



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1771A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Baiocco Fabio

MATERIA: Aerodinamica - Prof. Arina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

**NOZIONI INTRODUTTIVE**

$T, p, \rho$  Grandezze mediate nel tempo e nello spazio

• MODELLO DI MEZZO CONTINUO:  $\infty$  particelle fluide di volume quasi puntiforme

**PARTICELLA FLUIDA**: - volume trascurabile rispetto alle dimensioni fenomeno descritto  
 - abbastanza grande da poter definire un valore medio

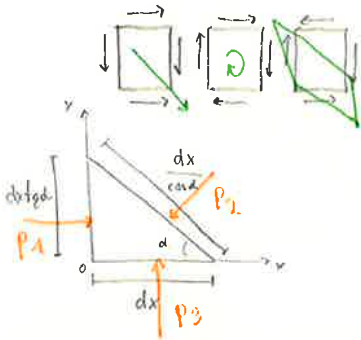
$K_n = \frac{\lambda_{mfp}}{L}$  (mean free path) se  $K_n \ll 1$  posso applicare il modello del continuo  
 N.B. Aria in c.v.  $\lambda_{mfp} \approx 10^{-8}$  m

**DENSITÀ:**

$\rho = \lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta \Omega}$  volume così piccolo non contare + nr. significativo di molecole  $\rightarrow \rho = \lim_{\Delta \Omega \rightarrow R_p} \frac{\Delta m}{\Delta \Omega}$

• Valore limite del volume al di sotto del quale variaz. molecolari diventano importanti

**PRESSIONE:** • Se fluido in quiete: solo componente normale



movimento  $\Rightarrow$  fluido in quiete no sforzi tangenziali

x)  $p_1 dx + \rho g dz - p_2 \frac{dx}{\cos \alpha} dz \sin \alpha = 0$   $p_1 = p_2$

y)  $p_3 dx dz - p_2 \frac{dx}{\cos \alpha} dz \cos \alpha = w$  (peso)

$w = \rho g \frac{1}{2} t g \alpha dx dz = 0$  infinitesimo di ordine superiore

$p_3 = p_2 = p_1$  legge di Pascal

• Se fluido in movimento: il fluido ha quasi sempre tempo di mettersi in equilibrio termodinamico

(CFR. reazioni chimiche tempi lunghi) conta al folto che particella ha  $\vec{v}$   
 numero di collisioni molecolari altissimo

- sforzi viscosi (2 componenti)  $\rightarrow$  compaiono in presenza di gradienti di velocità

[travaso di q.d.m.] **DIFFUSIONE** tra particelle contigue

$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

$[\mu] = \frac{kg}{ms}$

diminuisce all'aumentare di T: nei liquidi;  
 aumenta all'aumentare di T: nei gas

legge che caratterizza  $\rightarrow$  i fluidi Newtoniani

$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$  POWER LAW legge empirica (Maxwell)  $n=0.7$  (gas non densi)

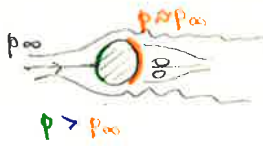
legge di Sutherland:  $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \frac{T_0 + S'}{T + S'}$  approssima meglio

**DIFFUSIONE TERMICA**

$q_n = -k \frac{\partial T}{\partial n}$   $[k] = \frac{W}{mK}$

$Pr = \frac{\mu}{k} C_p$

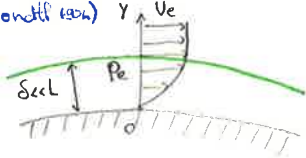
H<sub>2</sub>O:  $9 \div 10$   
 Aria:  $0.7 \div 0.72$



nella parte posteriore pressione relativa  $\approx 0$  non compensa sovrappressione parte frontale.  
 • resistenza di forma: convergono corpi affusolati

$Re \gg 1$  + corpo allungato + bosse incidenti +  $\nabla^2$  bosse  $\Rightarrow$  incomprimibile: NO  $\epsilon \rightarrow$  NO resistenza d'attrito/forma

• STRATO LITITE (boundary layer) +  $Re$  basso +  $\delta$  grande + transizione è dolce



$$\frac{\partial u}{\partial y} \gg \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$$

pressione dipende solo da fluido inviscido esterno

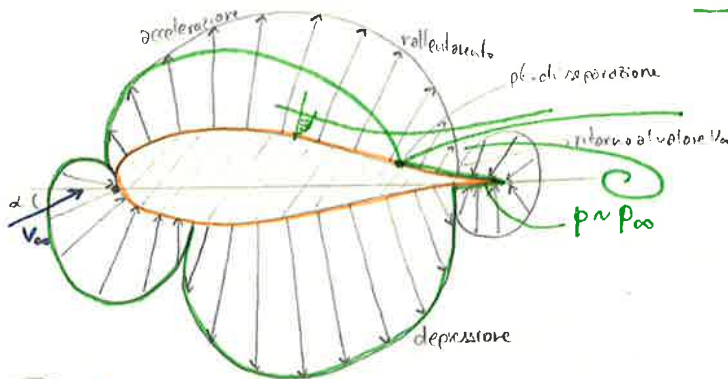
$\rightarrow$  NO separazione  $\rightarrow$  NO SCIA  
 • PARADOSSO DI D'ALBERT  
 - risolvo se per alti  $Re$  effetti viscosi confinati in sottile regione

I° - teoria inviscido flusso senza strato limite

II° - correzione di strato limite: variazioni di  $\delta$

N.B.  $(p - p_{\infty})$  relativa  $\begin{cases} < 0 \text{ depressione} \\ > 0 \text{ sovrappressione} \end{cases}$

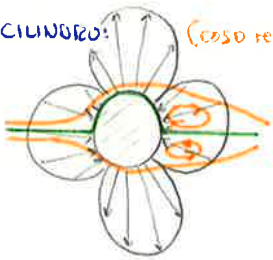
— = distribuzione reale



N.B. Se due zone di sovrappressione davanti e dietro sono = la resistenza di forma = 0

- lungo parete  $\epsilon$  non trascurabili attrito dissipa en. cinetica in calore [particelle accelerate]

- CIUNDRIO: (cosa reale) particella accelera, non ce la fa e si stacca  $\rightarrow$  dissimetrica  $\Rightarrow$  Resistenza di forma



$t = \frac{P_t}{P}$  RAPPORTO DI RASTREMAZIONE

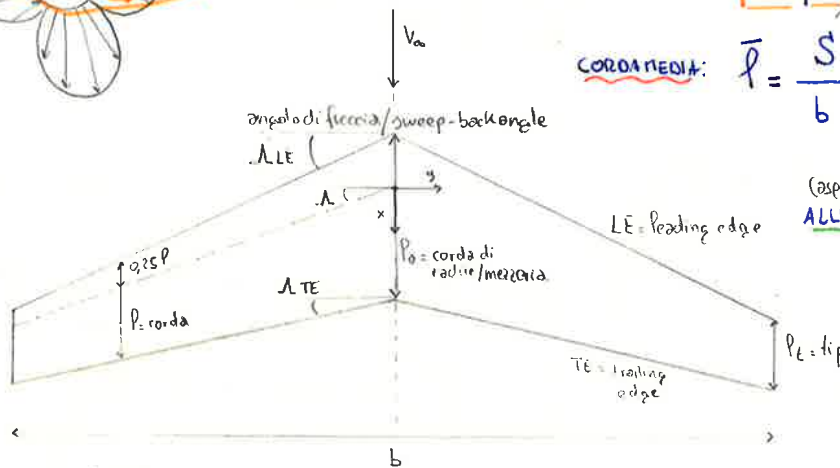
CORDA MEDIA:

$$\bar{P} = \frac{S}{b} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} P(y) dy}{\int_{-b/2}^{b/2} dy} \Rightarrow \frac{\int_{-b/2}^{b/2} P(y) dy}{\int_{-b/2}^{b/2} P dy}$$

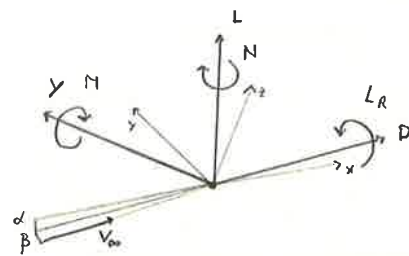
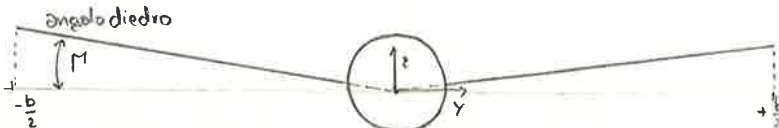
(aspect ratio)

ALLUNGAMENTO:

$$\lambda = \frac{b}{P} = \frac{b^2}{S}$$



SVERGOLAMENTO: Se lungo l'apertura alare le corde delle altre sezioni risultano ruotate rispetto a  $P_0$



M = pitching moment / beccheggio  
 LR = rolling moment  
 N = yawing moment / imbardata

$\alpha$ : incidenza geometrica  $\gamma$ : deviazione  
 $\beta$ : angolo di imbardata

Per un gas ideale:  $\gamma = \frac{c_p T}{\epsilon}$ ,  $Fr \gg 1 \Rightarrow \frac{F}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = f(Re, \alpha, M)$   $T_w \approx T$   $Pr = 0,22$   $\gamma = 1,4$

COEFF. DI PORTANZA

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S}$$

COEFF. DI RESISTENZA

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S}$$

COEFF. DI MOMENTO FOCAL

$$C_m = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S l}$$

• COEFF. DI PRESSIONE:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}$$

$$C_p = \int_0^1 (c_p - c_p^+) d\left(\frac{x}{l}\right) = \int_0^1 \Delta c_p d\left(\frac{x}{l}\right)$$

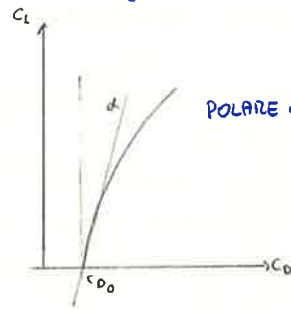
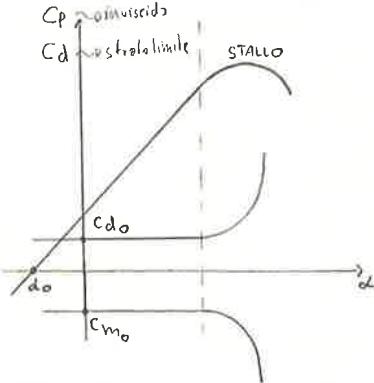
$$C_{m_A} = - \int_0^1 \Delta c_p \frac{x}{l} d\left(\frac{x}{l}\right) \quad C_{m_P} = C_{m_A} + C_p \frac{x_P}{l}$$

Per Profilo Alac. 2D

$$C_p = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 l}$$

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 l}$$

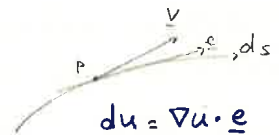
$$C_m = \frac{M_0}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 l^2}$$



POLARE dell'ALA: riossume capacità portante

DERIVATA DIREZIONALE

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot \underline{e}$$



• EQUAZIONI FONDAMENTALI vettore velocità:  $\underline{V}(x) = u_i + v_j + w_k$

$$d\underline{V}(r) = du_i + dv_j + dw_k = (\underline{e} ds \cdot \nabla u)_i + (\underline{e} ds \cdot \nabla v)_j + (\underline{e} ds \cdot \nabla w)_k$$

$$\frac{d\underline{V}}{ds} = (\nabla u \cdot \underline{e})_i + (\nabla v \cdot \underline{e})_j + (\nabla w \cdot \underline{e})_k \quad \text{- Per conoscere var. di V nell'intorno di P } \Rightarrow 3 \text{ VETTORI}$$

TENSORE: vettore/matrice che mantiene modulo/norma al variare delle coordinate

$$\underline{\nabla V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

Proprietà: (matrici)

$$A = \frac{1}{2} (A + A^T) + \frac{1}{2} (A - A^T)$$

-simmetria:  $a_{ij} = a_{ji}$

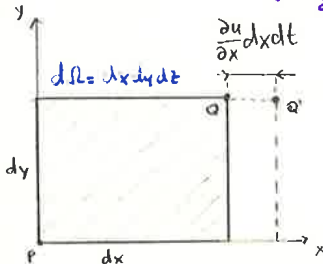
-antisimmetria:  $a_{ij} = -a_{ji}$

$$\underline{\nabla V} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla V} + \underline{\nabla V}^T) + \frac{1}{2} (\underline{\nabla V} - \underline{\nabla V}^T) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2u_x & u_y + v_x & u_z + w_x \\ v_x + u_y & 2v_y & v_z + w_y \\ w_x + u_z & w_y + v_z & 2w_z \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & u_y - v_x & u_z - w_x \\ v_x - u_y & 0 & v_z - w_y \\ w_x - u_z & w_y - v_z & 0 \end{pmatrix}$$

D (velocità di deformazione)

B (velocità di rotazione)

-distorsione elemento fluido per  $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$



• azione simultanea 3 termini diagonali di D causa variazione di volume

$$\Delta \Omega = \frac{1}{dt} \left[ \left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \right) \left( dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy dt \right) \left( dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz dt \right) - d\Omega \right] =$$

$$= \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\Omega + o(dt d\Omega)$$

N.B. Se voglio volume cost.

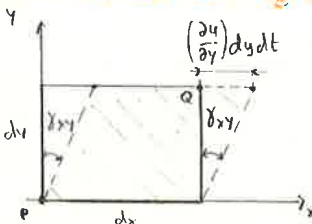
$$\text{se } \frac{\partial u}{\partial x} > 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} < 0$$

somma = 0

-elementi fuori diagonale

mi danno deformazione di taglio (no  $\Delta \Omega$ )

$$\underline{\nabla \cdot V} = \text{Tr}(D)$$



$$\gamma_{xy} = \frac{1}{dy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy dt$$



$$\mu(x,y) \underline{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial y} i - \frac{\partial \psi}{\partial x} j \Rightarrow \begin{cases} \mu u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \mu v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \text{ in coordinate cilindriche:}$$

$$\begin{cases} \mu u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ \mu u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

$$m_1 = \frac{A}{B} \quad m_2 = \frac{g}{c}$$

- punti di arresto:  $u=0, v=0$

- nell'intorno linee di corrente approssimate da:

$$C \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2B \left(\frac{y}{x}\right) + A = 0 \rightarrow \text{se soluzioni reali: 2 rette intersecandosi nell'origine se in origine corrente è irrotazionale} \rightarrow \perp$$

$\rightarrow$  No soluzioni reali: nessuna linea di corrente  $\times$  al pt. di arresto (fluido ruota attorno a centro come corpo solido)

**DESCRIZIONE LAGRANGIANA:**

come variano proprietà x una specifica particella nel tempo

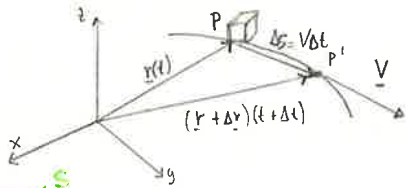
**DESCRIZIONE EULERIANA:**

posizione monitorata definita.

$$\Delta Q = Q(x + \underline{V} \Delta t, t + \Delta t) - Q(x, t) \text{ generica quantità}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{DQ}{Dt} = \frac{Q(x + \underline{V} \Delta t, t + \Delta t) - Q(x, t)}{\Delta t}$$

**derivata materiale / Lagrangiana:** variazione temporale locale + var. dovuta a spostamento all'istante t



$$Q(x + \underline{V} \Delta t, t + \Delta t) = Q(x, t) + \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_{x,t} \Delta t + \left(\frac{\partial Q}{\partial t^2}\right)_{x,t} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots + \left(\frac{\partial Q}{\partial s}\right)_{x,t} \underline{V} \Delta t + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial s^2}\right)_{x,t} \frac{\Delta s^2}{2} + \dots$$

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} \underline{V}$$

$\rightarrow$  var. convettiva: var. materia x effetto della corrente

variazione temporale euleriana a pt. fisso

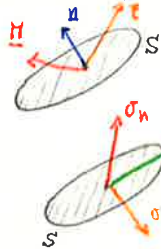
$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \underline{e}_s \cdot \nabla Q$$

$$\underline{V} = \underline{V} \underline{e}_s \quad \underline{V} \underline{e}_s \cdot \nabla Q = (\underline{V} \cdot \nabla) Q \Rightarrow \frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial (\cdot)}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \nabla) (\cdot)$$

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial (\cdot)}{\partial t} + (\underline{V} \cdot \nabla) (\cdot)$$

N.B. togliendo  $\underline{V}$  visione euleriana e lagrangiana coincidono

**SFORZI NEL FLUIDO:** rimpiazzando il fluido esterno ad una superficie chiusa  $\sigma$  con un sistema di forze superficiali, il comportamento dinamico del fluido nel volume  $\Omega$ , delimitato da  $\sigma$ , rimarrà lo stesso.



$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{F}{S} = \underline{\sigma} \quad \underline{\sigma} \text{ va a } 0 \text{ più in fretta di } \underline{F}$$

Lo stato di tensione è univocamente definito specificando in ogni punto tre sforzi  $\underline{\sigma}$  lungo direzioni indipendenti.

N.B. in fluido in quiete

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \text{ TENSORE degli SFORZI: simmetrica per via dell'eq. dei momenti}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}_E \text{ e } \underline{\underline{\sigma}}_S = 0$$

$$\underline{\underline{\Pi}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \text{ pressione idrostatica}$$

- fluido in movimento:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = -\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}$$

$$\underline{\underline{\Pi}} = -p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \underline{\underline{\tau}}$$

(SOTTEPA)

ANISOTROPA: sforzi viscosi

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

$$\tau_{ii} = \sigma_{ii} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}$$

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = 0 \quad \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) = 0 \quad \text{termini non diagonali} \equiv \sigma_E, \sigma_S$$

$\underline{\underline{\tau}}$  dipende soltanto dalla distribuzione istantanea della velocità del fluido nell'intorno dell'elemento.  $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{D}})$

$\underline{\underline{\tau}}$  funzione lineare del gradiente di velocità

in coordinate cartesiane

$$\underline{\underline{\tau}} = 2\mu \underline{\underline{D}} + \lambda \left( \sum_{i=1}^3 D_{ii} \right) \underline{\underline{I}} = 2\mu \underline{\underline{D}} + \lambda (\nabla \cdot \underline{\underline{V}}) \underline{\underline{I}}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

$\downarrow$  FLUIDI NEWTONIANI

EQ.ne dell'ENERGIA INTERNA: sottraendo al bilancio di  $E = \epsilon + \frac{v^2}{2}$  il bilancio di en. meccanica.

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \epsilon = -p \nabla \cdot \underline{v} + (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla) \cdot \underline{v} - \nabla q + Q_v$$

CFR.  $\epsilon / \epsilon / \frac{v^2}{2}$ : particelle sottoposte a  $\Delta p$

$$-\nabla \cdot (p \underline{v}) = -\nabla p \cdot \underline{v} - p \nabla \cdot \underline{v}$$

lavoro forze pressione quando variazioni volume

sempre dal cfr. dei 3 bilanci:

$$\nabla \cdot (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{v}) = \underline{v} \cdot (\nabla \cdot \underline{\underline{\epsilon}}) + (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla) \cdot \underline{v}$$

contributo meccanico

calore generato o sottratto

(trascurabile a bassi  $V$ )

- Incognite:  $\underline{v}, p, \rho, \epsilon, \underline{\underline{\epsilon}}, q \Rightarrow$  introduco relazioni esplicite:

unità di massa

$$\Phi = \frac{1}{\rho} (\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \nabla) \cdot \underline{v}$$

funzione di DISSIPAZIONE

EQ.NI DI NAVIER-STOKES:  $\underline{\underline{\epsilon}} = 2\mu \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}} \quad \underline{q} = -k \nabla T$

$\frac{1}{2}(\underline{v} \underline{v} + \underline{v} \underline{v}^T)$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \underline{v}) = 0$$

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \left[ \mu (\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}} \right] + \rho \underline{f}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \epsilon \right) = -\nabla \cdot (p \underline{v}) + \nabla \cdot \left\{ \left[ \mu (\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T) - \frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}} \right] \cdot \underline{v} \right\} + \rho \underline{f} \cdot \underline{v} + \nabla \cdot (k \nabla T) + Q_v$$

-> x qualsiasi tipo di moto fluido, per qualsiasi sistema di coordinate

NON LINEARITÀ: a parità di condizioni iniziali soluzione non può essere necessariamente unica.

• Soluz. stazionaria antisimmetrica è quella che esiste in natura.

• Re basso: forze d'inerzia trascurabili:  $\Rightarrow$  REGIME DI STOKES incognite:  $\rho, \underline{v}, E, p, \epsilon, T$

• Gas ideale:  $p = \rho R T, \epsilon = c_v T$

bilancio  $\epsilon$  + continuità +  $T ds = c_v dT + p d(\frac{1}{\rho}) = d\epsilon + p d(\frac{1}{\rho}) \Rightarrow$

EQ. DI TRASPORTO DELL'ENTROPIA

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \Phi - \nabla \cdot \underline{q} + Q_v \quad \frac{Ds}{Dt} \geq 0$$

$\geq 0$

Adiabatico

no sistema isolato

N.B. se sistema non isolato entropia può crescere o diminuire.

Derivate 1°: TRASPORTO derivate 2°: DIFFUSIONE

Per Re alti: termini in  $p$  dominanti rispetto a quelli viscosi  $\Rightarrow$  FLUIDO INVISCIDO  $\mu = 0, k = 0, \text{ no } \epsilon$

EQ. DI EULERO (no: viscosità, conducibilità termica, forze di campo, sorgenti calore)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \underline{v}) = 0$$

- dovrò imporre a parete  $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$  cond. di tangenza

~ sistema + semplice, ma condizioni + varie

$$\rho \left( \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} \right) = -\nabla p + \rho \underline{f}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \epsilon \right) = -\nabla \cdot (p \underline{v}) + \rho \underline{f} \cdot \underline{v} + Q_v$$

Per Re bassi anche gas  $\rho = \text{cost.}$  INCOMPRESSIBILI  $\Rightarrow$  6 incognite: 3  $\underline{v}$  e  $p$

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

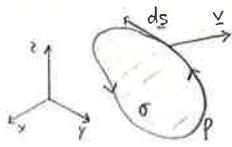
N.B. campo termico dipende dal campo di velocità, ma non al contrario [T: scalare positivo]

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

• a parete:  $\underline{v} \cdot \underline{n} = 0$  CONDIZIONE LUNGO PARETE SOLIDA

• all'inf:  $v_\infty, p_\infty$  indisturbati: CONDIZIONE IN CAMPO LONTANO

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \nabla \left( \frac{v^2}{2} \right) - \underline{v} \times \underline{\omega} = -\nabla \left( \frac{p}{\rho} \right) \quad \times \text{ soluzione semplice}$$



$\omega \neq 0$  c'è qlcs che gira:  $\Gamma = \oint_P \underline{v} \cdot d\underline{s}$  CIRCULAZIONE  
 TEOR. STOKES

$\sigma$ : tutte le possibili superfici che hanno come base  $\Gamma$

$$\Gamma = \oint_P \underline{v} \cdot d\underline{s} \stackrel{\downarrow}{=} \int_{\sigma} (\nabla \times \underline{v}) \cdot \underline{n} d\sigma = \int_{\sigma} \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma \rightarrow \omega \text{ vorticità} = 0 \Rightarrow \Gamma = 0$$

N.B. vorticità non misurabile:

- studio il campo di velocità  $\rightarrow$  calcolo  $\Gamma$ , se  $\omega = 0 \Rightarrow$  vorticità = 0

- flusso di vorticità attraverso una superficie: TEOR. HELMHOLTZ (fluidi ideali, incomprimibili)

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{v} = \nabla \times (\nabla \phi + \underline{v} \times \underline{v}) = \nabla \times \underline{v} - \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} + \underline{\omega} (\nabla \cdot \underline{v})$$

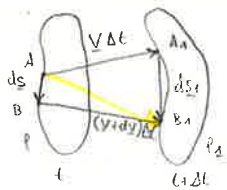
$$\frac{D}{Dt} (\underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma) = \left[ \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{v} (\nabla \cdot \underline{\omega}) - \nabla \times (\underline{v} \times \underline{\omega}) \right] \cdot \underline{n} d\sigma = \left[ \frac{D\underline{\omega}}{Dt} - \underline{v} \cdot \nabla \underline{\omega} - \nabla \times (\underline{v} \times \underline{\omega}) \right] \cdot \underline{n} d\sigma$$

$$= \left[ \frac{D\underline{\omega}}{Dt} - \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} \right] \cdot \underline{n} d\sigma = 0$$

$D = 0 \rightarrow$  TEOR. HELMHOLTZ:  $\frac{D(\underline{\omega})}{Dt} - \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}$

o flusso di vorticità attraverso ogni superficie elementare che si muove con il fluido è costante nel tempo

x superficie non elementare:



$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_P \underline{v} \cdot d\underline{s}$$

$$AA_1 + ds_1 = ds + BB_1 \rightarrow ds_1 - ds = BB_1 - AA_1 = (\underline{v} + d\underline{v}) \Delta t - \underline{v} \Delta t = d\underline{v} \Delta t$$

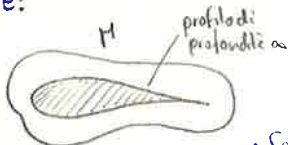
$$\frac{D}{Dt} ds = d\underline{v} \rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_P \frac{D\underline{v}}{Dt} \cdot d\underline{s} \stackrel{q.d.m.}{=} - \oint_P \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\underline{s} = 0 \text{ per } p = \text{cost.}$$

TEOR. KELVIN

e per  $p = p(\rho)$  FR. BAROTROPICI

$\Rightarrow$  ogni corrente di un fluido barotropico originata da uno stato di quiete o moto uniforme è irrotazionale.

CONCLUSIONE:



N.B. topologicamente non corretto  $\rightarrow$  devo aprire circuito per inglobare profilo

• corpo investito da corrente uniforme (irrot.), nonostante ostacolo corrente rimarrà irrot. perché flusso attraverso qualsiasi circuito = 0

• Se  $\Gamma = 0$  no forze scambiate tra corpo e fluido  $\rightarrow$  non vero!

Per un fluido ideale ( $p = \text{cost}$ , inviscido, irrot., stazionario) calcolo di una corrente si riduce alla determinazione di 2 sole variabili scalari,  $\phi, p$ .  $\phi$  dall'eq. LAPLACE,  $p$  da Bernoulli, ma dato che  $\underline{v} = \nabla \phi$

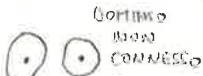
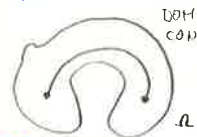
$$\Rightarrow p + \frac{1}{2} \rho (|\nabla \phi|)^2 = p_0 \Rightarrow \text{basta che risolvo Laplace: - Sovr. Effetti}$$

N.B. Soluzione EQ. LAPLACE dipende solo da C. Contorno istantanea: - Metodo Singolarità: ottengo soluzioni complesse

$r \rightarrow \infty$  corrente uniforme indisturbata

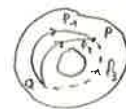
$\rightarrow$  avere di uno costante: pongo  $\phi = 0$  in un pt. e d è fotta.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ o } \text{poise}$$



① - dominio semplicemente connesso: dominio connesso in cui tutte le possibili traiettorie che congiungono 2 pt. sono RIDUCIBILI = possono essere fatte coincidere mediante una variazione continua senza mai uscire dal dominio connesso.

② - dominio doppiamente connesso: se in una regione doppiamente connessa vi sono 2 traiettorie non riconciliabili ed un circuito irriducibile.



$$d\underline{s} = dx \underline{i} + dy \underline{j}$$

$$\Gamma = \oint_P \underline{v} \cdot d\underline{s} = \int_{\sigma} \underline{\omega} \cdot \underline{n} d\sigma = 0 \rightarrow \int_{Q, P_1} \underline{v} \cdot d\underline{s} - \int_{Q, P_2} \underline{v} \cdot d\underline{s} = 0 \quad \underline{v} \cdot d\underline{s} = \nabla \phi \cdot d\underline{s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = d\phi$$

N.B. MAX della velocità su contorno  $\sigma$  del dominio  
 MIN della pressione " " "

$$\int_{Q, P_1} d\phi = \int_{Q, P_2} d\phi \Rightarrow [\phi(P) - \phi(Q)]_{P_1} = [\phi(P) - \phi(Q)]_{P_2}$$

- Corrente irrotazionale in  $\mathcal{D}$  è caratterizzata da  $\Gamma = 0$

se in  $Q \phi = 0$

$$\phi(P)_{P_1} = \phi(P)_{P_2}$$

$\phi$  è SINGLE VALUED



$$\nabla^2 \phi = 0 \rightarrow \begin{cases} \phi \rightarrow \phi_\infty & r \rightarrow \infty \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{parete} \end{cases}$$

$$\nabla^2 \psi = 0 \rightarrow \begin{cases} \psi \rightarrow \psi_\infty & r \rightarrow \infty \\ \psi = \text{cost.} & \text{no valore?} \end{cases}$$



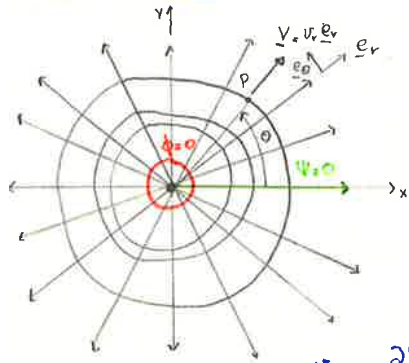
**CAMPI ELEMENTARI**

Corrente uniforme:  $V_\infty = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y = ux + vy \text{ con } \phi(0,0) = 0$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} x + \frac{\partial \psi}{\partial y} y = -vx + uy \quad \psi(0,0) = 0 \quad \alpha = \arctan \frac{v}{u}$$

Sorgente/Pozzo Aniforme: Per la condizione di incomprimibilità in coordinate polari:



$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \rightarrow v_r = \frac{k}{r} \text{ per } r \rightarrow \infty \quad v_r \rightarrow \infty$$

Portata attraverso cerchio centrato in origine:

$$Q = \oint_{C_r} \underline{v} \cdot \underline{e}_r ds = \oint_{C_r} v_r r d\theta = k \int_{C_r} d\theta = 2\pi k \Rightarrow k = \frac{Q}{2\pi}$$

se  $Q < 0$  non un Pozzo

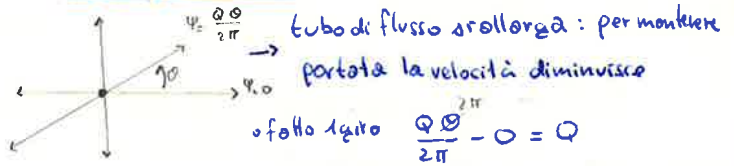
↳ intensità dello sorgente con velocità:  $\underline{v} = \frac{Q}{2\pi r} \underline{e}_r$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi r} \Rightarrow \psi = \frac{Q}{2\pi r} \text{ con } \psi(r,0) = 0 \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \propto \theta < 2\pi$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0 \text{ con } \phi(r_0,0) = 0 \Rightarrow \phi = \frac{Q}{2\pi} \log\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

tipicamente  $r_0 = 1$   
se  $r_0 = 0 \log(\infty)$

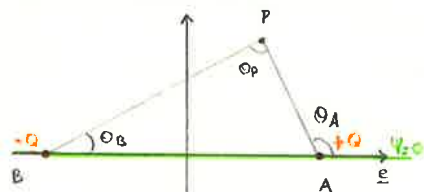
J.B. portato attraverso questo tubo di flusso:  $\psi_2 - \psi_1$



in coordinate cartesiane:

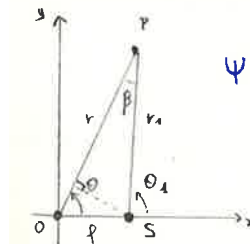
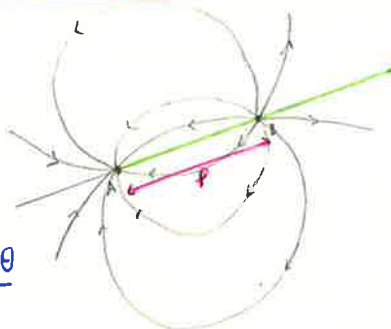
$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \phi = \frac{Q}{4\pi} \log\left(\frac{x^2 + y^2}{x_0^2 + y_0^2}\right)$$

Sorgente e pozzo di uguale intensità: (e: dal pozzo a sorgente)  $\psi_A(P) = \frac{Q}{2\pi} \theta_A \quad \psi_A = 0 \quad \psi_B(P) = -\frac{Q}{2\pi} \theta_B \quad \psi_B = 0$



$$\psi = \psi_A(P) + \psi_B(P) = \frac{Q}{2\pi} \theta_P \text{ linee a } \psi = \text{cost.} \rightarrow \theta_P = \text{cost.} \rightarrow \text{circonferenza per A, P, B}$$

Doppietta:  $l \rightarrow 0, Q \rightarrow \infty / \mu = lQ$  rimane finito  
ricorriamo emetto, tu assorbi avviene tutto nella singolarità



$$\psi(P) = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \frac{Q}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} \frac{Q \cdot l}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}$$

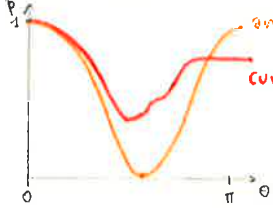
$$\beta = \theta_1 - \theta_2 \approx \frac{l \sin \theta}{r - l \cos \theta}$$

in coord. cartesiane:

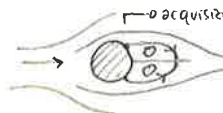
$$\psi(r, \theta) = \frac{M}{2\pi r} \sin \theta \quad \psi(x, y) = \frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Per linee a  $\psi = \text{cost.} = C \quad x^2 + y^2 - \frac{M}{2\pi C} y = 0 \sim \text{circonferenza con centro } (0, \frac{M}{4\pi C})$ . Per  $C \rightarrow 0$  degenera in retta coincidente all'asse x

- Perché  $\underline{D} = 0$  ?



$C_p = 1$  nel pl. di attacco  $C_p = 1 - (\frac{v}{v_0})^2$



- In un corpo affusolato:



resistenza di forma trascurabile < r. d'attrito perché pt. di separazione in regione terminale del corpo.

- Perché  $\underline{L} = 0$ ?

IPOTESI UTILIZZATE: P. 105

- 1) fluido ideale, inviscido, incomprimibile → NON GIUSTIFICA
- 2) corpo immerso totalmente in fluido illimitato → NON GIUSTIFICA
- 3) corpo in moto stazionario → NON GIUSTIFICA
- 4) moto irrotazionale → NON GIUSTIFICA
- 5) circolazione lungo percorso chiuso = 0,  $\oint$  single valued ⇒ L'assenza di forze sul corpo è imputabile all'assunzione di circolazione  $\Gamma$  nulla  $\forall$  circuito chiuso.

$L \propto M$

• TEORIA PORTANTE DELLE ALI AD ALLUNGAMENTO INFINITO

↳ in corrente uniforme stazionaria → presenza di circolazione essenziale per ottenere portanza.

VORTICE IRROTAZIONALE: Particelle non ruotano, ma hanno traiettoria circolare (es campo gravitazionale: buco nero)



$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \Gamma = 0$  non consente singolarità

$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = k \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi k$   $k = \frac{\Gamma}{2\pi}$

$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$

$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \rightarrow \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$

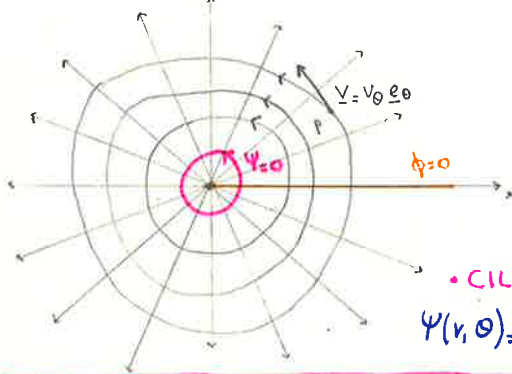
$0 \leq \theta < 2\pi$  → funzione potenziale è a valori multipli:  $\phi(2\pi) - \phi(0) = \Gamma$

$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0$

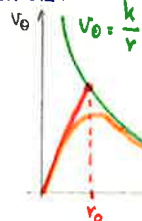
$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \rightarrow \Psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \log_2\left(\frac{r}{r_0}\right)$

- in coordinate cartesiane:

$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$   
 $\Psi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \log_2\left(\frac{x^2 + y^2}{x_0^2 + y_0^2}\right)$



in NATURA:



• VORTICE DI RANKINE: (vortice irrot. reale)

$W = \text{cost.}$  con fluido illimitato esterno  
 $v_\theta = \omega r$  irrotazionale

Un vortice circolare induce velocità nulla al suo interno. (nel centro)

• CILINDRO CIRCOLARE CON ROTAZIONE:

$\Psi(r, \theta) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta - V_\infty y - \frac{\Gamma}{2\pi} \log_2\left(\frac{r}{r_0}\right)$

pongo  $r_0 = a = \sqrt{\frac{\Gamma}{2\pi V_\infty}}$  in modo

che sul cerchio di raggio  $a$  la funzione di corrente dovuta al vortice ha valore 0.

$\Psi(r, \theta) = V_\infty r \left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log_2\left(\frac{r}{a}\right)$

$v_r(r, \theta) = V_\infty \left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right) \cos \theta$

$v_\theta(r, \theta) = V_\infty \left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$

per  $r = a$

$v_r(a, \theta) = 0$

$v_\theta(a, \theta) = 2V_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}$

Scrivo meglio  $F_{Px}, F_{Py}$ :  $dF_{Px} = dF_p \cos \theta = -p R \cos \theta d\theta$   
 $dF_{Py} = dF_p \sin \theta = -p R \sin \theta d\theta$

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \rho (V_{\infty} + V_M \sin \theta) V_{\infty} \cos \theta R d\theta &= F_x - \int_0^{2\pi} p R \cos \theta d\theta \\ - \int_0^{2\pi} \rho V_{\infty} V_M \cos^2 \theta d\theta &= F_y - \int_0^{2\pi} p R \sin \theta d\theta \end{aligned} \right.$$

ma poiché:  $V^2 = |V_{\infty} + V_M|^2 = V_{\infty}^2 + V_M^2 + 2V_{\infty}V_M \sin \theta$

e  $V_M \ll V_{\infty}$  per Bernoulli:  $p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho (V_{\infty}^2 - V^2) \approx p_{\infty} - \rho V_{\infty} V_M \sin \theta$  PRESSIONE SUL CERCHIO

$F_x = \int_0^{2\pi} (p_{\infty} - \rho V_{\infty} V_M \sin \theta) R \cos \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \rho (V_{\infty} + V_M \sin \theta) V_{\infty} R \cos \theta d\theta = R(p_{\infty} - \rho V_{\infty}^2) \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0$  PARADOSSO di d'Alembert

$F_y = \int_0^{2\pi} (p_{\infty} - \rho V_{\infty} V_M \sin \theta) R \sin \theta d\theta - \int_0^{2\pi} \rho V_{\infty} V_M R \cos^2 \theta d\theta = -2\pi \rho V_{\infty} V_M R = -L$   $L = -F_y$

$L = 2\pi \rho V_{\infty} V_M R$  ma  $V_M = \frac{\Gamma}{2\pi R} \Rightarrow L = \rho V_{\infty} \Gamma$  TEO. di KUTZ-SONKOVSKI

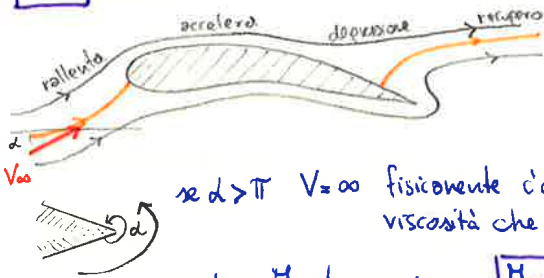
$L = \rho V_{\infty} \times \Gamma k$  pulsante

Se il corpo ha bordo di fuga accuminato, corrente e portanza sono determinate univocamente per un corpo e una corrente uniforme definita.

"Su ogni corpo cilindrico, attorno al quale si ha una circolazione  $\Gamma$ , immerso in una corrente uniforme  $V_{\infty}$  all'infinito, esiste una portanza  $L$  per unità di profondità"

$M = 0$  NON PORTANTE

$M_2 > M_1$



se  $\alpha > \pi$   $V_{\infty}$  fisicamente c'è viscosità che entra l'oo

scelgo  $M$  intermedio:  $M_1 > 0$



$\Rightarrow$  dal modello matematico esce questo, che fisicamente non sta in piedi!

**CONDIZIONE DI KUTZ:**

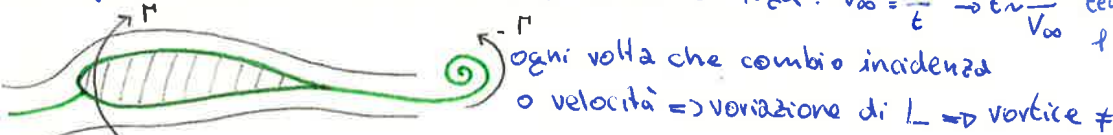
"La circolazione attorno al profilo alare dev'essere tale da rendere la corrente nell'intorno del bordo di fuga regolare"  $\rightarrow$  NO  $\infty$

C.K. rappresenta la condizione aggiuntiva di natura fisica, necessaria per completare la teoria portante dell'ala o del allungamento infinito.

**ESPERIMENTI IN GALERIA:**  $V_{\infty}$  in cui inserisco corpo a to (FLUIDO REALE)  $RA_{115}$

a to campo di moto è quello di  $M = 0$ : soluzione potenziale NON PORTANTE

Per il punto inizia a muoversi verso il bordo di fuga.  $V_{\infty} = \frac{f}{t} \rightarrow t = \frac{f}{V_{\infty}}$  tempo x particella x percorso  $f$  è frazione di micraxon.

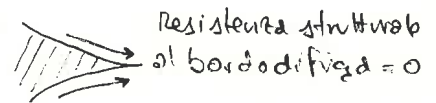


$\rightarrow$  N.B. Non vale su cilindro in cui per simmetria  $\Gamma$  può avere qualunque valore

- La c.k. mi dice che devo entrare che corrente vada meglio in basso  $\rightarrow$  dovuto a gradienti di pressione:

$\rightarrow$  impongo  $p^+ = p^- \rightarrow x B. \Rightarrow V_+ = V_- \approx x$  profilo a cuspidi

$\rightarrow V = 0$  PT. d'Arresto  $p^+ = p^- = p_{tot}$



- starting vortex: a valle del pt. d'arresto - vortice aderente: reazione allo spostamento del pt. d'arresto verso il B.-D.F.

**C.K.** permette di tenere conto del ruolo degli effetti viscosi per la generazione di portanza

**N.B.** nello studio di un profilo portante con il modello inviscido.



**FUNZIONI ANALITICHE:**

DEF:  $f(z)$  è analitica in un certo dominio  $A$  del piano in cui è definita se  $\exists$  la derivata ed è  $\neq 0$  in  $A$ .  
 - valgono le regole di derivazione classica.

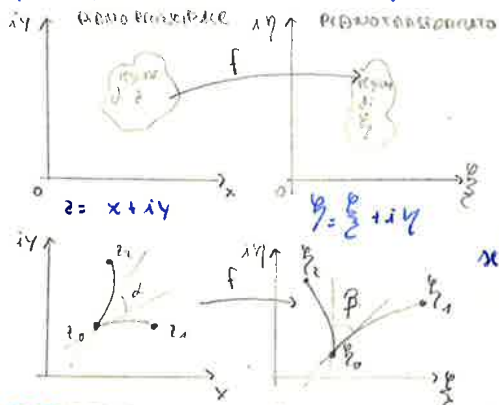
Un punto di  $A$  per cui  $f(z)$  non è analitica è un **PUNTO SINGOLARE**

es.  $f(z) = \bar{z} = x - iy$  1)  $z = -1$  NO! è non analitica ovunque.

$f(z) = w = f_n(z)$   $f' = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$  definito ovunque tranne che in  $z=0$

**TRASFORMAZIONI CONFORMI**

$w = f(z)$  trasforma i punti del piano  $z$  in punti del piano  $w$



Una trasformazione è **CONFORME** quando  $f(z) = w$  è **ANALITICA**

Nei **PT. CRITICI**  $f(z)$  non è **ANALITICA**

Proprietà: "Una trasformazione conforme  $f$  in un certo punto  $z_0$  preserva l'angolo tra le tangenti passanti per  $z$ "

$\alpha$  **CONFORME**  $\Rightarrow \alpha = \beta$

**CARATTERISTICHE AERODINAMICHE DEI PROFILI ALARI:**

2 metodi di calcolo delle cor. zero. di ali ad allungamento infinito in corrente incompressibile, stazionario con  $\alpha$  piccolo.  
 $\alpha$  Re  $\uparrow$  ed  $\uparrow$   $\rightarrow$  non posso scorporare in inviscido + strato limite.

- 1) formalismo funzioni a variabile complessa  $\rightarrow$  profili alari da trasformazioni conformi di cilindri circolari
- 2) incompressibile e spessore max  $\ll$  corda  $\rightarrow$  TEORIA piccole PERTURBAZIONI o TEORIA PROFILI SOTTILI

$$\frac{df}{dz} = \frac{d}{dx + i dy} [f_R(x,y) + i f_I(x,y)] = \frac{df_R + i df_I}{dx + i dy} = \frac{(\frac{\partial f_R}{\partial x} + \frac{\partial f_R}{\partial y} dy) + i (\frac{\partial f_I}{\partial x} dx + \frac{\partial f_I}{\partial y} dy)}{dx + i dy}$$

regole differenziali  
 lungo  $x$  = 
$$\frac{(\frac{\partial f_R}{\partial x} + i \frac{\partial f_I}{\partial x}) dx + i (\frac{\partial f_R}{\partial y} - \frac{\partial f_I}{\partial y}) dy}{dx + i dy}$$

$\frac{1}{i} = -i$

COND. DI CAUCHY-RIEMANN:

$\frac{\partial f_R}{\partial x} = \frac{\partial f_I}{\partial y}$   $\frac{\partial f_R}{\partial y} = -\frac{\partial f_I}{\partial x}$

$\frac{\partial^2 f_R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_R}{\partial y^2} = 0$   $\nabla^2 f_R = 0$   $\frac{\partial^2 f_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_I}{\partial y^2} = 0$   $\nabla^2 f_I = 0$   $\Rightarrow$  parte reale ed immaginaria  $\times$  soddisfare C.-R. devono essere 2 armoniche coniugate

$\rightarrow \phi, \psi$  sono 2 f. arm. con.  $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ INCOMPRESSIBILITÀ} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \text{ IRROTAZIONALITÀ} \end{cases} \rightarrow \text{anche: } \begin{cases} \nabla^2 u = 0 \\ \nabla^2 v = 0 \end{cases}$

**POTENZIALE COMPLESSO DELLE VELOCITÀ:**

$W(z) = \phi(x,y) + i \psi(x,y)$

$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial W}{i \partial y} = -i (\frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y}) = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = u - i v$

VELOCITÀ COMPLESSA: è funzione analitica

$|\frac{dW}{dz}| = \sqrt{u^2 + v^2} = V$  N.B. Possaggio da componenti cartesiane o polari delle velocità. moltiplicando per  $e^{i\theta}$

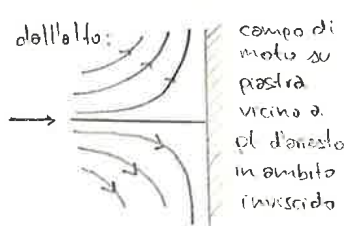
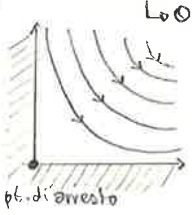


$m=1$ ,  $k = V_0 e^{-id}$ : corrente uniforme con incidenza  $d \rightarrow \Theta = \pi$

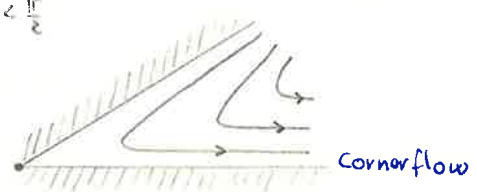
$m=-1$ ,  $k = \frac{M}{2\pi} e^{id}$ : DOPPIETTA

$m > 1$  es.  $m=2$   $\phi + i\psi = k(x+iy)^2 = k(x^2-y^2) + 2ixy$   $\rightarrow \psi = 2kxy = \text{cost.}$

IPERBOLI  
EQUILATRE  
 $\uparrow$   
 $xy = \text{cost.}$

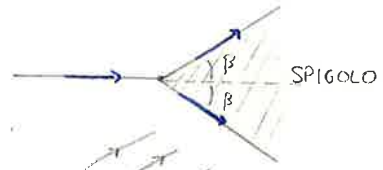
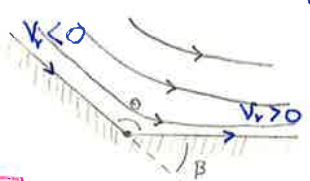


$m > 2$   $\Theta < \frac{\pi}{2}$

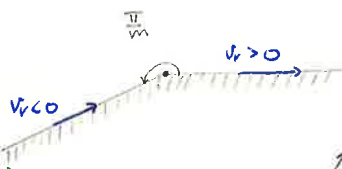


$1 < m < 2$   $\Theta = \frac{\pi}{m}$

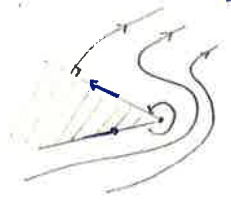
$\Theta + \beta = \pi \quad \beta = \frac{m-1}{m} \pi$



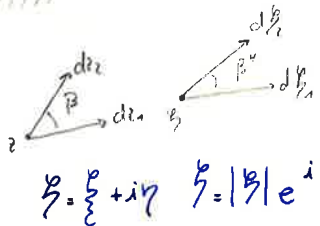
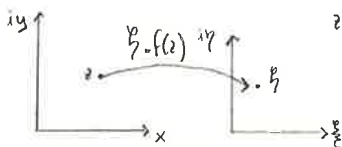
$m < 1$   $\Theta > \pi$



$r \rightarrow 0 \begin{cases} v_r \rightarrow \infty \\ v_\theta \rightarrow 0 \end{cases}$  è pt. singolare



trasformazioni:



$d\xi = \frac{df}{dz} dz = f'(z) dz \begin{cases} |d\xi| = |f'(z)| |dz| \\ \arg(d\xi) = \arg(f') + \arg(dz) \end{cases}$

- i rapporti di allungamento restano gli stessi:

$\frac{|d\xi_2|}{|d\xi_1|} = \frac{|dz_2|}{|dz_1|}$

- subiscono stesso fattore di scala

trasformazione isotropa.

$\arg(d\xi) = \arg(f'(z)) + \arg(dz)$  se  $\beta = \arg(d\xi_2) - \arg(d\xi_1) = \arg(dz_2) - \arg(dz_1) = \beta$

trasformazione conforme

(rappresentato geometricamente da funz. ANALITICA) si conservano gli angoli

$w^*(z) = w(\xi(z))$  è anch'essa ANALITICA

N.B. Calcolo corrente attorno ad una regione di forma consiste nel calcolo di  $b_2, b_3, \dots$  delle espansioni

in serie:  $w(z) = -V_0 z - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \frac{b_n}{z^{n-1}} + \text{cost}$   $\rightarrow$  POTENZIALE COMPLESSO

$\frac{dw}{dz} = -V_0 - i \frac{\Gamma}{2\pi z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \rightarrow$  VELOCITÀ COMPLESSA

risultato diffratto  
 $\rightarrow$  uso transf. conformi

- Nota campo di moto attorno ad una certa forma soluzione dell'eq. di Laplace e soddisfacente le cond.

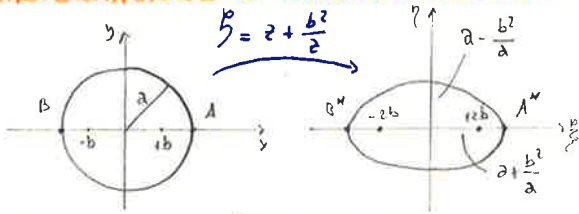
di contorno  $\rightarrow$  Note funzioni: Potenziale e funzione di corrente e funzione analitica che rappresenta il potenziale complesso.  $(w(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y))$   $\rightarrow$  con transf. conforme trasformo regione D del piano

in regione D\*. Ad esso è associabile funzione analitica, nei pt. regolari prescelto angolo, in valore everso, Nei punti critici:  $\rightarrow$  zeri di ordine m-1 l'angolo è semplificato m volte. Otengo:

$\phi^*(\xi) = \phi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$   
 $\psi^*(\xi) = \psi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]$

$w^*(\xi) = \phi^*(\xi, \eta) + i\psi^*(\xi, \eta) \rightarrow$  2 armoniche + 1 analitica sul piano  $\xi$

**TRASFORMAZIONE DI KUTZ-JOUKOWSKI:**



$\left| \frac{dz}{dzeta} \right| \rightarrow 1$  per  $z \rightarrow \infty$

**PUNTI CRITICI:**  
 $\frac{dz}{dzeta} = 1 - \frac{b^2}{z^2}$  per  $z = \pm b$

di ordine  $m=2$

- Profili generati da K.S. hanno bordo di fuga a cuspidi

$zeta = z + \frac{b^2}{z} = a e^{i\theta} + \frac{b^2}{a} e^{-i\theta} = \left(a + \frac{b^2}{a}\right) \cos\theta + i \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \sin\theta$   
 per  $z = re^{i\theta}$

$\begin{cases} x = \left(a + \frac{b^2}{a}\right) \cos\theta \\ y = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \sin\theta \end{cases}$  per  $b < a$  si ottiene  $\frac{x^2}{\left(a + \frac{b^2}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(a - \frac{b^2}{a}\right)^2} = 1$  eq. ellisse  
 $\beta=0, e=0$

Per  $b \rightarrow 0$  ellisse tende a circonferenza centrata nell'origine

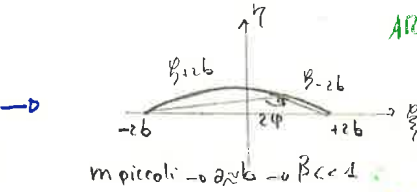
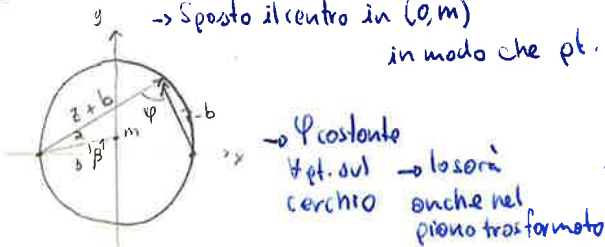
Per  $b=a$  LATINA PIANA di corda  $l=a$



Per  $0 \leq \theta \leq \pi$  percorro parte superiore e per  $0 > \theta > -\pi$  " parte inferiore  
 $\rightarrow$  Ho  $\infty$  di velocità su bordo d'attacco e fuga  
 \* qualsiasi incidenza: NO PORTANZA

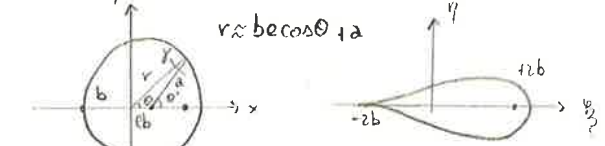
controllo incremento  $i$   
 $\beta \neq 0, e=0$

**ARCO DI CERCCHIO**

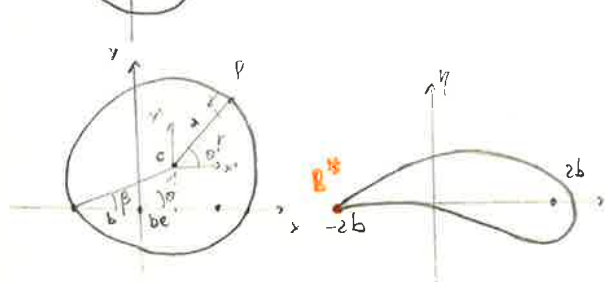


$\frac{i_{max}}{l} = \frac{1}{2} \tan\beta$

Sposta di  $b$  e lungo  $x$ :  $e < 1$  ECCENTRICITÀ: PROFILOSIMMETRICO: max spessore profilo simm. 25%  $\uparrow$

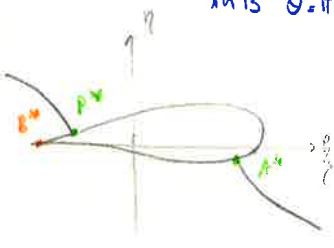
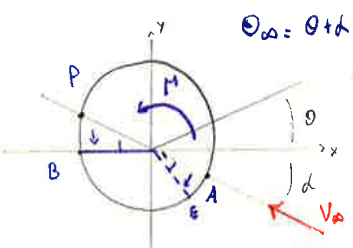


$\begin{cases} x = 2b \cos\theta \\ y = 2be(1 + \cos\theta) \sin\theta \end{cases}$   $e$ : misura dello spessore  
 $\beta=0, e \neq 0$



$\begin{cases} x_c = be \\ y_c = 2b \sin\beta \sin\theta \end{cases}$   $\beta \neq 0, e \neq 0$  spessore max:  $t_{max} = 25\% \uparrow$   
 $i_{max}$  per  $\theta = \frac{\pi}{2}$   
 $\begin{cases} x = 2b \cos\theta \\ y = 2be(1 + \cos\theta) \sin\theta + 2b\beta \sin^2\theta \end{cases}$

**eliminare  $\infty$  di  $V$  in  $B^*$**



in A  $\theta = -\alpha$   
 in B  $\theta = \pi \rightarrow V \neq 0 \rightarrow$  in  $B^* \infty \Rightarrow$  x entrore faccio in modo che  $V$  in B = 0  $\Rightarrow \frac{\Gamma}{4\pi a}$

B  $\Rightarrow$  pt. d'arresto  $\rightarrow$  scendono con vortice

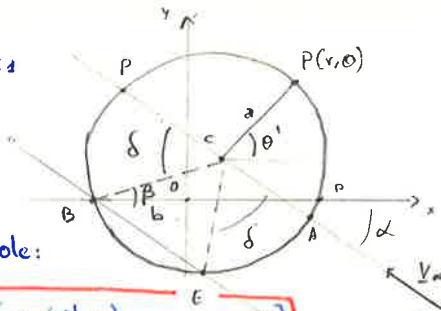
$V = 2V_0 \sin(\theta + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi a}$

$\rightarrow$  aggiungo vortice la cui intensità è  $\Gamma / V_B = 0$

- CASO PIÙ GENERALE: per profilo di K.S. generico

$$V^* = \frac{2V_\infty [\sin(\theta'+\alpha) + \sin(\alpha+\beta)]}{\left(1 - 2\frac{b^2}{r^2} \cos(2\theta) + \frac{b^4}{r^4}\right)^{1/2}}$$

per  $\beta \ll 1$ , e  $\alpha \ll 1$   
 $\alpha \ll 1$



In vista di una procedura numerica rapida + agevole:

(e preciso):  $\frac{d\psi}{dz} = 1 - \frac{b^2}{(x+iy)^2}$

$$V^* = \frac{2V_\infty [\sin(\theta'+\alpha) + \sin(\alpha+\beta)]}{\sqrt{R(f')^2 + J(f')^2}}$$

dove  $\begin{cases} R(f') = 1 - b^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ J(f') = \frac{2b^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$

con  $0 \leq \theta' \leq 2\pi$ ,  $\begin{cases} x = x_c + a \cos \theta' \\ y = y_c + a \sin \theta' \end{cases}$

- trasformazione di Kármán-Trefftz: estensione di K.S. per ottenere profili con un'angolo  $\tau \neq 0$  al bordo di fuga (no cuspidi)

$\tau = \pi(2-m) \rightarrow m > 2$

$$\frac{\psi(z) - mb}{\psi(z) + mb} = \frac{(z-b)^m}{(z+b)^m}$$

$m=2 \quad \tau=0$   
 $\rightarrow \tau < 0 \text{ e } m=2 \Rightarrow \text{K.S.}$

metodo di Theodoresen & Görtz

Se profilo  $\neq$  famiglia di K.S. in  $z'$  avrà un quasicerchio. Definisco un'altra trasformazione  $z$  che mi dia cerchio in  $z$ . [metodo usato x ottimizzazione profili alari] - loop di ottimizzazione con  $\neq$  calcoli fluidodinamici - richiede tempo e soldi  $\Rightarrow$  metodo analitico di T.-G., mi da risultati rapidi, ma approssimati.

TEORIA DEI PROFILI SOTTILI / DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI (G. Iouert:  $30^\circ - 40^\circ$ )

- 1)  $\nabla^2 \phi = 0$
- 2)  $\nabla \phi \cdot \underline{n} = 0$
- 3)  $\nabla \phi = V_\infty$  per  $r \rightarrow \infty$
- 4) C. KUTTA: velocità finita e continua sui bordi di fuga

• Scompongo il campo di moto

$$\underline{V}(x,y) = \underline{V}_\infty + \underline{V}'(x,y) \text{ (disturbo)}$$

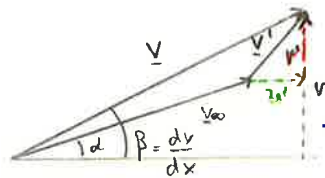
- Potenziale della perturbazione:  $\nabla \phi = \underline{V}'$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u' \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v'$$

$$\nabla \phi(x,y) = \underline{V}_\infty + \nabla \phi(x,y) \Rightarrow \underline{\phi}(x,y) = V_\infty (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + \phi$$

• Posso allo studio del solo potenziale di disturbo:

- 1)  $\nabla^2 \phi = 0$
- 2)  $(\underline{V}_\infty + \nabla \phi) \cdot \underline{n} = 0$
- 3)  $\nabla \phi = 0 \quad r \rightarrow \infty$
- 4) C. KUTTA



NON LINEARE

$$2) \frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla \phi \cdot \underline{n} = v' = (V_\infty \cos \alpha + u') \frac{dy}{dx} - V_\infty \sin \alpha$$

- hyp. di piccole perturbazioni:  $v' \ll V_\infty$ ,  $u' \ll V_\infty$ ,  $v'' \ll V_\infty$

- se profilo sottile, poco incurvato, d piccolo:

$\sin \alpha \approx \alpha \quad \cos \alpha \approx 1 \quad L_0 + \text{profili K.S. SPESSE + INARCATE}$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \ll \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \tan \beta \approx \beta \ll 1 \Rightarrow \text{CONDIZIONE DI TANGENZA LINEARIZZATA: } 0 \leq x \leq l$$

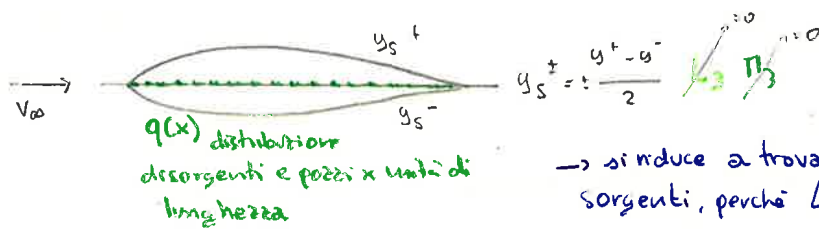
$$\underline{v}'[x, y(x)] = V_\infty \left( \frac{dy}{dx} - \alpha \right)$$

• nei pt. di arresto  $V \approx V_\infty \Rightarrow$  teoria cade in difetto.



3)  $\nabla^2 \varphi_3 = 0$

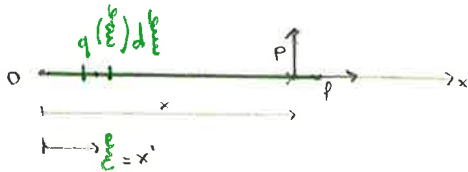
$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \right)_{x,0} &= V_\infty \frac{\partial y_s^\pm}{\partial x} \\ \nabla \varphi_3 &\rightarrow 0 \quad r \rightarrow \infty \\ \text{CK} \end{aligned} \right.$$



→ si induce a trovare distrib. di sorgenti, perché Laplace è già risolto

• Ognuno dei 3 problemi può essere studiato mediante sovrapposizione effetti di distribuzioni di singolarità lungo la corda, i cui potenziali soddisfanno l'eq. di Laplace e la condizione in campo lontano.

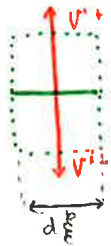
**SORGENTE (DISTRIBUZIONE)**



• calcolo velocità indotta in P: positiva perché q spora radialmente

$$du' = \frac{q(\xi) d\xi}{2\pi(x - \frac{\xi}{2})} \rightarrow u'(x,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^p \frac{q(\xi) d\xi}{x - \frac{\xi}{2}} \quad \text{in } x = \frac{p}{2} \text{ punto di ca}$$

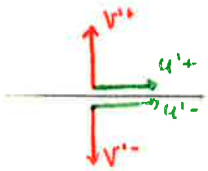
• essendo le velocità sempre radiali: l'unica sorgente che dà contributo anche a v' è quella centrata in P:



$$q(\xi) d\xi = 2v'(x) d\xi \quad \text{se sorgente è in } P \quad \xi = x$$

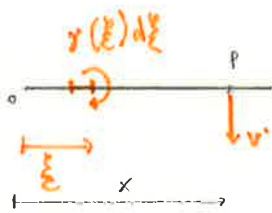
$$q(x) dx = 2v'(x) dx \rightarrow v'(x) = \frac{q(x)}{2}$$

$$\Rightarrow v'(x,0) = \pm \frac{q(x)}{2}$$



$\left. \begin{aligned} u'_+ &= u'_- \\ v'_+ &= -v'_- \end{aligned} \right\}$  campo di moto possedendo da dorso o ventre è continuo per  $u'$  discontinuo per  $v'$

**VORTICE (distribuzione)**  $> 0$  in senso orario che si semplificano formule

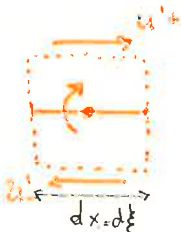


$$dv' = -\frac{1}{2\pi} \frac{\gamma(\xi) d\xi}{(x - \frac{\xi}{2})} \rightarrow v'_\pm = v'(x,0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^p \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x - \frac{\xi}{2}}$$

• unico vortice che dà componente u' è centrato in P ( $x = \frac{p}{2}$ )

N.B. Il vortice è duole della sorgente!

-vorticiti rende discontinua la u'



$$\gamma(x) dx = 2u'(x) dx$$

$$\Rightarrow u'_\pm(x,0) = \pm \frac{\gamma(x)}{2}$$

1)  $\frac{dy_s^+}{dx} = \frac{dy_s^-}{dx} \Rightarrow v'_+ = v'_- \Rightarrow \gamma_1(x)$     2)  $\frac{dy_m^+}{dx} = \frac{dy_m^-}{dx} \Rightarrow v'_+ = v'_- \Rightarrow \gamma_2(x)$

3)  $v'_+ = -v'_- \Rightarrow q(x)$

1)+2) mi danno L anche se  $\alpha=0$



Per piccole perturbazioni:  $\gamma(\theta) = u'(\theta) - u'(-\theta) \approx V(\theta) - V(-\theta)$

se linea media è lamina piana  $\rightarrow \gamma(\theta) = 2V_{\infty} \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$   $\infty$  al bordo d'attacco

è arco di cerchio  $\rightarrow \gamma(\theta) = 2V_{\infty} \left( \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + 2\beta \sin\theta \right)$   $\infty$  effetti dovuti all'incidenza e all'incurvamento

hyp. di CLAUERT  $\uparrow$

Per lamina curva qualunque considero  $2\beta \sin\theta$  come i termine di un'espansione in serie  $\alpha \rightarrow A_0$   $\rightarrow$  tenere conto delle differenze con lamina piana.

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \left( A_0 \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right)$$

per  $\theta=0$   $\rightarrow$  al bordo d'attacco  $\rightarrow$  forma opportuna di profilo senza spessore  $\Rightarrow$  c.k. soddisfolta

per  $\theta=\pm\pi \rightarrow \gamma(\pm\pi)=0$

Inserendola  $L$  in  $*$

$$-\frac{1}{2\pi} \left[ A_0 \int_0^{\pi} \frac{1+\cos\theta'}{\sin\theta'} d\theta' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \frac{\sin(n\theta') \sin\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' \right] = V_{\infty} \left[ \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) - \alpha \right]$$

operti  $\rightarrow$

$$\frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) - \alpha = -\frac{1}{\pi} \left[ A_0 \int_0^{\pi} \frac{1+\cos\theta'}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta' \sin(n\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' \right]$$

Integrali di Glauert:

$$G_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta} \begin{cases} G_0 = 0 \\ G_1 = \pi \\ G_2 = 2\pi \cos\theta \end{cases}$$

variano con  $\theta$ , ma hanno somma finita.

$$G_n^* = \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta' \sin(n\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = -\pi \cos(n\theta)$$

- sostituendo nell'equazione integrale:

$$-\frac{1}{\pi} \left[ A_0 (G_0 + G_1) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n G_n^* \right] = \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) - \alpha \rightarrow A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) = \alpha - \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta)$$

per esprimere  $A_0$  in funzione della geometria della corrente uniforme, integro rispetto a  $\theta$  da  $0$  a  $\pi$

$$A_0 \int_0^{\pi} d\theta - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^{\pi} \cos(n\theta) d\theta = \alpha \int_0^{\pi} d\theta - \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) d\theta \rightarrow A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\gamma_m}{dx}(\theta) d\theta = \alpha - d_{id}$$

incidenza ideale

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \left( (\alpha - d_{id}) \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right)$$

$d_{id}$  è l'incidenza che impedisce  $\infty$  di velocità al bordo di attacco  $\rightarrow$  si annulla  $\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

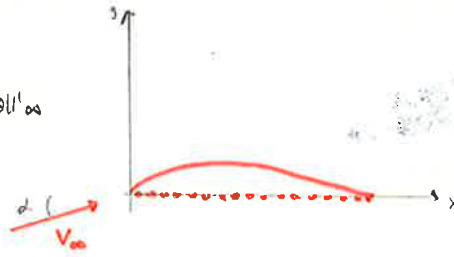
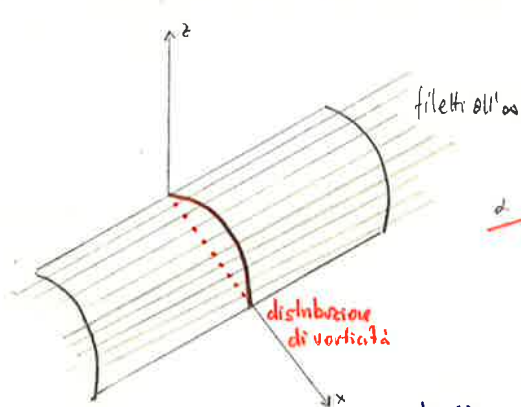


disallineamento genera punto d'arresto sul ventre o sul dorso

## ALI AD ALLUNGAMENTO FINITO

• Corpo 3D investito da corrente uniforme / L predominante rispetto a D

Rappresento perturbazione della corrente uniforme con distribuzione spaziale della vorticità.



→ ma alla fine si

y=0 z

y estensione  $[-\frac{b}{2}; +\frac{b}{2}]$

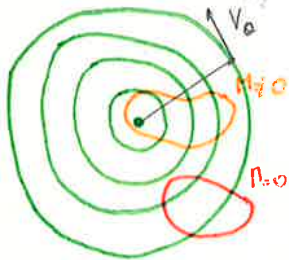
VORTICE 2D: concentrato in un punto induce velocità  $V_0 = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

• sezione tubo:



$$V_0 = \frac{\omega}{2} r$$

particelle nel cuore  
traslano e ruotano di  $\omega$



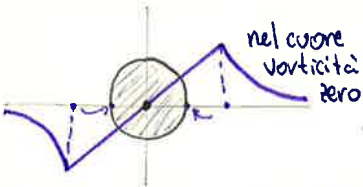
$$\left. \begin{matrix} a \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow \infty \end{matrix} \right\} \Gamma = \omega \pi a^2$$

vortice irrotazionale, ma alcune zone in cui  
sfere pulsanti → aumentano di volume.

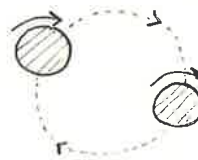
N.B. singolarità vorticoso: muscoli della fluidodinamica (+ Resalto + zone piccole  
e  $\omega \rightarrow \infty$ )

EDDY: zone in cui particelle traslano e ruotano, immerse in fluido irrotazionale

L inducono velocità particelle accanto: (vedi P.106 Vortice di Rankine)



• 2 eddy si influenzano:



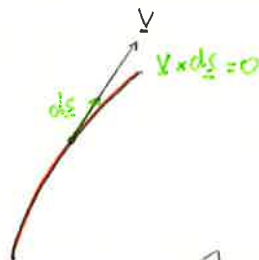
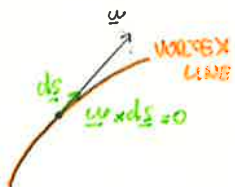
se ne ho 3 e se si spostano  
da posizione di mutuo  
equilibrio → turbolenza

## DINAMICA DELLA VORTICITÀ:

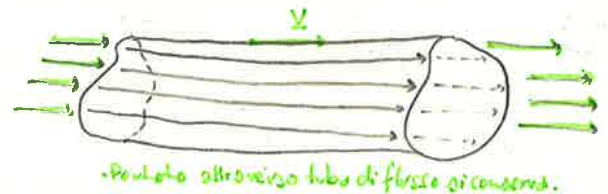
Ad un campo  $\underline{V}(r)$  stazionario si associa il campo vettoriale vorticità:  $\underline{\omega} = \omega_x \underline{i} + \omega_y \underline{j} + \omega_z \underline{k}$

$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{V}$  misura velocità angolare della particella:  $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{V} = 2 \underline{\Omega}$

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{V}$$



• se superficie di corrente si chiude:



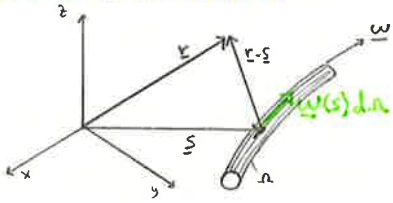
- analogamente tubo di flusso vorticoso.

$$\text{in 2D: } \underline{\omega} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \underline{k}$$

in 3D: tubo può flettersi cambiando sezione

$\underline{V}$  e  $\underline{\omega}$  2 campi vettoriali visualizzati e descritti usando gli stessi modi.

**LEGGE DI BIOT-SAVART:**



voglio ottenere il campo di velocità indotta da  $\underline{\omega}$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \underline{\omega} &= 0 \\ \nabla \cdot \underline{V} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{incompressibile}$$

l'irrotazionalità ci permette di introdurre: **VEETTORE POTENZIALE:**

$$\underline{V} = \nabla \times \underline{A} \rightarrow \text{definito a meno di un gradiente di uno scalare } (\nabla \cdot \underline{A} = 0)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$$

$$\nabla \times \underline{V} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A} = \underline{\omega} \Rightarrow \nabla^2 \underline{A} = -\underline{\omega}$$

$\underline{A}$  è soluzione eq. di Poisson noto il campo  $\underline{\omega}$ .  
eq. di Laplace  $\neq 0$

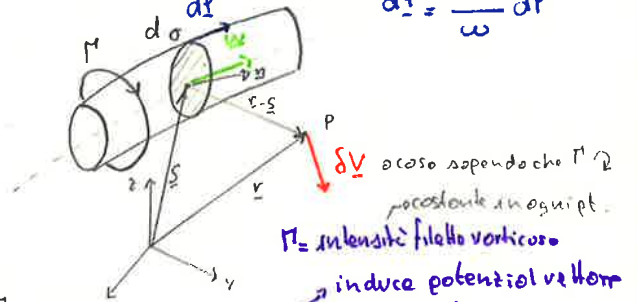
- soluzione elementare nel caso di sorgente puntiforme.

$$A(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{\omega}(\underline{s})}{|\underline{r}-\underline{s}|} d\Omega$$

• Dato un gruppo di vorticità (eddy) soluzione generale di  $\nabla^2 \underline{A} = -\underline{\omega}$ :

- Nel caso di un filamento vorticoso:

$$d\underline{\omega} = \frac{\underline{\omega}}{\omega} d\ell$$



$$\left\{ \begin{aligned} \delta A(\underline{r}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{\omega}(\underline{s})}{|\underline{r}-\underline{s}|} \\ \delta \underline{V}(\underline{r}) &= \frac{1}{4\pi} \nabla \times \frac{\underline{\omega}(\underline{s})}{|\underline{r}-\underline{s}|} \end{aligned} \right.$$

gradiente rispetto al sistema di coordinate

• considero volume infinitesimo di filamento:  $d\Omega = \underline{n} d\sigma \cdot d\ell$

$$\delta A(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{\omega}(\underline{s})}{|\underline{r}-\underline{s}|} (\underline{n} d\sigma \cdot d\ell) = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{\omega}}{|\underline{r}-\underline{s}|} (\underline{n} d\sigma \cdot \frac{\underline{\omega}}{\omega} d\ell) = \frac{M}{4\pi} \frac{d\ell}{|\underline{r}-\underline{s}|} = \delta A(\underline{r})$$

$$\delta \underline{V}(\underline{r}) = \frac{M}{4\pi} \nabla \times \frac{d\ell}{|\underline{r}-\underline{s}|}$$

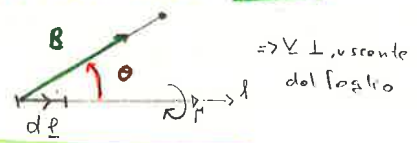
non dipende dal colore, cioè anche di  $\underline{s}$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{|x|} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{x^2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2)^{3/2}} = -\frac{x}{|x|^3}$$

$$\Rightarrow \delta \underline{V}(\underline{r}) = \frac{M}{4\pi} \frac{d\ell \times \underline{r}}{|\underline{r}-\underline{s}|^3}$$

$$\underline{V}(\underline{r}) = \frac{M}{4\pi} \int \frac{d\ell \times \underline{r}}{|\underline{r}-\underline{s}|^3}$$

legge di Biot-Savart  $R = |\underline{r}-\underline{s}|$



$$d\ell \times \underline{R} = R d\ell \sin \theta$$

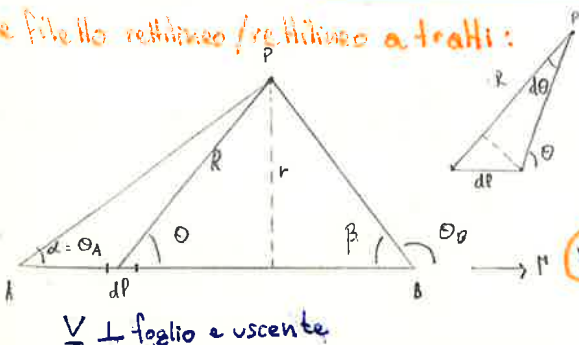
$$\delta \underline{V}(\underline{R}) = \frac{M}{4\pi} \frac{d\ell \times \underline{R}}{R^3}$$

forma vettoriale

$$\delta V(\underline{R}) = \frac{M}{4\pi} \frac{\sin \theta d\ell}{R^2}$$

modulo

• Filamento rettilineo / rettilineo a tratti:



$$R = \frac{r}{\sin \theta} \quad d\ell = \frac{R d\theta}{\sin \theta} \quad dV = \frac{M}{4\pi} \frac{\sin \theta d\ell}{R^2} = \frac{M}{4\pi R^2} R d\theta = \frac{M}{4\pi r} \sin \theta d\theta$$

$$\underline{V} = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{M}{4\pi r} \sin \theta d\theta = \frac{M}{4\pi r} (\cos \theta_A - \cos \theta_B) = \frac{M}{4\pi r} (\cos \alpha + \cos \beta)$$

velocità indotta in P da un tratto di filamento

$\cos \theta_B = -\cos \beta$

$\underline{V} \perp$  foglio e uscente



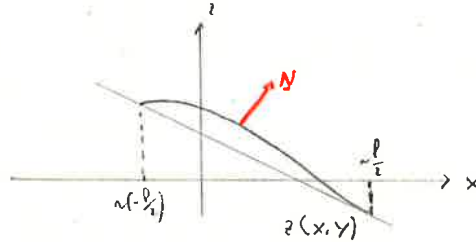
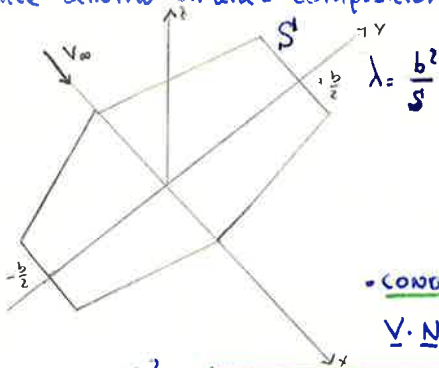
**TEORIA DI PRANDTL: della linea portante**

Un sistema vorticoso di un'ala ad allungamento finito, che rispetti i principi della dinamica della vorticità, dev'essere composto da una SUPERFICIE VORTICOSA ADERENTE all'ala (linee vorticosi allineate lungo l'apertura alare) e da una SUPERFICIE LIBERA, fluida che si origina al bordo di fuga e prosegue all'∞ (filati circa allineati con  $V_\infty$ ). ⇒ SCIA

Il verso dei filati vorticosi su superficie libera dipende se la vorticità sulla sup. aderente deve aumentare o diminuire lungo l'apertura. ↳ per mutua induzione, tendono a migrare verso le estremità facendo orbitare la sup. libera. Il passo trascurare che avviene distante dall'ala.

N.B. Sup. libera può essere considerata RIGIDA.

- Per ali sottili con piccolo svergolamento la superficie aderente può essere fatta coincidere con la proiezione della superficie alare sul piano  $z=0$ . Se piccoli incrociamenti, piccole incidenze la corrente attorno all'ala = composizione  $V_\infty$  // asse x + perturbazione  $V'$  tale che  $V' \ll V_\infty$ .



$$\underline{V} = V_\infty \underline{i} + \underline{V}'$$

$$\underline{V}' = u' \underline{i} + v' \underline{j} + w' \underline{k}$$

$$\underline{N} = \frac{\partial z}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \underline{j} - \underline{k}$$

z si scosta poco dal valore 0 (per profili sottili)

**CONDIZIONE DI TANGENZA:**

$$\underline{V} \cdot \underline{N} = 0 \quad \underline{V} \cdot \underline{N} = (V_\infty + u') \frac{\partial z}{\partial x} + v' \frac{\partial z}{\partial y} - w' = 0$$

- trascuro gli  $\epsilon^2$ :

$$w'(x, y, 0) = V_\infty \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$C_p \equiv 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2} = 1 - \frac{(V_\infty + u')^2 + v'^2 + w'^2}{V_\infty^2} \rightarrow C_p \approx -2 \frac{u'}{V_\infty}$$

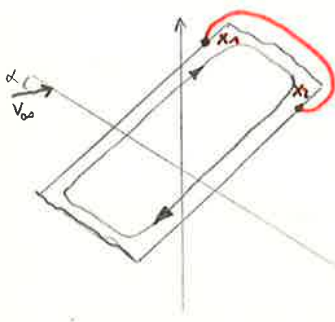
Superficie aderente è vorticoso, ma anche di corrente:  $\gamma_{ad} = \gamma_{xad} \underline{i} + \gamma_{yad} \underline{j}$  induce discontinuità nelle componenti tangenziali:  $\gamma_{xad} = v'^- - v'^+$   $\gamma_{yad} = -u'^- + u'^+$

$$\Delta C_p \equiv C_p^- - C_p^+ = -2 \frac{u'^-}{V_\infty} + 2 \frac{u'^+}{V_\infty} = 2 \frac{\gamma_{yad}}{V_\infty}$$

N.B. Quando spingo vorticità su superficie vorticoso la componente lungo y contribuisce alla portanza, quella lungo x non serve a niente

- Sulla superficie libera i vortici di scia sono allineati con l'asse x:  $\underline{\gamma} = \gamma_x \underline{i}$   
campo vorticità è solenoidale:  $\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \gamma_x$  è funzione solo di y.

• Circolazione lungo l'apertura alare:



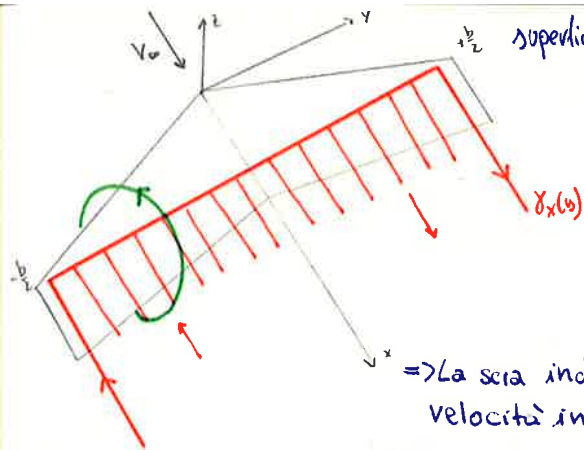
$$M(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \gamma_{y_0}(x, y) dx$$

- distribuzione di portanza.

• per una metà ho certa vorticità entrante nell'ala metà dell'altra ho l'opposta vorticità, ma uscente → modello rispetta Helmholtz, ma non ha portanza.

$M(y)$  distribuita sull'ala va da un max fino a 0 sulle estremità.

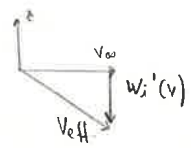




superficie vorticososa: parte di ala + scia  
 - cond. di t.g. - è anche sup. dicorrente -> x K.S. se sup. aderente  $\Delta p \neq 0 \rightarrow L$  (scambio forze)  
 sup. libera:  $\Delta p = 0$ , filetti allineati con  $V_{\infty}$

- passando attorno all'ala 2 particelle non si ritrovano al bordo di fuga => c'è moto rotatorio -> sul corpo c'è forza resistente: costa produrre scia 3D.

=> La scia induce una velocità addizionale sulle sezioni dell'ala detta velocità indotta  $w_i$ . Per Biot-Savart una striscia della scia  $dy'$  e di intensità  $\gamma_x'(y')dy'$ , induce x piccoli  $\Delta w_i'$  diretta secondo -z.



$$w_i'(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\gamma_x'(y') dy'}{y' - y} = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(y')}{y' - y}$$

velocità indotta dovuta a tutta la striscia scia. -> risolve il problema dei conti energetici.

N.B. in 2D se profilo non proviene genuinamente da 2D devo ricordarmi che profilo è invertito non da  $V_{\infty}$ , ma da  $V_{eff}$ .

$D_i$  = RESISTENZA INDOTTA: devo spendere energia anche x campo inviscido x muovere ala.  
 in 2D non c'era => paradosso di d'Alembert.

$\alpha_i$  = INCIDENZA INDOTTA: angoli piccoli

$$\alpha_i(y) = \tan^{-1} \left( -\frac{w_i(y)}{V_{\infty}} \right) \approx -\frac{w_i}{V_{\infty}}$$

forze agenti sull'ala:

$$dF = \rho V_{eff} \Gamma(y) dy$$

$$L \rightarrow \begin{cases} dL = dF \cos \alpha_i = \rho V_{eff} \cos \alpha_i \Gamma(y) dy & \text{per } \alpha_i \text{ piccoli} \\ dD_i = dF \sin \alpha_i = dL \tan \alpha_i \approx \alpha_i dL \end{cases}$$

su tutta l'ala:

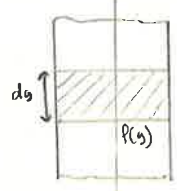
$$L = \rho V_{\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy$$

$$D_i = \rho V_{\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \alpha_i(y) \Gamma(y) dy$$

calcolo della DISTRIBUZIONE DI PORTANZA:

per il teo. di K-J.  $dL = \rho V_{\infty} \Gamma(y) dy$   
 per DEF. di  $C_p$   $dL = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_p dy$

$$\Rightarrow \Gamma(y) = \frac{1}{2} V_{\infty} \rho C_p$$



• Ogni sezione alare si comporta come sez. di ala ad allungamento  $\infty$  (profilo alare), tenendo conto di  $w_i$ . ->  $\alpha_{eff} = \alpha - \alpha_i$   
 $C_p = 2\pi [(\alpha - \alpha_i) - \alpha_0]$   
 $\Gamma(y) = k \rho V_{\infty} f(y) [(\alpha(y) - \alpha_i) - \alpha_0]$   
 coefficiente corretto -> fluido reale  
 -> dipende dalla forma della linea media, è cost. se non ho svergolio aerodinamico - disolite nelle ali sempre  $\alpha_0 = \alpha_0(y)$   
 -> ala sicuramente ha rastremazioni

• distribuzione di L ellittica: => è ala che a parità di  $V_{\infty}$  e allungamento  $L$  ha  $D_i$  MINIMA!  
 Nelle ali di oggi la distribuzione ellittica vale solo per determinate incidenze -> ottimizzo x  
 crociera

Per dimostrare esprimo generico distribuzione di portanza in forma adimensionale (cond. di max. impiego)  
 e come sviluppo in serie di funzioni trigonometriche.  $\Gamma(\theta) = V_{\infty} b g(\theta)$

$$g(\theta) = \frac{\Gamma_0}{V_{\infty} b} \sin \theta \quad g(\theta) = \frac{\Gamma(\theta)}{V_{\infty} b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \sin(n\theta)$$

integrali di Clebert

$$d_i(\theta) = -\frac{1}{4\pi V_{\infty}} \int_0^{\pi} \frac{V_{\infty} b d g(\theta')}{\frac{b}{2}(\cos \theta' - \cos \theta)} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n a_n \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta')}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} 2n a_n G_n \quad G_n = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}$$

$$d g = d \sum a_n \sin(n\theta) = \sum a_n n \cos(n\theta)$$

$$\rightarrow d_i(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n a_n \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} \quad L = \rho V_{\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) dy = -\rho V_{\infty}^2 \frac{b^2}{2} \int_{\pi}^0 g(\theta) \sin \theta d\theta$$

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S} = \lambda \int_0^{\pi} g(\theta) \sin \theta d\theta = \lambda \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\lambda \pi}{2} (a_1^2 + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} n a_n^2)$$

$$D_i = \rho V_{\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \Gamma(y) d_i(y) dy = \rho V_{\infty}^2 \frac{b^2}{2} \int_0^{\pi} g(\theta) d_i(\theta) \sin \theta d\theta$$

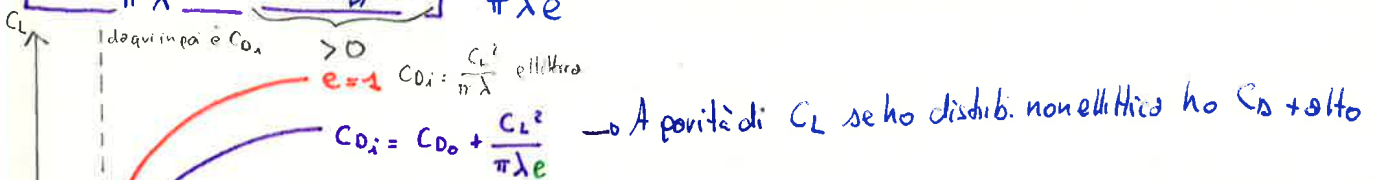
$$C_{D_i} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S} = \lambda \int_0^{\pi} g(\theta) d_i(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\pi} \left( \sum_n a_n \sin(n\theta) \right) \left( \sum_m m a_m \sin(m\theta) \right) d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{per } n=m \\ 0 & \text{per } n \neq m \end{cases} \Rightarrow C_{D_i} = \frac{\lambda}{2} \frac{\pi}{2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} n a_n^2 = \frac{\lambda \pi}{4} \left( a_1^2 + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} n a_n^2 \right)$$

contributo della  $D_i$  nel modo ellittico      correzione (non influisce su  $L$  ma su  $D_i$ )

• posso vedere qualcosa: distribuzione come base ellittica + correzioni:

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} + \frac{\lambda \pi}{4} \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} n a_n^2 = \frac{C_L^2}{\pi \lambda e} \quad \text{esi coeff. di Ostwald}$$



N.B. Oggi non appaissimo + tutto su corda: spolmo vorticità direttamente sul corpo (+ preciso e no  $\infty$ ) No distrib. continuo di vortici; ma continuo e tratti.

METODO DEI PANNELLI: nasce x il 3D. in tratti dritti: pannelli lunghi, se curvatura elevata + preciso se tanti pannelli.  
 anche x la scia      usato da Xfoil

eq. Temperatura: se incompressibile  $\nabla \cdot \underline{V} = 0$   $k \nabla^2 T$  nel caso viscoso c'è diffusione di T

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla T \right) = -\rho \nabla \cdot \underline{V} + \underbrace{(\underline{\rho} \cdot \nabla) \cdot \underline{V}} + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

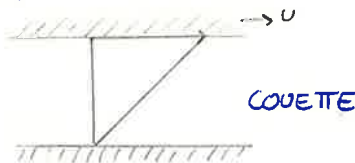
$$\rho \Phi = \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

• SCALARE PASSIVO: scalore trasportato passivamente dal campo di moto

$$\rightarrow \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla T \right) = \rho \Phi + k \nabla^2 T \quad \text{risolvo il campo di T una volta note le } \underline{V}$$

$\underline{V}, p, T$  incognite N.B. Influenza  $\underline{V}$  con T solo se ho parete coldissima

esempi di flussi:



• Se i flussi sono PARALLELI, riesco a semplificare molto

$$(\underline{V} \cdot \nabla \underline{V})_i = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{continuità}$$

$$(\underline{V} \cdot \nabla \underline{V})_j = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$(\underline{V} \cdot \nabla \underline{V})_k = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \underline{V} = 0 \\ \frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + \underline{V} \cdot \nabla \underline{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu_{(m)} \nabla^2 \underline{V} \end{cases}$$

SOLUZIONI ESATTE x le eq. di N.S. (continuità + bif. q.d.m.)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (4)$$

suppongo  $v, w = 0$

$$\text{da (1)} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{da (3), (4)} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \rightarrow p \text{ dipende solo da } x$$

$$\text{da (2)} \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5) \text{ risolvibile}$$

solo una componente di velocità non nulla

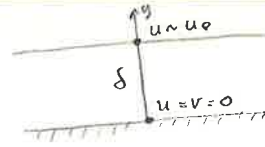


• Per i flussi // riesco ad avere soluzione esatta



dall'eqne continuità in 2D ricavo  $\Delta v$ :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{o(1)} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{o(1)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} \sim o(1) \Rightarrow \Delta v \sim \Delta y \sim o(\delta)$$



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

molto piccolo  
 1  
 $\frac{1}{\delta^2}$   
 $\frac{1}{\delta^2}$   
 x e y di ordine 1  
 fatto in modo che anche a dx - lo sia

predomina  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\delta^2}$  grande

$$\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{Re} \sim o(\delta^2)$$

$$\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim o(\delta)$$

var. di pres. o trovando strato limite trascurabile

$p = p(t, x, y)$  ecco perché la portanza, legata alle pressioni ci è venuta corretta anche nella parte invisida. Pressione su parete esterna strato limite si propaga dentro di esso intonda.

eqni strato limite in caso stazionario:

lungo y no variaz di pressione

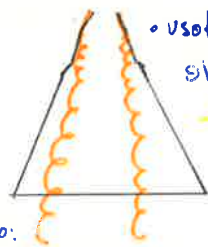
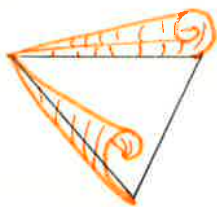
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{dp_e}{dx} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

→ q.d.m. lungo x semplificata

stollo ↑

• SISTEMA VORTICOSO su ala o della ad alta incidenza:

volo con portanza vorticoso: problema è VORTEX BREAKDOWN: strutture instabili



• usati per sistemi che richiedono alta manovrabilità ad alta incidenza

- sistema portante incetta



creo vortice poi vado indietro seguendo il modo di essere sempre sull'ala

dispendioso:

- usano solo insetti a basse V

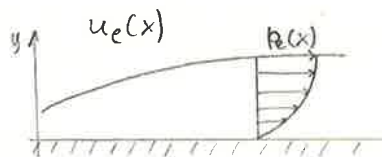
N.B. Uccelli migratori usano sistema portante di Prandtl

• eq. N.S. in strato limite stazionario:

• 3 eq non c'è perché  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

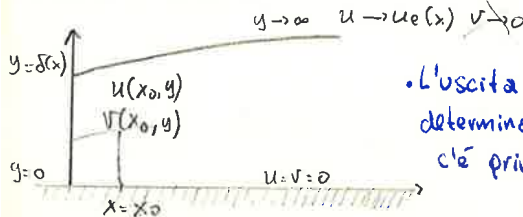
|| sistema cmq NON LINEARE



se parete curva uso coordinate locali e  $R \gg \delta$

2 metodi: ANALITICO, approssimato integrale

• dominio di calcolo:



• l'uscita è completamente determinata da ciò che c'è prima → MARCHING (info viene verso uscita)

eqne di strato limite: 1° a essere stata risolta numericamente



-  $u_e$  parte da valore  $u_e$  a parete e va a 0 a  $\delta$  come anche all' $\infty$ . Scelgo di integrare fino a  $\infty$  perché  $\delta$  ancora non lo conosco.

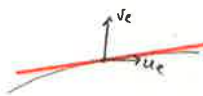
$$u_e = \frac{\partial u_e}{\partial y} - \frac{\partial v_e}{\partial x} = 0 \rightarrow u_e(x, y) = u_e(x, 0) + \left(\frac{\partial u_e}{\partial y}\right)_{y=0} y + o(y^2)$$

$v=0 \rightarrow \frac{\partial u_e}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0$

- integrale positivo: funzione crescente

$$v - v_e > 0$$

• direzione non + tangente a parete, ma leggermente liftata.



Pino di corrente inviscide

→ si alza di  $V_E$ : VELOCITÀ DI SPOSTAMENTO

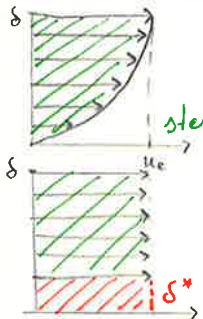
effetto strato limite

$$V_E = \frac{d}{dx} \left[ u_e \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \right] \text{ su linea di corrente a } y = \delta$$

$$\rightarrow V_E = \frac{d}{dx} (u_e \delta^*)$$

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u(x, y)}{u_e(x)}\right) dy$$

SPESORE DI SPOSTAMENTO



stessa portata

il mro corpo si alza di  $\delta^*$  e si inclina di  $V_E$



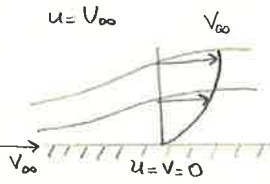
• Su disegno reale a occhio differenze tra corpo e strato limite non si vedono

↳ dipendenza da  $x$  è in  $\delta$

1° Soluzione Analitica: BLASIUS

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$



$$\frac{u}{U_{\infty}} = \varphi\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

$$\frac{\delta}{L} \propto \sqrt{\frac{\nu}{U_{\infty} L}} \quad L \rightarrow \infty \quad \delta \propto \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}$$

$U_{\infty} f'(\eta)$

$$\eta = \frac{y}{\delta(x)} = y \sqrt{\frac{U_{\infty}}{2\nu x}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_{\infty}}{2\nu x}}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x}$$

adimensionale

$$\psi = f(\eta) \sqrt{2\nu x U_{\infty}} \rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$f'(\eta) = \frac{df}{d\eta} = \frac{u}{U_{\infty}}$$

funzione di corrente

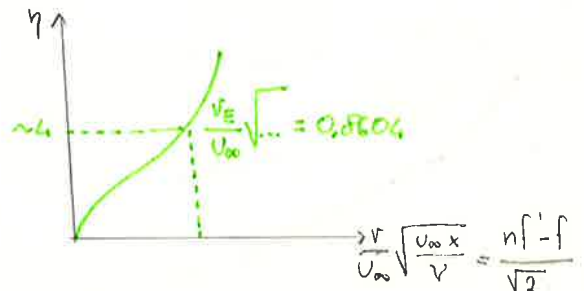
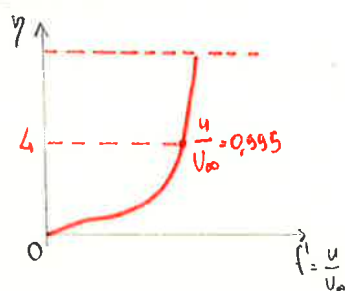
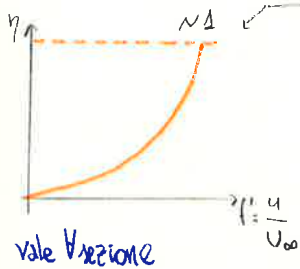
$$\rightarrow v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\nu U_{\infty}}{x}} (\eta f' - f)$$

EQ. di BLASIUS:

$$f''' + ff'' = 0$$

①, ②  $\eta = 0, f = f' = 0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow f' = 0$

③  $\eta = \infty, f' = 1$



• estensione soluzione oltre lamina piana:

- **Falkner-Skan**: tengo il gradiente di pressione  $\rightarrow$  quell'è la funzione  $f(x)$  che mi permette di avere soluzione AUTOSIMILARE-SELF SIMILAR  $\rightarrow f(x) = 0$  mi deve dare soluzione di Blasius.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

$\frac{u}{u_e(x)} = \Phi\left(\frac{y}{g(x)}\right)$  devo scegliere la  $u$  e la  $\nu$  in modo da trovarmi su un piano universale.

angolo cresce stabilmente

**Blasius:**

$$g(x) = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}} \quad u_e(x) = U_\infty$$

$$\eta = \frac{y \sqrt{Re}}{L} \quad Re = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

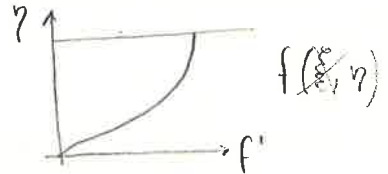
$$f\left(\frac{x}{L}, \eta\right) = \frac{\psi(x, y) \sqrt{Re}}{L u_e(x) g(x)}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_e \frac{df}{d\eta} = u_e f'$$

$$\sqrt{Re} \nu = \sqrt{Re} \frac{\partial \psi}{\partial x} = f \frac{d(u_e g)}{dx} + u_e g \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} - L \frac{g'}{g} \eta f' \right)$$

$$f''' + \alpha f f'' + \beta (1 - f'^2) = 0$$

$\Rightarrow$  voglio soluzioni che non dipendono da  $\xi$  x DEF. di soluzione AUTOSIMILARE



$$\begin{cases} \eta=0 & f=f'=0 \\ \eta \rightarrow \infty & f' \rightarrow 1 \\ \alpha = \frac{L g}{U_\infty} \frac{d(u_e g)}{dx} = \text{cost.} \\ \beta = \frac{L}{U_\infty} g \beta \frac{du_e}{dx} = \text{cost.} \end{cases} \rightarrow u_e(x), g(x) / \alpha, \beta = \text{cost.}$$

Lo risolvendo: 2 eq. diff. in  $u_e(x)$  e  $g(x)$

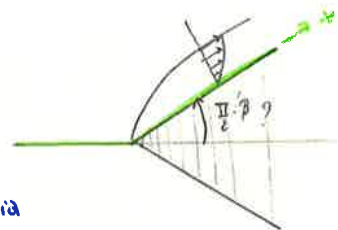
affinche' parte  $\alpha dx$  senevada  $f$  solo funzione di  $\eta$

$$\frac{u_e}{U_\infty} = k \frac{2}{2\alpha - \beta} \left[ (2\alpha - \beta) \frac{x}{L} \right]^{\beta / (2\alpha - \beta)} \quad g(x) = \sqrt{(2\alpha - \beta) \frac{U_\infty x}{U_e L}}$$

N.B. definendo  $\alpha, \beta$  definisco famiglia di soluzioni auto similari.

una di queste è:  $\alpha=1$

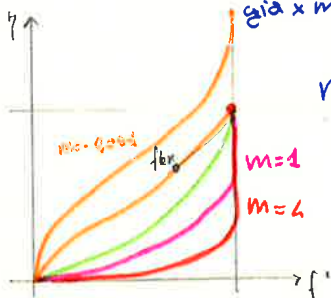
$$m = \frac{\beta}{2 - \beta} \rightarrow \beta = \frac{2m}{m+1} \quad 2\alpha - \beta = \frac{2}{m+1} \quad \frac{\beta}{2\alpha - \beta} = m$$



$$\frac{u_e}{U_\infty} = k \downarrow \text{cost. di integrazione}^{m+1} \left( \frac{2}{m+1} \right)^m \left( \frac{x}{L} \right)^m = C \left( \frac{x}{L} \right)^m$$

• soluzione di Blasius  
fa parte di questa famiglia

gia  $x$  m leggermente  $< 0$  ho subito separazione •  $m < 0$  flussiche rallentano



$m=0$  profilo di Blasius

N.B. Più flusso accelerato + strato limite piccolo

$m=1$  situazione similnel pt. d'arresto

PARAMETRI INTEGRALI DELLO STRATO LIMITE:  $\Theta(x), \delta^*(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ u_e^2 \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy \right] + u_e \frac{du_e}{dx} \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$\Theta(x)$   $\delta^*(x)$

$$H = \frac{\delta^*}{\Theta} \quad \text{FATTORE DI FORMA}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_e^2 \Theta(x)) + u_e \frac{du_e}{dx} \delta^*(x) = \frac{\tau_w(x)}{\rho}$$

$$\frac{d\Theta}{dx} + \frac{\Theta}{u_e} (2 + H) \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

eq. integrale di VON KARMAN - scritta così vale anche x strati limite turbolenti dello strato limite

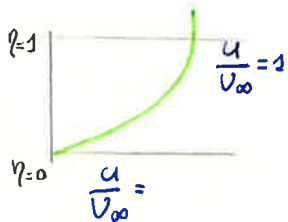
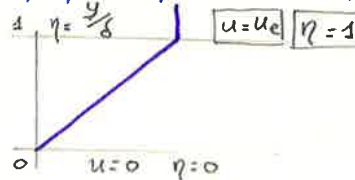
$\tau_w$ : posso introdurre sia x strati laminari che turbolenti

metodo di Von Karman - Streckerhausen:  $u_e = u_{\infty} = \text{cost.}$

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

$$\tau_w = \frac{C_f}{2} \rho u_{\infty}^2$$

$\delta^*, \Theta, H$  dipendono dal profilo di velocità



$$\frac{d(u/u_{\infty})}{d\eta} = 0$$

$$\frac{u}{u_{\infty}} = a + b\eta + c\eta^2$$

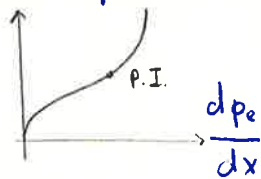
$$\frac{u}{u_{\infty}} = 2\eta - \eta^2$$

- introducendo semplice profilo parabolico ottengo stima di  $C_f$  del 10% con eq. integrale



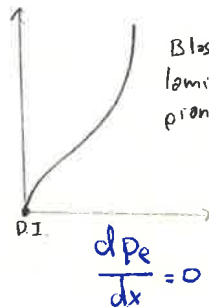
- Su un profilo stare il problema è che ho gradiente di pressione

• Tutti i profili di  $\vec{V}$  che hanno un punto di inflessione  $\rightarrow Re \rightarrow \infty$  profilo sempre instabile  $\forall$  perturbazione nel limite inviscido.



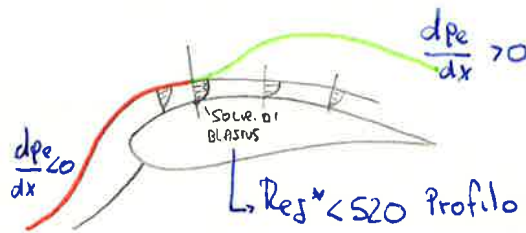
N.B. Se transizione non avviene prima di gradiente di p avverso stoto limite separa STALLO  $\rightarrow$  provoca transizione con certo ritardo

• in profilo senza P.I.  $\rightarrow$  sempre stabile  $\forall$  perturbazione.



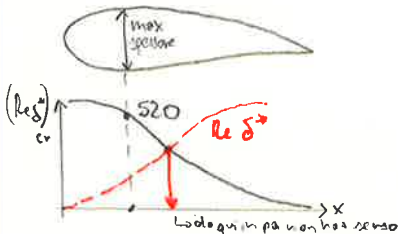
Blasius lamina piana

• Se introduco la viscosità non tutte le perturbazioni se P.I. portano a instabilità.



$Re_{crit} < 520$  Profilo di Blasius rimane laminare, dopo  $Re_{crit}$  crollo quasi istantaneamente  $\rightarrow$  P.I.

TRANSIZIONE  $\rightarrow$  avviene nel punto di minimo gradiente di pressione  $\rightarrow$  pt. di max spessore



• Il turbolento sembra completamente random: in realtà non è completamente stocastico

sia nello spazio che nel tempo disparità di ordini incredibili: (funzioni variano anche tra pt. piccolissimi)  $\rightarrow$  grande potenza di calcolo.

Numericamente: è stata sviluppata una teoria statistica  $\rightarrow$  si studiano i valori medi della turbolenza. Una corrente turbolenta è caratterizzata da **FUTURAZIONI** di  $V, p, T$ : imprevedibilità  $\rightarrow$  estrema sensibilità della soluzione delle condizioni iniziali.

fenomeno **LINEARE**: dando perturbazione a  $2\omega_2$   $\rightarrow$  energia associata rimarrà sempre centrata sui  $2\omega_2$

fenomeno **NON LINEARE**: energia data al sistema scappata su altre frequenze sempre + alte

$$a \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x}$$

• Nel moto turbolento tutte le particelle sono dotate di vorticità (spin)

q.d.m. 
$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underbrace{\nabla \cdot \left( \frac{v^2}{2} \right) - \underline{v} \times \underline{\omega}}_{(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{v} \quad \rightarrow \underline{\omega} = \nabla \times \underline{v}$$

applico rotore: 
$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} - \underbrace{\nabla \times (\underline{v} \times \underline{\omega})}_{(\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\omega} - \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}} = \nu \nabla^2 \underline{\omega} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} + \nu \nabla^2 \underline{\omega}}$$

vorticità trasportata e diffusa da linee di corrente

- se il fluido omogeneo non si crea vorticità (si crea x cond. di aderenza)

N.S. x fluido incompressibile a proprietà costanti:

①  $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$     ②  $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) \times \text{CONTINUITÀ}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$

fluttuazione = segnale a valor medio nullo

MEIO I VALORI:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{U_i + u_i'}) = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_i} = 0 \leftrightarrow \bar{u}_i' = \bar{u}_i - \bar{U}_i = U_i - U_i = 0$

ma  $\bar{u} = \bar{u} \rightarrow \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \textcircled{1} \nabla \cdot \underline{U} = 0$  continuità è la stessa anche x valori mediati:

$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i + u_i') = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0$

.N.B. MA USC = mediato

②  $\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}$

MEIO I VALORI:

$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial U_i}{\partial t} = 0$  perché fenomeno stazionario  $U_i = U_i(x)$

$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p}') = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$

$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{(U_i + u_i')(U_j + u_j')} \right]$

$U_i U_j + \underbrace{U_i \overline{u_j'}}_{=0} + \underbrace{U_j \overline{u_i'}}_{=0} + \overline{u_i' u_j'} \leftarrow \overline{U_i U_j} + \overline{U_i u_j'} + \overline{U_j u_i'} + \overline{u_i' u_j'}$

$\rightarrow = \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i' u_j'}) \rightarrow$  grazie a questo termine coprisce non sono in laminare

$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$

SFORZO DI TAGLIO

$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i' u_j'} \right]$

componente VISCOSA    FLUTTUAZIONE  $\rightarrow$  matrice 3x3: TENSORE DEGLI SFORTI DI REYNOLDS: effetto fluttuazioni turbolente su compmedio

$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]$

• a causa della turbolenza ho 9 incognite in più o corsodi  $\overline{u_i' u_j'}$  oltre a  $\underline{P}$  e  $U_i$ .

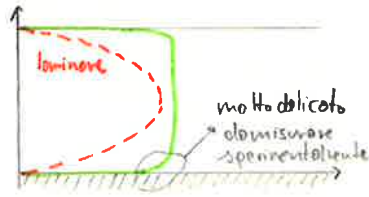
- Approccio statistico porta a equazioni che non bastano.  $\rightarrow$  tucdo oventi +  $\overline{u_i' u_j' u_k'}$

Ho bisogno di correloro  $U_i$  e  $\overline{u_i' u_j'}$  aiutandomi con considerazioni sperimentali  $\Rightarrow$  MODELLO DI TURBOLENZA

integrando lungo y:  $\frac{d\tau}{dy} = \frac{\tau_w}{H} \rightarrow \tau = -\frac{\tau_w}{H}y + C \quad y=0 \quad \tau = \tau_w \Rightarrow C = \tau_w$

$\tau = \tau_w \left(1 - \frac{y}{H}\right)$

$\mu \frac{dU}{dy} - \rho \overline{u'v'}$



• conviene usare variabili di parete (mi ingrandiscono quella zona)

$\rightarrow \mu \frac{dU}{dy} - \rho \overline{u'v'} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{H}\right)$  divido per  $u_*^2 = \frac{\tau_w}{\rho}$  VELOCITÀ DI ATRITO

$\frac{\nu}{u_*^2} \frac{dU}{dy} - \frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} = \left(1 - \frac{y}{H}\right) \frac{u_* \nu}{u_*^2 y}$

$U^+ = \frac{U}{u_*}$

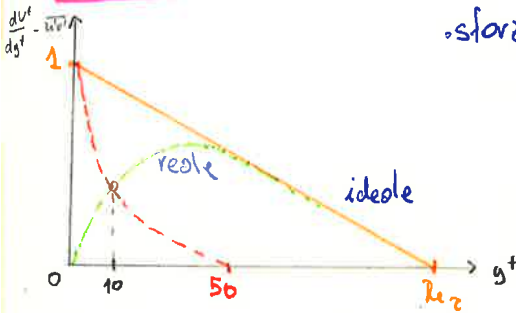
$y^+ = \frac{y u_*}{\nu}$

$\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2} = \overline{u'v'^+}$

$Lo + Re \uparrow + y^+$  ingrandisce zona

$Re_\tau = \frac{H u_*}{\nu}$

$\frac{dU^+}{dy^+} - \overline{u'v'^+} = 1 - \frac{y^+}{Re_\tau}$  eq. di q.d.m. adimensionale



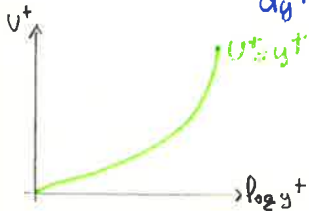
• sforzo totale [viscoso e turbolento] varia da 1 a 0  $0 < y^+ < Re_\tau$

$y^+ = \frac{u_* H}{\nu} = Re_\tau$  a metà canale

al di sotto di  $y^+ = 10$  sforzo viscoso  $\gg$  sforzo turbolento  
dopo  $y^+ = 50$ , sforzo turbolento è predominante  
 $Lo$  pochissimo  $\rightarrow$  xke sto ingrandendo

Per  $y^+ = 0(1)$ :  $\frac{dU^+}{dy^+} - \overline{u'v'^+} \approx 1$

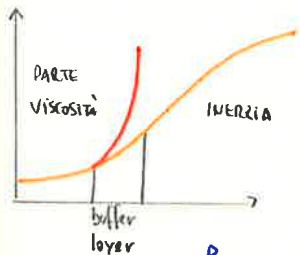
$\frac{dU^+}{dy^+} = 1 \Rightarrow U^+ = y^+$  profilo di velocità del campo medio turbolento staccato a parete.



$\rightarrow$  Se  $y^+ \approx 1 \Rightarrow \frac{y^+}{Re_\tau} \ll 1$

Se  $0 < y^+ < Re_\tau$

$u = u_* f\left(\frac{y}{H}, Re_\tau\right) = u_* f\left(y^+, \frac{1}{H}\right)$



• CONDOTTO A SEZIONE CIRCOLARE:  $D=2R$



Velocità di riferimento è quella media

$U_{media} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r u dr$

$U^+ = \frac{1}{k} \log_2 y^+ + B$

$\frac{U_0 - U}{u_*} = -\frac{1}{k} \log_2 \left(\frac{y}{R}\right) + B$

$\frac{U_0 - U_{media}}{u_*} = -\frac{1}{k} \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r \log_2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) dr \Rightarrow \frac{U_0 - U_{media}}{u_*} = \frac{3}{2k} \Rightarrow \frac{U_0 - U_{media}}{u_*} = 3.659$

$k = 0.41$  cost. di Von Karman



## - ESERCITAZIONE 1: BERNOULLI

• bilancio q.d.m. in forma integrale per il moto stazionario:

$$\bar{R} = \int_{\tau} \rho \frac{d\bar{V}}{dt} d\tau \quad \text{risultante delle forze esterne (pressione, attrito, gravità)} \quad \bar{V} = (u, v, w) \text{ campo di velocità}$$

$\tau$ : volume di controllo      lungo  $x$ :  $R_x = \int_{\tau} \rho \frac{du}{dt} d\tau = \int_{\tau} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla u \right) d\tau$

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} \quad \sigma: \text{superficie che racchiude } \tau$$

$$\nabla \cdot (u\rho\bar{V}) = u\nabla \cdot (\rho\bar{V}) + \nabla u \cdot \rho\bar{V} \rightarrow \rho\bar{V} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (u\rho\bar{V}) - u\nabla \cdot (\rho\bar{V})$$

$$\Rightarrow R_x = \int_{\tau} \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot (u\rho\bar{V}) d\tau - \int_{\tau} u\nabla \cdot (\rho\bar{V}) d\tau \quad \begin{matrix} \text{continuità} \\ \text{stazionario} \end{matrix} \rightarrow \nabla \cdot (\rho\bar{V}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow R_x = \int_{\tau} \rho \frac{\partial u}{\partial t} d\tau + \int_{\tau} \left( \nabla \cdot (u\rho\bar{V}) + u \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = \int_{\tau} \cancel{\rho \frac{\partial (u\rho)}{\partial t}} d\tau + \int_{\tau} \nabla \cdot (u\rho\bar{V}) d\tau$$

T. GAUSS:  $R_x = \int_{\sigma} u\rho\bar{V} \cdot \bar{n} d\sigma$        $\bar{n} > 0$  verso esterno

$$R_x = \int_{\sigma} \rho u V_n d\sigma$$

$$R_y = \dots v$$

$$R_z = \dots w$$

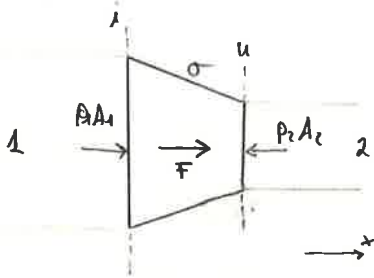
$$\Rightarrow \bar{R} = \int_{\sigma} \rho \bar{V} V_n d\sigma$$

quota media linee di corrente

• Se il campo di moto:   
 ① INCOMPRESSIBILE   
 ② STAZIONARIO   
 ③ IRROTAZIONALE   
 }  $\Rightarrow$  lungo una linea di corrente vale:

$$p + \frac{1}{2} \rho V^2 + \rho g h = \text{cost.}$$

ES. ① sezione circolare,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$        $D_1 = 400 \text{ mm}$ ,  $D_2 = 200 \text{ mm}$



$V_1 = 5 \text{ m/s}$        $p_1 = 4 \text{ bar}$        $F$  trasmesso dall'acqua alla riduzione?

CONTINUITÀ:  $V_1 A_1 = V_2 A_2$        $V_2 = V_1 \frac{A_1}{A_2} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ m/s}$   
 $Q_1 = Q_2$

BERNOULLI:  $p_1 + \frac{1}{2} \rho V_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho V_2^2$   
 $h_1 = h_2$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho (V_1^2 - V_2^2) = 400000 + \frac{1000}{2} (25 - 400) = 212500 \text{ Pa}$$

$$R_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 + F$$

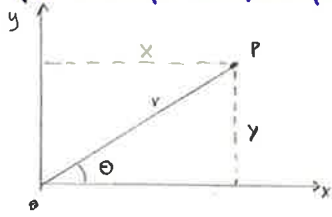
su ①  $u = V_1$        $V_n = -V_1$       su pareti  $\rightarrow$  cono. tangenziali  $\rightarrow V_n = 0$   
 su ②  $u = V_2$        $V_n = V_2$

$$p_1 A_1 - p_2 A_2 + F = - \int_{A_1} \rho V_1^2 dA + \int_{A_2} \rho V_2^2 dA \rightarrow F = -p_1 A_1 + p_2 A_2 - \rho V_1^2 A_1 + \rho V_2^2 A_2$$

$$= A_2 (p_2 + \rho V_2^2) - A_1 (p_1 + \rho V_1^2) = 34165 \text{ N}$$

## ESERCITAZIONE 2: campi di moto composti

- per i campi semplici piani:



SORGENTE/ Pozzo: in O

$$\Psi_P = \frac{Q}{2\pi} \Theta$$

f. conv.

$$\Phi_P = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{r}{r_0}$$

f. pot.

$Q > 0$  sorg.

$Q < 0$  pozzo.

CORRENTE UNIFORME:  $\underline{V} = u\underline{i} + v\underline{j}$

$$\Psi_P = -vx + uy$$

$$\Phi_P = ux + vy$$

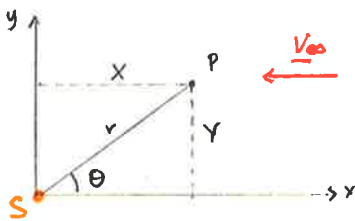
VORTICE: in O

$$\Psi_P = -\frac{M}{2\pi} \log \frac{r}{r_0}$$

$$\Phi_P = \frac{M}{2\pi} \Theta$$

$M > 0$  antiorario

### ES. ① Prova di Fuhrmann



in cartesiano

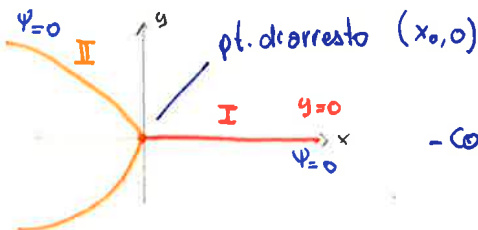
$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \Theta - Vy = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} - Vy$$

N.B. Per capire dove sono isolinee  $\Psi=0$  deve annullare l'espressione con solo un sistema di coordinate.

- analiticamente difficile: uso  $x^2 + y^2$

$\Psi=0$  ha diramazione: - Un ramo coincide col semiasse positivo delle x ( $y=0, \Theta=0$ )

- per valori  $y \neq 0$  o  $\Theta \neq 0$



- Componenti del campo di velocità:

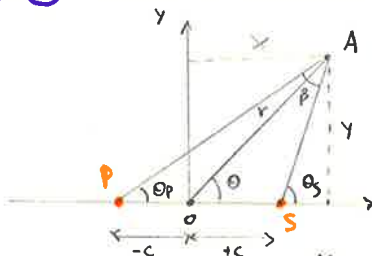
$$\begin{cases} u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - V \\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

il pt. di arresto è tale che  $u(x_0, y=0) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{Q}{2\pi V}$

con  $\Psi=0, \Theta=\pi, y=h \Rightarrow \frac{Q}{2} = Vh \rightarrow h = \frac{Q}{2V}$

N.B. i 2 rami -> asintoti orizzontali distanti  $2h$

### ES. ② OVALE DI RANKINE



$$\tan \Theta_S = \frac{y}{x-c} \quad \tan \Theta_P = \frac{y}{x+c}$$

per APS vale:

$$\pi - \Theta_S + \Theta_P + \beta = \pi$$

$$\beta = \Theta_S - \Theta_P$$

f. corrente solo con P. e S.  $\Psi_A = \frac{Q}{2\pi} (\Theta_S - \Theta_P) = \frac{Q}{2\pi} \beta$

$$\tan(\Theta_S - \Theta_P) = \frac{\tan \Theta_S - \tan \Theta_P}{1 + \tan \Theta_S \tan \Theta_P} \Rightarrow \beta = \arctan \frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2}$$

con anche  $V_\infty$ :

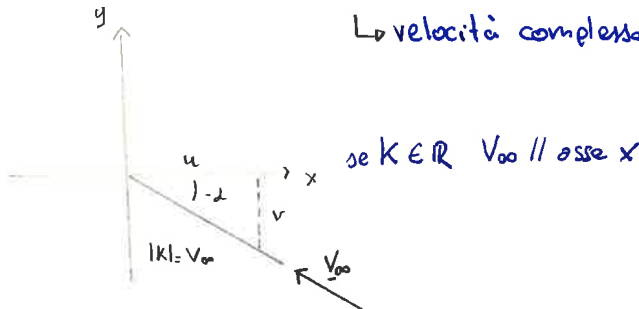
$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{2cy}{x^2 + y^2 - c^2} - Vy \quad \beta \in (-\pi, \pi]$$

### ESERCITAZIONE 3: Potenziale complesso

Dato il potenziale complesso:  $W(z) = k z^m$   $k \in \mathbb{C}$  studiare il campo di moto  
 $m \in \mathbb{R}$

Considero 2 casi particolari:

$m=1$   $W(z) = kz \rightarrow \frac{dW}{dz} = k = k_r + i k_i = u - iv = |k|(\cos\alpha - i\sin\alpha) = |k|e^{-i\alpha} = V_{\infty}e^{-i\alpha}$   
 $\hookrightarrow$  velocità complessa  
 CORRENTE UNIFORME con angolo di incidenza  $-\alpha$



$m=-1$   $W(z) = \frac{k}{z} = e^{i\alpha} \frac{M}{2\pi z}$   $k = e^{i\alpha} \frac{M}{2\pi} \Rightarrow$  DOPPIETTA centrata nell'origine, inclinata di  $\alpha$ , di momento  $\frac{M}{2\pi}$ , direzione discorde rispetto a  $x$ .

se  $k \in \mathbb{R}$   $\alpha=0$

Nel caso più generale [ $k \in \mathbb{R}$ ]:  $W = k r^m (\cos(m\theta) + i \sin(m\theta)) = \phi + i \psi$

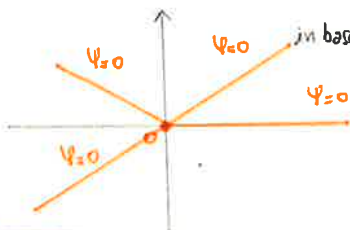
con  $\phi = k r^m \cos(m\theta)$  - velocità complesso in coordinate polari:

$\psi = k r^m \sin(m\theta)$   $\frac{dW}{dz} e^{i\theta} = V_r - i V_t$  da:  $\frac{dW}{dz} e^{i\theta} = m k z^{m-1} e^{i\theta} =$

$\begin{cases} V_r = m k r^{m-1} \cos(m\theta) \\ V_t = -m k r^{m-1} \sin(m\theta) \end{cases}$   $= m k r^{m-1} e^{i(m-1)\theta} e^{i\theta} = m k r^{m-1} e^{im\theta} = V_r - i V_t$

Studio  $\psi$ :  $\psi=0 \Rightarrow k r^m \sin(m\theta)=0 \rightarrow r=0$  (origine)

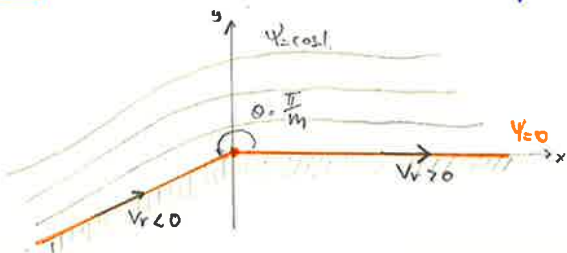
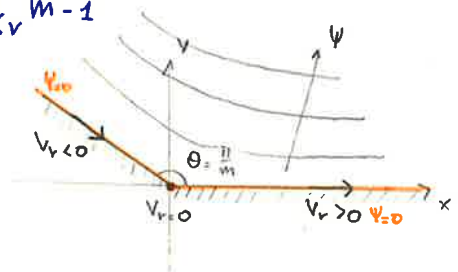
$\theta=0, \theta=\frac{\pi}{m}$  2 rette uscenti dall'origine



su  $\psi=0 \Rightarrow \begin{cases} V_r = \pm m k r^{m-1} \\ V_t = 0 \end{cases}$

$m > 1$  Origine è imp. di arresto ( $V_r=0$ ). se  $r \uparrow V_r \uparrow$

$\frac{1}{2} < m < 1$  singolarità di  $V_r$  in  $r=0$   $V_r = m k \frac{1}{r^{1-m}} \rightarrow \infty$





### ESERCITAZIONE 4: TRASFORMAZIONE DI KUTTA-JOUKOWSKI

• campo di moto attorno ad un cilindro circolare con circolazione: 3 campi semplici: applicati nell'origine

1)  $V_\infty$ , concorde con  $x$ ,  $\alpha$

2) coppia  $M, \alpha$ , discorde con  $x$

3) vortice  $M$ , antiorario

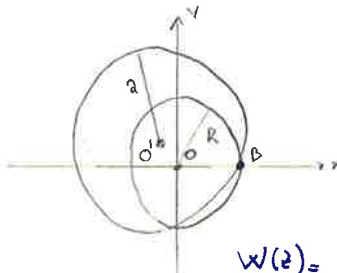
$$\Psi = V_\infty r \sin \theta - \frac{M}{2\pi r} \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{r}{r_0}$$

raggio cilindro  
 $r_0 = 1$   
 $\frac{M}{2\pi} = R^2 V_\infty$

- uso potenziale complesso  $W(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ :

$$W(z) = V_\infty \left( z e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} \frac{R^2}{z} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log z$$

• voglio centrare i campi in  $o'$ :  $s = s_x + i s_y$  nel piano  $z$  con  $\lambda = |s_x|$



$$a = \sqrt{(R+\lambda)^2 + s_y^2}$$

faccio in modo che passi in  $B(R,0)$

$$W(z) = V_\infty \left( (z-s) e^{-i\alpha} + e^{i\alpha} \frac{(R+\lambda)^2 + s_y^2}{z-s} \right) - i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(z-s)$$

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = V = \left[ V_\infty \left( e^{-i\alpha} - \frac{(R+\lambda)^2 + s_y^2}{(z+\lambda - i s_y)^2} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi(z+\lambda - i s_y)} \right] / \left( 1 - \frac{R^2}{z^2} \right)$$

quando denominatore  $\neq 0$  annulla  $\Rightarrow$  SINGOLARITÀ

$V = u - iv$  ha singolarità in  $z = \pm R$   $V \rightarrow \infty$ , impongo che  $V$  in  $B$  (bordo di fuga sia nulla)  $z = +R$  in  $z = -R$  è dentro circonferenza  $\rightarrow$  non do problemi.

• elimino singolarità al bordo di fuga con condizione di KUTTA ( $u - iv = 0$  per  $z = R$ )

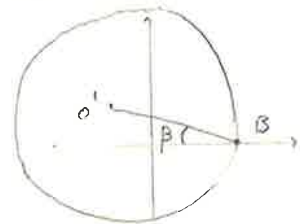
Numeratore = 0:

$$V_\infty \left( e^{-i\alpha} - \frac{(R+\lambda)^2 + s_y^2}{(R+\lambda - i s_y)^2} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi(R+\lambda - i s_y)} = 0$$

N.B.  $\arctan(-y/x) = -\arctan(y/x)$

in forma esponenziale:

$$R + \lambda - i s_y = \sqrt{(R+\lambda)^2 + s_y^2} e^{-i\beta} \quad \beta = \arctan\left(\frac{s_y}{R+\lambda}\right)$$



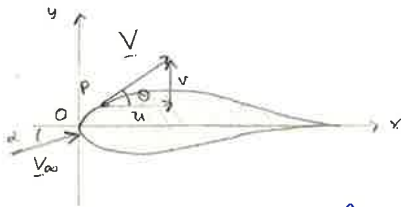
$$\Rightarrow V_\infty \left( e^{-i\alpha} - \frac{(R+\lambda)^2 + s_y^2}{(R+\lambda)^2 + s_y^2} e^{2i\beta} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma e^{i\beta}}{2\pi \sqrt{(R+\lambda)^2 + s_y^2}} = 0 \cdot \frac{1}{e^{i\beta}}$$

$$V_\infty \left( e^{-i\alpha - i\beta} - e^{i\alpha + i\beta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi \sqrt{(R+\lambda)^2 + s_y^2}} = 0$$

## ESERCITAZIONE 5: TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI (dei profili sottili)

Profilo sottile:

$$\underline{V} = \underline{V}' + \underline{V}_\infty \quad \underline{V}' \ll \underline{V}_\infty \quad \text{asse } y \text{ x' al bordo d'attacco} \quad \text{asse } x \text{ contiene la corda}$$

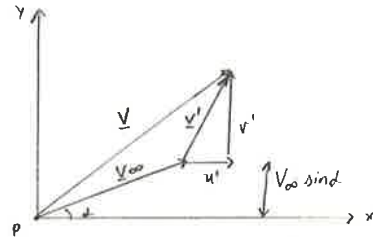


• Profilo sottile generico:

lamina curva senza spessore con incidenza (distr. vortici)

+

profilo simmetrico con spessore senza d (distr. sorgenti)

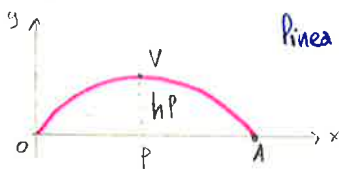


- cambiamento variabili:  $x = \frac{p}{2} (1 - \cos \theta) \quad \theta, \theta' \in [0, \pi]$

$$x' = \frac{p}{2} (1 - \cos \theta') \quad x, x' \in [0, p]$$

es. ① profilo ad arco di parabola

$$h = \frac{y_{max}}{p} = 3,75\% \quad \alpha_{id} = ? \quad \alpha_0 = ? \quad C_{p, id} = ? \quad C_{m_0} = ? \quad C_p(x) = ? \quad \text{per } d = d_{id}$$



linea media  $\equiv$  profilo  $x$  ke spessore nullo  $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

parabola:  $y = ax^2 + bx + c$  per  $O(0,0), V(\frac{p}{2}, h), A(p,0)$

$$\Rightarrow y = 4h \left(x - \frac{x^2}{p}\right) \quad \frac{dy}{dx} = 4h \left(1 - \frac{2x}{p}\right)$$

cambio variabili:

$$\frac{dy}{dx} = 4h \cos \theta = y'(\theta) = \frac{dy}{d\theta}(\theta)$$

→ eq.ni lamina curva con incidenza:

$$\alpha_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 4h \cos \theta d\theta = 0$$

$$\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) \cos \theta d\theta = 4h \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{8h}{2\pi} \left( \int_0^\pi d\theta + \int_0^\pi \cos(2\theta) d\theta \right) = 4h = 0,15$$

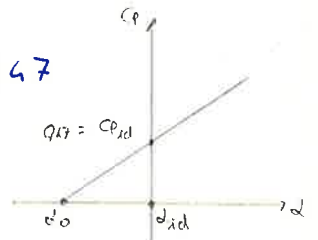
$$\alpha_0 = -0,075 \text{ rad} = -4,30^\circ$$

$$90^\circ: 180^\circ = r^{\text{rad}}: \pi^{\text{rad}}$$

$$C_p = 2\pi \left( d - d_{id} + \frac{A_1}{2} \right) = \pi A_1 = 4\pi h = 0,47$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) \cos(2\theta) d\theta = 0$$

$$C_{m_0} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) = -\frac{\pi}{4} A_1 = -0,118$$



• essendo lamina curva: → distribuzione di vortici:  $C_{p+}(x) = -C_{p-}(x)$

$$C_{p+}(x) = -\frac{2u'_+(x)}{V_\infty} = -\frac{\gamma(x)}{V_\infty}$$

$$\gamma(\theta) = 2V_\infty \left( A_0 \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) \cos(n\theta) d\theta = 4h \frac{2}{h} \int_0^\pi \cos \theta \cos(n\theta) d\theta = 0 \quad \text{se } n \geq 2$$

### es. ③ Profilo a doppia curvatura

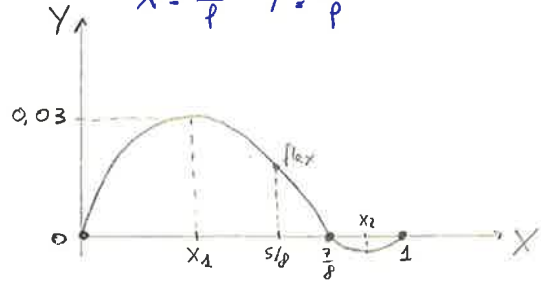
lamina curva senza spessore con forma ad arco di parabola cubica:

$$Y = \frac{1}{4} X(X-1)\left(X - \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{4} \left( X^3 - \frac{15}{8} X^2 + \frac{7}{8} X \right)$$

coordinate adimensionali:

$$X = \frac{x}{l} \quad Y = \frac{y}{l}$$

- diagrammare il profilo  $Y(x)$
- calcolare inarcamento percentuale:  $h = y_{max}/l$
- calcolare  $d_{id}$ ,  $d_o$ ,  $C_{pid}$ ,  $C_{m_o}$



punti in cui  $Y=0$

$$X=0 \text{ (bordo d'attacco)}$$

$$X=1 \text{ (bordo di fuga)}$$

$$X = \frac{7}{8}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dX} = \frac{1}{4} \left( 3X^2 - \frac{30}{8} X + \frac{7}{8} \right) = 0$$

$$X_1 = \frac{30/8 - \sqrt{(30/8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7/8}}{6} = 0,3104$$

$$Y(X_1) = 0,0302$$

$$Y(X_2) = -9,1654 \cdot 10^{-4}$$

$$X_2 = \frac{30/8 + \sqrt{(30/8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7/8}}{6} = 0,9396$$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{4} \left( 6X - \frac{30}{8} \right) \rightarrow X = \frac{5}{8} \text{ PT. di flesso } \rightarrow \pi x < \frac{5}{8} \vee x > \frac{5}{8}$$

$$h = \frac{y_{max}}{l} = Y_{max} = Y(X_1) = 0,0302 = 3,02\%$$

cambio variabili:  $X = \frac{1}{2} (1 - \cos\theta) \quad Y'(\theta) = \frac{1}{16} \left( -1 + \frac{3}{2} \cos\theta + 3 \cos^2\theta \right)$

integrali particolari:

$$\int_0^\pi \cos\theta d\theta = \int_0^\pi \cos(2\theta) d\theta = \int_0^\pi \cos^3\theta d\theta = \int_0^\pi \cos\theta \cos(2\theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^\pi \cos^3\theta d\theta = \pi/2 \quad \int_0^\pi \cos^4\theta d\theta = \frac{3}{8} \pi$$

$$d_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Y'(\theta) d\theta = \frac{1}{16\pi} \int_0^\pi \left( -1 + \frac{3}{2} \cos^2\theta \right) d\theta = \frac{1}{16\pi} \left( -\pi + \frac{3}{2}\pi \right) = \frac{1}{32} = 0,03125 \text{ rad} = 1,79^\circ$$

$$d_o = d_{id} - \frac{A_1}{2} \quad A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Y'(\theta) \cos\theta d\theta = \frac{2}{16\pi} \int_0^\pi \frac{3}{2} \cos^2\theta d\theta = 0,09375 \Rightarrow d_o = -0,01563 \text{ rad} = -0,90^\circ$$

$$C_{pid} = 2\pi \frac{A_1}{2} = 0,295 \quad C_{m_o} = -\frac{\pi}{2} (A_1 - A_2)$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Y'(\theta) \cos(2\theta) d\theta = \frac{2}{16\pi} \int_0^\pi 3 \cos^2\theta \cos(2\theta) d\theta = \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi \cos^2\theta (\cos^2\theta - \sin^2\theta) d\theta = \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi \cos^2\theta (2\cos^2\theta - 1) d\theta$$

axis equal  
xlabel('x')

ylabel('Y\_m(x)')

title('Linea media del profilo NACA 6312')

$$dY_1 = 2 * h * (m - X_1) / m^2;$$

$$dY_2 = 2 * h * (m - X_2) / (1 - m)^2;$$

$$dY = [dY_1 \ dY_2];$$

$$\theta = \arccos(1 - 2 * X);$$

$$\alpha_{id} = 1 / \pi * \text{trapz}(\theta, dY);$$

$$A_1 = 2 / \pi * \text{trapz}(\theta, dY * \cos(\theta));$$

$$A_2 = 2 / \pi * \text{trapz}(\theta, dY * \cos(2 * \theta));$$

$$\alpha_{0} = \alpha_{id} - A_1 / 2;$$

$$C_{m0} = -\pi / 4 * (A_1 - A_2);$$

$$C_{l-id} = 2 * \pi * A_1 / 2;$$

es. 6 Lamina Piana  $\rho = 0.8 \text{ m}$   $V_{\infty} = 20 \text{ m/s}$   $\alpha = 4^\circ$   $\Gamma = ?$   $C_p^+ = ?$   $C_p^- = ?$   $\Delta C_p = ?$

senza spessore:  $\Rightarrow$  distribuzione di vortici:

$$\gamma(\theta) = 2V_{\infty} \left[ A_0 \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} + \sum_1^{\infty} A_n \sin(n\theta) \right] \quad A_0 = \alpha - \alpha_{id} \quad \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \alpha_{id} = 0 \Rightarrow A_n = 0 \text{ per } n \neq 1$$

$\Rightarrow \gamma(\theta) = 2V_{\infty} \alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$  . La circolazione è uguale all'intensità di tutti i vortici concatenati

$$\Gamma = \int_0^l \gamma(x) dx = \int_0^{\pi} \gamma(\theta) \frac{l}{2} \sin\theta d\theta = V_{\infty} \alpha l \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta) d\theta = V_{\infty} \alpha l \pi = 20 \frac{4\pi}{180} 0.8 \pi = 3.509 \text{ m}^2/\text{s}$$

avendo cambiato variabile  $\rightarrow dx = \frac{l}{2} \sin\theta d\theta$   $C_p^+(x) = -C_p^-(x)$

$$C_p^+(\theta) = -\frac{\gamma(\theta)}{V_{\infty}} = -2\alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \quad \rightarrow \Delta C_p = C_p^- - C_p^+ = -2C_p^+ = 4\alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

usando le trasformazioni conformi:

lamina piana  $\rightarrow$  da cerchio di raggio  $a$  centrato in  $O$ . Lamina ha lunghezza  $4a \Rightarrow a = l/4$

$$\Gamma = 4\pi \alpha V_{\infty} \sin\alpha = 3.506 \text{ m}^2/\text{s} \text{ essendo perturb. piccole } \sin\alpha \approx \alpha$$

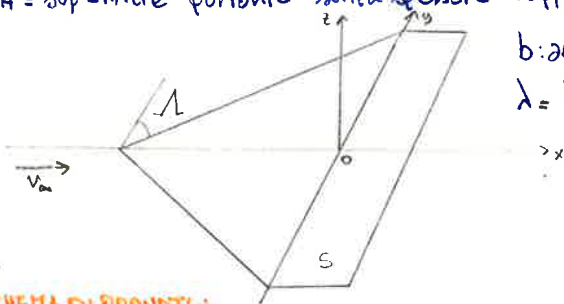
$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_{\infty}}\right)^2 \rightarrow \text{lamina piana e piccole incidenze: } V = V_{\infty} \left(1 + \alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}\right)$$



## ESERCITAZIONE 6: ALI AD ALLUNGAMENTO FINITO

• ipotesi di applicabilità della teoria delle piccole perturbazioni: ogni sezione di piccolo incremento, sottile ed investita con piccola incidenza.

ALA = superficie portante senza spessore rappresentata da distribuzione di filetti vorticosi



b: apertura alare S: proiezione sul piano (x,y) della superficie alare.  
 $\lambda = b^2/S$  allungamento alare.

### SCHEMA DI PRANDTL:

valido per ali di grande allungamento  $\lambda$ , per piccoli  $\Lambda$ .  $w'_i(y)$  piccola rispetto a  $V_\infty$   
 eq. integrodifferenziale: eq. ne integrodiff. di Prandtl

$$\Gamma(y) = k(y) \pi V_\infty f(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i(y)] \quad \text{CIRCUITAZIONE LUNGO L'APERTURA ALARE}$$

• k: correzione valore teorico ( $2\pi$ ) del coeff. ang. di portanza:  $k < 1$

•  $f(y)$ : dipendenza da y x tutte le ali rastremate

•  $\alpha_a$ : incidenza aerodinamica,  $\alpha_a = \alpha - \alpha_0$  dipende da y in 2 modi:

- svergolamento geometrico,  $\alpha(y)$
- ala a profilo variabile,  $\alpha_0(y) \rightarrow$  svergolamento aerodinamico.

•  $\alpha_i$ : incidenza indotta:  $\alpha_i = \tan^{-1} \left( -\frac{w'_i(y)}{V_\infty} \right) \approx -\frac{w'_i(y)}{V_\infty}$

### -distribuzione ellittica di portanza:

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi \lambda} \quad \text{angolo di incidenza indotta è costante lungo y.}$$

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda}$$

$$C_L = \frac{\pi \lambda \Gamma_0}{2b V_\infty}$$

→ valore di circuitazione in mezz'ala dell'ala

$$C_P = 2\pi k (\alpha - \alpha_0) \quad C_L < C_P \quad C_{Di} < C_P$$

### Ala con profilo ellittico

$$C_L = \frac{2\pi k (\alpha - \alpha_0)}{1 + 2k/\lambda}$$

$$C_L^* = C_L (\alpha - \alpha_0)$$

$$C_L^* = \frac{2\pi k}{1 + 2k/\lambda} = \frac{C_P^*}{1 + 2k/\lambda}$$

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi \lambda} \quad C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda}$$

ali con PIANA ellittica: e.s. ①

$\Gamma_0 = 1,5 \text{ m}$ : corda max di mezz'ala  $b = 10,4 \text{ m}$   $\alpha_0 = -2,98^\circ$   $C_P^* = 6,12$   $\alpha = 6^\circ$   $C_L = ?$   $\alpha_i = ?$   $C_{Di} = ?$

$\alpha_a = \alpha - \alpha_0 = 8,98^\circ = 0,1567 \text{ rad}$   $\lambda = b^2/S$  S: superficie ellisse con semiasse  $\Gamma_0/2$  e  $\frac{b}{2}$

$$S = \pi \frac{\Gamma_0}{2} \frac{b}{2} = 11,25 \text{ m}^2 \Rightarrow \lambda = 8,83 \quad 2\pi k = C_P^* \Rightarrow k = 0,974 \Rightarrow C_L = \frac{2\pi k \alpha_a}{1 + 2k/\lambda} = 0,7857$$

$$\alpha_i = \frac{C_L}{\pi \lambda} = 0,02832 \text{ rad} = 1,623^\circ \quad C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} = 0,02225$$

$$\alpha_{0-4} = \alpha_{a-0-4} / \pi \cdot 180 + \alpha_{0-0} * ones(1, length(y));$$

$$\alpha_{0-6} = \alpha_{a-0-6} / \pi \cdot 180 + \alpha_{0-0} * ones(1, length(y));$$

Figure

```
plot(y, alpha_0_4, 'b', 'Linewidth', 2)
```

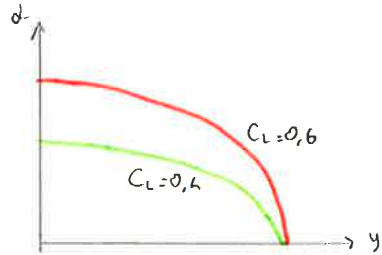
hold on

```
plot(y, alpha_0_6, 'r', 'Linewidth', 2)
```

```
xlabel('y', 'FontSize', 18)
```

```
ylabel('alpha', 'FontSize', 18, 'Rotation', 0)
```

```
legend('alpha(y) C_L=0.4', 'alpha(y) C_L=0.6')
```



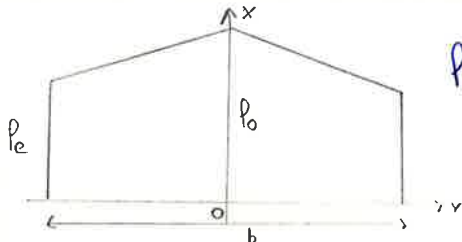
$\Delta\alpha = \alpha(y)_{C_L=0.6} - \alpha(y)_{C_L=0.4}$  non è costante lungo l'apertura alare. Per passare da  $\alpha(y)_{C_L=0.4}$  a quello con  $C_L=0.6$  dovrei aumentare l'incidenza di tutta l'ala, cioè aumentare ogni sezione di un  $\Delta\alpha$  costante.  $\rightarrow$  perdo distribuzione ellittica

- 2 modi x ottenere distrib. ellittico di portanza:
  - ala non svergolata ed ellittica in pianta  $\rightarrow$  distribuzione è ellittica a tutte le incidenze
  - ala svergolata (piano non ellittico)  $\rightarrow$  distrib. ellittica solo x una ben determinata incidenza dell'ala  $\Rightarrow$  per un certo  $C_L$ .

**es. ② Ala trapezia con distribuzione ellittica**

$\lambda = 9,5$  Rap. di rastremazione =  $2/3$   $\alpha_0 = \text{cost.}$   $\alpha_0 = -1,45^\circ$   $k = 0,95$   $\alpha(y)$  / distr. dipart. ellittica

$C_L = 0.4$   $C_L = 0.6$  determinare  $\alpha(y = 0,6b/2)$



$P_e = \frac{2}{3} P_0$  assumo variazione lineare x rastremazione

$$\begin{cases} P(y) = Ay + B \\ y=0 \text{ per } P=P_0 \\ y=b/2 \text{ per } P=\frac{2}{3}P_0 \end{cases} \quad P(y) = P_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{y}{b}\right)$$

$$S = 2(P_0 + P_e) \frac{b}{2} \frac{1}{2} = \frac{5}{6} P_0 b$$

come prima  $M(y) = Prondt \rightarrow \alpha_a(y) = \frac{C_L}{\pi \lambda} + \frac{\Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}}{k \pi V_\infty P_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{y}{b}\right)}$   $C_L = \frac{\pi \lambda \Gamma_0}{2b V_\infty}$   $\lambda = \frac{6}{5} \frac{b}{P_0}$

$$\alpha_a(y) = \frac{C_L}{\pi \lambda} \left[ 1 + \frac{5}{3} \frac{\lambda \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}}{\pi k \left(1 - \frac{2}{3} \frac{y}{b}\right)} \right] \quad \alpha(y) = \alpha_0 + \alpha_a(y)$$

$C_L = 0,4$   $\alpha_a(y = 0,6b/2) = 0,0845 \text{ rad} = 4,8445^\circ \rightarrow \alpha(y = 0,6b/2) = 3,3915^\circ$

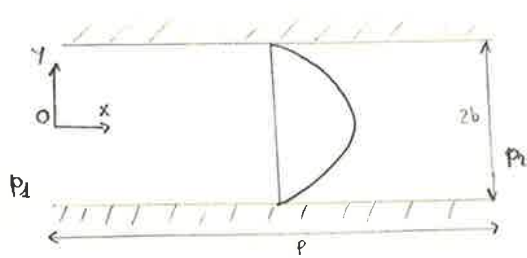
$C_L = 0,6$   $\alpha_a(y = 0,6b/2) = 0,1268 \text{ rad} = 7,2627^\circ \rightarrow \alpha(y = 0,6b/2) = 5,0127^\circ$

$\alpha$  è quasi costante per  $0 \leq y \leq 0,7b/2$  grazie alla rastremazione. Svergolamento accentratosi solo alle estremità

## ESERCITAZIONE 7: Soluzioni esatte per N.S.

1)  $v = w = 0$  da 1)  $\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$   $u(y, z, t)$   
 2) da 3), 4)  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$   $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$  da 2)  $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$  lineare

Flusso nel canale piano (POISEUILLE): flusso stazionario,  $P \gg 2b$

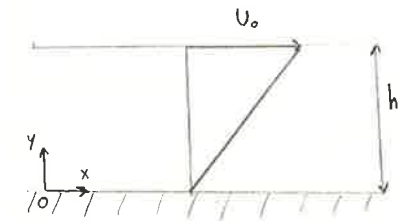


da 3)  $\left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \\ u &= 0 \text{ per } y = \pm b \end{aligned} \right.$   $P_1 > P_2$  unica causa del flusso

$\Rightarrow u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2)$  Profilo parabolico

Flusso di COUETTE: supponiamo che ci sia anche  $\frac{dp}{dx}$  da 5)  $\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dy^2} &= \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \\ u &= 0 \text{ per } y = 0 \\ u &= U_0 \text{ per } y = h \end{aligned} \right.$

$\Rightarrow u(y) = \frac{U_0}{h} y + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy)$  se  $U_0 = 0$  si ricade in Poiseuille



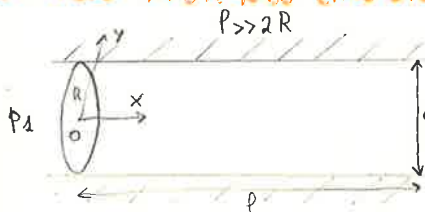
se  $U_0 \neq 0$  con  $\frac{dp}{dx} < 0$  GRADIENTE favorevole

$\frac{dp}{dx} = 0$  flusso di Couette semplice:

con  $\frac{dp}{dx} > 0$  " INVERSO

$u(y) = \frac{y}{h} U_0$  profilo lineare

Flusso in un tubo circolare: HAGEN-POISEUILLE o PIPEFLOW: flusso stazionario



$v = w = 0$

da N.S. in coordinate cilindriche (x: assiale, y: radiale,  $\phi$ : azimutale) rimane solo quello in direzione x:

$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{y} \frac{\partial u}{\partial \phi} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$

$\left\{ \begin{aligned} \mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{du}{dy} \right) &= \frac{dp}{dx} \\ u &= 0 \text{ per } y = R \quad 0 < \theta < 2\pi \end{aligned} \right.$

$\Rightarrow u(y) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - y^2)$  Parabolicoide

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right) \Rightarrow \left|\frac{dp}{dx}\right| = \frac{8\mu Q}{\pi R^4} = 889,1926 \text{ Pa/m}$$

es. ③ flusso di Couette piono,  $h=1\text{mm}$ ,  $\mu=0,0134 \text{ kg/ms}$ ,  $U_0=0,1 \text{ m/s}$   $\tau = \mu \frac{du}{dy} = ?$

per: 1)  $\frac{dp}{dx} = 0$

2)  $\frac{dp}{dx} = -2680 \text{ Pa/m}$

3)  $\frac{dp}{dx} = +2680 \text{ Pa/m}$

$$u(y) = \frac{U_0}{h} y + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy)$$

$$\tau(y) = \mu \frac{du}{dy} = \mu \left[ \frac{U_0}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (2y - h) \right]$$

su parete superiore  
e graficare in  
MATLAB

1) sforzo di taglio costante se  $\frac{dp}{dx} = 0$  (Couette semplice)

$$\tau_{y=h} = \tau = \mu \frac{U_0}{h} = 1,34 \text{ Pa}$$

2)  $\tau_{y=h} = 0$

3)  $\tau_{y=h} = 2,68 \text{ Pa}$

es. ④ come olio:  $\mu=0,008 \text{ kg/ms}$   $\rho=860 \text{ kg/m}^3$   $d=6 \text{ cm}$

$Q_{max} = ?$  / Flusso laminare?  $L=500 \text{ m}$   $P_2=34000 \text{ Pa}$   $P_1=?$

olio:  $\rho=925 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu=0,09 \text{ kg/ms}$  allo stesso velocità il flusso sarebbe ancora laminare?

Affinché il flusso sia laminare, assumiamo  $Re_c = 2000$

$$\bar{u} = \frac{Re_c \nu}{d} = 0,3101 \text{ m/s} \quad Q = \bar{u} \pi R^2 = 8,7672 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu Q}{\pi R^4} = -22,05 \text{ Pa/m} \quad \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{P_2 - P_1}{L} = -22,05 \text{ Pa/m} \quad P_1 = P_2 + 22,05 L = 45025 \text{ Pa}$$

$$Re_2 = \frac{\bar{u} d}{\nu} = 191 \quad Re_2 < Re_c \quad \text{Flusso è ancora laminare.}$$

es. ⑤ tubo circolare  $Q=500 \text{ cm}^3/\text{s}$   $R=1 \text{ cm}$   $\frac{\Delta P}{L} = 1274 \text{ Pa}$   $L=10 \text{ m}$  che fluido è?

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx}\right) \quad \left|\frac{dp}{dx}\right| = \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\Delta P}{L} = \frac{1274}{10} \text{ Pa/m} \Rightarrow \mu = \frac{\pi R^4}{8Q} \left(\frac{\Delta P}{\Delta x}\right) = 0,001 \text{ kg/ms}$$

H<sub>2</sub>O



Dall'eq. di Von Kármán (q.d.m. integrale) per lo strato limite 2D incomprimibile valido sia in lam. che turb.

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (U_\infty^2 \theta) + \delta^* U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \quad \text{in questo caso } \frac{dU_\infty}{dx} = 0$$

$$U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho} \rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} c_f \rightarrow \frac{4-\pi}{2\pi} \frac{d\delta}{dx} = \frac{\pi}{2} \frac{\nu}{U_\infty \delta} \rightarrow 2\delta d\delta = \frac{2\pi^2}{4-\pi} \frac{\nu}{U_\infty} dx \quad \text{integ}$$

$$\delta(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \text{integrando: } \delta^2 = \frac{2\pi^2}{4-\pi} \frac{\nu}{U_\infty} x + c \quad \left| \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}} \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} = 4,80 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \rightarrow \delta = 4,80 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$c_f = \pi \frac{\nu}{U_\infty \delta} = \frac{\pi}{4,80} \frac{\nu}{U_\infty} \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \rightarrow c_f = \frac{0,655}{\sqrt{Re_x}} \quad \theta = \frac{4-\pi}{2\pi} \delta = \frac{4-\pi}{2\pi} 4,80 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \rightarrow \theta = 0,656 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

- displacement thickness:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \frac{2\delta}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin\eta) d\eta = \frac{2\delta}{\pi} (\eta + \cos\eta) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \delta \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi-2}{\pi} \delta$$

$$\Rightarrow \delta^* = 1,746 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{shape factor: } H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2,66$$

con Blasius:  $\delta = 5,0 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad c_f = \frac{0,664}{\sqrt{Re_x}} \quad \theta = 0,664 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad \delta^* = 1,7208 \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \quad H = 2,59$

=> Caratteristiche strato limite con profilo sinusoidale varranno poco rispetto a quelle con profilo Blasius.

es. 2) **strato limite laminare su lamina piana**

L, b  $D = 2b\rho U_\infty^2 \theta(L)$  su entrambe pareti. Verificare che soluzione ottenuta consistente con B.

$$D = 2b \int_0^L \tau_w(x) dx \quad \text{per la soluzione di Blasius: } \tau_w(x) = 0,332 \mu U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} = 0,332 \sqrt{\frac{\rho \mu U_\infty^3}{x}}$$

$$\Rightarrow D = 2 \cdot 0,332 b \sqrt{\rho \mu U_\infty^3} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot 0,332 b \sqrt{\rho \mu U_\infty^3} 2\sqrt{x} \Big|_0^L = 1,328 b \sqrt{\rho \mu U_\infty^3} L$$

da Blasius: 2)

$$\theta(x) = 0,664 \sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}} \Rightarrow D = 2b\rho U_\infty^2 0,664 \sqrt{\frac{\nu L}{U_\infty}} = 1,328 b \sqrt{\rho \mu U_\infty^3} L$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho S U_\infty^2} = \frac{U_\infty 1,328 b \sqrt{\rho \mu U_\infty^3} L}{\frac{1}{2} \rho 2b L U_\infty^2} = \frac{1,328 \sqrt{\mu}}{\sqrt{\rho L U_\infty}} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} \quad \text{non risente del fatto che resistenza è calcolata su uno o due lati}$$

• Calcolare la portata in massa attraverso lo strato limite lungo x:

$$Q_m(x) = \rho \int_0^{\infty} u(x,y) dy = \rho \sqrt{\frac{2\nu x}{U_{\infty}}} \int_0^{\infty} u(\eta) d\eta \quad \text{e in } x=L$$

Suggerimenti:

• Far coincidere il bordo d'attacco (x=0) con l'origine degli assi O(0,0)

∴ spessore di momento, theta(x)

• usare trapz

clear all;

close all;

U\_inf = 2;

L = 4;

b = 2;

rho = 1.164;

nu = 1.6 \* 10^-5;

mu = nu \* rho;

x = 0 : .001 : L;

eta = [0 : .1 : 1.9 2 : 0.2 : 6];

f = [ ... tutti i valori tabella ];

f1 = [ ... " " ];

% visualizzatore u(eta)

u = U\_inf \* f1;

figure

plot(eta, u)

xlabel('eta')

ylabel('u')

% V all'esterno dello strato limite

indice = find(eta == 5)

v\_est = 0.5 \* sqrt(2 \* nu \* U\_inf ./ x) \* (eta(indice) \* f1(indice) - f(indice));

figure

plot(x, v\_est);

xlabel('x')

ylabel('v\_{est}')

fprintf('Velocità trasversale v esterno strato limite in x=L: % f [m/s] \n', v\_est(end))

% spessore di spostamento delta\*(x)

delta\_star = sqrt(2 \* nu \* x / U\_inf) \* trapz(eta, 1 - f1);

figure

plot(x, delta\_star)

xlabel('x')

ylabel('delta\*')

theta = sqrt(2 \* nu \* x / U\_inf) \* trapz(eta, f1 \* (1 - f1));

figure

plot(x, theta)

% follow di forma, H

xlabel('x')

H = delta\_star(end) / theta(end);

ylabel('theta')

% sforzo di taglio a parete

tau\_w = 0.332 \* mu \* U\_inf \* sqrt(U\_inf ./ (x \* nu));

figure

plot(x, tau\_w) xlabel('x') ylabel('tau\_w')

fprintf('Sforzo di taglio a parete in x=L: % f [N/m^2] \n', tau\_w(end))

% Resistenza d'attrito

D = b \* trapz(x(2:end), tau\_w(2:end));

fprintf('Resistenza attrito lato superiore: % F [N] \n', D)

% Portata in massa Q\_m

Q\_m = rho \* sqrt(2 \* nu \* x / U\_inf) \* trapz(eta, u);

figure

plot(x, Q\_m) xlabel('x') ylabel('Q\_m')

fprintf('Portata in massa in x=L: % f [kg/s] \n', Q\_m(end));

ESERCITAZIONE 9: Flussi turbolenti

es. ① CONDOTTO TURBOLENTO

Corrente di H<sub>2</sub>O ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) scorie in  $D = 2R = 0,1 \text{ m}$   $Q = 9,07854 \text{ m}^3/\text{s}$   
 Pareti lisce.

- 1)  $\bar{U} = ?$   $Re = \frac{\bar{U}D}{\nu} = ?$  Verificare se flusso turbolento o laminare
- 2)  $\lambda = ?$   $u_2 = ?$   $U_0$  (nel centro del condotto), stimare spessore del sottostato viscoso.
- 3)  $c_w = ?$ ,  $\frac{dP}{dx} = ?$
- 4) Valore dello stress turbolento a parete ( $r=R$ ) e sull'asse ( $r=0$ )

1)  $\bar{U} = \frac{Q}{\pi R^2} = 10 \text{ m/s}$   $\rightarrow Re = \frac{\bar{U}D}{\nu} = 10^6 \gg 10^3$  ( $Re_{cr} = 2300$ ) flusso turbolento

2) "Prandtl's friction law": legge universale verificata sperimentalmente fino a  $Re = 4 \cdot 10^6$

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2,0 \log_{10} (Re \sqrt{\lambda}) - 0,8$   $\rightarrow$  uso procedura iterativa x trovare  $\lambda$

valore di partenza  $\lambda^0 \rightarrow$  Blasius:  $\lambda = 0,3164 \frac{1}{Re^{1/4}}$

valido x  $Re < 10^5$

valore di guess al passo iniziale è  $\lambda^0 = 0,01$

valore di  $\lambda$  al passo precedente

$\lambda = (2,0 \log_{10} (Re \sqrt{\lambda}) - 0,8)^{-2}$   $\lambda^{n+1} = (2,0 \log_{10} (Re \sqrt{\lambda^n}) - 0,8)^{-2}$

n	$\lambda$
0	0,01
1	0,011815
2	0,011634
3	...
4	...
5	0,0116465

$\lambda = 0,0116465$

$u_2 = \frac{c_w}{\rho}$

$c_w = \frac{1}{2} \rho \bar{U}^2 C_f$

$C_f$ : sforzo di taglio a parete adimensionale

Per il condotto turbolento:  $C_f = \frac{\lambda}{4}$

$u_2 = \frac{1}{2} \bar{U}^2 C_f = \frac{1}{2} \bar{U}^2 \frac{\lambda}{4} \Rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \bar{U} = 0,3816 \text{ m/s}$

$\frac{U_0 - \bar{U}}{u_2} = \frac{3}{2k} \approx 3,66$

$k = 0,41$  costante di Van Kermom

$\Rightarrow U_0 = 4,07 \cdot u_2 \rightarrow \bar{U} = 11,5531 \text{ m/s}$

Lo stima corretta da misure sperimentali  $\rightarrow \approx 4,07$

Per il calcolo del sottostato viscoso:  $y = R - r$  ( $r$ : direzione radiale) cambio coordinate

$\delta_v = \frac{\nu}{u_2} = 0,0026 \text{ mm}$

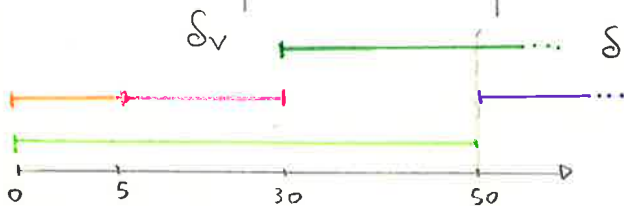
il sottostato si estende fino a  $\delta_v$  (sottole viscoso)

$y^+ = \frac{y}{\delta_v} = \frac{u_2 y}{\nu} = 5$

$\Rightarrow y = 5 \delta_v = 0,013 \text{ mm}$

Regione	Posizione	Caratteristiche
sottostato viscoso	$y < 5 \delta_v$	$\tau_{turb} \ll \tau_{visc.}$
buffer layer	$5 \delta_v < y < 30 \delta_v$	tra il sottostato e la regione di legge logaritmica
regione di legge logaritmica	$y > 30 \delta_v$ e $y < 0,3 \delta$	vale la legge logaritmica
regione viscosa di parete	$y < 50 \delta_v$	$\tau_{visc}$ significativo rispetto a $\tau_{tot}$ . → effetto diretto viscosità
strato esterno	$y > 50 \delta_v$	effetto diretto della viscosità su $\tau_{tot}$ è trascurabile

• Per  $y < 50 \delta_v$  scelta appropriata:  $\delta_v$   
 • Per  $y > 50 \delta_v$  + appropriato  $\delta$



es. ③ CONDOTTO TURBOLENTO (pareti liscie)  $D = 50 \text{ mm}$   $\nu = 0,892 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ Kg/m}^3$

$\tau_w = 5,2312 \text{ N/m}^2$   $\bar{U} = ?$   $\lambda = ?$  - Usare Blasius verificando a posteriori l'applicabilità

$$u_z = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \bar{U} \quad \tau_w = \rho u_z^2 \quad \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \bar{U} \quad \text{B. x } \lambda: \lambda = 0,3164 \frac{1}{Re^{1/4}}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{\lambda}{8} \bar{U}^2 = \frac{0,3164}{8} \frac{1}{Re^{1/4}} \bar{U}^2 \quad \frac{\tau_w}{\rho} \frac{\rho}{0,3164} = \frac{\bar{U}^2}{(\frac{\bar{U} D}{\nu})^{1/4}} \Rightarrow \bar{U}^{7/4} = \frac{\tau_w}{\rho} \frac{\rho}{0,3164} \left(\frac{\nu}{D}\right)^{-1/4}$$

$\bar{U} = 1,5 \text{ m/s}$   $Re = 8,4081 \cdot 10^4 < 10^5$  Blasius OK  $\rightarrow \lambda = 0,0186$

es. ④ (strato limite turbolento su lamina piana)

profilo approssimato da legge:

$$\frac{U(x,y)}{U_\infty} = \begin{cases} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} & \text{se } y \leq \delta(x) \\ 1 & \text{se } y > \delta(x) \end{cases}$$

Dimostrare che:

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{n+1} \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

$$H = 1 + \frac{2}{n}$$

Dalla DEF:

$$\begin{aligned} \delta^*(x) &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}\right) dy = \int_0^\delta dy - \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} dy = \delta - \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/n} \int_0^\delta y^{1/n} dy = \\ &= \delta - \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/n} \frac{y^{1/n+1}}{\frac{1}{n}+1} \Big|_0^\delta = \delta - \frac{\delta^{-1/n} \cdot \delta^{1/n+1}}{\frac{n+1}{n}} \quad \frac{\delta^*}{\delta} = 1 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$



es. ⑤ strato limite turbolento su lamina piana

$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$   $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$   $L = 6 \text{ m}$   $b = 1 \text{ m}$  corrente con velocità  $20 \text{ km/h}$

- strato limite completamente turbolento da subito calcolare resistenza su un lato della lamina.
- Stimare spessore strato limite a bordo di fuga. • Usare legge di potenza  $1/5$  e dire perché
- $C_f = ?$  in funzione di  $Re_x$

$$U_\infty = \frac{20 \cdot 1000}{3600} = 5,5556 \text{ m/s} \Rightarrow Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ è nel range } 5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$$

$$C_D = \frac{0,076}{Re_L^{1/5}} = 0,0020 = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho (L \cdot b) U_\infty^2} \Rightarrow D = \frac{1}{2} C_D \rho (L \cdot b) U_\infty^2 = 0,4425 \text{ N}$$

$$\delta(x) = 0,37 \times Re_x^{-1/5} \text{ in } x=L \quad \delta(L) = 0,37 \cdot L \cdot Re_L^{-1/5} = 0,1194 \text{ m}$$

dall'eq. di Von Karman:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \Rightarrow C_f = 2 \frac{d\theta}{dx} \quad \theta(x) = 0,036 \times \left(\frac{U_\infty x}{\nu}\right)^{-1/5} = 0,036 \times \frac{4/5}{\left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{-1/5}}$$

$$\text{derivando } \theta(x) \Rightarrow C_f = 2 \cdot 0,036 \cdot \frac{4}{5} \times \left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{-1/5} \Rightarrow \underline{C_f = 0,0576 Re_x^{-1/5}}$$

es. ⑥ strato limite turbolento su lamina piana

lunghezza  $2 \text{ m}$ , profondità  $1,5 \text{ m}$   $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$   $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$   $U_\infty = 2 \text{ m/s}$

- 1) estensione strato limite laminare sulla lamina. Calcolare spessore di strato limite al confine del laminare.
- 2) hyp: str. lim. completamente turb., calcolare spessore di strato limite  $\delta$  e  $C_w$  al bordo di fuga

$$1) Re_{cr} = 5 \cdot 10^5 \quad Re_{cr} = \frac{x_{cr} U_\infty}{\nu} \Rightarrow x_{cr} = \frac{Re_{cr} \nu}{U_\infty} = 0,25 \text{ m} \text{ per trovare } \delta(x_{cr}) \text{ uso soluzioni}$$

$$\text{di Blasius: } \delta_{cr} = 5 \frac{x_{cr}}{\sqrt{Re_{cr}}} = 0,0018 \text{ m}$$

$$2) Re_L = \frac{L U_\infty}{\nu} = 4 \cdot 10^6 \quad 5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7 \rightarrow \text{strato limite approssimabile alle legge di potenza } 1/5$$

$$\delta(x=L) = 0,37 L (Re_L)^{-1/5} = 0,0354 \text{ m} \quad C_w(x=L) = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 C_f(x=L)$$

$$C_f(x=L) = 0,0576 Re_L^{-1/5} = 0,0028 \Rightarrow C_w(x=L) = 5,4976 \text{ N/m}^2$$

3) Lamina piana  $L=3\text{ m}$   $b=1,5\text{ m}$

investito da a)  $\text{H}_2\text{O}$  ( $\nu=10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho=1000\text{ kg/m}^3$ )  $V_\infty=3\text{ m/s}$

b) ~~Aria~~ ( $\nu=1,5 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho=1\text{ kg/m}^3$ )  $V_\infty=2\text{ m/s}$

Calcolare resistenza totale della lamina nei 2 casi, stabilendo se il flusso è laminare o turbolento [se turbolento considerarlo completo dal bordo d'attacco]

b)  $Re_L = \frac{3 \cdot 2}{1,5 \cdot 10^{-5}} = 4 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5$  laminare  $\rightarrow$  uso Blasius  $D = 2b\rho V_\infty^2 \Theta(L)$

$\Theta(L) = 0,664 \frac{1}{\sqrt{Re_L}} = 0,0031\text{ m}$

$D = 2 \cdot 1,5 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 0,0031 = 0,0372\text{ N}$

a)  $Re_L = \frac{3 \cdot 3}{10^{-6}} = 9 \cdot 10^6$   $5 \cdot 10^5 < Re < 10^7$  uso legge di potenza  $\frac{1}{7}$

$D = 2b\rho V_\infty^2 \Theta(L)$   $\Theta(L) = 0,036 L (Re_L)^{-1/5} = 0,0044$   $D = 2 \cdot 1,5 \cdot 1000 \cdot 3^2 \cdot 0,0044 = 118,8\text{ N}$