



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1782A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Beghini Giulia

MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale - Prof. Goglio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

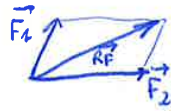
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE

STATICA

FORZA: vettore



vettore libero

$$\vec{R}_F = \sum_i \vec{F}_i$$

$$R_{Fx} = \sum_i F_{ix}$$

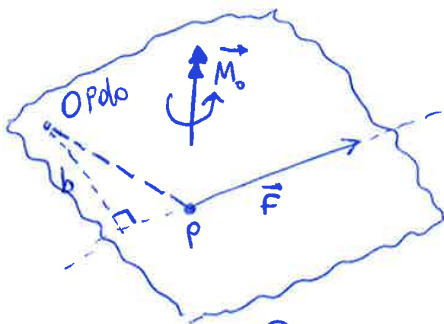
$$R_{Fy} = \sum_i F_{iy}$$

$$R_{Fz} = \sum_i F_{iz}$$

MOMENTO DI UNA FORZA

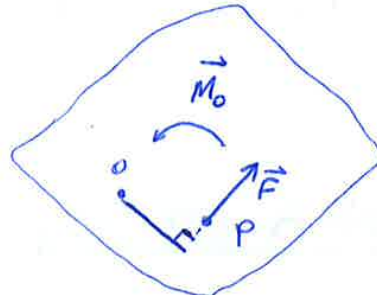
$$\vec{M}_o = (\vec{p}-\vec{o}) \wedge \vec{F}$$

\hookrightarrow polo



(3D)

b=braccio



(2D)

Nota M_o : "polo in O" non "applicato in O"

\vec{M}_o : vettore libero

$$M_o = F \cdot b$$

Momento risultante (rispetto ad O)

$$\vec{R}_{M_o} = \sum_i (\vec{p}_i - \vec{o}) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i$$

\hookrightarrow MOMENTO PURO o CONCENTRATO

Operazione utile: cambio di polo $O \rightarrow O'$

$$\vec{R}_{M_{o'}} = \sum_i [(\vec{p}_i - \vec{o}) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i] = \sum_i [(\vec{p}_i - \vec{o}) + (\vec{o} - \vec{o}') \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i] =$$

2) SOSTITUIRE UN SISTEMA CON LA RISULTANTE APPLICATA IN UN PUNTO (ARBITRARIO) E IL MOMENTO RESULTANTE \vec{R}_{Mo}

Sistema piano: è possibile sostituire il sistema di partenza con la sola \vec{R}_F purché sia applicata non in un punto arbitrario ma sull'asse centrale.



1) Riduzione ad O: scrivo la risultante delle forze centrata in O

2) Trasporto: l'incognita è la distanza tra le due rette //.
devo scegliere il nuovo polo in modo che su di esso il momento risultante sia nullo

$$R_{Mo'} = R_{Mo} - \vec{s} \cdot R_F = 0$$

$$\vec{s} = \frac{R_{Mo}}{R_F}$$

cioè R_F posizionata in O' è sufficiente a bilanciare le tre forze senza bisogno di un momento.

CARICHI E VINCOLI

CARICHI: azioni esercitate sulla struttura, solitamente dati del problema

↳ CONCENTRATI (puntuali): Forza, Momento

↳ DISTRIBUITI

- ↳ DI VOLUME: es. peso specifico di un materiale
- ↳ DI SUPERFICIE: es. pressione di un fluido, peso all'unità di area di un elemento "bidimensionale" (lamiera...)
- ↳ DI LINEA: es. peso per unità di lunghezza di un elemento monodimensionale (filo, barra)

VINCOLI: collegano gli elementi strutturali tra loro (interni) o a un basamento (esterni) esercitando reazioni, di solito incognite del problema.

- ↳ ASPETTO CINEMATICO → limitazione moto
 - ↳ VINCOLI INTERNI → punti di elementi diversi sono obbligati ad assumere uguali componenti di spostamento/rotazione.
 - ↳ VINCOLI ESTERNI → punti di elementi diversi sono obbligati ad assumere le componenti di spostamento/rotazione imposte dal basamento (solitamente nulle)
- ↳ ASPETTO STATICO → applicazione delle reazioni
 - ↳ VINCOLI INTERNI → forze, momenti di reazione scambiati fra gli elementi collegati

PER PROBLEMI PIANI

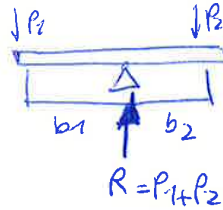
$h = v - 3m$ nel piano ci sono 3 gradi di libertà: $o, v, rotazioni$
 n° reazioni \leftarrow \leftarrow n° elementi

$$v = 3i + 2(c + p) + a$$

$3i$ nodi cerniere
 $2(c + p)$ guide appoggi prismatiche
 a

CASI POSSIBILI: $h < 0$ IPERSTANCO O LABILE

la posizione del sistema non è univocamente determinata (meccanismo), equilibrio statico possibile se i carichi esterni soddisfano opportune condizioni



Equilibrio rotazione $P_1 b_1 = P_2 b_2$

$h = 0$ ISOSTATICO

posizione degli elementi determinata in maniera univoca, è possibile determinare le reazioni incognite con solo equazioni di statica

$h > 0$ IPERSTANCO

sistema sovrvincolato, NON è possibile determinare reazioni incognite con solo reazioni di statica

Esempi: a) elemento non vincolato nel piano

$m = 1$
 $v = 0$
 $h = -3$



b) elemento con un vincolo

$m = 1$
 $v = 1$
 $h = -2$



$a = 1$

c) elemento con cerniera

$m = 1$
 $v = 2$
 $h = -1$



$c = 1$

d) $m = 4$
 $v = 3$
 $h = 0$



$a = 1$
 $c = 1$

e) $m = 1$
 $v = 3$
 $h = 0$



$i = 1$

SCRITTURA DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

1) Separare ogni elemento interrompendo i vincoli
 → linea di distacco

2) Sostituire ai vincoli le reazioni corrispondenti verso l'elemento → DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO

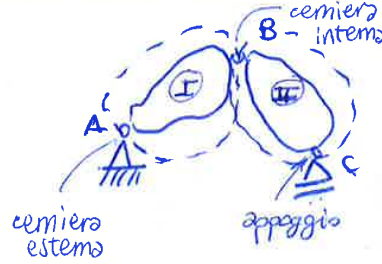
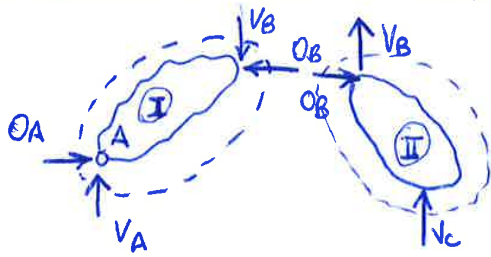


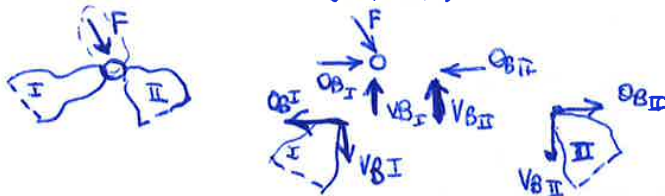
DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO

$c = 2$
 $d = 1$
 $v = 2 \cdot 2 + 1 = 5$
 $h = 5 - 3 \cdot 2 = -1$

reazioni tra i due corpi uguali e contrarie se legati da una stessa cerniera

3) Per ogni elemento scrivo le tre equazioni di equilibrio

→ Carico sul vincolo (cerniera) interna

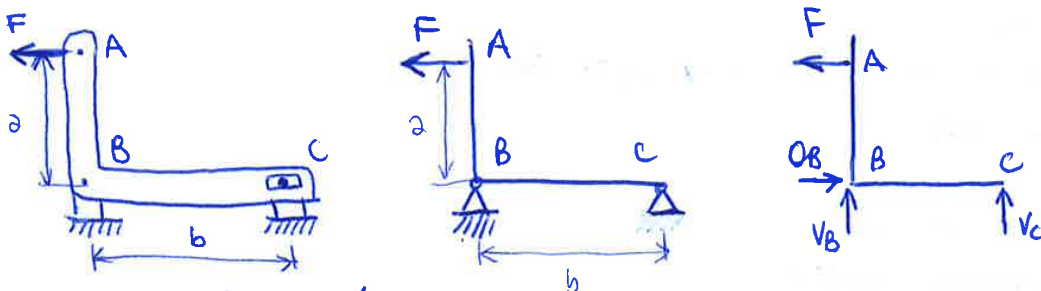


V_{BI} o V_{BII} sono rese diverse dall'interno di F
 Sono 4 le incognite associate alla cerniera B

→ 3 CASI POSSIBILI

- a) 2 equazioni di equilibrio alla traslazione + 1 equazione di equilibrio alla rotazione
- b) 2 equazioni di equilibrio alla rotazione + 1 equazione di equilibrio alla traslazione → NON lungo la \perp alla retta per i due poli
- c) 3 equazioni di equilibrio alla rotazione → poli NON sulla stessa retta, cioè NON allineati.

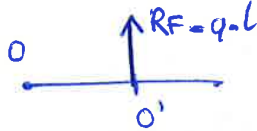
Esempio



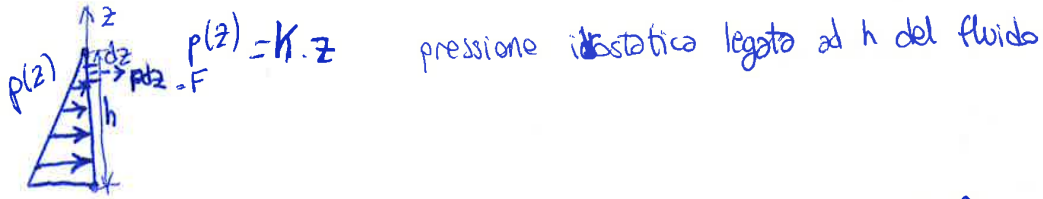
$m = 1$ $c = 1$ $d = 1$ → $v = 3$
 $h = 3 - 3 = 0$

2) $O \rightarrow O'$

$$\bar{x} = \frac{R_{M0}}{R_F} = \frac{q \cdot \frac{L}{2}}{q \cdot L} = \frac{L}{2}$$

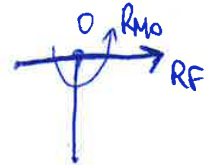


③ CARICO DISTRIBUITO VARIABILE



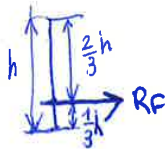
$$1) R_F = \int_0^h p(z) dz = K \int_0^h z dz = K \frac{z^2}{2} \Big|_0^h = K \cdot \frac{h^2}{2}$$

$$R_{M0} = \int_0^h p(z) \cdot z dz = K \int_0^h z^2 dz = K \cdot \frac{h^3}{3}$$

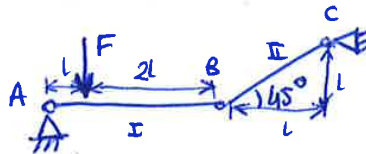
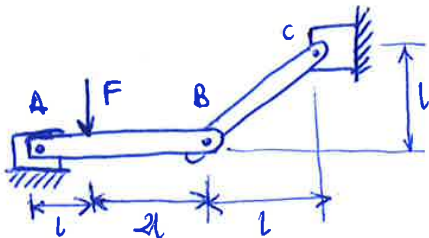


$$2) \bar{x} = \frac{R_{M0}}{R_F} = \frac{K \cdot \frac{h^3}{3}}{K \cdot \frac{h^2}{2}} = h \frac{2}{3}$$

L'asse centrale non è più a metà come nella distribuzione uniforme ma $\frac{2}{3}$

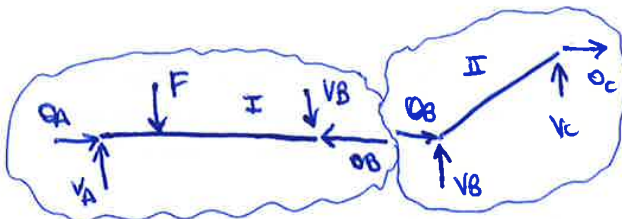


④ ESEMPIO DI STRUTTURA A 2 ELEMENTI



$$C = 3 \quad m = 2 \rightarrow h = C - 3m = 6 - 3 \cdot 2 = 0$$

SISTEMA ISOSTATICO



Reazioni di uno stesso vincolo su due corpi diversi devono essere uguali e opposti.
 Le reazioni di vincoli diversi su uno stesso corpo sono tra loro indipendenti.
 Le reazioni possibili per ogni corpo sono 3, perché ci troviamo nello spazio.

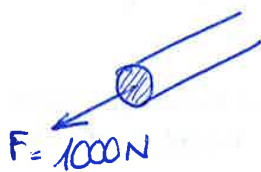
STATO DI TENSIONE

Cambiamento di scala.

Forze e momenti sono indispensabili, ma da soli non sufficienti per studio della RESISTENZA STRUTTURALE.

resistenza = capacità di sopportare senza danno una sollecitazione.

Ad esempio: TRAZIONE

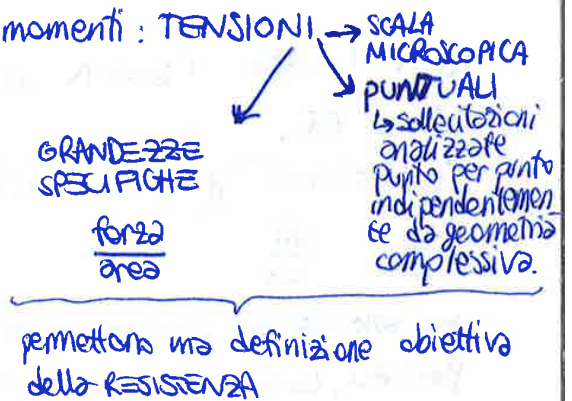


La Resistenza dipende da

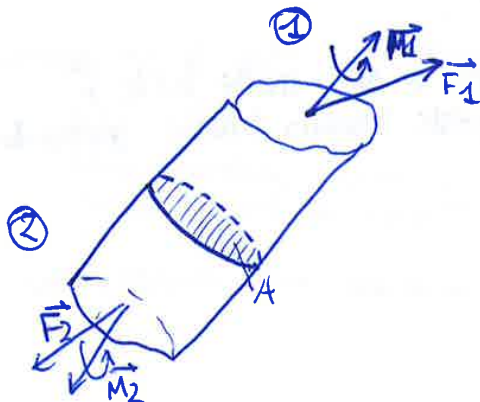
- Sezione
- Materiale

Le grandezze FORZE e MOMENTI si riferiscono a SCALA MACROSCOPICA.

Si definiscono altre grandezze derivate da forze e momenti: TENSIONI

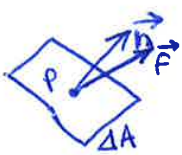


- | |
|---|
| <p>FORZE, MOMENTI</p> <ul style="list-style-type: none"> → macroscopiche → non sufficienti per definire resistenza → indispensabili <p>TENSIONI</p> <ul style="list-style-type: none"> → microscopiche → puntuali → grandezze derivate e specifiche → per prevedere resistenza |
|---|



elemento in equilibrio tra F_1, M_1, F_2, M_2
 forze e momenti alle estremità si equilibrano attraverso meccanismo di:
 TRASMISSIONE DEI CARICHI

Immaginiamo di sezionare l'oggetto secondo l'area A, le due parti non saranno più in equilibrio in quanto non sono presenti momenti e forze interni.



\vec{n} = versore normale

\vec{F} = vettore di tensione corrispondente alla normale \vec{n}

Passo distinguere le diverse componenti di \vec{F} :



• COMPONENTE NORMALE $\rightarrow \sigma$

• COMPONENTE TANGENZIALE $\rightarrow \tau$

(lettere latine: grandezze assolute, lettere greche: grandezze specifiche)

$$\sigma^2 + \tau^2 = F^2$$

σ : ANALOGO ALLA PRESSIONE

\rightarrow Convenzione: σ : USCENTE

componente positiva = TRAZIONE

componente negativa (entrante nel materiale) = COMPRESSIONE

$$\sigma > 0 \text{ TRAZIONE}$$

$$\sigma < 0 \text{ COMPRESSIONE}$$

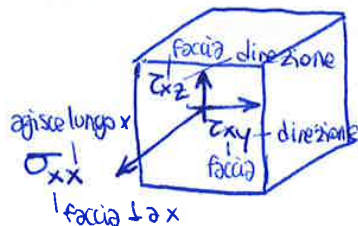
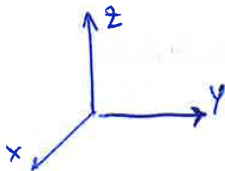
τ : rende \vec{F} NON \perp ALLA SUPERFICIE \rightarrow nei fluidi, al contrario dei solidi, forze tangenziali non sono presenti.

\rightarrow NECESSITA' DI IDENTIFICARE COMPLETAMENTE LE COMPONENTI

Infatti descrivere la situazione è complicato in quanto servono: coordinate del punto, normale del punto e solo in quel momento posso stabilire σ e τ . Serve quindi stabilire:

- ORIENTAZIONE SUPERFICIE
- ORIENTAZIONE DELLE VARIE COMPONENTI

In un riferimento xyz :



Le normali che identificano le superfici saranno quelle degli assi.

Il sistema che è usato per PROCESSO DI DESIGNAZIONE prevede DUE INDICI (pedici) $i, j = x, y, z$

- \rightarrow orientazione superficie ($\perp x, \perp y, \perp z$)
- \rightarrow orientazione componente (σ_i, τ)

Una volta stabilita σ_{xx} , tra le ∞ direzioni tangenziali scelgo le due notevoli y e z .

$$+ \cancel{z_{xy} dy dz} \frac{dx}{2} + \textcircled{3}$$

$$- \cancel{z_{yx} dx dz} \frac{dy}{2} \textcircled{4} = 0$$

$$\cancel{z_{xy}} + d\cancel{z_{xy}} + z_{yx} = z_{yx} + d\cancel{z_{yx}} + \cancel{z_{yx}} \quad \text{termini infinitesimi trascurabili}$$

$\cancel{z_{xy}} = \cancel{z_{yx}} \rightarrow$ le due componenti z devono essere uguali per rispettare l'equilibrio. Quindi in realtà non sono 6 ma meno per rispettare l'uguaglianza

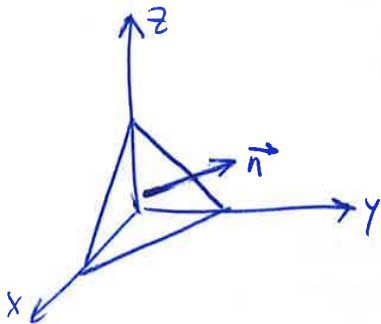
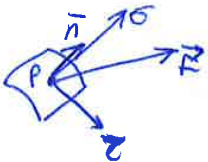
Analogamente posso dire che: $\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$

Quindi:

- 3 componenti normali
 - ~~3~~ 3 componenti tangenziali \rightarrow componente $ij =$ componente ji
- 6

Possiamo legare le 6 componenti totali con le componenti x, y, z :

Relazione con $\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \dots$ con TETRAEDRO



Su ogni piano si può individuare un triangolo rettangolo con due segmenti di asse = due cateti e il terzo obliquo = ipotenusa.

La quarta faccia è quella obliqua che unisce le tre ipotenuse dei tre triangoli rettangoli e genera un triangolo qualsiasi.

$$dA \perp \vec{n}$$

$$dA_x \perp x$$

$$dA_y \perp y$$

$$dA_z \perp z$$

\rightarrow

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{coseni} \\ \text{direttori} \end{matrix}$$

$$dA_x = dA \cdot n_x$$

Cioè proiezione di $A \perp$ all'asse x è la proiezione dell'area obliqua sul piano $\perp x$.

Quindi:

$$\begin{aligned} dA_x &= dA \cdot n_x \\ dA_y &= dA \cdot n_y \\ dA_z &= dA \cdot n_z \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

RIFERIMENTO XYZ NON PRINCIPALE

$$\{F\} = [\sigma] \{n\}$$

↳ normale alla superficie

→ al variare dell'inclinazione (n) mi dà la tensione su qualsiasi superficie

vettore tensione che agisce su faccia obliqua

TENSORE della tensione

completo, mi dà informazione completa su qualsiasi faccia.

- definisce la tensione una volta scelta area specifica e uno specifico orientamento
- informazione parziale associato ad una specifica faccia

TENSORE $[\sigma]$

↳ DIAGONALE PRINCIPALI: $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$

↳ FUORI DIAGONALE: $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$

→ la matrice è SIMMETRICA perché $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

In generale \vec{F} non $\parallel \vec{n}$

$$\{F\} = [\sigma] \{n\}$$

$$[A] \cdot \{v\} = \lambda \{v\}$$

$$([A] - \lambda[I]) \{v\} = \{0\}$$

moltiplicare per uno scalare vuol dire variare la norma ma non la direzione. Questo è vero quando

λ AUTOVALORE

$\{v\}$ AUTOVETTORE

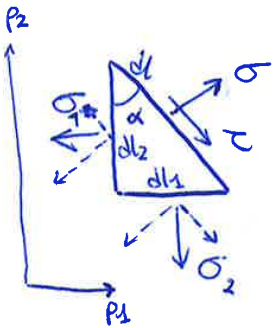
$$([\sigma] - \lambda[I]) \{v\} = \{0\}$$

esistono i casi in cui $\vec{F} \parallel \vec{n}$ e sono quelli in cui $\lambda = \text{autovalore}$ e $\{v\} = \text{autovettore}$

simmetria $[\sigma]$

- ↔ 3 autovalori reali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$
- ↔ 3 autovettori ortogonali $\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}$

Posso considerare il tutto su un piano 2D:



$$dl_1 = dl \cdot \sin \alpha$$

$$dl_2 = dl \cdot \cos \alpha$$

A questo punto posso scrivere i miei equilibri con σ e τ in funzione del resto.

$$\rightarrow: \sigma \cdot \underbrace{dl \cdot dl_3}_{\substack{\text{area del} \\ \text{rettangolo su} \\ \text{cui agisce } \sigma}} - \sigma_1 \cos \alpha \cdot dl_2 \cdot dl_3 - \sigma_2 \cdot \sin \alpha \cdot dl \cdot dl_3 = 0$$

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\rightarrow: \tau \cdot dl \cdot dl_3 - \sigma_1 \sin \alpha \cdot dl_2 \cdot dl_3 + \sigma_2 \cos \alpha \cdot dl_1 \cdot dl_3 = 0$$

$$\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos \alpha \cdot \sin \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

sostituendo:

$$\begin{cases} \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \end{cases}$$

Quadrando e sommiamo:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \right)^2$$

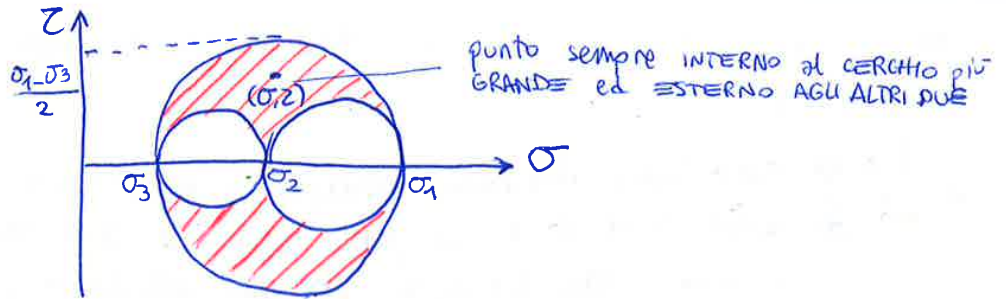
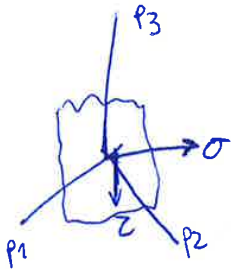
↳ media tensioni principali

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right) (\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)$$

= 1

$$\boxed{(X - X_c)^2 + Y^2 = R^2}$$

→ CASO GENERALE: PIANO NON CONTENENTE P_1, P_2, P_3



(σ, z) DENTRO cerchio $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$
FUORI cerchi $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

$|A| = [\sigma] \{n\}$

↳ qualunque sia n scelto, $[\sigma]$ deve essere tale che punto rimanga nell'area stabilita, cioè mai più a destra di σ_1 e mai più a sinistra di σ_3 .
 E lo stesso ragionamento vale in verticale.

- Nessun piano è sollecitato $\sigma > \sigma_1$ o $\sigma < \sigma_3$, cioè non esistono piani con sollecitazioni normali maggiori di σ_1 o minori di σ_3
 $\sigma_1 =$ MASSIMA SOLLECITAZIONE NORMALE APPLICATA NEL PUNTO
- lo stesso in verticale: $|z| > \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

Esercitazione 2

• STATO DI TENSIONE

①

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 90 \\ 0 & 170 & 0 \\ 90 & 0 & -120 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

- determinare:
- ① tensioni principali e angolo tra i riferimenti x, y, z e principali p_1, p_2, p_3
 - ② σ e τ sul piano del fascio con asse p_1 e normale $\{n\}$ a 45° rispetto a p_2

② • determinare la direzione/tensione principale nota

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \text{ MPa}$
 → verificare τ nulle e pedice che si ripete in queste τ è quella sarà la tensione principale

↓

$$\sigma_{yy} \text{ è PRINCIPALE} = \sigma_{yy} = 170 \text{ MPa}$$

• determinare direzione delle tensioni principali non note

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = 65 \pm 206$$

σ_a (più alta) = 271 MPa
 σ_b (più bassa) = -141 MPa
 centro raggio

↓
 si calcola come centro cerchio di Mohr più raggio

↓
 tutti i pedici che compaiono NON contengono tensione principale

• ordine decrescente tensione principale

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\sigma_1 = 271 \text{ MPa} = \sigma_a$$

$$\sigma_2 = 170 \text{ MPa} = \sigma_{yy}$$

$$\sigma_3 = -141 \text{ MPa} = \sigma_b$$

• Determinazione α^* con $0 \leq \alpha^* \leq 45^\circ$

Tenendo conto che in questo caso y è principale → $|\tan 2\alpha^*| = \left| \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \right| = 0,486$
 (che quindi non appare mai nei pedici)

↓

$$2\alpha^* = \arctan[0,486] = 26^\circ \rightarrow \alpha^* = 13^\circ$$

- Calcolare α : $-90^\circ < \alpha < 90^\circ$ → ANGOLO FISICO = rotazione tra x, y, z e rif. principale
 Per usare la tabella serve uno dei tre casi: y principale, x princ., z princ.
 Nel nostro caso y è principale quindi scelgo II RIGA

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow n_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $\{n\}$ a $90^\circ - 45^\circ$ rispetto a $p_3 \rightarrow \{n\} \cdot \{p_3\} = \sin 45^\circ \rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Quindi $\{n\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$

• componenti di $\{f\}$:

$$\{f\} = [\sigma] \{n\}$$

devo mettermi nel riferimento principale

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 211 & 0 & 0 \\ 0 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & -141 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix}$$

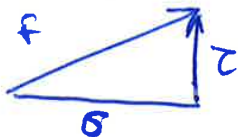
$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 170 \\ -141 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

• calcolo σ

$$\sigma = \{n\} \cdot \{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 170 \\ -141 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 170 \\ -141 \end{bmatrix} = \frac{170 - 141}{2} = 15 \text{ MPa}$$

Prodotto scalare tra versore n e il vettore tensione.

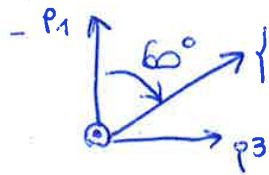
• calcolo τ



$$\tau = \sqrt{|f|^2 - \sigma^2} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - \sigma^2} = \sqrt{\frac{170^2}{2} + \frac{141^2}{2} - 15^2} = 155 \text{ MPa}$$

b) • componenti $\{n\}$

- asse $p_2 \rightarrow \{n\} \cdot \{p_2\} = 0 \rightarrow n_2 = 0$



60° da $p_1 \rightarrow \{n\} \cdot \{p_1\} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ 0 \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rightarrow n_1 = \frac{1}{2}$$

- 30° da $p_3 \rightarrow \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ n_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow n_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

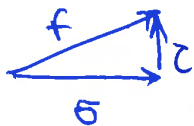
$$\{n\} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix}$$

• componenti di $\{f\}$

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 420 & & \\ & 160 & \\ & & -360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 210 \\ 0 \\ -170\sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

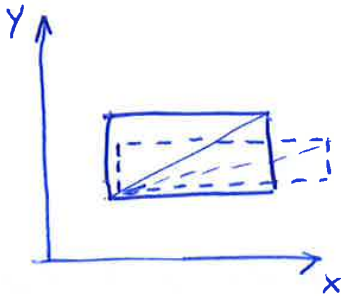
$$\sigma = \{n\} \cdot \{f\} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 210 \\ 0 \\ -170\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \frac{210 - 170 \cdot 3}{2} = -150 \text{ MPa}$$

$$\tau = \sqrt{|f|^2 - \sigma^2} = \sqrt{210^2 + 170^2 \cdot 3 - 150^2} = 329 \text{ MPa}$$



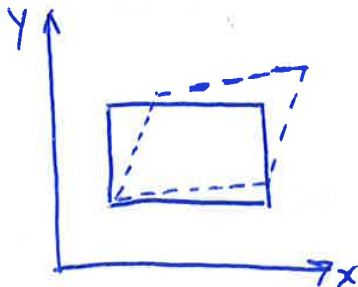
- MOTO DEFORMATIVO -

→ DILATAZIONE



- Variano le LUNGHEZZE
 - si mantengono le DIREZIONI
- ↳ vero per i LATI
falso per gli altri segmenti come le diagonali

→ SCORRIMENTO

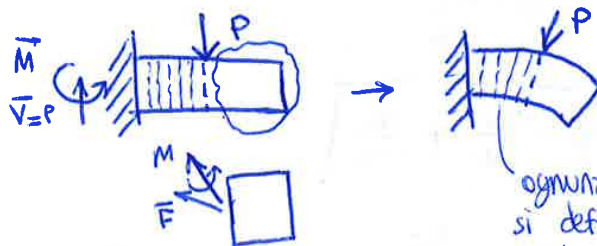


- Variano le DIREZIONI, angoli cambiano.
- Si conservano le LUNGHEZZE

- INTERAZIONE MOTO RIGIDO E DEFORMATIVO -

I due fenomeni dilatazione e scorrimento, cioè rigido e deformativo interagiscono tra loro nella struttura:

ESEMPIO: ELEMENTO INCASTRATO



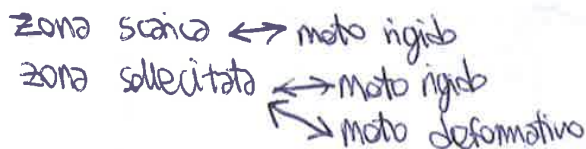
MOTO RIGIDO

$\vec{F}, \vec{M} = 0$ zona scarica
Nonostante sia scarica, è la zona che si sposta di più

ognuna delle fette centrali tra l'incastro e P si deformerà per conto suo.
Tuttavia la faccia sinistra è già deformata, quindi per ogni sezione ha moto rigido della faccia sinistra e moto deformativo in sé.



MOTO RIGIDO e DEFORMATIVO
 $\vec{F}, \vec{M} \neq 0$ zona sollecitata



$$d\vec{x}' = d\vec{x} + d\vec{u}$$

↑
distingue il primo dal dopo, \vec{x} da \vec{x}'

dipende da:

- rotazione rigida
- dilatazione scorrimento

Bisogna poi separare in $d\vec{u}$ i vari contributi.

$d\vec{u}$: incremento (variazione)

tra gli spostamenti eseguiti dagli estremi di $d\vec{x}$

$$d\vec{u} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

JACOBIANA

derivata prima • incremento coordinato

$$\{d\vec{u}\} = [J] \{d\vec{x}\}$$

↑
} rotazione rigida
} dilatazione scorrimento

Identità

$$[J] = \frac{1}{2}[J] + \frac{1}{2}[J] = \frac{1}{2}[J] + \frac{1}{2}[J]^t + \frac{1}{2}[J] - \frac{1}{2}[J]^t$$

termini su diagonale uguali
trasposta — posso in quanto quadrata

spostamenti e deformate 2-2-2
spostamento lungo x spostamento lungo y

TENSORE DEFORMAZIONE $[E] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$

Diagonale: dilatazioni (la diagonale è nella forma $\frac{du}{dx}$)
Fuori diagonale: semi scorrimenti (forma dello scorrimento $\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$)
3x3 SIMMETRICA

DIAGONALE: DILATAZIONI:

$$E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; E_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

FUORI DIAGONALE: SEMI-SCORRIMENTI

$$\frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = E_{xy}$$

$$E_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$E_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

LEGAME TENSIONI - DEFORMAZIONI: ELASTICITÀ

Comportamento del materiale

→ **ELASTICO**: reversibile

- lineare (metalli) → unico caso di studio in questo corso
- non lineare (gomma)

→ **ANELASTICO**: non reversibile

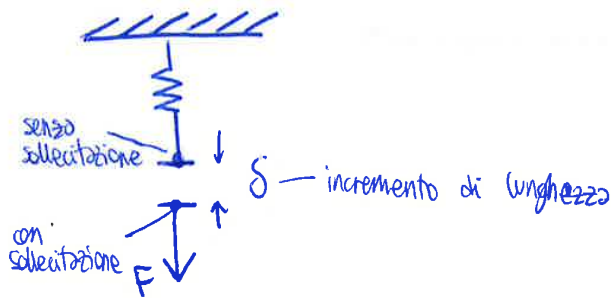
- Plasticità → se avviene in modo istantaneo
- scivolamento viscoso

• **OMOGENEITÀ** → proprietà uguali in tutti i punti

• **ISOTROPIA** → (per un dato punto) proprietà uguali in tutte le direzioni (metalli)

- **ELASTICITÀ LINEARE** -

• Esempio: MOLLA

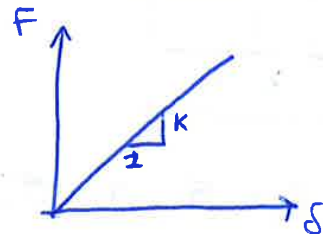


$K = \text{RIGIDEZZA molla}$

$$\delta = \frac{1}{K} F$$

1. carico applicato $F \rightarrow$ misura δ
2. allungamento imposto $\delta \rightarrow$ misura F

$$F = K \delta$$



• Per un MATERIALE $[\sigma]$, $[E]$



- Applicata una tensione alla volta
- Osservo l'effetto sulla deformazione

Osservo E_{xx} , applico $\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{cases}$

→ Solo σ_{xx} :

$$E_{xx} \propto \sigma_{xx} \rightarrow E_{xx} = \frac{1}{\text{numero puro}} \sigma_{xx} \quad [MPa]$$

$E \rightarrow$ deve avere stesse unità di misura della tensione per dare numero puro [MPa]
E = MODULO ELASTICO NORMALE (si riferisce a tensione normale σ) o DI **YOUNG**

- EFFETTO TEMPERATURA -

$$\Delta T = T - T_0$$

causa solo dilatazione, identica lungo tutte le direzioni

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \alpha(T - T_0)$$

α = COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA LINEARE (non volumetrico)

$$[\alpha] = ^\circ\text{C}^{-1}, \text{K}^{-1}$$

- SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI -

• Complessivamente: LEGGE DI HOOKE

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} + \alpha(T - T_0) \\ \epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma_{zz} + \alpha(T - T_0) \\ \epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} + \frac{1}{E} \sigma_{zz} + \alpha(T - T_0) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}; \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz}; \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{cases}$$

- Temperatura sempre uguale
- lungo asse interessato $\frac{1}{E} \cdot \sigma$
- lungo assi trasversali: $-\frac{\nu}{E} \cdot \sigma$

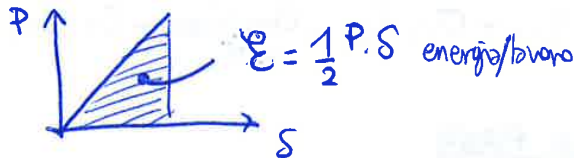
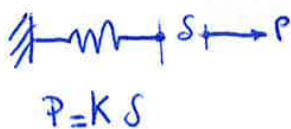
PER MATERIALI ISOTROPI

se fosse il caso di tre assi principali: $\tau = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \rightarrow$ se sistema di riferimento è PRINCIPALE per TENSIONI, allora lo è ANCHE per le DEFORMAZIONI.

• sistema di RIFERIMENTO PRINCIPALE:

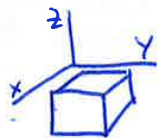
$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 + \alpha(T - T_0) \\ \epsilon_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 + \frac{1}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} \sigma_3 + \alpha(T - T_0) \\ \epsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 + \frac{1}{E} \sigma_3 + \alpha(T - T_0) \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (\text{perché } \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} = 0) \end{cases}$$

- ENERGIA DI DEFORMAZIONE -



Per un materiale:

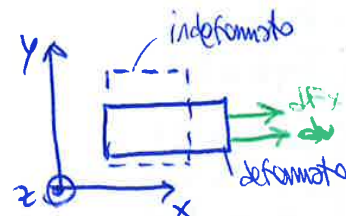
Volume elementare $dV = dx dy dz$



1) Tension σ , deformazioni ϵ

lungo x: $\sigma_{xx} \Rightarrow [E_{xx}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$

se applico solo σ_{xx} : \rightarrow



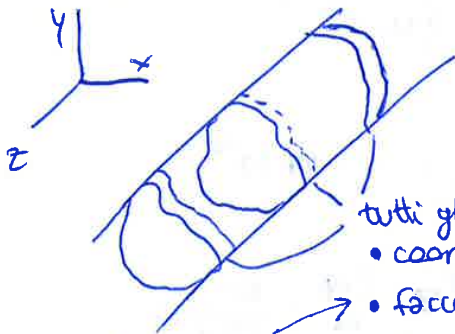
$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) - \frac{E}{1-\nu} \alpha (T-T_0) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) - \frac{E}{1-\nu} \alpha (T-T_0) \\ \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \end{cases}$$

Se l'oggetto ha spessore sottile: vero anche all'interno
Comunque non è detto che le deformazioni siano nulle.

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

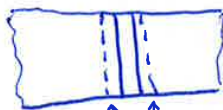
$$\epsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} \rightarrow \text{è una componente calcolabile a parte note le componenti piane.}$$

- CASO DUALE: DEFORMAZIONE PIANA -



tutti gli spessori si trovano nella stessa situazione, indipendente da z

- coordinata z influente
- facce (sezioni) restano piane



deformazioni possibili delle facce che rimangono sempre // tra di loro.

↓
 ϵ_{zz} è quindi costante

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} &= \text{cost} \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz} &\neq 0 \\ \tau_{xy} &\neq 0 \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \end{aligned}$$

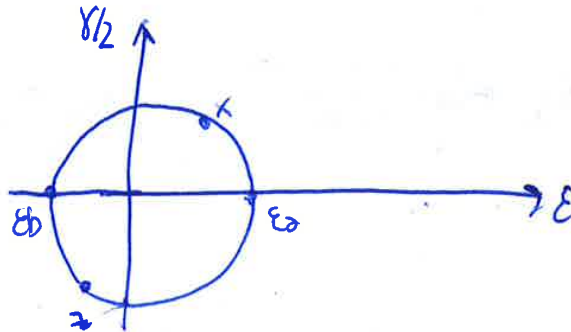
$$\epsilon_2 = \frac{\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)}{E} = \frac{30 - 0,29(182 - 42)}{206 \cdot 10^5} = -5,15 \cdot 10^{-5}$$

→ Corrisponde a quella del riferimento xyz perché è asse principale

$$\epsilon_3 = \frac{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)}{E} = \frac{-42 - 0,29(182 + 30)}{206 \cdot 10^5} = -5,02 \cdot 10^{-4}$$

①

$$\begin{bmatrix} E_{xx} & 0 & \gamma_{xz}/2 \\ 0 & E_{yy} & 0 \\ \gamma_{xz}/2 & 0 & E_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\epsilon_{0,b} = \frac{E_{zz} + E_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_{zz} - E_{xx}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{-1,14 + 5,12}{2} \cdot 10^{-4} \pm \sqrt{\left(\frac{-1,14 - 5,12}{2} \cdot 10^{-4}\right)^2 + \left(\frac{4,25 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2}$$

$8,98 \cdot 10^{-4} = \epsilon_1$
 $-5,00 \cdot 10^{-4} = \epsilon_3$

② PUNTO IN STATO DI TENSIONE PIANA

$$E_{xx} = -2,22 \cdot 10^{-3}$$

$$E_{yy} = 2,52 \cdot 10^{-3}$$

$$\gamma_{xy} = 2,28 \cdot 10^{-3}$$

materiale $\left\{ \begin{array}{l} E = 6,90 \cdot 10^4 \text{ MPa} \\ \nu = 0,31 \end{array} \right.$

Trovare $[\sigma]$ nel riferimento xyz e nel riferimento principale

Nel caso di tensione piana possiamo scrivere tensioni in funzione delle deformazioni

xyz $\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \\ E_{zz} ? \end{array} \right.$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (E_{xx} + \nu E_{yy}) = \frac{6,9 \cdot 10^4}{1-0,31^2} (-2,22 + 0,31 \cdot 2,52) \cdot 10^{-3} = -110 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (E_{yy} + \nu E_{xx}) = \frac{6,9 \cdot 10^4}{1-0,31^2} (2,52 - 0,31 \cdot 2,22) \cdot 10^{-3} = +140 \text{ MPa}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{6,30 \cdot 10^4}{2(1+0,31)} = 2,63 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = 2,63 \cdot 10^4 \cdot 2,28 \cdot 10^{-3} = 60 \text{ MPa}$$

CEDIMENTO STATICO DEI MATERIALI METALLICI

- prova di trazione a T ambiente
- ipotesi di cedimento - tensioni ideali
- coefficiente di sicurezza.

- PROVA DI TRAZIONE -

Metodo usale per determinazione proprietà meccaniche

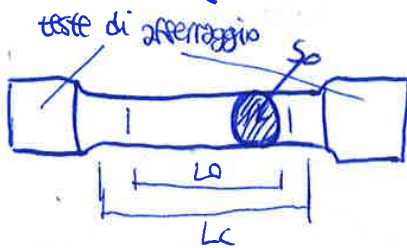
NORMATIVA : UNI EN ISO 6892-1

- Geometria provette
- Caratteristiche delle macchine
- condizioni di prova
- Elaborazione dei risultati

→ PROVETTE



a sezione piatta

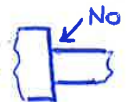


a sezione tonda

- forma e dimensioni unificate
 - > compatibilità con afferraggi
 - > influenza risultati

• zone

- > teste di afferraggio: dimensione maggiore per non cedere e trasmettere il carico per attrito su superfici di contatto.
- > parte calibrata: utile per misure
- > raccordi: per evitare concentrazioni di sforzo → non accettabile causa innalzamento tensioni



• provetta proporzionale

- > Idea (sezione circolare): lunghezza pari a 5 diametri
- > Per sezione non circolare, diametro fittizio

$$L_0 = 5D_0$$

$$L_0 = 5\sqrt{4S_0/\pi} = 565\sqrt{S_0}$$

→ TIPI DI MACCHINE DI PROVA

- **Elettromeccaniche** → azionamento traversa mobile mediante trasmissione (vite - chiocciola)
meno costosa, motore nel basamento.

> economiche

> carico massimo 10^2 KN

> minore velocità e versatilità nell'applicazione del carico

prove nel complesso che possono essere fatte → (prove di shock, prove a cicli, prove con aumento lento della forza, ...)

- **Ibruliche** → azionamento traversa mobile mediante cilindri.

> costose

> carico massimo 10^3 KN

> maggiore velocità e versatilità (cicli) nell'applicazione del carico

(fluido in pressione genera forze maggiori, più non c'è la parte degli attriti che si portano dietro le trasmissioni meccaniche)

→ MISURA DELLA DEFORMAZIONE

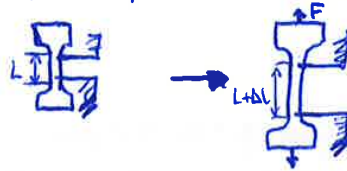
- **Indiretta**: misura spostamento traversa con sensore incorporato nella macchina (encoder, potenziometro a fib, ...), non misurando provino.

> lunghezza misura elevata (\approx corsa traversa)

> bassa risoluzione

> imprecisioni dovute a deformazioni fuori dal tratto calibrato.

- **Diretta con estensometro**: lo spostamento dei bracci dell'estensometro, agganciati al provino, deforma una lamina sensorizzata.



> risoluzione elevata ($< 1 \mu\text{m}$)

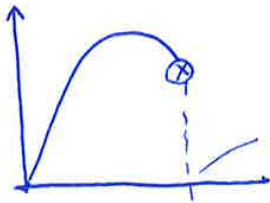
> nessuna influenza delle altre deformabilità

> lunghezza della misura minore

> necessità rimozione estensometro a fine corsa

- **ALLUNGAMENTO DOPO ROTTURA (%)**: differenza tra valore finale L_u e iniziale L_0 della distanza tra i due riferimenti tracciati prima della prova, rapportato a L_0 . Una delle poche cose che si sanno dal provino e non dal grafico.

$$A = 100 \cdot \frac{L_u - L_0}{L_0}$$

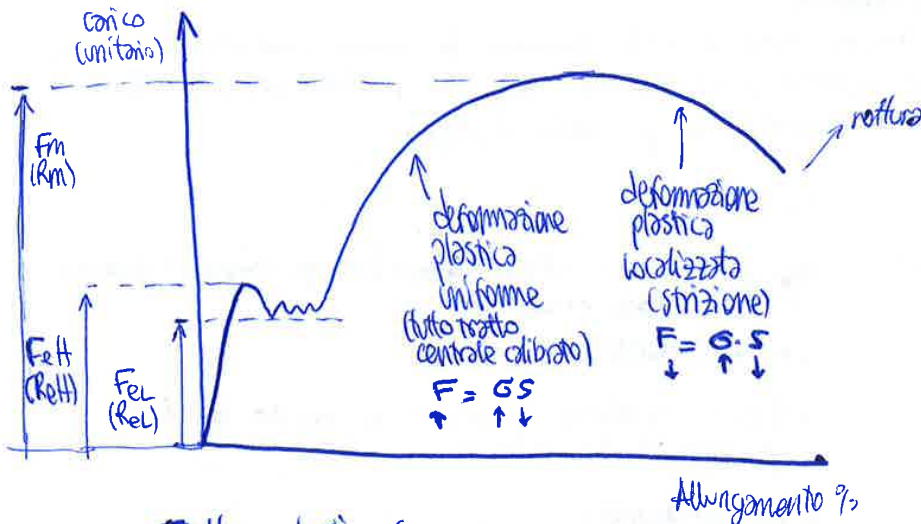


allungamento dopo rottura non è questo ascissa, perché, al contrario di questa la parte elastica è restituita prima della rottura e questo dato rappresenta solo la deformazione plastica.

- **STRIZIONE (%)**: differenza tra area iniziale S_0 e quella della sezione ristretta S_u in cui avviene la rottura, riportata a S_0

$$S = 100 \cdot \frac{S_u - S_0}{S_0}$$

→ MATERIALI DUTTI - CASO CON SNERVAMENTO

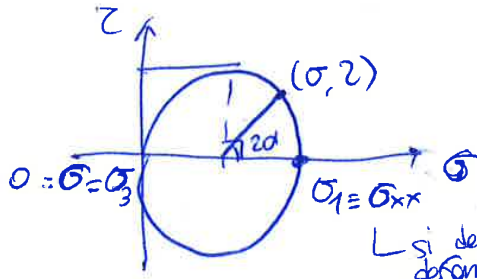
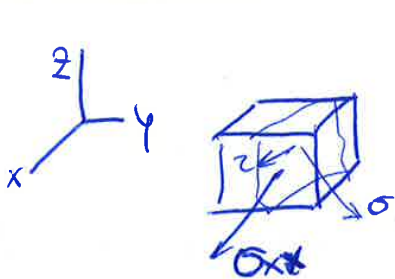


- **Tratto elastico** (= reversibile)
- **Snervamento**: superiore $F_{elt} (Relt)$, inferiore $F_{el} (Rel)$
- **Plasticizzazione uniforme**: **INCREDIMENTO**, picco $F_m (R_m)$ (= **STRAIN HARDENING**)
 deformazione plastica solitamente è isocora, quindi se pezzo si allunga area deve diminuire. Tensione a livello unitario è così alta da compensare la riduzione di sezione e si ha un aumento nel complesso uniforme.
 - ↳ rafforzamento per deformazione
- **strizione, rottura**: aumento σ non è più sufficiente per bilanciare la riduzione di sezione e la forza nel complesso diminuisce.

$R_{eH} \uparrow, A \downarrow \rightarrow$ resistenza e duttilità in opposizione
 valori sono minimi (da quel valore in su)

* Nei materiali duttili i provini spezzati alla fine non cambiano \rightarrow ha iniziato prima parte centrale a deformarsi, infatti alla fine rimane una parte di voto al centro.

\rightarrow TRAZIONE



\hookrightarrow si deforma quando avverte deformazione tangenziale più forte perché causa scivimento piani cristallini (vedi bordi provino)

- IPOTESI DI CEDIMENTO STATICO -

\rightarrow PROBLEMA: CONFRONTARE

stato di tensione agente nel punto, più sollecitato

3 valori: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

tensione limite del materiale

1 valore: σ_{lim} — sempre limite del comportamento elastico
 (R_{eH} o $R_{p0.2}$ per mat. duttili, R_m per materiali fragili)

\rightarrow SOLUZIONE

Sostituire 3 tensioni principali con un unico valore (scalare) di tensione "ideale" (perché non è stato di tensione agente) ed "equivalente" dal punto di vista del pericolo (distanza dal limite)

$$\sigma_{id} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

f non è minivoca, deve essere formulata a seconda del tipo di cedimento a cui il materiale va incontro al crescere della sollecitazione.

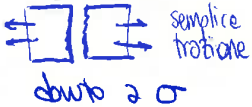
\rightarrow CEDIMENTO STATICO (METALLICI, T. AMB.)

FRAGILE

Elasticità

\downarrow
Rottura

\hookrightarrow distacco



danno a σ

DUTILE

Elasticità

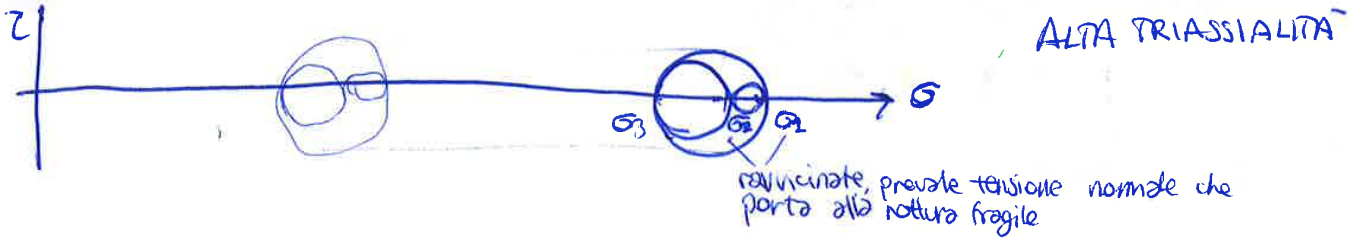
\downarrow
Plasticizzazione

\hookrightarrow scivimento



danno a τ

In caso di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ elevate ma vicine tra loro, comportamento fragile (anche se il materiale è visivamente duttile)



scattare i valori di σ della stessa quantità = σ idrostatica
 stesso σ su tutti i punti

2) MATERIALI DUTILI B:

↳ PREMESSA: ENERGIA DI DEFORMAZIONE = en. variazione volume + en. variazione di forma



Materiale cede quando l'energia di distorsione raggiunge il valore limite.

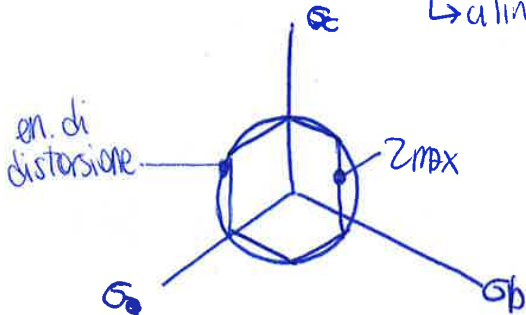
$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

Osservazioni

- Tutte le σ principali influiscono
- L'aggiunta di una quantità uguale su σ non influisce

→ CONFRONTO TRA LE IPOTESI

materiali duttili $\left\{ \begin{array}{l} \tau_{max} \rightarrow \text{prisma (a sezione esagonale)} \\ \text{en. di distorsione} \\ \rightarrow \text{cilindro} \end{array} \right.$



prisma iscritto in un cilindro
 → ipotesi τ_{max} più restrittiva

Esercitazione 4

→ CRITERI DI CEDIMENTO, CRITERI DI SICUREZZA

resistenza $\left\{ \begin{array}{l} \text{mat. duttile} - \text{carico di snervamento (non si vuole andare in zona plastica con deformazioni permanenti)} \\ \text{mat. fragile} - \text{carico di rottura } R_m \end{array} \right.$

coefficiente di sicurezza = distanza tra resistenza e stato di tensione del materiale

$$\leftarrow \boxed{CS = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}}}$$

$\sigma_{lim} \left\{ \begin{array}{l} \text{DUTILE } R_{p0.2} (R_{eH}) \\ \text{FRAGILE } R_m \text{ (carico unitario di rottura)} \end{array} \right.$

$CS > 1,5$ DUTILE (50% in più rispetto a quanto applicato per essere in sicurezza)

$CS > 3$ FRAGILE

① stato tensionale definito punto per punto.

GHISA GJL-300

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 60 & -75 & 0 \\ -75 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Determinare CS

② calcolo tensioni principali

$\sigma_{zz} = 55 \text{ MPa}$ principale $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{60 + 120}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60 - 120}{2}\right)^2 + 75^2} = 90 \pm 81 \left\{ \begin{array}{l} \sigma_a = 171 \text{ MPa} \\ \sigma_b = 9 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

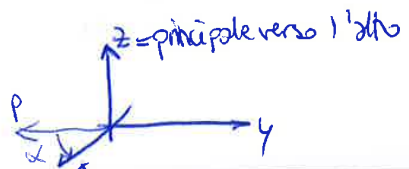
$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 171 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 55 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 9 \text{ MPa} \end{array} \right.$$

$$|\tan 2\alpha^*| = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = \frac{2 \cdot 75}{60 - 120} = 2,5$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \arctan 2,5 = 36^\circ$$

α princ., $\tau_{xy} < 0$, $\sigma_{xx} < \sigma_{yy}$

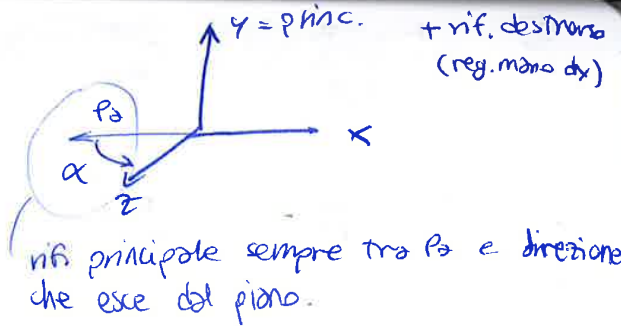
$$45^\circ \leq \alpha < 90^\circ$$



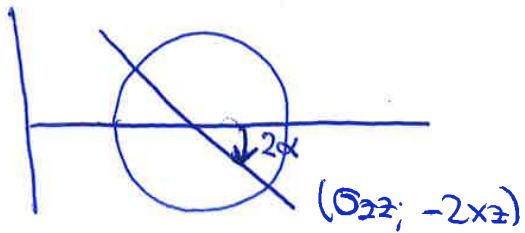
$$|\tan(2\alpha^*)| = \left| \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 125}{380} \right| = 0,65$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \arctan(0,65) = 16,7^\circ$$

$$-45^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$$



$$\alpha = -\alpha^* = -16,7^\circ$$



② σ_{id} ?

$A = 16/10 \rightarrow$ duttile
(da tabelle)

$$\sigma_{id}^{TR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 417 - (-37) = 454 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{417^2 + (-37)^2 + (417 - (-37))^2} = 437 \text{ MPa}$$

③ $c_s = ?$

$$c_s^{TR} = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}^{TR}} = \frac{R_{p02}}{\sigma_{id}^{TR}} = \frac{800}{454} = 1,75 > 1,5$$

$$c_s^{VM} = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}^{VM}} = \frac{R_{p02}}{\sigma_{id}^{VM}} = \frac{800}{437} = 1,83 > 1,5$$

TR=SCA più
 \rightarrow conservativo di VM
(cioè $c_s^{TR} < c_s^{VM}$)

③ DATI ES 3A, ESERCITAZIONE 2

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & -150 & 0 \\ -150 & 240 & 0 \\ 0 & 0 & 408 \end{bmatrix}$$

Materiale duttile
Det. R_{p02} tale che $c_s = 1,5$

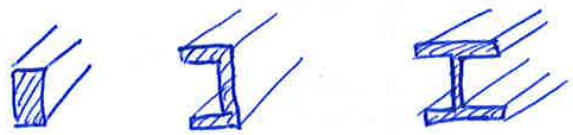
$$\begin{cases} \sigma_1 = 408 \\ \sigma_2 = 361 \\ \sigma_3 = 18 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_{id} \begin{cases} \sigma_{id}^{TR} = \sigma_1 - \sigma_3 = 408 - 18 = 390 \text{ MPa} \\ \sigma_{id}^{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = 362 \text{ MPa} \end{cases}$$

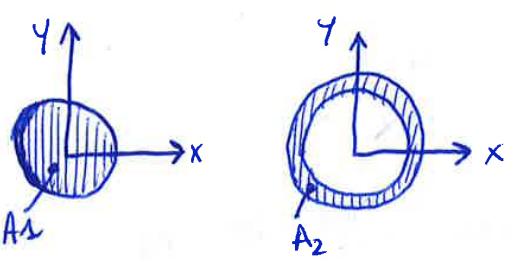
PROPRIETÀ GEOMETRICHE DELLE AREE

PREMESSA: elementi strutturali

metadimensionali → 1 dimensione >> dimensioni restanti
 ↘ travi, aste, ...



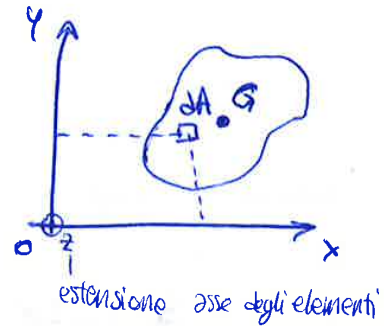
A pari AREA della sezione (quantità di materiale usata) proprietà cambiano con la forma:



Anche se $A_1 = A_2$
 materiale vicino a 0 materiale lontano da 0

- PARAMETRI NOTEVOLI -

- AREA
- MOMENTI DI I ORDINE (distanza al I grado)
- MOMENTI DI II ORDINE (distanza al II grado)



$$\text{Area} = \int_A dA$$

Momenti di I ordine (statici)

$$S_x = \int_A y dA$$

statico
 asse rispetto a cui si fa il momento

$$S_y = \int_A x dA$$

→ utili per determinare il baricentro di G

→ MOMENTI I ORDINE

LASTRA OMOGENEA, PESO ALL'UNITÀ DI SUPERFICIE $p [N/m^2]$



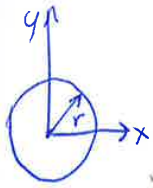
Vogliamo ridurre tutti i contributi ad una risultante applicata nel baricentro

- RIDUZIONE FORZA PESO COMPLESSIVA A G
- CASO 3D, SCOMPONIBILE in 2 casi 2D

Il caso delle aree differisce per 2D(xy), AREE NON MASSE

$$J_{xx} = \int_A y^2 dA \quad J_{yy} = \int_A x^2 dA \quad \text{MOMENTO D'INERZIA}$$

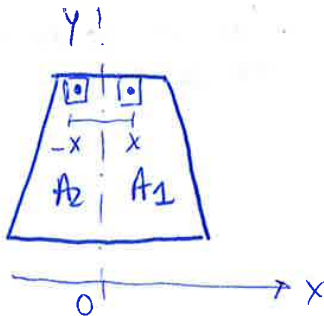
$$J_{xy} = \int_A xy dA \quad \text{MOMENTO CENTRIFUGO (prodotto d'inerzia)}$$



$$J_p = \int_A r^2 dA \quad \text{MOMENTO D'INERZIA POLARE}$$

- SISTEMI DI RIFERIMENTO -

Generico Oxy origine O
 baricentro Gxy origine G
 Aiuto: simmetria



$$S_y = \int_A x dA = \int_{A_1} x dA + \int_{A_2} x dA = 0$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 0$$

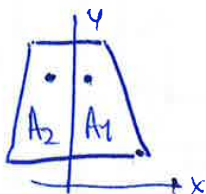
- Se esiste ASSE DI SIMMETRIA G sta su di esso
- Se esistono due assi di SIMMETRIA sta sull' INTERSEZIONE:



→ RIFERIMENTO PRINCIPALE se: $J_{xy} = \int_A xy dA = 0$

→ RIFERIMENTO CENTRALE PRINCIPALE
 $G=0$ $J_{xy}=0$

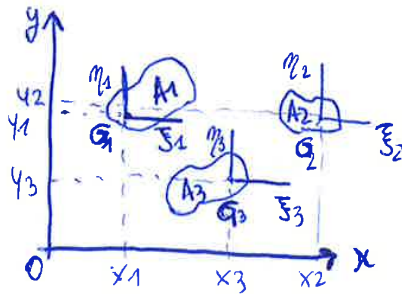
Simmetria



$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_{A_1} xy dA + \int_{A_2} xy dA = 0$$

Se un asse di riferimento è asse di simmetria, il riferimento principale

- SEZIONI COMPOSTE -



- OXY riferimento globale (vale per tutta la sezione)
- Gi Gi ni riferimento locale area i-esima **BARICENTRICO**

I ordine

$$S_x = \sum y_i A_i$$

$$S_y = \sum x_i A_i$$

↑
trasporto

II ordine

$$J_{xx} = \sum_i (y_i^2 A_i + J_{\xi_i \xi_i})$$

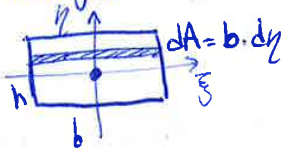
$$J_{yy} = \sum_i (x_i^2 A_i + J_{\eta_i \eta_i})$$

$$J_{xy} = \sum_i (x_i y_i A_i + J_{\xi_i \eta_i})$$

↑ ↑
trasporto locale

Inerzia locale

Es: rettangolo

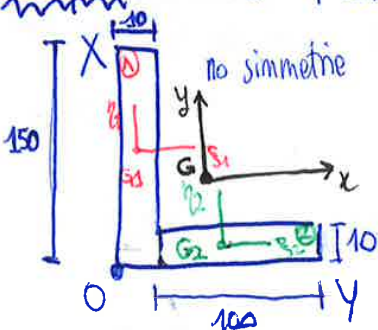


$$J_{\xi \xi} = \int_A \eta^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \eta^2 d\eta = \frac{b}{3} \eta^3 \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_{\eta \eta} = \frac{hb^3}{12}$$

$$J_{\xi \eta} = 0 \text{ simmetrico}$$

Esempio: Trovare G, J_{xx}, J_{xy}, J_{yy} nel riferimento baricentrico



OXY riferimento di partenza/globale

riferimenti locali devo essere paralleli a quello globale e baricentrici

$$\begin{cases} x_1 = 5 \text{ mm} \\ y_1 = 75 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 60 = (100/2) + 10 \\ y_2 = 5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$= \cos^2 \alpha J_2 + \sin^2 \alpha J_1$$

$$J_{xy} = \int_A xy \, dA = \int_A (p_1 \cos \alpha + p_2 \sin \alpha) (p_1 \sin \alpha + p_2 \cos \alpha) \, dA =$$

$$= -\cos \alpha \sin \alpha \left(-\int_A p_1^2 \, dA + \int_A p_2^2 \, dA \right) + \int_A p_1 p_2 \, dA (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

$\int_A p_1^2 \, dA \equiv J_2$ $\int_A p_2^2 \, dA \equiv J_1$ $\int_A p_1 p_2 \, dA \equiv 0$

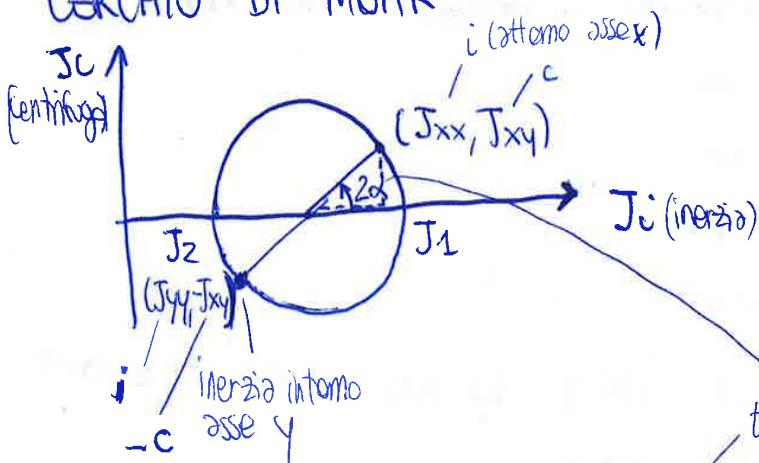
$$\begin{cases} J_{xx} = J_1 \cos^2 \alpha + J_2 \sin^2 \alpha \\ J_{yy} = J_1 \sin^2 \alpha + J_2 \cos^2 \alpha \\ J_{xy} = (J_1 - J_2) \cos \alpha \sin \alpha \end{cases}$$

TRASFORMAZIONE: $\alpha \rightarrow 2\alpha$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} ; \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} ; \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

$$\begin{cases} J_{xx} = \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha \\ J_{yy} = \frac{J_1 + J_2}{2} - \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha \\ J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

CERCHIO DI MOHR



(segno momento inerzia = segno dell'angolo)

triangolo rettangolo con ipotenusa = raggio

$$J_{1,2} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

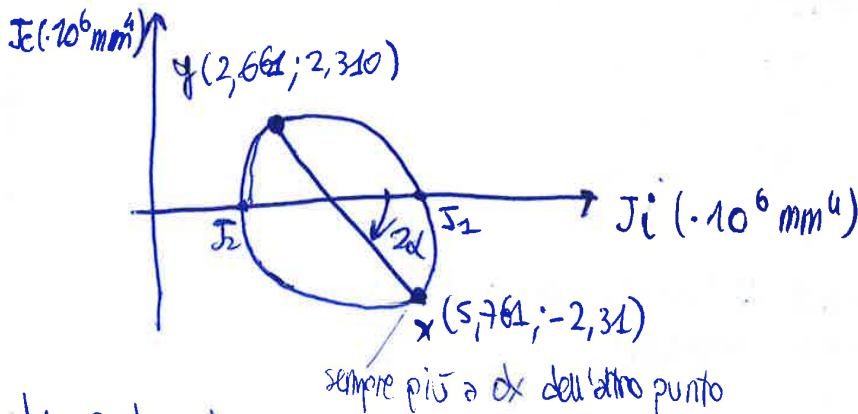
$$J_{yy} = \underbrace{J_{\eta_1 \eta_1}}_{\text{INERZIA LOCALE}} + \underbrace{x_1^2 A_1}_{\text{INERZIA DI TRASPORTO}} + J_{\eta_2 \eta_2} + x_2^2 A_2 = \frac{150 \cdot 10^3}{12} + (-22)^2 \cdot 1500 + \frac{10 \cdot 100^3}{12} + 33^2 \cdot 100 =$$

$$= \boxed{2,661 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \rightarrow \text{SEMPRE POSITIVO (nasce da integrali con coordinate al quadrato)}$$

$$J_{xy} = J_{\xi_1 \eta_1} + x_1 y_1 A_1 + J_{\xi_2 \eta_2} + x_2 y_2 A_2 = (-22) \cdot 1500 + 33 \cdot (-12) \cdot 100 =$$

$$= \boxed{-2,310 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \rightarrow \text{PUÒ ESSERE ANCHE NEGATIVO, SE NULLO ALLORA SISTEMA PRINCIPALE}$$

Più figura è estesa e più il suo momento di inerzia sarà elevato



$$J_{1,2} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2}$$

$$= \frac{5,761 + 2,666}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,761 - 2,666}{2}\right)^2 + (-2,310)^2}$$

$$\begin{cases} J_1 = 6,993 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ J_2 = 1,429 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$|\text{tg } 2\alpha| = \left| \frac{2J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right| = \frac{2 \cdot 2,310}{5,761 - 2,666} = 1,49$$

$$J_{xy} < 0 ; J_{yy} < J_{xx} \rightarrow -45^\circ < \alpha < 0 \rightarrow \alpha = -28^\circ$$

① determinare G_i

$$\begin{cases} X_{Gi} = X_{ci} - X_G \\ Y_{Gi} = Y_{ci} - Y_G \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{G1} = 20 - 25 = -5 \text{ mm} \\ Y_{G1} = 35 - 39,29 = -4,29 \text{ mm} \end{cases}$$

baricentri delle singole aree rispetto al riferimento, baricentrico.

$$\begin{cases} X_{G2} = X_{G1} = -5 \text{ mm} \\ Y_{G2} = Y_{G1} = -4,29 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{G3} = 55 - 25 = 30 \text{ mm} \\ Y_{G3} = 65 - 39,29 = 25,71 \text{ mm} \end{cases}$$

② Determinare momenti di inerzia e centrifughi rispetto i riferimenti $(G_i \xi_i \eta_i)$ per ciascuna delle tre aree costituenti calcolo $J_{\xi_i \xi_i}, J_{\eta_i \eta_i}, J_{\xi_i \eta_i}$

$$\begin{cases} J_{\xi_1 \xi_1} \rightarrow \text{è lo spazio rispetto a } \xi_1, \text{ è l'altezza che va al cubo} \\ = \frac{40 \cdot 70^3}{12} = 1,43 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ J_{\eta_1 \eta_1} = \frac{40^3 \cdot 70}{12} = 3,733 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

momenti centrifughi nulli perché per le singole sezioni ξ, η sono assi di simmetria cioè assi centrali di inerzia, cioè principali.

$$\begin{cases} J_{\xi_2 \xi_2} = \frac{20 \cdot 50^3}{12} = -2,083 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \\ J_{\eta_2 \eta_2} = -\frac{20^3 \cdot 50}{12} = -3,333 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ J_{\xi_3 \xi_3} = \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \\ J_{\eta_3 \eta_3} = \frac{30^3 \cdot 10}{12} = 2,250 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

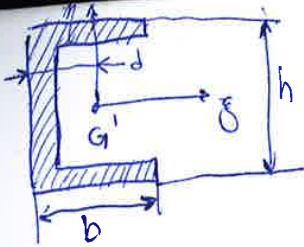
③ calcolo momenti di inerzia rispetto al sistema di riferimento $G_{xy} : J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}$

$$\begin{cases} J_{xxi} = J_{\xi_i \xi_i} + A_i y_{Gi}^2 \\ J_{yyi} = J_{\eta_i \eta_i} + A_i x_{Gi}^2 \\ J_{xyi} = J_{\xi_i \eta_i} + A_i x_{Gi} y_{Gi} \end{cases}$$

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^3 J_{xxi} = J_{\xi_1 \xi_1} + J_{\xi_2 \xi_2} + J_{\xi_3 \xi_3} + A_1 y_{G1}^2 + A_2 y_{G2}^2 + A_3 y_{G3}^2 = 1,43 \cdot 10^6 - 2,083 \cdot 10^5 + 2,5 \cdot 10^3 + 2800 \cdot 4,29^2 + (-1000) \cdot 4,29^2 + 300 \cdot 25,71^2 = 1,168 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy} = \sum_{i=1}^3 J_{yyi} = J_{\eta_1 \eta_1} + J_{\eta_2 \eta_2} + J_{\eta_3 \eta_3} + A_1 x_{G1}^2 + A_2 x_{G2}^2 + A_3 x_{G3}^2 = 3,733 \cdot 10^5 - 3,333 \cdot 10^4 + 2,25 \cdot 10^4 + 2800 \cdot 5^2 - 1000 \cdot 5^2 + 300 \cdot 30^2 = 6,775 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^3 J_{xyi} = J_{\xi_1 \eta_1} + J_{\xi_2 \eta_2} + J_{\xi_3 \eta_3} + A_1 x_{G1} y_{G1} + A_2 x_{G2} y_{G2} + A_3 x_{G3} y_{G3} = 0 + 0 + 0 + 2800 \cdot (-5) \cdot (-4,29) + (-1000) \cdot (-5) \cdot (-4,29) + 300 \cdot 30 \cdot 25,71 = 2,7 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$



$d = 23,7 \text{ mm}$

$b = 90 \text{ mm}$

$h = 260 \text{ mm}$

$$\begin{cases} A' = 4,83 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \\ J_{55} = 4,824 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \\ J_{\eta\eta} = 3,170 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

② J_1, J_2

① scomposizione in sezioni trattabili: 4 sezioni

2 sezioni σ C (dati forniti dal problema)
2 rettangoli

② A_i, G_i

$A_1 = A' = 4,83 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$

$A_2 = A' = 4,83 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$

$A_3 = A_4 = C \cdot S = 200 \cdot 20 = 4000 \text{ mm}^2$

$G_1 (x_{G1} = d = 23,7; y_{G1} = 0)$

$G_2 (x_{G2} = -23,7; y_{G2} = 0)$

$G_3 (x_{G3} = 0; y_{G3} = \frac{h}{2} + \frac{s}{2} = 140)$
centro
centrato su y

$G_4 (x_{G4} = 0; y_{G4} = -140)$

③ $J_{55} = 4,824 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$
 $J_{\eta\eta} = 3,170 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$J_{55} = \int_A \eta^2 dA = 4,824 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$
 $J_{\eta\eta} = 3,170 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$J_{55} = \frac{200 \cdot 20^3}{12} = 13 \cdot 10^5 = J_{55}$
 $J_{\eta\eta} = \frac{20^3 \cdot 20}{12} = 1,3 \cdot 10^7 = J_{\eta\eta}$

$J_{\eta\eta} = \int_A \xi^2 dA$

non dipende da verso di orientamento asse

$J_{xx} = J_{55} + J_{55} + A_1 y_{G1}^2 + A_2 y_{G2}^2 + 2 \cdot J_{55} + A_3 y_3^2 + A_4 y_4^2 = 2 \cdot 4,824 \cdot 10^7 + 2 \cdot 1,3 \cdot 10^7 + 2 \cdot 4000 \cdot 140^2 = 2,53 \cdot 10^8$

$J_{yy} = 2 \cdot J_{\eta\eta} + 2 \cdot J_{\eta\eta} + 2 \cdot A_1 x_{G1}^2 + 2 \cdot A_2 x_{G2}^2 = 2 \cdot 3,170 \cdot 10^6 + 2 \cdot 1,3 \cdot 10^7 + 2 \cdot 4,83 \cdot 10^3 \cdot 23,7^2 = 3,77 \cdot 10^7$

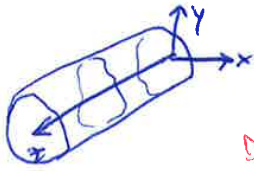
$J_{xy} = A_1 x_1 y_1 + A_2 x_2 y_2 + A_3 x_3 y_3 + A_4 x_4 y_4 = 0$

$J_{1,2} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{2,53 \cdot 10^8 + 3,77 \cdot 10^7}{2} \pm \frac{2,53 \cdot 10^8 - 3,77 \cdot 10^7}{2}$

$J_2 \uparrow$
 $2,5 \cdot 10^8$
 $J_1 \downarrow$
 $-3,7 \cdot 10^7$

- CONSEGUENZA DELLE ASSUNZIONI -

Riferimento cartesiano xyz avente assi xy nel piano della figura generatrice e origine nel baricentro di quest'ultima.



DA 1^a
IPOTESI

- asse z = traiettoria del baricentro durante moto di generazione: LINEA D'ASSE DEL SOLIDO
- tutte sezioni normali a z sono sezioni rette del solido, identiche a figura generatrice

DA 2^a
IPOTESI

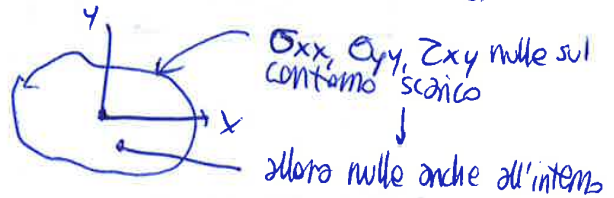
- assenza carichi sulla superficie laterale, dimensioni trasversali piccole

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

ci sono solo quelle che hanno a che fare su z

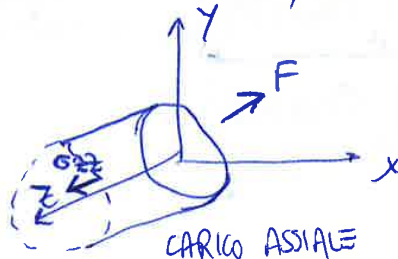
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ ASSENTI = NULLE

- non devono equilibrare carichi esterni (ip. 2) (carico deve essere applicato solo su prima e ultima base)
- nulle su tutta la superficie di contorno (ip 2)
- sezione poco estesa trasversalmente (ip 1b) quindi anch'esse nulle all'interno.



$\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ PRESENTI

funzioni di x, y, z , necessarie per equilibrio carichi esterni

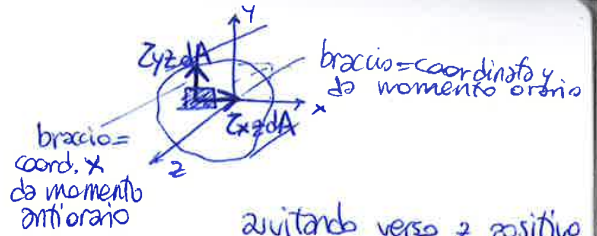


se c'è F , deve esserci σ_{zz} per bilanciare!

MOMENTO TORCENTE

componente intorno zz
Tende ad attorcigliare (torcere) asse del solido

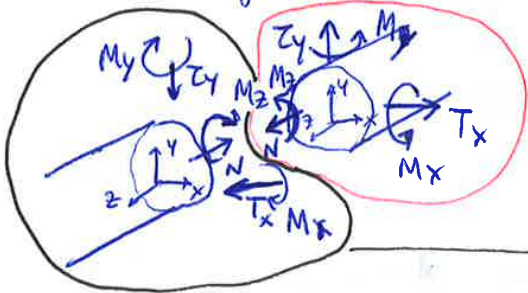
$$M_z = \int_A (z y^2 x - z x^2 y) dA$$



avvitando verso z positivo emerge che contributo antiorario è positivo e quello orario è negativo

→ VERSI CONVENZIONALI DELLE CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE

Intervento generico del solido, si mettono in evidenza sulle due facce le caratteristiche agenti:



+ FACIA POSITIVA

versi caratteristiche concordi a quelli degli assi (versi forze nel verso dell'avvitamento)

- FACIA NEGATIVA

versi caratteristiche opposti a quelli degli assi

- PRINCIPIO DI SAINT VENANT -

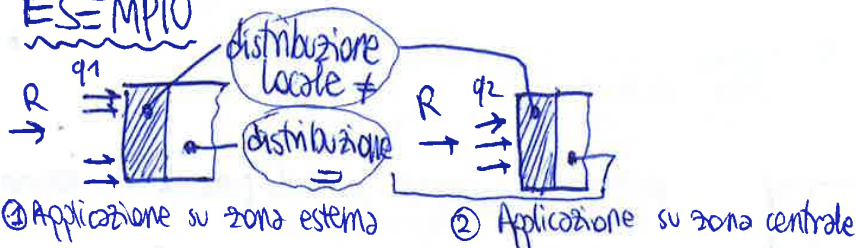
• Modo in cui carichi effettivamente applicati su sezioni di estremità del solido → dipende dal caso pratico

• Distribuzione tensioni localmente prodotta dal carico esterno può essere diversa da quella prevista dalle soluzioni di Saint Venant

• A distanza dalla sezione di applicazione del carico circa pari alle dimensioni trasversali il modo in cui il carico è applicato è influente.

• Significative solo le risultanti (forze e momenti)

ESEMPIO



• Nella zona vicina a sezione caricata la distribuzione delle tensioni è diversa

• allontanandosi la distribuzione diventa uguale e corrispondente a soluzione solida di Saint Venant.

2) DEFORMAZIONI

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = K_0 \text{ (costante)}$$

3) TENSIONI (ELASTICITÀ)

$$\epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} + \alpha(T - T_0) \quad \text{per Saint Venant}$$

legge elastica lega ϵ a tutte le σ

$$\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz} = E \cdot K_0$$

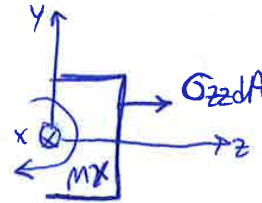
4) EQUIVALENTI STATICI

Forza normale $N = \int_A \sigma_{zz} dA = E K_0 \int_A dA \rightarrow N = E K_0 \cdot A$

Momento flettente $M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA =$

$$= E K_0 \int_A y dA =$$

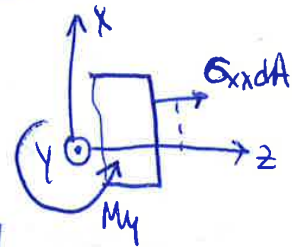
$$= M_x = E K_0 \int_A y dA = 0 \rightarrow M_x = 0$$



$$M_y = - \int_A x \sigma_{zz} dA =$$

$$= - E \cdot K_0 \cdot \int_A x dA =$$

$$= - E K_0 \int_A x dA = 0 \rightarrow M_y = 0$$



riferimento
baricentrico
(integro da $-x$ a $x \rightarrow 0$)

se non applico F nel baricentro allora M_x e M_y non sarebbero più nulle e il problema sarebbe complicato.

$$K_0 = \frac{N}{EA} \rightarrow \sigma_{zz} = \frac{N}{EA} \cdot E = \frac{N}{A} \quad \text{forza su area = tensione}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} \quad \text{solo se FORZA PESSO per BARICENTRO}$$

PIANO z-x



- notazioni intorno assey (da baricentro)
 - sezione resta piana
- punti a coordinate negativo hanno spostamento positivo e viceversa → cambio segno

$$w = -x dy$$

② DEFORMAZIONI

$$E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = -x \frac{dy}{dz} = -x \kappa_y \rightarrow \boxed{E_{zz} = -x \kappa_y}$$

③ TENSIONI

$$\boxed{\sigma_{zz} = -E x \kappa_y}$$

④ EQUIVALENTI STATICI

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = -E \kappa_y \int_A x dA \rightarrow \boxed{N=0}$$

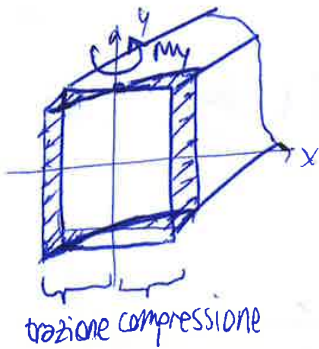
origine nel baricentro della sezione

$$M_x = \int_A y \sigma_{zz} dA = -E \kappa_y \int_A xy dA = 0 \rightarrow \boxed{M_x=0}$$

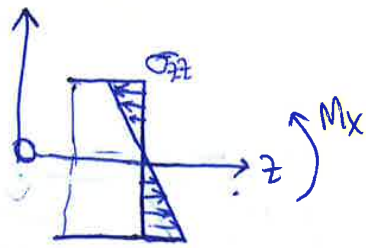
$J_{xy} = 0$

$$M_y = - \int_A x \sigma_{zz} dA = E \kappa_y \int_A x^2 dA \rightarrow \boxed{M_y = E \kappa_y J_{yy}}$$

stessa cosa di prima ma i ruoli scambiati tra x e y.
Nuovamente FLESSIONE RETTA (inferito a y invece che x)



$$\sigma_{zz} = -E \kappa_y x = -\frac{E M_y}{E J_{yy}} x \rightarrow \boxed{\sigma_{zz} = -\frac{M_y \cdot x}{J_{yy}}}$$



x=0
ASSE NEUTRO

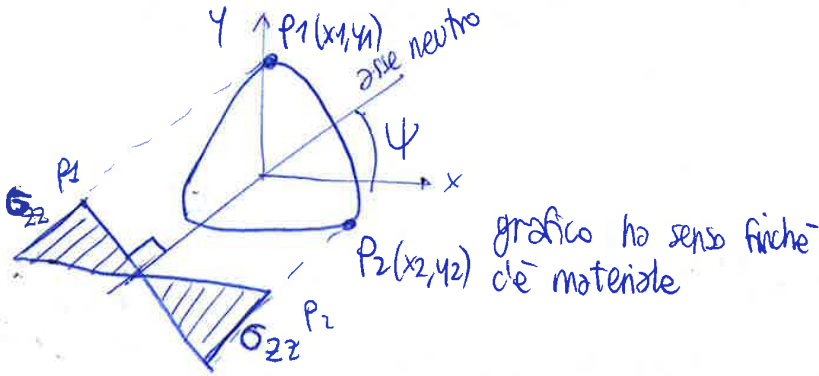
→ **FLESSIONE DEVIATA**

Asse momento flettente \neq asse rotazione sezione

Effettiva posizione di M_f tende a deviare verso asse con momento minore

(più ci allontaniamo da asse neutro e più tensioni devono crescere)

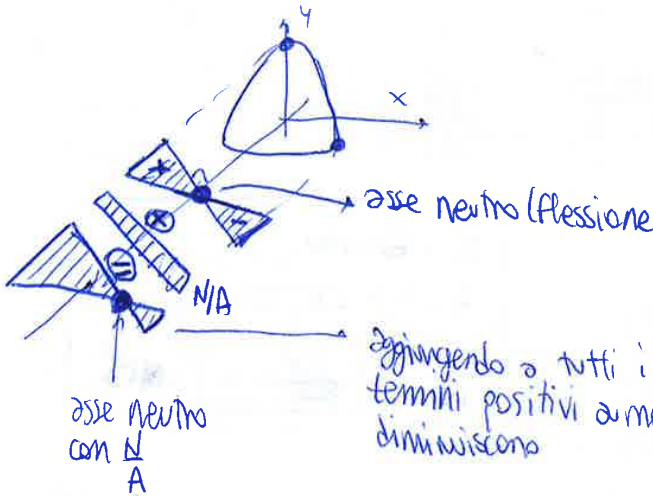
Prendiamo come zero di tensione



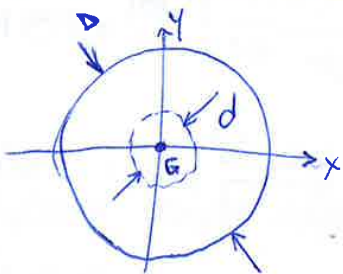
Compresenza della forza normale N

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x$$

modificato con l'aggiunta di una costante ovunque



→ **CASO PARTICOLARE: SEZIONE CIRCOLARE**



$$J_{xx} = J_{yy} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

Flessione MAI deviata perché angoli ψ e ψ coincidono.

$$\frac{J_{xx}}{J_{yy}} = 1 \rightarrow \tan \psi = \tan \psi$$

ESERCITAZIONE 6

• SEZIONE CIRCOLARE CAVA



$D = 60 \text{ mm}$
 $d = 20 \text{ mm}$

Materiali GHISA GTc300
 $R_m = 300 \text{ MPa}$

Sollecitata da

$N = 6,5 \cdot 10^4 \text{ N}$
 $M_x = 1,1 \cdot 10^6 \text{ Nm}$

momenti principali tutti uguali, non come nel rettangolo

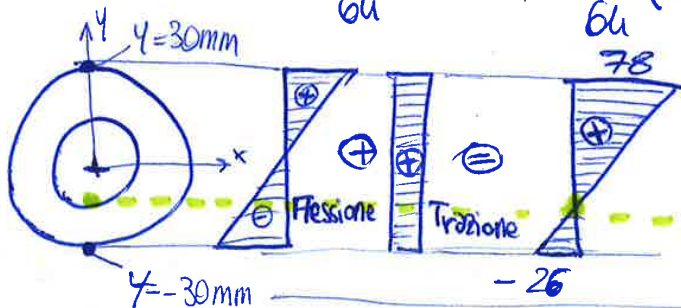
$M_F \equiv M_x$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y + \frac{N}{A}$$

coordinate estreme le trovo su y dato che σ_{zz} dipende da y

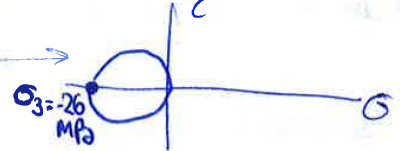
$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4} (60^2 - 20^2) = 2513 \text{ mm}^2$$

$$J_{xx} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi}{64} (60^4 - 20^4) = 6,283 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$



cerchi di mohr collassati nell'origine

cerchio di mohr



$$\sigma_{zz}^P = \frac{1,1 \cdot 10^6}{6,283 \cdot 10^5} \cdot 30 + \frac{6,5 \cdot 10^4}{2,513 \cdot 10^3} = 78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz}^S = \frac{1,1 \cdot 10^6}{6,283 \cdot 10^5} (-30) + \frac{6,5 \cdot 10^4}{2,513 \cdot 10^3} = -26 \text{ MPa}$$

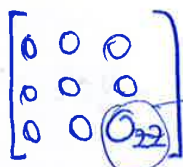
Posizione asse neutro

$$\frac{M_x}{J_{xx}} y + \frac{N}{A} = 0$$

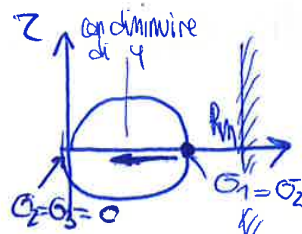
$$y = -\frac{N}{A} \cdot \frac{J_{xx}}{M_x} = -14,8 \text{ mm}$$

circa a metà tra centro e coordinata inferiore e rimane sempre // a se stesso

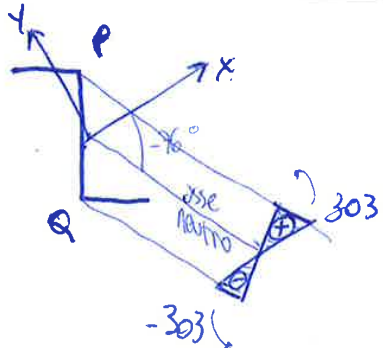
Materiali fragile, $R_m = 300 \text{ MPa}$



ha senso controllare punto dove questo assume valore più elevato



un cerchio collassato in un punto e gli altri due sovrapposti



$\xi^p = 2$ → coordinate in $\xi\eta$
 $\eta^p = 15$
 $x^p = \xi^p \cos 23,8^\circ + \eta^p \sin 23,8^\circ = 7,88 \text{ mm}$ → angolo positivo qui!
 $y^p = -\xi^p \sin 23,8^\circ + \eta^p \cos 23,8^\circ = 12,91 \text{ mm}$

$$\sigma_{\eta}^p = \frac{1,83 \cdot 10^3}{3,72 \cdot 10^4} 12,91 - \frac{-0,87 \cdot 10^3}{2,95 \cdot 10^3} 7,88 = 303 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\xi}^q = -303 \text{ MPa}$$

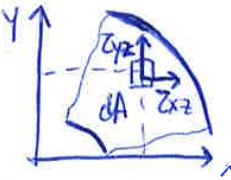
↳ coordinate ξ, η
 positive o negative
 a seconda della
 posizione del
 punto più sollecitato

Solo tensioni tangenziali sono variabili nella sezione

A) CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONI

$$T_x = \int_A z_{xz} dA = -G\theta' \int_A y dA = 0$$

momenti statici nulli



$$T_y = \int_A z_{yz} dA = G\theta' \int_A x dA = 0$$

Da forza nulla, perché per ogni sollecitazione ce ne sarà una uguale e opposta.

$$M_z = \int_A (z_{yz} \cdot x - z_{xz} \cdot y) dA = G\theta' \int_A (x^2 + y^2) dA = G\theta' \int_A r^2 dA$$

$$M_z = G\theta' J_p$$

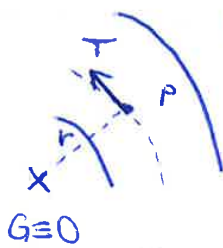
J_p momento inerzia polare

$$\begin{cases} z_{xz} = -\frac{M_z}{J_p} y \\ z_{yz} = +\frac{M_z}{J_p} x \end{cases}$$

variato con y/x come per le flessioni
→ ricarati dalle tensioni

orientato come spostamento complessivo θz

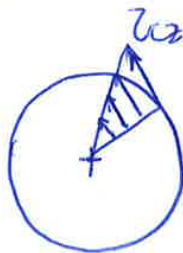
Componendo le due tensioni: $\tau = \sqrt{z_{xz}^2 + z_{yz}^2} = \frac{M_z}{J_p} \sqrt{y^2 + x^2} = \frac{M_z}{J_p} r$



orientate punto per punto come le tangenti alla circonferenza di raggio r.
orientate nella circonferenza c, che è perpendicolare a z

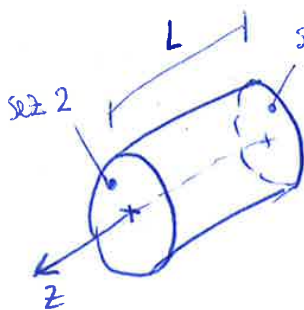
$$\tau_{cz} = \frac{M_z}{J_p} \cdot r$$

ha significato per raggi > r interno e fino a che materiale finisce



$$\theta' = \frac{d\theta}{dz} = \frac{M_z}{GJ_p}$$

angolo derivato rispetto coordinato assiale



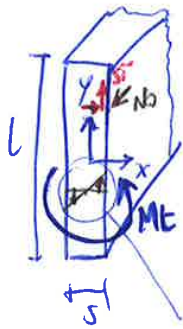
gradiente di torsione costante

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_0^L \frac{M_z}{GJ_p} dz$$

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{M_z \cdot L}{GJ_p}$$

→ SEZIONE A PARETE SOTTILE APERTA

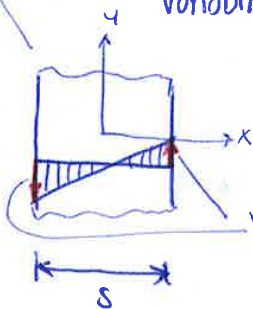
CASO FONDAMENTALE: RETTANGOLO



tra l e s deve esserci almeno un ordine di grandezza di differenza.

Momento torcente M_t

distribuzione $z = z_{yz}$ parallela al lato maggiore
variabilità con x ANISIMMETRICA



valori di picco

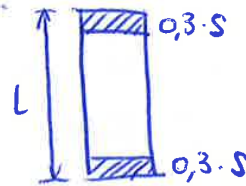
$$z_{yz, \text{picco}} = \pm \frac{M_t \cdot s}{J_t}$$

$$J_t = \frac{1}{3} s^3 l \quad \text{SE } s \ll l$$

ALTRIMENTI

$$J_t = \frac{1}{3} s^3 (l - 2,0,35)$$

Alle estremità dei lati corti le considerazioni fatte non funzionano

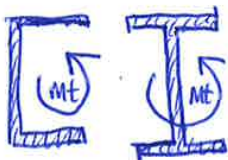


$$\theta' = \frac{d\theta}{dt} = \frac{M_t}{G J_t}$$

caso rettangolo

Ma caso del rettangolo non è così frequente. Sono più frequenti i casi con sezioni aperte (tutte cavità raggiungibili dall'esterno).

ALTRI CASI DI SEZIONI APERTE:

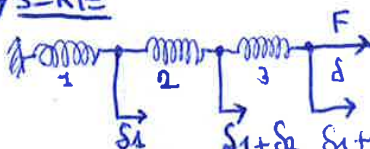


zone rettangolari in PARALLELO (Meccanico)

stesso θ e θ' (equivalente di molle in //, non sommo forze ma momenti)

→ ELEMENTI ELASTICI: MOLLE ←

→ SERIE



$$R = F$$

sommo deformabilità

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \frac{F}{k_3} = \frac{F}{k_{eq}} \quad \left[k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}} \right]$$

ESERCITAZIONE 14

1) FATTORE DI CONCENTRAZIONE DELLA TENSIONE PER GLI INTAGLI

$$K_t = \frac{\sigma_{\text{tensione di picco}}}{\sigma_{\text{tensione nominale}}}$$

Quando un materiale viene intagliato si formano due tipi di tensioni nei pressi del raccordo σ_{nominale} = calcolata da soluzioni analitiche caso Saint Venant sulla: sezione minima e σ_{picco} = tensione effettiva sempre $>$ della nominale quindi $K_t > 1$. La concentrazione di tensione è tanto maggiore quanto maggiore è la variazione di diametro della sezione a seguito dell'intaglio (D/d) e quanto minore è il raccordo rispetto al diametro minore (r/d).

2) DA QUALI FATTORI DIPENDE K_t ? COME SE NE OTTENGONO VALORI PER SOLUZIONI CASI PRATICI?

K_t è funzione delle dimensioni del componente (geometria). Si può determinare K_t via analitica, sperimentale o numerica. In pratica si usano diagrammi che forniscono K_t per diverse geometrie, tipi di intaglio e condizioni di carico.

Poi σ_{nom} si calcola per via analitica e infine $\sigma_{\text{picco}} = K_t \cdot \sigma_{\text{nom}}$.

3) PERCHÉ NEGLI ELEMENTI CON CRICCHE LA VERIFICA IN TERMINI DI TENSIONE NON È POSSIBILE?

Perché la cricca ha raggio considerato nullo e quindi fattore di concentrazione della tensione tende a ∞ .

4) FATTORE DI INTENSITÀ DELLA TENSIONE RAPPRESENTA IL CAMPO DI TENSIONE DI FRONTE ALLA CRICCA

Tensioni lungo x e y di fronte a cricca sono in funzione di K_I , cioè campo di tensione ha sempre lo stesso andamento parametrizzato dal termine K_I che ha quindi valore rappresentativo dell'intero campo.

5) PROPRIETÀ DEL MATERIALE CHE ESPRIME LA TENACITÀ A FRATTURA, PERCHÉ È INFLUENZATA DALLO SPESSORE

Tenacità a frattura = valore critico del fattore K_{Ic} per il quale si ha propagazione instabile e diminuisce all'aumentare dello spessore fino a stabilizzarsi al valore minimo K_{Ic} .

Tenacità a frattura inversamente proporzionale alla resistenza a trazione. È quindi influenzata dallo spessore. Infatti resistenza a trazione è inversamente proporzionale all'area della sezione, maggiore sarà lo spessore, maggiore sarà l'area e maggiore sarà la tenacità a frattura. Maggiore è la sezione rispetto alla cricca e maggiore è il limite al quale si ha tensione tale da provocare frattura.

ESERCITAZIONE 10

- 1) CASI IN CUI SI HA DISCONTINUITÀ DEL DIAGRAMMA DI MOMENTO FLETTENTE E DI TAGLIO
 Diagramma → Momento flettente: discontinuo con coppia concentrata / discontinuità = coppia
 di taglio: forza trasversale concentrata il diagramma ha discontinuità per la forza stessa.
- 2) DOVE SI ANNULLA NECESSARIAMENTE IL MOMENTO FLETTENTE
 In corrispondenza di appoggi di estremità e delle cerniere (salvo che siano applicate coppie concentrate)
- 3) QUANDO SI HA DIAGRAMMA PARABOLICO DEL MOMENTO FLETTENTE? COME È L'ANDAMENTO DEL TAGLIO IN QUEI CASI?
 Nelle zone in agiscono carichi trasversali uniformemente distribuiti il diagramma del momento è parabolico, quello del taglio è lineare.
- 4) PER STRUTTURE CON GOMITI A 90°, IN CORRISPONDENZA DI ESSI COSA SI NOTA?
 Il momento flettente conserva modulo ma cambia pendenza, le forze di taglio cambiano il segno.

ESERCITAZIONE 11

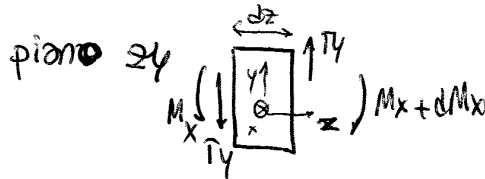
- 1) PERCHÉ LA CURVATURA LOCALE IN UNA TRAVE È PROPORZIONALE AL MOMENTO FLETTENTE
 Effetto del momento flettente: si ha rotazione di una generica sezione dell'angolo $d\alpha_x$ rimanendo piano. Le due sezioni inizialmente parallele definiscono un tratto di lunghezza assiale dz e con arco di circonferenza osculatrice (che approssima segmento biconcavo curvato) di raggio r_x : $dz = r_x d\alpha_x$
 Il reciproco del raggio è la curvatura: $\frac{1}{r_x} = \frac{d\alpha_x}{dz}$
 Tuttavia quell'equazione corrisponde anche alla dilatazione assiale: $\epsilon_{zz} = \frac{d\alpha_x}{dz} y = \nu$
 Quindi: $\frac{d\alpha_x}{dz} = K_x$
 Ma quando una sezione ruota attorno asse x ed è soggetta solo a M_x con xy centrali d'inerzia: dalla definizione di M_x si ottiene: $K_x = \frac{M_x}{E J_{xx}}$
 Quindi: $\frac{d\alpha_x}{dz} = \frac{1}{r_x} = K_x = \frac{M_x}{E J_{xx}} \rightarrow \frac{1}{r_x} \propto M_x$
- 2) DI COSA TIENE CONTO IL FATTORE DI TAGLIO?
 X tiene conto della distribuzione di tensione e deformazione sulla sezione e quindi dipende dalla sua geometria
- 3) NELLA FLESSIONE DI UN ELEMENTO SNELLO PREVALE DEFORMAZIONE PER FLESSIONE O TAGLIO?
 estensione assiale > dimensioni trasversali prevale momento flettente perché spessore piccolo trascurabile rispetto la lunghezza perciò taglio è trascurabile. Taglio prevale per elementi tozzi.
- 4) COSTANTI DI INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA.
 Imponendo le giuste condizioni al contorno:
 appoggi cerniere → spostamento nullo
 incastro → spostamento e rotazione nulli
 momento rotazione nullo → la ipotesi di continuità

ESERCIZIUMI = 8

1) PERCHÉ IN CASO DI MOMENTO FLETTENTE NON COSTANTE LUNGO L'ASSE DEL SOLDO DI SAINT VENANT IL TAGLIO DEVE ESSERE NULLO?

La forza di taglio, in assenza di carichi distribuiti, deve garantire l'equilibrio alla traslazione verticale. Il momento può invece subire un incremento infinitesimo per una porzione di soli di saint venant pari a dz .

Si impone equilibrio:



$$-M_x + M_x + dM_x - T_y dz = 0$$

$$T_y = \frac{dM_x}{dz} \quad \text{taglio è derivato del momento}$$

2) NELLO STUDIO DELLE TENSIONI DI TAGLIO I MOMENTI DI INERZIA J_{xx} , J_{yy} E QUELLI STATICI S_x^* e S_y^* SI RIFERISCONO ALLA STESSA AREA?

Momento d'inerzia si riferisce all'area della sezione complessiva, i momenti statici si riferiscono alla parte di sezione A^* , staccata dalla corda c , che varia in funzione di una coordinata locale ξ .

3) CONSIDERANDO UNA SEZIONE RETTANGOLARE SOGGETTA A TAGLIO VERTICALE, PERCHÉ IN CORRISPONDENZA DEI BORDI INFERIORE E SUPERIORE LA τ DEVE ANNULLARSI?

Nei bordi la tensione τ deve annullarsi sempre per il principio della parete laterale sciolta.

4) CHE EFFETTO SI PRODUCE SE LA FORZA DI TAGLIO NON VIENE APPLICATA NEL CENTRO DI TAGLIO?

centro di taglio $(-g, 0)$, per tale punto devono passare i tagli T_x e T_y affinché nella sezione si abbiano le distribuzioni di tensione τ corrispondenti al taglio puro. Perciò se la retta d'azione della risultante T dei tagli è distante e_c = eccentricità da tale punto si producono nella sezione delle sollecitazioni aggiuntive dovute al momento torcente

$$M_t = T \cdot e_c$$

↳ braccio = distanza dal centro di taglio = centro di torsione rispetto all'origine del riferimento

ESECUZIONE 6

1) QUALI CARATTERISTICHE DI SOLLECITAZIONE EQUIVALGONO STATISTICAMENTE ALLA TENSIONE ASSIALE σ_{zz} ?
 Le caratteristiche di sollecitazione dipendenti da σ_{zz} sono: forza normale N e i momenti flettenti M_x e M_y .

2) PERCHÉ $N \neq EA$ FLESSIONE (piani zy o zx) SI HA SPOSTAMENTO ASSIALE DEI PUNTI DELLA SEZIONE?

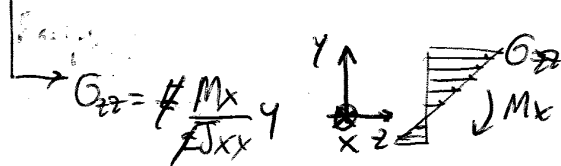
flessione nel piano zy : la soluzione si determina assumendo che una sezione generica ruoti dell'angolo α_x intorno all'asse x (piano zy) o all'asse y (piano zx) rimanendo piana, questo implica che spostamento assiale segua la legge: $w = \alpha_x \cdot y$
 Questo spostamento infinitesimo (α_x piccolo) determina una dilatazione assiale:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d\alpha_x}{dz} \cdot y = K_x \cdot y$$

K_x indica la derivata della rotazione rispetto alla coordinata assiale = significato fisico di curvatura del solido nel piano zy (o zx). Applicando la legge di Hooke

$$\sigma_{zz} = E \cdot \epsilon_{zz} = E \frac{d\alpha_x}{dz} \cdot y = EK_x y$$

Questo spostamento causa momento flettente
 sostituendo K_x



$$M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = EK_x \int_A y^2 dA = EK_x J_{xx} \rightarrow K_x = \frac{M_x}{E J_{xx}}$$

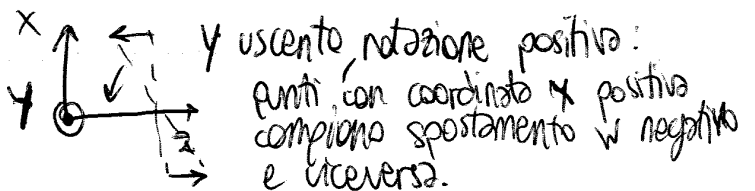
$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = EK_x \int_A y dA = 0$$

$$M_y = - \int_A \sigma_{zz} x dA = -EK_x \int_A xy dA = 0$$

sezione ruota intorno zx
 xy rif. centrale principale d'inerzia

Nel piano zx

vale lo stesso ma $w = -\alpha_y x$



3) PERCHÉ PER AVERE TENSIONE DI SOLA TRAZIONE (O COMPRESSIONE) LA NORMALE DEVE PASSARE PER BARICENTRO DELLA SEZIONE?

perché l'unico punto in cui la tensione causata dalla flessione è nulla è proprio il baricentro (in ogni sezione riferimento xy ha origine nel baricentro → braccio nullo) dove invece si ha tensione in sola direzione assiale causata dalla forza normale

4) FLESSIONE RETTA SOLO SE IL MOMENTO AGISCE INTORNO ASSE PRINCIPALE D'INERZIA
 si perché se asse principale d'inerzia allora i momenti centrifughi sono nulli.

piano yz (flessione intorno x): $M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = EK_x \int_A y^2 dA = EK_x J_{xx}$

(inverso nel piano zx)

$$M_y = \int_A \sigma_{zz} x dA = EK_x \int_A xy dA = EK_x J_{xy} = 0$$

ESECUZIONE 4

1) MISURA DEFORMAZIONE PROVETTA CON ESTENSIMETRO È INFLUENZATA DA MACCHINA DI PROVA
 La misura della deformazione della provetta non è influenzata dalla macchina di prova, anche perché si misurerebbe la deformabilità della macchina che non avrebbe senso. Infatti la deformazione misura l'allontanamento tra due sezioni di riferimento sulla provetta; la misura è diretta (non indiretta come quella che valuta la corsa della traversa).

2) ALLUNGAMENTO DOPO ROTTURA RISENTE DELLA DEFORMAZIONE ELASTICA? (QUALE INDICAZIONE SI OTTIENE?)

Non ne risente perché deformazione elastica dopo rottura è nulla, da informarsi sui materiali fragili e duttili.

Allungamento dopo rottura $A = 100 \cdot (L_u - L_0) / L_0$

↙ duttili: elevata deformazione plastica prima della rottura $A > 10\%$
↘ fragili: deformazione plastica limitata $A < 5\%$

3) PERCHÉ ALL'IPOTESI DELLA MAX τ CORRISPONDE UNA SUPERFICIE LIMITE PRISMATICA A SEI FACCE?

In uno spazio cartesiano le coordinate sono i valori assunti dalle tensioni principali; l'ipotesi corrisponde ad una superficie limite. Considero a due a due le tensioni principali trascurando la terza; corrisponde a tracciare tratti con andamento lineare in un grafico che ha come retta bisettrice dello spazio le tensioni principali, si ottiene così una sezione di forma esagonale retta.

4) PERCHÉ IPOTESI MAX τ È PIÙ CAUTELATIVA DI QUELLA DELL'ENERGIA DI DISTORSIONE?

Ogni ipotesi corrisponde a una superficie limite, se punto sta all'interno di tale superficie non si ha cedimento. Un'ipotesi più cautelativa quanto più la zona ammessa è limitata. Curva limite della massima tensione tangenziale è completamente inscritta in quella corrispondente all'energia di distorsione (la prima è quindi più cautelativa (è proprio inscritto nell'ellisse))

5) DIFFERENZA TRA TENSIONE LIMITE E TENSIONE AMMISSIBILE

tensione limite $\left\{ \begin{array}{l} \text{di snervamento per i duttili} \\ \text{di rottura per fragili} \end{array} \right.$

Deve sempre essere $\geq \sigma_{id}$ = tensione ideale, definita con un unico numero le tensioni applicate nel punto ed è calcolata in base a una delle teorie della
 Margine tra resistenza e sollecitazione è coefficiente di sicurezza: $CS = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{app}}$
 σ_{amm} = tensione ammissibile = σ_{lim} / CS nel punto più sollecitato → è un calcol di progetto e quindi dipende in modo arbitrario da CS scelto. Invece σ_{lim} è ricavabile da analisi sperimentali sul materiale.