lungh in fnz di ε e ν →

Volendolo definire:

$$\frac{u_\eta}{u_{l_0}} \quad , \quad u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} \qquad \frac{u_\eta}{u_{l_0}} = \frac{\nu^{1/4}\,\varepsilon^{1/4}}{k^{1/2}}$$

$$u_{l_0} = k^{1/2}$$

$$\frac{u_\eta}{u_{l_0}} = \frac{\nu^{1/4}\cdot\varepsilon^{1/4}}{k^{1/2}} = \left(\frac{\nu\varepsilon}{k^2}\right)^{1/4}$$

$$Re_L = \frac{k^2}{\nu\varepsilon} \Rightarrow \frac{u_\eta}{u_{l_0}} = \left(\frac{1}{Re_L}\right)^{1/4} \Rightarrow \boxed{u_\eta/u_{l_0} = (Re_L)^{-1/4}}$$

Infine:

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_{l_0}} \qquad \tau_\eta = \frac{\eta}{u_\eta} \qquad \tau_{l_0} = \frac{l_0}{u_{l_0}} = \frac{l_0}{k^{1/2}} = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon\, k^{1/2}} = \frac{k}{\varepsilon}$$

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$$

Perciò:

$$\frac{\tau_\eta}{\tau_{l_0}} = \frac{\nu^{1/2}}{\varepsilon^{1/2}}\cdot\frac{\varepsilon}{k} = \frac{\nu^{1/2}\cdot\varepsilon^{1/2}}{k} = \left(\frac{\nu\varepsilon}{k^2}\right)^{1/2}$$

$$Re_L = \frac{k^2}{\nu\varepsilon} \rightarrow \boxed{\frac{\tau_\eta}{\tau_{l_0}} = \left(\frac{1}{Re_L}\right)^{1/2} = Re_L^{-1/2}}$$

- **2^ HP DI SIMILARITÀ:**

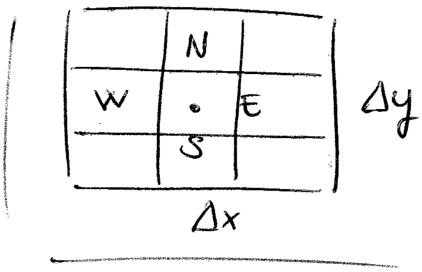
"In every turbolent flow at sufficientely high Reynolds number, the statistic of the motions of scale l in the range $l_0 \gg l \gg \eta$ have an universal form that is uniquely determinated by ε independent of ν".

Dobbiamo discretizzare: 26

$$\rho \int \frac{\partial v_1}{\partial t} dV \underset{\text{Eulero}}{=} \underbrace{\rho \frac{V_1(t) - V_1(t-\Delta t)}{\Delta t}}_{\text{rap. increm.}} \overbrace{\Delta x \Delta y}^{\text{SUP}}$$

termine NON STAZIONARIO

$$\rho \frac{V_1 - V_1^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y$$



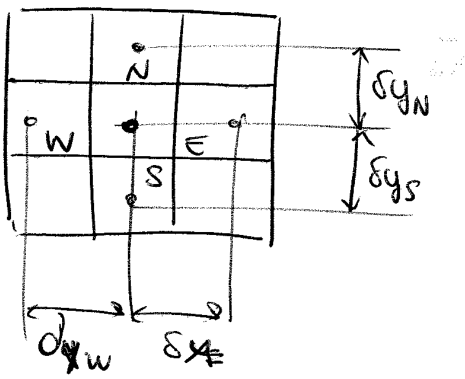
$$\underbrace{\int_S \rho v_1 v_1 i n \, dA}_{F_e V_{1e} - F_w V_{1w}} + \underbrace{\int_S \rho v_1 v_2 j n \, dA}_{F_N V_{1N} - F_S V_{1S}}$$

$F_e = \rho_e V_{1e} \Delta y$ $\qquad F_N = \rho_N V_{2N} \Delta x$

$F_W = \rho_W V_{1w} \Delta y$ $\qquad F_S = \rho_S V_{2S} \Delta x$

$$\int_S p i n \, dA = P_e \Delta y - P_W \Delta y$$

$$\int_S \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} i n + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} j n \right) dA \Rightarrow$$



$$\mu \int_S \frac{\partial v_1}{\partial x_1} i n \, dA = \mu \frac{V_{1e} - V_1}{\delta x_e} \Delta y - \mu \frac{V_1 - V_{1w}}{\delta x_w} \Delta y$$

$$\mu \int_S \frac{\partial v_1}{\partial x_2} j n \, dA = \mu \frac{V_{1N} - V_1}{\delta y_N} \Delta x - \mu \frac{V_1 - V_{1S}}{\delta y_S} \Delta x$$

Combinando:

$$\rho \frac{V_1 - V_1^0}{\Delta t} \Delta x \Delta y + F_e V_{1e} - F_W V_{1W} + F_N V_{1N} - F_S V_{1S} = P_e \Delta y_e - P_W \Delta y_W +$$

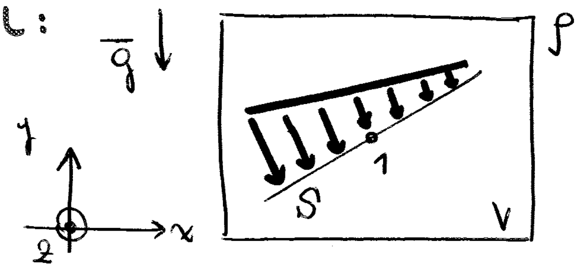
$$+ \mu \frac{V_{1e} - V_1}{\delta x_e} \Delta y - \mu \frac{V_1 - V_{1w}}{\delta x_w} \Delta y + \mu \frac{V_{1N} - V_1}{\delta y_N} \Delta x - \mu \frac{V_1 - V_{1S}}{\delta y_S} \Delta x$$

$$a_V V_1 = a_{V,W} V_{1W} + a_{V,e} V_{1,e} + a_{Vn} V_{1n} + a_{V,S} V_{1S} + a_{P,e} P_e + a_{P,N} P_N + b_V$$

ESERCITAZIONI

Ripasso:

- PASCAL:

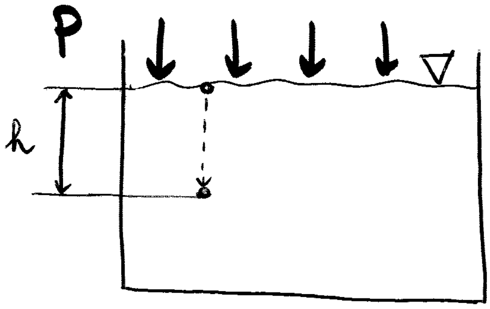


$$\boxed{p_{1x} = p_{1y} = p_{1z} = p_1}$$

La pressione NON è direzionale

p ⊥ ad S, sempre!

- STEVINO:



$$\boxed{p = \rho g h}$$

$\rho g \rightarrow \gamma \; [N/m^3]$

$p = \gamma h$

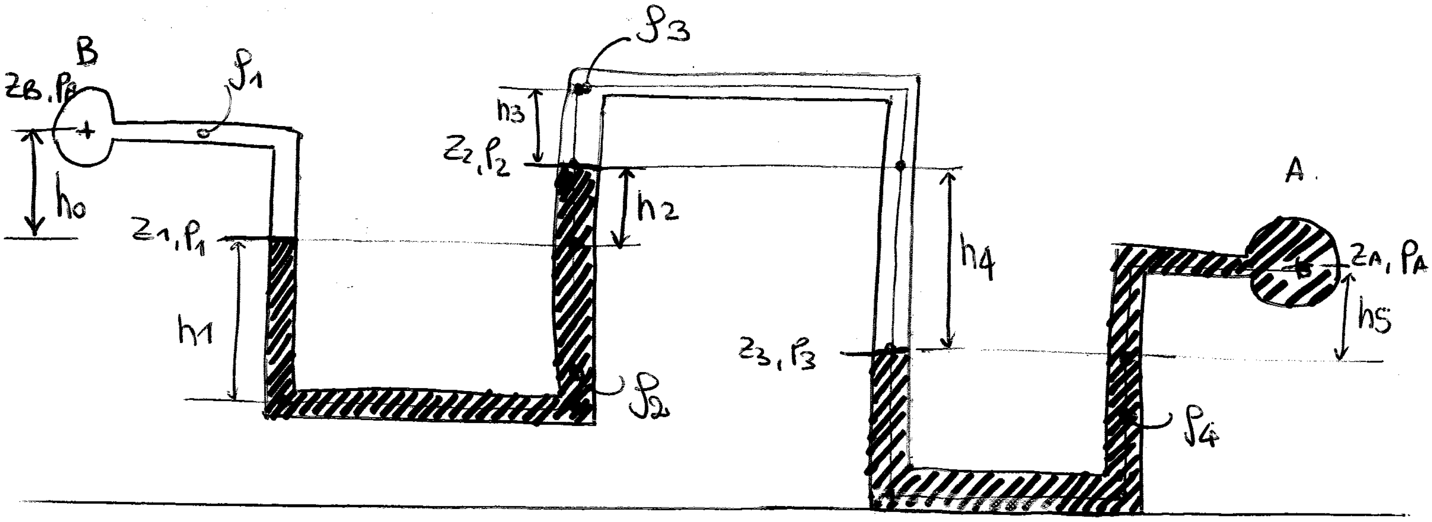
$\rho_{H_2O} = 1000 \; kg/m^3$

$\rho_{ARIA} \cong 1 \; kg/m^3$

- UNITÀ DI MISURA PRESSIONE:

$$1 \; Pa = 10^{-5} \; bar = 9{,}8692 \cdot 10^{-6} \; atm = 7{,}5 \cdot 10^{-3} \; Torr \; (mm \, Hg)$$

ES. 1



$z_A = 1{,}6 \; m$

$z_B = 1{,}8 \; m$

$z_1 = 0{,}7 \; m$

$z_2 = 2{,}1 \; m$

$z_3 = 0{,}9 \; m$

$\gamma_1 = 9807 \; N/m^3$

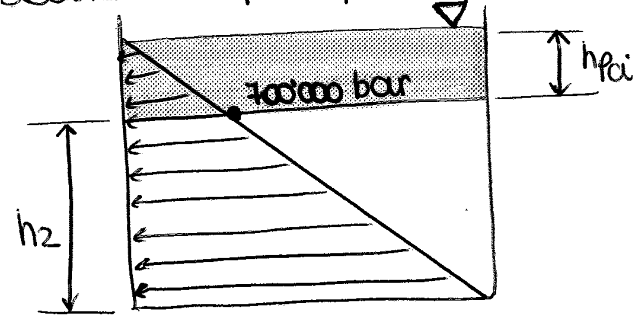
$\gamma_2 = 133\,100 \; N/m^3$

$p_A - p_B$?

→

PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI

Superficie a cui si raggiunge p_{atm}. È una nuova superficie di equilibrio (3) tra fluido e atmosfera.
Dobbiamo capire quanta H_2O dovremmo avere "sopra" x avere 700'000 Pa:

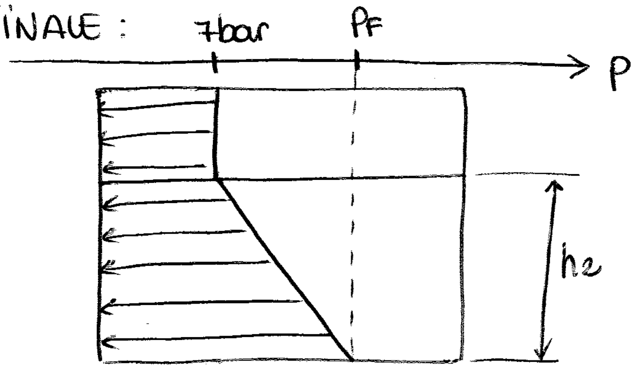


$p_A = \gamma h_{pci}$

$\underbrace{h_{pci}}_{\downarrow} = \frac{p_A}{\gamma}$

Quota a cui noi avremmo il ∇ in un sist. equivalente

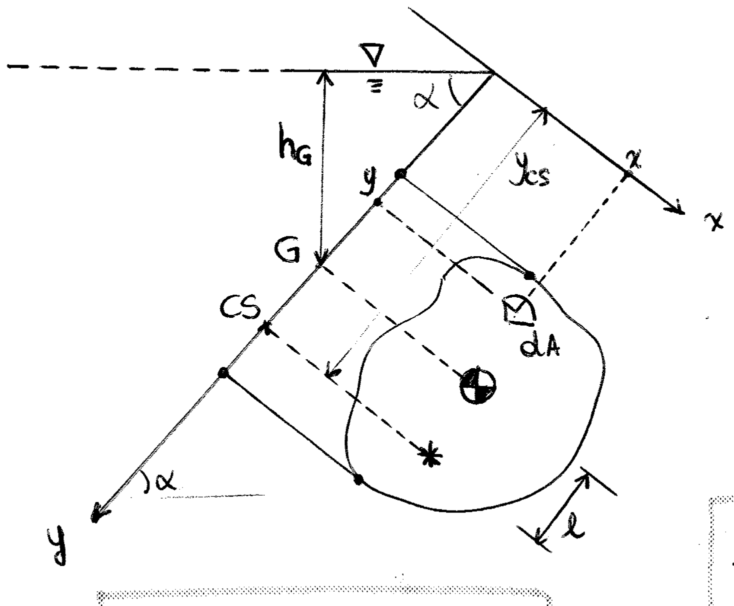
FINALE:



$p_F = p_{ARIA} + \underbrace{\gamma h_2}_{p_{H_2O}}$

ES. 3

INTRODUZIONE:



$|F| = p_G \cdot A = \gamma y_G A$

$F_R y_{cs} = \int_A p \, dA =$

$= \int_A \gamma \sin\alpha \underbrace{y \cdot y \, dA}_{I_{xx}} =$

$y_{cs} = \frac{I_{xx}}{\cancel{\gamma} y_G A} \cdot \sin\alpha \cancel{\gamma}$

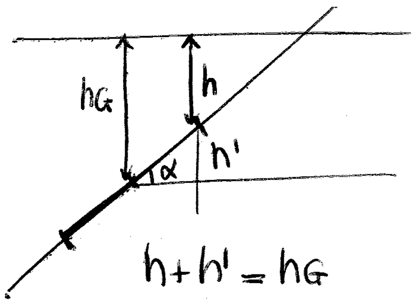
$\boxed{y_{cs} = \frac{I_{xx}}{y_G A} (\sin\alpha ?)}$

$\boxed{y_{cs} = y_G + \underbrace{\frac{I_{xx}}{y_G A}}_{\ell}}$ teorema del trasporto

→

$F_R \cdot b_F = R a$

$|F_R| = p_G \cdot A = \gamma h_G A$



$h + h' = h_G$

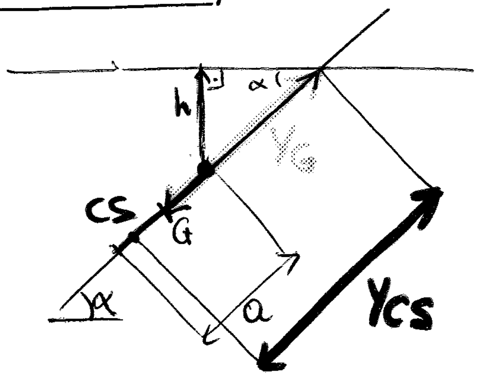
$p_G = \gamma (h + h') =$

$= \gamma h + \gamma \frac{a}{2} \sin\alpha =$

$= 36\,929{,}83 \text{ Pa}$

$|F_R| = 36\,929{,}83 \text{ Pa} \cdot 4 m^2 = \boxed{147{,}72 \text{ kN}}$

$y_{CS} = y_G + \frac{I_{xG}}{y_G A}$



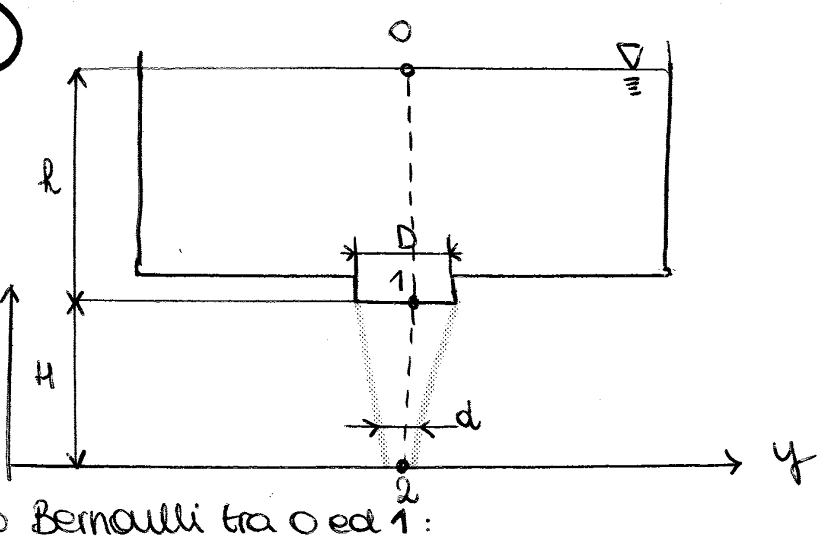
$y_G = \frac{a}{2} + \frac{h}{\sin\alpha} = 4{,}92 m$

$I_{xG} = \frac{a^4}{12} = 1{,}33 m^4$

$\boxed{y_{CS}} = 4{,}92 m + \frac{1{,}33 m^4}{4{,}92 \cancel{m} \cdot 4 \cancel{m^2}} = \boxed{4{,}99 \text{ m}}$

$b_F = 4{,}99 - x = 4{,}99 - \frac{h}{\sin\alpha} = 1{,}073 m$

ES. 5



$D = 0{,}1 m$
$h = 0{,}1 m$
$H = 1{,}5 m$

$d = ?$

Applico Bernoulli tra 0 ed 1:

$\gamma = \rho g$

$\cancel{p_0} + \frac{1}{2} \rho \cancel{w_0^2} + \gamma z_0 = \cancel{p_1} + \frac{1}{2} \rho w_1^2 + \gamma z_1$
(0, ≈0, 0)

$\gamma (z_0 - z_1) = \gamma h = \frac{1}{2} \rho w_1^2 \Rightarrow w_1 = \sqrt{\frac{2 \gamma h}{\rho}} = \sqrt{2gh} = 1{,}4 \frac{m}{s}$

Applico Bernoulli tra 0 e 2:

$\cancel{p_0} + \frac{1}{2} \rho \cancel{w_0^2} + \gamma z_0 = \cancel{p_2} + \frac{1}{2} \rho w_2^2 + \gamma z_2 \Rightarrow w_2 = \sqrt{2(h+H) g} = 5{,}6 \text{ m/s}$
(0, ≈0, 0)

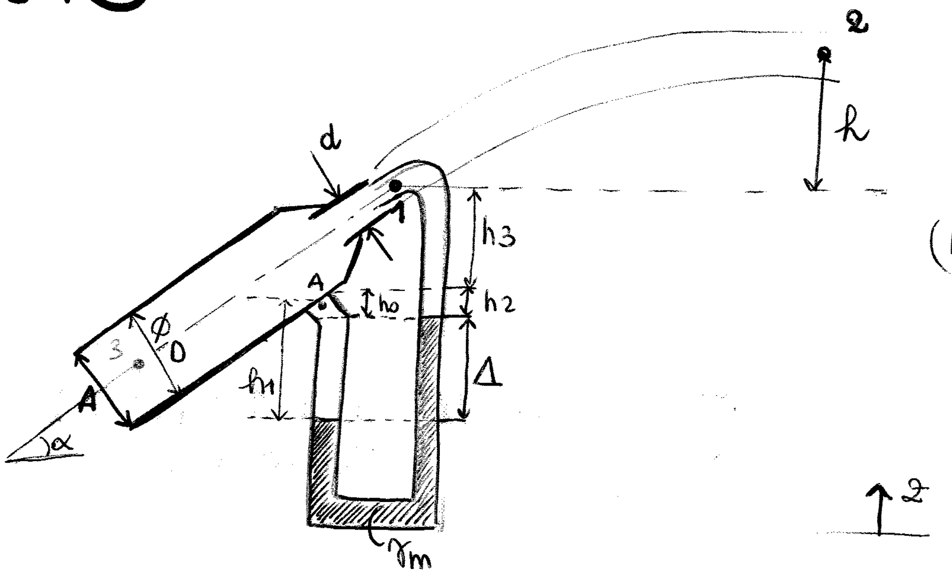
uguale sia è + efficace: (7)

(A) $\dot{V}_A = \omega_1 \frac{d_A^2}{4}\pi = \sqrt{2gh} \cdot \frac{d_A^2}{4}\pi = 0{,}31 \ \frac{m^3}{s}$

(B) $\dot{V}_B = \omega_L \frac{d_B^2}{4}\pi = \sqrt{2(h+L)g} \cdot \frac{d_B^2 \pi}{4} = 0{,}36 \ \frac{m^3}{s}$

$\boxed{\omega_L > \omega_1} \Rightarrow \boxed{\dot{V}_B > \dot{V}_A}$ sist. (B) è + efficace!!

ES. 7



$h = 8{,}5 \ m$
$D = 0{,}15 \ m$
$d = 0{,}05 \ m$
$\alpha = 45°$
$\gamma = 9806 \ N/m^3$
$(Hg =) \gamma_m = 133362 \ N/m^3$

1) $Q_v = ?$ portata effluente
2) $\Delta = ?$
3) LCT e LP = ?

1) $Q_V = \omega A$

Bernoulli tra 1 e 2:

$$\cancel{P_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \gamma z_1 = \cancel{P_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \gamma z_2$$

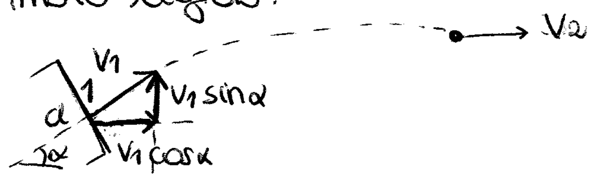
0_{atm} $\quad$ 0_{atm}

$$\gamma(z_2 - z_1) = \gamma h = \rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}$$

V_1 e V_2 non sono note, ma:

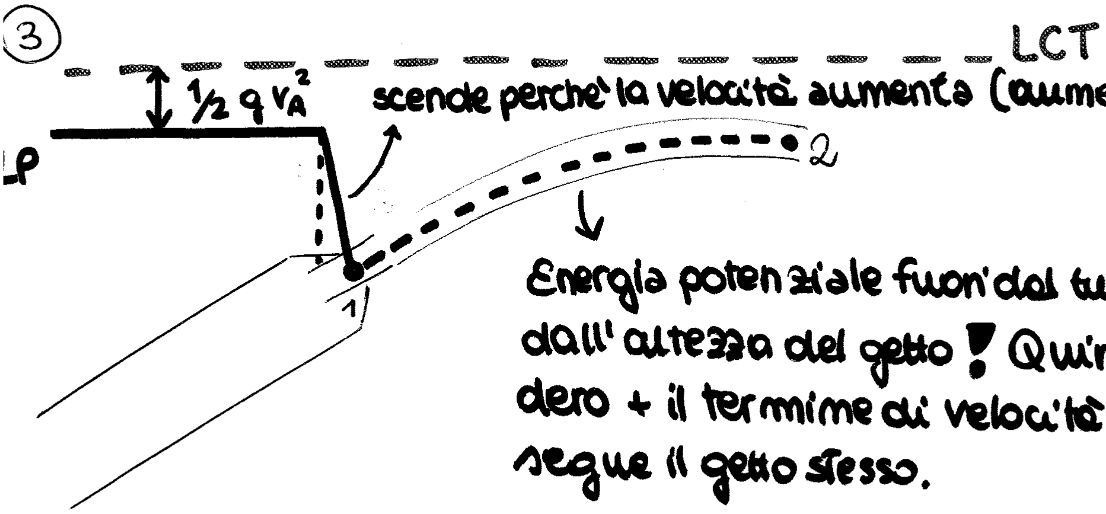
$\boxed{\dot{V}_1 = v_1 A_1 = v_2 A_2 = \dot{V}_2}$ **valida quando il fluido è in tubo chiuso!**

Pertanto: il fluido fuori dal tubo è come se fosse un solido e qui noi ho un moto rigido:



NON consideriamo la componente verticale!

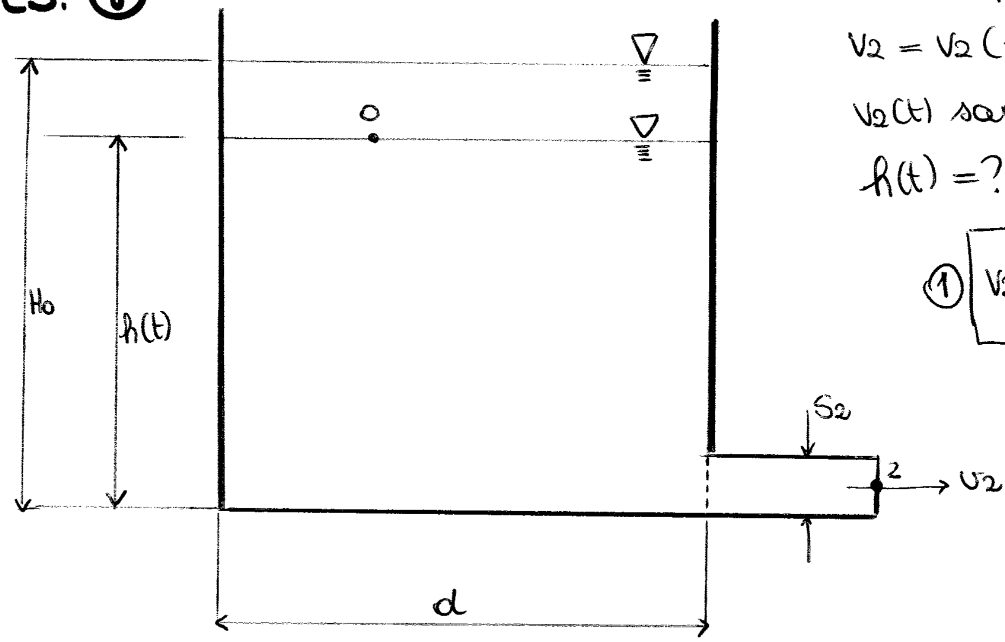
$\boxed{V_2 = V_1 \cos\alpha}$



scende perchè la velocità aumenta (aumenta la differenza)

Energia potenziale fuori dal tubo dipende dall'altezza del getto! Quindi non considero + il termine di velocità ed ecco xkè segue il getto stesso.

ES. 8



$v_2 = ?$ per un generico istante t

$v_2 = v_2(h)$

$v_2(t)$ sarà funzione decrescente

$h(t) = ?$

(1) $\boxed{v_2 = \sqrt{2 g h(t)}}$

Bilancio tra la quantità iniziale di H_2O e quella finale → (conservazione massa d'acqua):

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Velocità sparizione} \\ \text{della quantità d'acqua} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{portata massica} \\ \text{che esce} \end{matrix} \right\}$$

kg/s kg/s

$\dot{M} = \dot{V} \rho \quad \frac{m^3}{s} \cdot \frac{kg}{m^3}$

$\dot{V} = A v(t)$

$$\frac{dM}{dt} = -\rho\, Q_{V_{H_2O}} = -\rho\, \dot{V}_{H_2O} = -\rho \frac{dV}{dt} \quad , \int dt$$

$$M = -\rho V(t) = -\rho A h(t) \quad , \frac{d}{dt}$$

$$\rho A \frac{dh}{dt} = -\rho \dot{V}$$

$$\cancel{\rho} A \frac{dh}{dt} = -\cancel{\rho}\, v_2 A_2$$

sostituisco (1)

→

ES. 9

11

$P_a = 10^5\ Pa$

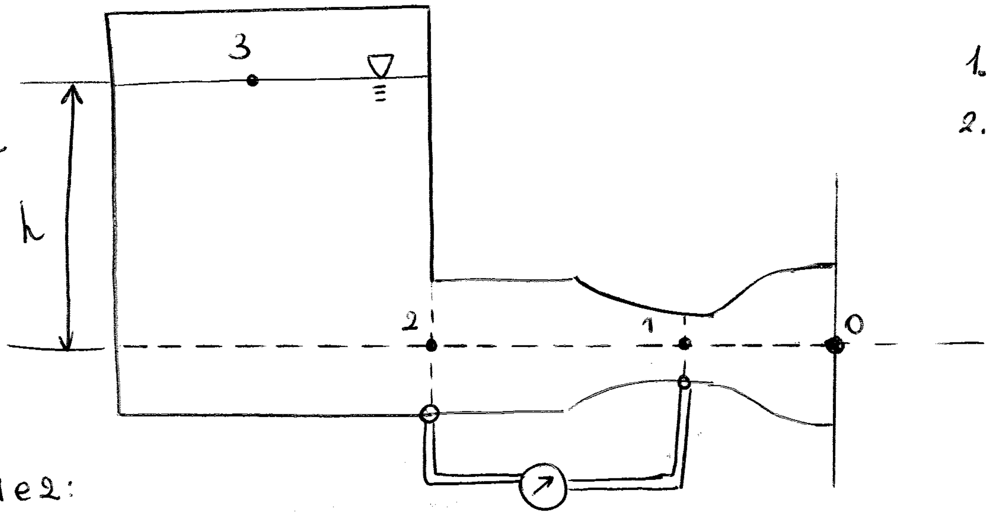
$\Delta p = 0{,}64 \cdot 10^6\ Pa$

$A_2 = 0{,}3\ m^2$

$A_1 = 0{,}1\ m^2$

$h = 1\ m$

$\rho = 10^3\ kg/m^3$



1. V_1, V_2, V_3 ?
2. P_1, P_2, P_3 ?

Bernoulli tra 1 e 2:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\gamma z_1} = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\gamma z_2}$$

$$\Delta p = P_2 - P_1 = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\rho \qquad \boxed{P_2 - P_1 = -\Delta p}$$

- $\dot{V}_2 = \dot{V}_1$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

$$\Delta p = \frac{(A_2/A_1)^2 v_2^2 - v_2^2}{2}\rho \rightarrow \Delta p = \frac{v_2^2\left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1\right]}{2}\rho$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1\right]\rho}} = \frac{1280000}{8000} \quad 160\ m/s$$

12,64

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot v_2 = 480\ m/s$$

$v_3 = 0$ velocità del ∇

- $P_3 = P_{atm} = 0$

Bernoulli tra 2 e 3:

$$\underbrace{\cancel{P_3}}_{0} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\rho v_3^2}}_{\approx 0} + \gamma z_3 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \gamma z_2$$

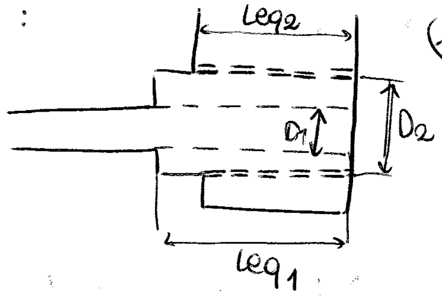
$$\gamma(z_3 - z_2) = \gamma h = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \longrightarrow P_2 = \gamma h - \frac{1}{2}\rho v_2^2 =$$

?

$$= \rho g h - \frac{1}{2}\rho v_2^2 = -12{,}80 \cdot 10^6\ Pa$$

Utilizzo nomogramma x individuare Leq_1 e Leq_2 :

(13)



$$\gamma \Delta p_f \text{ distrib.} = \frac{\rho v^2}{2} \frac{L}{D} \lambda$$

$$\Delta p_f \text{ conc} = \sum_i \frac{v^2}{2g} \xi_i$$

$\gamma H = R\gamma$ DIVIDO per ρ

NON HO + BISOGNO di Δp_f conc xké ho messo Leq

$$gH = \lambda_1 \overbrace{\frac{L_1 + Leq_1}{D_1}}^{a} \frac{v_1^2}{2} + \lambda_2 \overbrace{\frac{L_2 + Leq_2}{D_2}}^{b} \frac{v_2^2}{2}$$

Devo determinare $\boxed{\lambda_1 \text{ e } \lambda_2}$ che sono fnz della $\dot{V}$ (da determinare $\dot{V}$)

Come fare? Metodo iterativo:

① Hp : v_2' Ipotizzo un valore di v_2' ed esprimo v_1 in fnz di v_2:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{\underbrace{\lambda_1 \frac{L_1 + Leq_1}{D_1} \cdot \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2}_{a} + \underbrace{\lambda_2 \frac{L_2 + Leq_2}{D_2}}_{b}}}$$

da conservazione masse:

$$v_1 = v_2 \frac{D_2^2}{D_1^2}$$

Come valore iniziale posso scegliere la velocità ideale, $\lambda = 0$

$$v_2' = 0{,}3 \text{ m/s} \rightarrow v_1' = v_2' \frac{D_2^2}{D_1^2} = 1{,}2 \text{ m/s}$$

② CALCOLO Re'

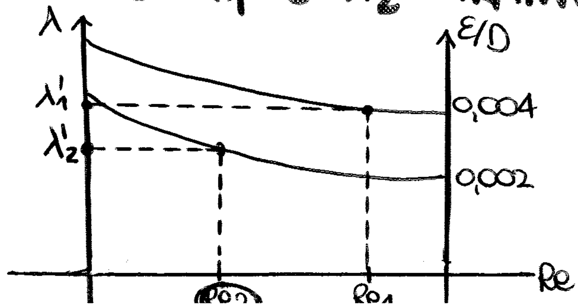
$$Re_1' = \frac{\rho v_1' D_1}{\mu} = \frac{v_1' D_1}{\nu} = 66'667$$

$$Re_2' = \frac{\rho v_2' D_2}{\mu} = \frac{v_2' D_2}{\nu} = 33'333$$

③ CALCOLO ε/D

$$\frac{\varepsilon}{D_1} = 0{,}004 \qquad \frac{\varepsilon}{D_2} = 0{,}002$$

④ CALCOLO λ_1' e λ_2' TRAMITE ABACO di MOODY :



$$\lambda_1' = 0{,}03$$

$$\lambda_2' = 0{,}028$$

→

4a) $\lambda_1'' = 0{,}031$

$\lambda_2'' = 0{,}029$

5a) $$V_2''' = \sqrt{\frac{2gH \quad 117{,}72}{a\lambda_1''\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 + b\lambda_2''}} = 0{,}25 \text{ m/s} \qquad V_1''' = 1{,}01 \text{ m/s}$$

$$e\% = \left|\frac{0{,}25 - 0{,}26}{0{,}25}\right| = 4\% \quad \text{Ok !!} \qquad e\% = \left|\frac{1{,}01 - 1{,}033}{1{,}01}\right| = 2{,}27$$

Pertanto $V_2 = 0{,}25$ m/s $\quad V_1 = 1{,}01$ m/s

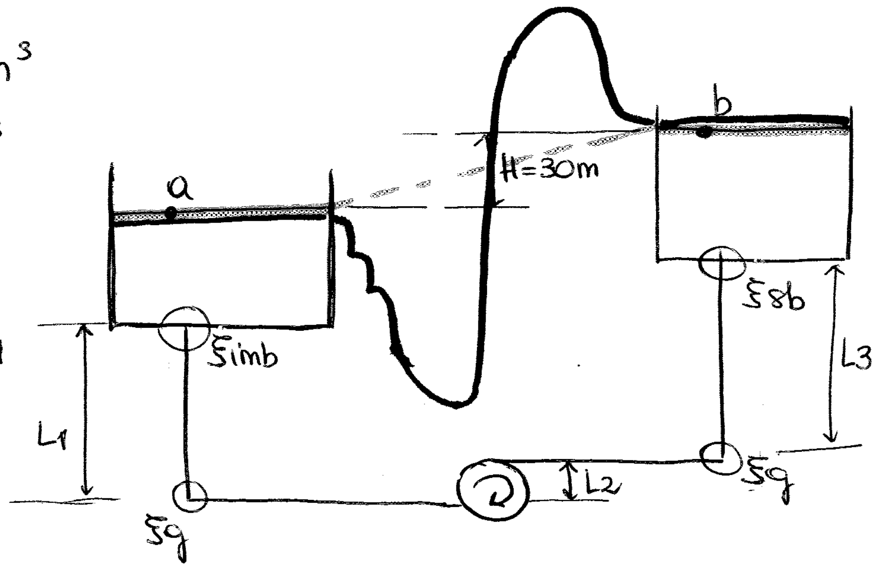
$$\dot{V}_1 = V_1 \cdot A_1 = 1{,}01 \cdot \pi \frac{D_1^2}{4} = 1{,}98 \cdot 10^{-3} m^3/s$$

$$\dot{V}_2 = V_2 \cdot A_2 = 0{,}25 \cdot \pi \frac{D_2^2}{4} = 1{,}96 \cdot 10^{-3} m^3/s$$

Es. 11

$\rho = 10^3$ kg/m^3
$\mu = 0{,}001$ Pa·s
$D = 50$ mm
$\varepsilon = 150\,\mu$m
$\dot{m} = 3$ kg/s
$\xi_{imb} = \xi_{sb} = 1$
$\xi_g = 0{,}5$
$L_1 = 2$m
$L_2 = 5$m
$H = 30$ m

$gH_{pompa} = ?$



$$\boxed{\frac{\Delta p}{\gamma} = H_p}$$

H = PREVALENZA IDEALE: trascurando le perdite di carico ho un dislivello tra i 2 serbatoi

H_p = $\boxed{\text{PREVALENZA REALE}}$: devo considerare le perdite di carico. Devo fornire un'energia pari a $H \cdot g$

Bernoulli tra a e b: incognita

$$\cancel{p_a} + \frac{1}{2}\cancel{\rho V_a^2} + \gamma z_a + \boxed{\Delta p_p} = \cancel{p_b} + \frac{1}{2}\cancel{\rho V_b^2} + \gamma z_b + R\gamma$$

0 0 0 0

$$\gamma(z_b - z_a) = \gamma H = R\gamma - \Delta p_p$$

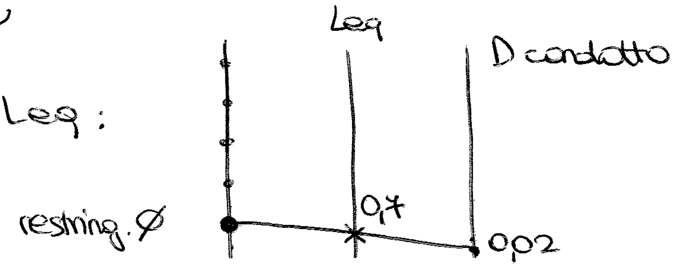
$$\Delta p_p = \gamma H + R\gamma \quad , \quad /\gamma \rightarrow \quad \frac{\Delta p_p}{\gamma} = H + R$$

$\longrightarrow$

(17)

$$\frac{R}{\rho} = \underbrace{\lambda \frac{L}{D} \frac{V_3^2}{2}}_{\text{Distrib.}} + \underbrace{k \frac{V_2^2}{2}}_{\text{conc.}}$$

Nomogramma per calcolare Leq:



$$\frac{R}{\rho} = \lambda \frac{L+0{,}7}{D} + \frac{V_3^2}{2}$$

Quindi:

$$\frac{(16 V_3)^2 - V_3^2}{2} + gL + \lambda \frac{L+L_{eq}}{D} \frac{V_3^2}{2} = \frac{\Delta p_P}{\rho}$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{341{,}2}{127{,}5 - \lambda\, 41{,}88}} \rightarrow \frac{V_3^2 (16^2 - 1)}{2} + gL + \lambda \frac{L+L_{eq}}{D} \frac{V_3^2}{2} = \frac{\Delta p_P}{\rho}$$

$$V_3^2 \left(\frac{255}{2} + \lambda \frac{L+L_{eq}}{2D}\right) + gL = \frac{\Delta p_P}{\rho}$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{\Delta p_P/\rho - gL}{255/2 + \lambda \frac{L+L_{eq}}{2D}}}$$

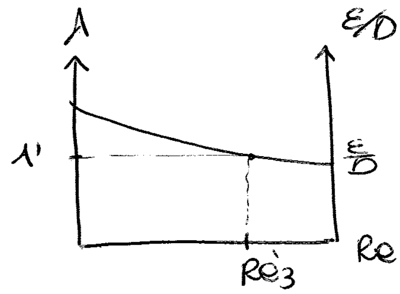
① Hp: V_3'

$$V_3' \underset{\lambda = 0}{\overset{\uparrow}{=}} 1{,}64 \text{ m/s}$$

② $Re_3' = \frac{\rho V_3' D}{\mu} = 131'200$

③ $\varepsilon / D = 0{,}625 \cdot 10^{-3}$

④ Calcolo λ' con l'Abaco di Moody:



⑤ Calcolo V_3'' e confronto:

$$e\% = \left| \frac{V_3'' - V_3'}{V_3''} \right| \leq 5\%$$

→ Sì ok

→ NO → nuovo valore di V_3

Valore finale $V_3 = 1{,}63$ m/s $\quad V_2 = 26{,}08$ m/s

Applico Bernoulli tra 2 ed 1 (NO PERDITE DI CARICO):

$$\cancel{p_2}^{\,0} + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \gamma z_2 = \cancel{p_1}^{\,0} + \cancel{\frac{1}{2}\rho V_1^2}^{\,0} + \gamma z_1$$

$$\gamma (z_1 - z_2) = \gamma = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \longrightarrow h = \frac{1}{2g} V_2^2 = 34{,}70 \text{ m} \longrightarrow$$