



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1767A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Sacchiero Giulia

MATERIA: Aerodinamica applicata - prof. Di Cicca

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Aerodinamica
applicata
Di Cocco

Appunti delle lezioni

+

Riassunti teoria

+

Dimostrazioni per orale

+

Esempio esame scritto

+

Formulario per esame

2

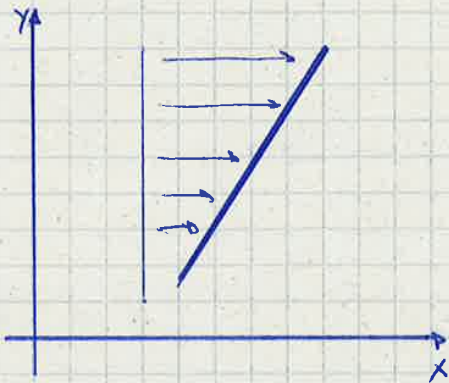
In un fluido in moto possiamo trovare, oltre al gradiente di velocità, anche quello di temperatura che induce un FLUSSO TERMICO CONDUTTIVO \vec{q}

La propagazione del calore avviene seguendo la LEGGE DI FOURIER

$$\vec{q} = -k \text{grad}T = -k \nabla T \quad (1)$$

↳ COEFFICIENTE DI CONDUCEBILITÀ

PROFILI DI VELOCITÀ



Lo sforzo di taglio risulta essere proporzionale alla rapidità di variazione della velocità nello spazio

$$\tau \propto \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2)$$

Il coefficiente di proporzionalità è chiamato VISCOSITÀ DINAMICA μ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{s}}\right] \left[\text{Pa}\cdot\text{s}\right]$

La (2) si può riscrivere come

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

ottenendo la LEGGE DI NEWTON

Possiamo inoltre definire la VISCOSITÀ CINEMATICA come $\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right]$

ARIA STANDARD

$$T = 15^\circ\text{C} = 288\text{K}$$

$$P = 760 \text{ mmHg} = 101325 \text{ Pa}$$

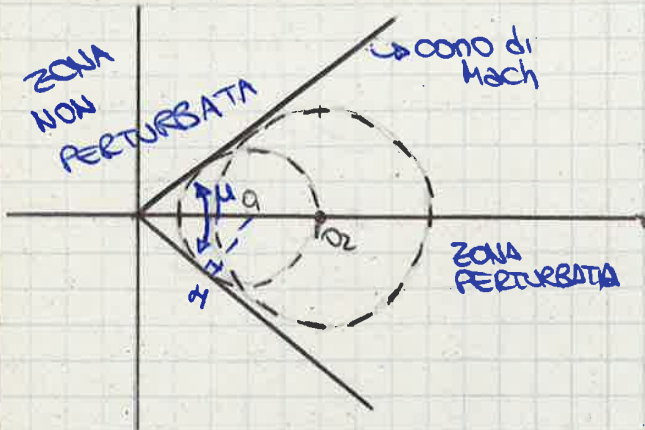
$$\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 1,459 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\mu = 1,781 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$k = 9026 \text{ W/m}\cdot\text{K}$$

9c) REGIME SUPERSONICO $v > c$



In questo caso la zona perturbata rimane all'interno del cosiddetto cono di Mach e non raggiunge mai il punto O

Possiamo andare a calcolare l'angolo di semiapertura μ

$$\sin \mu = \frac{OH}{OQ} = \frac{ct}{vt} = \frac{c}{v} = \frac{1}{M}$$

Possiamo quindi definire il parametro adimensionale NUMERO DI MACH $M = \frac{v}{c}$

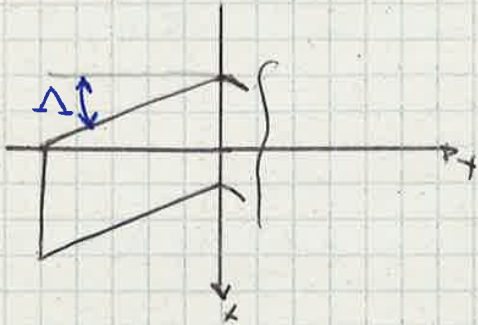
Conoscendo il n° di Mach possiamo conoscere anche le caratteristiche dei flussi:

- $M < 1 \rightarrow$ REGIME SUBSONICO
- $M = 1 \rightarrow$ " SONICO
- $M > 1 \rightarrow$ " SUPERSONICO

6 ALA AERODINAMICAMENTE SVERGOLATA

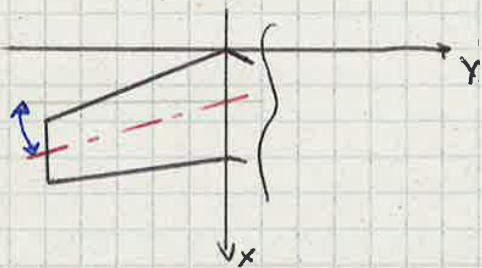
Le corde giacciono sullo stesso piano, ma il profilo cambia.
Si può avere anche una combinazione di entrambe le svergolature.

ALA A FRECCIA (NON RASTREMATA)



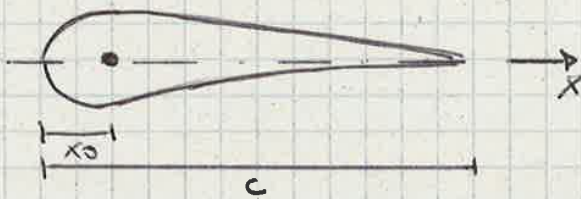
Δ = angolo di freccia

ALA A FRECCIA (RASTREMATA)



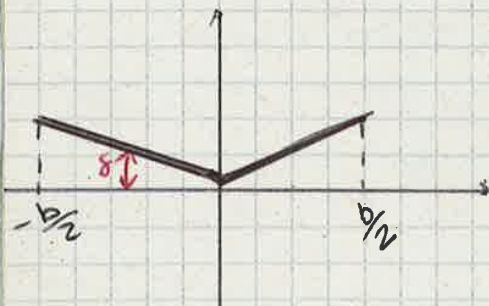
Per definire l'angolo di freccia che unisce i FUOCHI dei profili delle varie sezioni

FUOCO DEL PROFILO



$x_0 = 0.25 \cdot c$

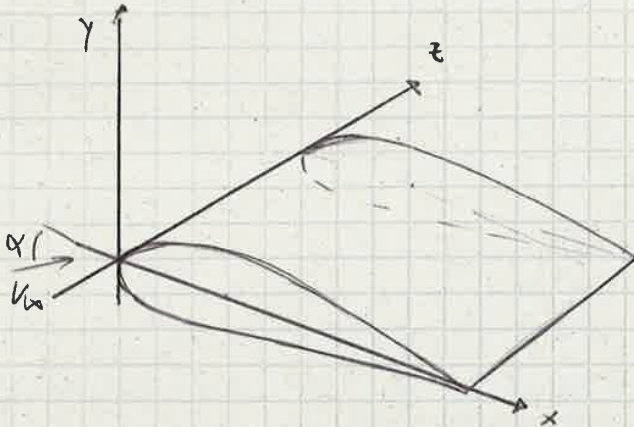
DIEDRO ALARE



δ : angolo di diedro

8 AZIONI AERODINAMICHE SU PROFILI ALARI

Consideriamo una spaziale della nostra ala di lunghezza finita

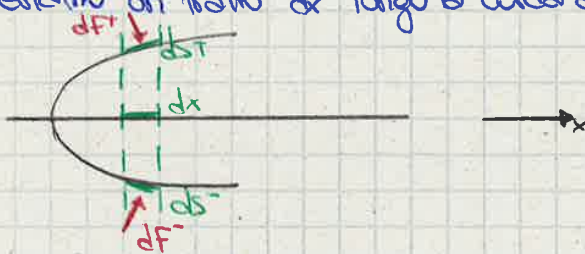


p^+ = pressione sul dorso
 p^- = pressione sul ventre

Di solito è più conveniente utilizzare le pressioni relative (relative alla pressione che agirebbe sull'ala se non fosse in moto)

$$p^+ = p_{rel}^+ \quad \text{oppure} \quad p^- = p_{rel}^-$$

Consideriamo un tratto dx lungo la corda del profilo



Le forze dF^+ e dF^- sono valutate approssimando l'aria a un fluido ideale ($\gamma=0$)

Quindi avremo $dF^+ = (p^+ - p_{rel}) \cdot ds^+ \cdot 1$ \hookrightarrow considero un profilo lungo 1m

$$dF^- = (p^- - p_{rel}) \cdot ds^- \cdot 1$$

Chiamiamo ora \vec{R} la risultante delle forze che agiscono sul profilo, e con σ la superficie che contoura il profilo

$$\vec{R} = - \int_{\sigma} p \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

\hookrightarrow vettore uscente dalla superficie e perpendicolare

$$\vec{R} = \left(- \int_{\sigma} (p - p_{rel}) \vec{n} \, d\sigma + \int_{\sigma} p_{rel} \vec{n} \, d\sigma \right)$$

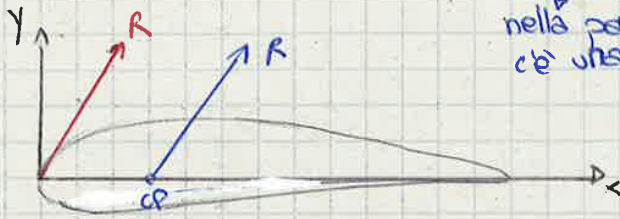
$\hookrightarrow 0 \rightarrow$ "PRESSIONE STATICA", ovvero le pressioni tra il profilo superiore e inferiore sono uguali e si compensano

$$\vec{R} = - \int_{\sigma} (p - p_{rel}) \vec{n} \, d\sigma$$

Se $\alpha \ll 1$ rad $\sin \alpha \cong \alpha$, $\cos \alpha \cong 1$ e $R_x \ll R_y$

Quindi $L = R_y \cos \alpha - R_x \sin \alpha \cong R_y$
 $D = R_x \cos \alpha + R_y \sin \alpha$

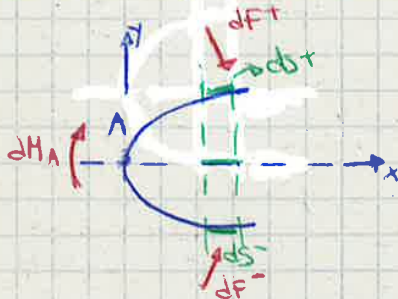
Quindi per piccoli angoli $L \cong R_y = \int_0^c [(p^+ - p^-) - (p^+ - p^-)] dx$



nella parte dorsale c'è depressione
 nella parte ventrale c'è una sovrappressione

↳ CENTRO DELLE PRESSIONI: se si sposta il centro di applicazione della risultante bisogna calcolare il momento che ne deriva

Calcoliamo quindi il momento rispetto al bordo d'attacco



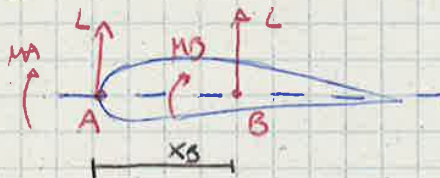
$dF_x \ll dF_y$

$dM_A = -dF_y^+ \cdot x - dF_y^- \cdot x$

Quindi $dM_A = + (p^+ - p^-) x dx - (p^+ - p^-) x dx$

$M_A = \int_0^c [(p^+ - p^-) - (p^+ - p^-)] x dx$

Come calcolo il momento in un punto che non sia il bordo di attacco?



$M_S = M_A + L x_B$

NS del momento che il momento nel centro di pressione deve essere nullo, posso calcolare il centro di pressione la posizione

$M_A + L x_{cp} = 0 \rightarrow x_{cp} = -\frac{M_A}{L}$

Il centro di pressione varia posizione al variare dell'incidenza

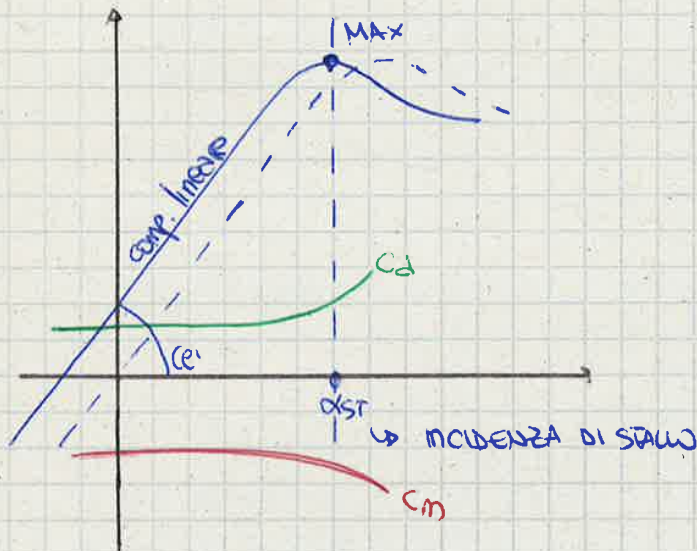
Solitamente ci si riferisce al fuoco del profilo perché al variare dell'incidenza si mantiene costante, si parla allora di MOMENTO FOCALE

Se invece parliamo di un profilo obbro avremo invece

$$c_e = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 c(d)}$$

$$c_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 c}$$

$$c_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 c^2}$$



$\alpha_0 =$ INCIDENZA DI PORTANZA
NULLA

↓
se il profilo è simmetrico (tratteggiato)
 $c_e = 0$ per $\alpha = 0$

se il profilo non è simmetrico
 $c_e = 0$ per $\alpha < 0$

All'avvicinarsi dello stallò il coefficiente di resistenza aumenta esponenzialmente.

Definiamo ora la pendenza del tratto lineare della curva c_e come il c_e'

COEFFICIENTE ANGOLARE DI PORTANZA

$$c_e' = \frac{\partial c_e}{\partial \alpha} = \pi k$$

Per un profilo relativamente sottile e poco marcato $k = 1$

Per un profilo reale il valore di k rimane comunque molto prossimo a 1

COEFFICIENTE DI PRESSIONE

$$c_p = \frac{P - P_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2}$$

è molto importante parlare di coefficiente di pressione e non di pressione perché
profili simili (ovvero uguali, ma con dimensioni diverse) a parità di α , Re , M
hanno lo stesso coefficiente di pressione c_p nei punti corrispondenti dei due
profili, ma ciò non ~~ha~~ vale per le pressioni.

EQUAZIONI DEL MOTO.

Trascuriamo gli effetti legati alla viscosità e non considero gli scambi termici, in questo modo ricaviamo le EQUAZIONI DI EULER

Se considerassi anche gli effetti della viscosità e gli scambi termici otterrei invece le EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

Consideriamo il volume di controllo τ , contornato dalla superficie σ .



Considero l'elemento di superficie $d\sigma$

• EQUAZIONI DI BILANCIO DELLA MASSA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho d\tau = - \int_{\sigma} \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

• EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho \vec{v} d\tau = - \int_{\sigma} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_{\sigma} p \vec{n} d\sigma + \int_{\tau} \rho \vec{f} d\tau$$

↳ forze di campo (soltamente g)

• EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho E d\tau = - \int_{\sigma} \rho E (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_{\sigma} p \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\tau} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} d\tau$$

energia totale
per unità di massa $\boxed{E = e + \frac{v^2}{2}}$

A volte però conviene trattarle in forma differenziale, per far questo ci aiutiamo del TEOREMA DI GAUSS (o della divergenza)

$$\int_{\sigma} \vec{F}_p \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot \vec{F}_p d\tau$$

Supponiamo che \vec{F}_p sia un vettore di componenti (F_1, F_2, F_3) , allora $\nabla \cdot \vec{F}_p = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$

$f(x, y, z, t) \rightarrow$ scalare

$$\int_{\sigma} f \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\tau} \nabla f d\tau$$

Ricaviamo quindi le equazioni del moto in forma differenziale

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V p E d\tau = - \int_S p E (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma - \int_S p \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_V \vec{f} \cdot \vec{v} d\tau$$

$$\int_V \frac{\partial (pE)}{\partial t} d\tau = - \int_V \nabla \cdot (pE \vec{v}) d\tau - \int_V \nabla \cdot (p \vec{v}) d\tau + \int_V \vec{f} \cdot \vec{v} d\tau$$

$$\int_V \left[\frac{\partial (pE)}{\partial t} + \nabla \cdot (pE \vec{v}) \right] d\tau = \int_V \left[-\nabla \cdot (p \vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v} \right] d\tau$$

$$\frac{\partial (pE)}{\partial t} + \nabla \cdot (pE \vec{v}) = -\nabla \cdot (p \vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$p \frac{\partial E}{\partial t} + E \frac{\partial p}{\partial t} + E \nabla \cdot (p \vec{v}) + p \vec{v} \cdot \nabla E = -\nabla \cdot (p \vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$p \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla E \right) + E \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \vec{v}) \right] = -\nabla \cdot (p \vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$\boxed{\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla E = -\frac{1}{p} \nabla \cdot (p \vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v}}$$

EQUAZIONI DI BILANCIO RIFERITE AL MOTO DELLE PARTICELLE FLUIDE

(Punto di vista Lagrangiano)

EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA

$$\frac{\partial p}{\partial t} + p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla p = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Dp}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v}$$

EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{p} \nabla p + \vec{f}$$

EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla E + \frac{1}{p} \nabla \cdot (p \vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{DE}{Dt} = -\frac{p}{p} \nabla \cdot (p \vec{v}) + \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Dall' espressione del bilancio di massa ricavo che

$$\nabla \cdot (p \vec{v}) = p \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla p$$

\downarrow lavoro termodinamico
 \rightarrow lavoro meccanico di spostamento

Ora abbiamo quindi 5 equazioni (2 scalari e 3 vettoriali, la 5' è l'equazione di stato) -

Ma però ancora 6 incognite: $p, \rho, \vec{v} = (u, v, w), E$

18

Dall'equazione del bilancio della massa so che

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{P} \right) = -\frac{1}{P^2} \frac{D\rho}{Dt} \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -P^2 \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{P} \right) + \rho \nabla \cdot \vec{v} = -P^2 \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{P} \right)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = P \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{P} \right)$$

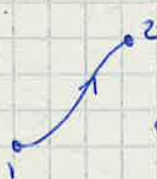
il che quindi a sostituire nell'espressione dell'energia interna

$$\frac{De}{Dt} = -\frac{P}{\rho} \cdot P \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{P} \right) \rightarrow \frac{De}{Dt} + P \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{P} \right) = 0 \rightarrow \text{condizione isentropica}$$

Se invece considero la viscosità, e quindi la conducibilità termica, avrò che

$$\frac{De}{Dt} + P \frac{D}{Dt} \left(\frac{\rho}{P} \right) = T \frac{Ds}{Dt}$$

Se $\frac{Ds}{Dt} \neq 0$ dobbiamo ancora valutare la variazione di entropia tra due punti



$$\int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{de}{T} + \int_1^2 \frac{P}{T} d\left(\frac{\rho}{P}\right)$$

Per un gas perfetto $\begin{cases} de = c_v dt \\ \frac{P}{\rho} = R^* T \end{cases}$

$$s_2 - s_1 = c_v \int_1^2 \frac{dT}{T} + R^* \int_1^2 \frac{d\left(\frac{\rho}{P}\right)}{\frac{\rho}{P}} = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R^* \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R^* \ln \frac{P_2}{P_1}$$

$$R^* = c_p - c_v \quad \text{per un gas ideale}$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{R^*}{c_v} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$\frac{R^*}{c_v} = \gamma - 1$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \frac{T_2}{T_1} + (\gamma - 1) \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\gamma - 1}$$

a) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ se il flusso è stazionario

b) $\nabla \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = 0$

$\boxed{h + \frac{v^2}{2} = H}$ → ENTALPIA TOTALE O DI ARRESTO

$\nabla H = 0 \iff H = \text{cost}$ ovunque

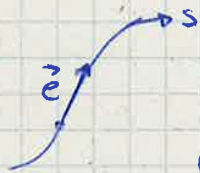
c) $\vec{v} \times \vec{\omega} = 0$ se $\vec{\omega} = 0$ il campo è irrotazionale

FLUSSO STAZIONARIO E INCOMPRESSIBILE

$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0$ $\rho = \text{cost} \rightarrow \nabla \vec{v} = 0$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) + \vec{g}$ trascurabile

Consideriamo una linea di corrente



$\vec{v} = v \vec{e}_s$

proiettato scalarmente l'equazione lungo la linea di corrente

$\frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \vec{e}_s + \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{e}_s + (\vec{v} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{e}_s = 0$

il vettore risultante $\vec{e}_s \perp \vec{e}_n$ e $\vec{e}_s \perp \vec{\omega}$ → si annulla

Passiamo dai gradienti alle derivate direzionali

$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0$

$\frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) = 0$

$\frac{d}{ds} \left(p + \rho \frac{v^2}{2} \right) = 0$

$\frac{d}{ds} \left(p + \rho \frac{v^2}{2} \right) = 0$

$p + \rho \frac{v^2}{2} = \text{cost}$ → lungo una linea di corrente

Chiamiamo p^0 la PRESSIONE TOTALE O DI ARRESTO

$\boxed{p^0 = p + \frac{1}{2} \rho v^2} = \text{cost}$ → è sempre vero quando il flusso è irrotazionale

FLUSSO STAZIONARIO E COMPRIMIBILE (p ≠ cost)

Prendo in considerazione l'equazione di bilancio della massa

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \vec{Q} \cdot \vec{V} = 0$$

Sapendo che $\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho$

So inoltre che $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \rho \nabla \cdot \vec{V} = \rho^2 \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho$$

Quindi $\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \rho \nabla \cdot \vec{V} - \frac{1}{\rho} \vec{V} \cdot \nabla p$

$$\frac{DE}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t} \right)$$

$$\frac{DE}{Dt} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$-\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{so che } E = e + \frac{V^2}{2}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$h = \text{entalpia} \rightarrow H = \text{entalpia totale} = h + \frac{V^2}{2}$

$$\frac{DH}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla H = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \rightarrow \vec{V} \cdot \nabla H = 0 \rightarrow \vec{V} = V e^x$$

↳ se $\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \rightarrow H = \text{cost} \rightarrow$ l'entalpia rimane costante su una linea di corrente



→ Se tutte le linee di corrente provengono da una zona in cui H è uguale, su ogni linea di corrente osservato sempre la stessa H

↳ CAMPO OROTOTALENTALPICO

$$h = c_p T$$

$$H = c_p T^0 = h + \frac{V^2}{2} = c_p T + \frac{V^2}{2}$$

temperatura di arresto

$$c_p T^0 = c_p T + \frac{V^2}{2} \rightarrow T^0 = T + \frac{1}{c_p} \frac{V^2}{2} = T \left(1 + \frac{1}{\gamma c_p} \frac{V^2}{2} \right)$$

$$T^0 = T \left(1 + \frac{1}{\gamma c_p} \frac{c^2}{c^2} \frac{V^2}{2} \right) = T \left(1 + \frac{c^2}{\gamma c_p T} \frac{M^2}{2} \right) \quad \text{so che } c^2 = \gamma R T$$

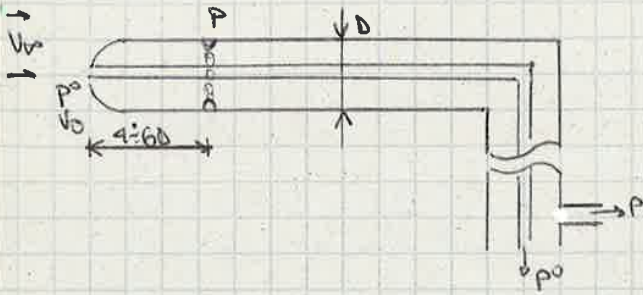
$$T^0 = T \left(1 + \frac{\gamma R T}{\gamma c_p T} \frac{M^2}{2} \right)$$

So che $\left. \begin{matrix} \frac{c_p}{c_v} = \gamma \\ \gamma = \frac{c_p - c_v}{c_v} \end{matrix} \right\} \rightarrow \frac{c_p}{c_v} \frac{c_p - c_v}{c_p} = \gamma - 1$

25

ESERCITAZIONE 1

TUBO DI PITOT

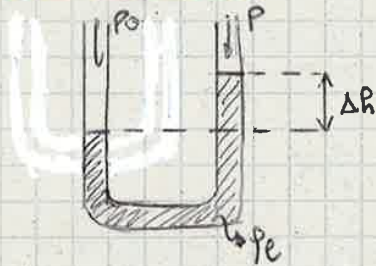


$$p^0 = p + \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

$$p^0 - p = \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(p^0 - p)}{\rho}}$$

MANOMETRO A U



$$p^0 - p = \frac{1}{2} \rho v_0^2$$

$$p^0 - p = \rho_e g \Delta h$$

→ LEGGE DI STEVINO

DATI: $\Delta h_1 = 100 \text{ mm H}_2\text{O}$
 $\Delta h_2 = 200 \text{ mm H}_2\text{O}$

$T = 16^\circ\text{C}$
 $P = 760 \text{ mmHg}$

$\gamma_{\text{Hg}} = 13.55 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

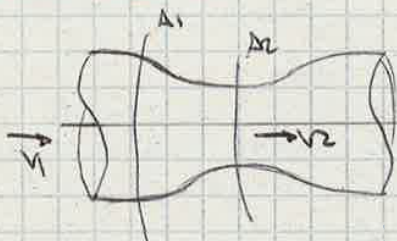
Calcolare $v_{a1} = ?$
 $v_{a2} = ?$

$$v_0 = \sqrt{\frac{\rho_e g \Delta h \cdot z}{\rho}} = \sqrt{\frac{1225 \cdot 9.81 \cdot \Delta h \cdot z}{1}}$$

$$v_{a1} = 40 \text{ m/s}$$

$$v_{a2} = 56.6 \text{ m/s}$$

TUBO DI VENTURI



$$A_2 v_2 = A_1 v_1$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{v_2^2}{v_1^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}}$$

Dati $\frac{A_1}{A_2} = 4$
 $\Delta h = 30 \text{ mm H}_2\text{O}$

$v_1 = ?$

$$\rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000 \cdot 9.81 \cdot 30 \cdot 10^{-3}}{1200 \cdot (16 - 1)}} = 5.66 \text{ m/s}$$

26

Andiamo a valutare la variazione di Γ

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Gamma_1 - \Gamma_1')}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\oint_{e_1} \vec{v}_1 \times d\vec{s}_1 - \oint_{e'} \vec{v}' \times d\vec{s}' \right] =$$

$$= \oint_e \frac{D}{Dt} (\vec{v} \times d\vec{s}) = \oint_e \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{s} + \oint_e \vec{v} \cdot \frac{D}{Dt} (d\vec{s})$$

Ricaviamo ora $\frac{D}{Dt} (d\vec{s}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{s}_1' - d\vec{s}}{\Delta t} = (*)$

osserviamo che $\overline{AA_1} = v\Delta t$
 $\overline{BB_1} = (v+dv)\Delta t$

Supponiamo di calcolare il percorso da A a B'

$$\overline{AA_1} + d\vec{s}_1' = \overline{BB_1} + d\vec{s} \rightarrow d\vec{s}_1' - d\vec{s} = \overline{BB_1} - \overline{AA_1} = (v+dv)\Delta t - v\Delta t = dv\Delta t$$

$$(*) \frac{D}{Dt} (d\vec{s}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dv\Delta t}{\Delta t} = dv$$

Quindi $\oint_e \vec{v} \cdot \frac{D}{Dt} (d\vec{s}) = \oint_e v dv = \oint_e d\left(\frac{v^2}{2}\right) = 0$

Andiamo ora a calcolare $\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_e \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{s} = - \oint_e \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s}$

↳ dall'eq. di bilancio della quantità di moto

So che

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \nabla p \cdot \vec{t} \rightarrow dp - \nabla p \cdot \vec{t} \cdot d\vec{s} = \nabla p \cdot d\vec{s}$$

↳ 0 (sono paralleli)

⇒ Quindi $\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_e \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{s} = - \oint_e \frac{1}{\rho} dp$

Facciamo delle ipotesi per semplificare ulteriormente l'equazione

1. FLUIDO INCOMPRESSIBILE

$$\rho = \text{cost} \rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \oint_e dp = 0$$

TEOREMA DI LAGRANGE-THOMSON

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0} \rightarrow \Gamma = \text{cost}$$

2. FLUIDO COMPRESSIBILE, MA $\rho = \rho(p)$

Un fluido di questo tipo è ad esempio quello isentropico $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost} \rightarrow \rho = \left(\frac{p}{\text{cost}}\right)^{1/\gamma}$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = - \oint_e \frac{1}{\rho} dp = - \oint_e \underbrace{\left(\frac{\rho}{\text{cost}}\right)^{-1/\gamma}}_{d\rho(p)} dp = 0 \rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

Per un fluido in cui la densità è in funzione della sola pressione (F. INCOMPRESSIBILE o ISENTROPICO) la circolazione valutata su una linea chiusa rimane costante.

2) Nelle stesse condizioni dell'esercizio precedente, aumentiamo la velocità V_4 a 180 m/s
 calcoliamo il Mach $M_4 = \frac{180}{343} = 0,52 > 0,3$

Il flusso quindi è comprimibile, bisogna quindi utilizzare le equazioni per una trasformazione isentropica

$$P_0 = P_{01} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 122.825 \text{ Pa} = P_1$$

$$P_2 = P_{02} = 100.000 \text{ Pa}$$

$$P_0 = P_3 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

per valutare M_3 bisogna conoscere $a_3 = \sqrt{\gamma R^* T_3}$

$$T_0 = T_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right) = 310 \text{ K}$$

$$T_0 = T_3 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_3^2 \right) = T_3 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V_3^2}{a_3^2} \right) = T_3 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V_3^2}{\gamma R^* T_3} \right) \Rightarrow T_3 = 284,82 \text{ K}$$

$$a_3 = \sqrt{\gamma R^* T_3} = 335,3 \text{ m/s}$$

$$M_3 = 0,52$$

Con gli stessi calcoli ottengo

$$T_4 = 296,2 \text{ K}$$

$$a_4 = 355 \text{ m/s}$$

$$M_4 = 0,5$$

30

Dopo vari esperimenti Reynolds arrivò alla conclusione che il passaggio da laminare a turbolento si ha sempre a

$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu} = 2300$$

→ Reynolds critico per un condotto

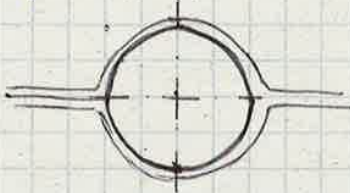
ESPERIMENTO SU LAMINA PIANA



$$Re = \frac{V \cdot x}{\nu}$$

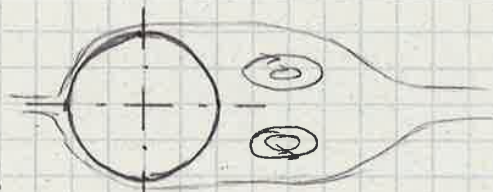
ESPERIMENTO SU CILINDRO INFINITO

a) $Re = \frac{V \cdot D}{\nu} < 4$

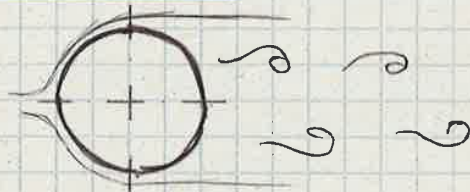


Prevalgono i fenomeni viscosi

b) $4 < Re < 40$



c) $40 < Re < 90$ → le strutture vorticosse tendono a stabilizzarsi
 d) $90 < Re < 400$

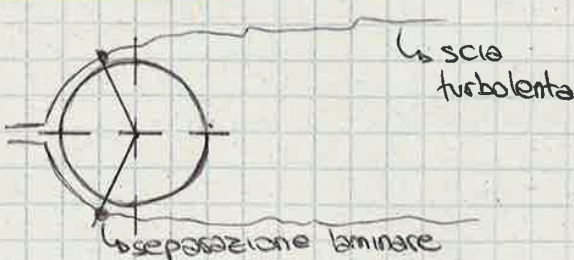


si sviluppa una scia di Von Kármán

Il distacco dei vortici è molto regolare (frequenza di Schelling)

Il C_D aumenta drasticamente

e) $400 < Re < 3 \cdot 10^5$



il C_D è ancora molto elevato perché non c'è ancora un recupero di pressione sul retro

f) $Re > 3 \cdot 10^5$ → Reynolds critico

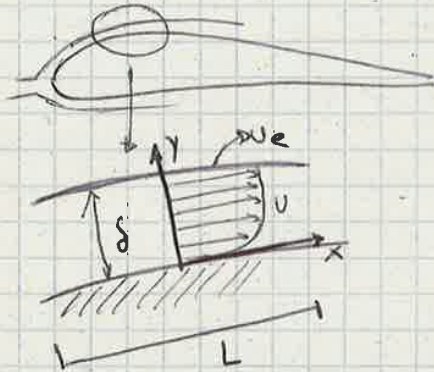


il C_D scende rapidamente

EQUAZIONI DI PRANDTL PER LO STRATO LIMITE LAMINARE

CASO STAZIONARIO, INCOMPRESSIBILE, BIDIMENSIONALE

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \textcircled{1} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad \textcircled{2} \end{cases}$$



se $\delta \ll L \rightarrow$
 $u \sim U_e$
 $x \sim L$
 $y \sim \delta$
 $v \sim ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow v \sim \frac{U_e \delta}{L}$$

$$\textcircled{1} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \rho U_e^2 = \Delta p$$

ordini di grandezza $\frac{U_e U_e}{L} + \frac{U_e \delta}{L} \frac{U_e}{\delta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{L} + \left(\frac{\nu U_e}{L^2} \frac{U_e}{\delta^2} \right)$ \rightarrow trascurabile $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{U_e^2}{L} = -\frac{1}{\rho} \Delta p$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

$$\textcircled{2} \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \rightarrow \frac{U_e \delta}{L \delta^2}$$

ordini di grandezza $\frac{U_e^2 \delta}{L^2} \quad \frac{U_e \delta}{L} \frac{\delta U_e}{\delta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{\delta} + \nu \frac{U_e}{L \delta}$
 $\frac{U_e^2 \delta}{L^2} \quad \frac{U_e \delta}{L^2} = \frac{U_e^2}{\delta} \quad \nu \frac{U_e}{L \delta}$

questo è l'ordine di grandezza di v ? $v \sim \frac{U_e \delta^2}{L}$

Quindi rimane

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial y} = 0}$$

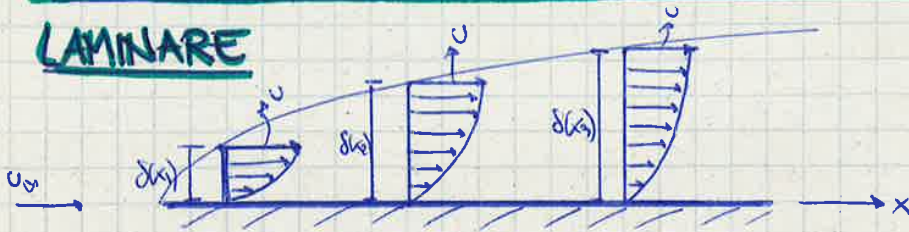
$$\rightarrow \boxed{p = p(x)}$$

le variazioni di pressione sono trascurabili nella direzione verticale ed di sotto dello strato limite

24

STRATO LIMITE SU PLACCA PIANA INNESTITA SENZA INCIDENZA

LAMINARE



δ è lo spessore dello strato limite

y tale che $u = 0.99 U$

Ad una fissata y , se mi muovo lungo l'asse x noto che diminuisce la velocità -
 Di conseguenza ρ va diminuendo o quindi anche lo sforzo di attrito

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & ① \\ U \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & ② \rightarrow \text{le forze di inerzia bilanciano quelle viscosse} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 & ③ \end{cases}$$

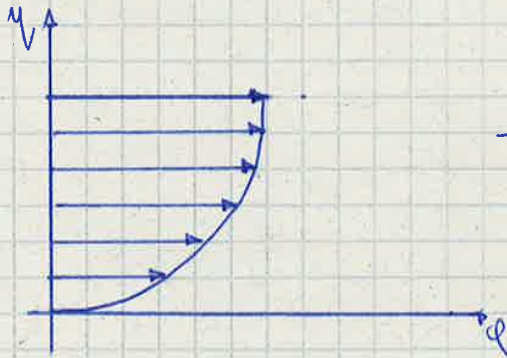
$$\begin{cases} \rho \left(U \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \rightarrow \boxed{\rho \left(U \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau}{\partial y}}$$

STRATO LIMITE LAMINARE

Definiamo due nuove variabili

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{y}{\sqrt{x}} \\ \psi &= \sqrt{\nu x} f(\eta) \end{aligned} \right\} \eta = \eta(\psi) \rightarrow \text{questa funzione è comune per tutti i profili di velocità}$$

SELF SIMILARITY (profili autosimili)



\rightarrow a qualsiasi distanza x lo si osservi, si sovrappone a questo profilo

SOLUZIONE DI BLASIS (soluzione analitica del sistema)

η	ψ
0	0
0.1	0.166
0.2	0.330
0.3	0.487
0.4	0.630
0.5	0.751
0.6	0.846
0.7	0.913
0.8	0.958
0.9	0.989
1	0.999

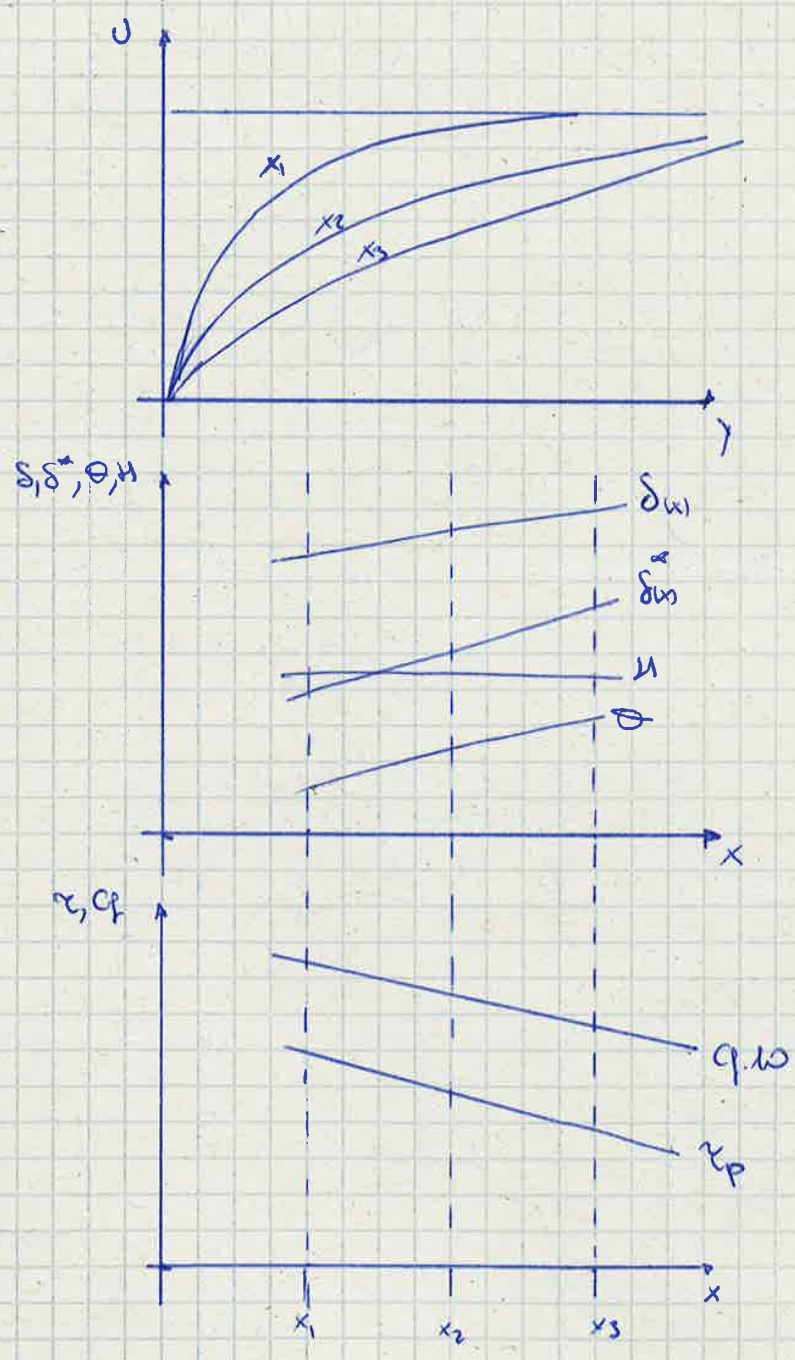
per $\eta = 1 \rightarrow \psi = 0.999$ (non può essere 1 perché $u = 0.99 U$)

22-10-19

ESERCITAZIONE 3: PROFILI DI VELOCITÀ IN UNO STRATO LIMITE LAMINARE, INTRODUZIONE A MATLAB

Dati $L = 2\text{ m}$ $x_1 = 0,75\text{ m}$
 $\nu = 1,454 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ $x_2 = 0,65\text{ m}$
 $\rho = 1,225\text{ kg}/\text{m}^3$ $x_3 = 1,55\text{ m}$
 $Re_L = 5 \cdot 10^5$

Disegnare i diagrammi di $U(x)$, δ , δ^* , Θ , η , c_f , τ_p



EQUAZIONI DI PRANDL PER LO STRATO LIMITE TURBOLENTO 33

CASO STAZIONARIO, INCOMPRESSIBILE, BIDIMENSIONALE

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \rho = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

DECOMPOSIZIONE ALLA REYNOLDS $\begin{cases} u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \end{cases} \quad p = \bar{p} + p'$

$$\rho \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial (u^2)}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial (uv)}{\partial y}$$

Quindi $\rho \left[\frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\begin{cases} \rho \left\{ \frac{\partial (\bar{u}+u')^2}{\partial x} + \frac{\partial [(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')]}{\partial y} \right\} = - \frac{\partial (\bar{p}+p')}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 (\bar{u}+u')}{\partial y^2} \\ \frac{\partial (\bar{u}+u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}+v')}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Vallo a mediare secondo Reynolds

$$\begin{cases} \rho \left\{ \frac{\partial (\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v')}{\partial y} \right\} = - \frac{\partial (\bar{p} + p')}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 (\bar{u} + u')}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

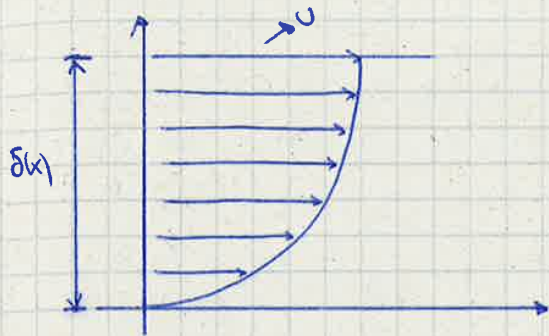
$$\rho \left[\frac{\partial (\bar{u}^2 + \bar{u}'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v} + \bar{u}'v')}{\partial y} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$$

$$\rho \left[\frac{\partial (\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v})}{\partial y} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \rho \left[\frac{\partial (\bar{u}'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}'v')}{\partial y} \right]$$

$$\rho \left[2\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right] = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \bar{u}'^2) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \bar{u}'v') \right]$$

Dato che $\delta \ll L \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$

PROFILO DI VELOCITA' MEDIO IN UNO STRATO L. TURBOLENTO



$$\eta = \frac{u}{U} \quad \zeta = \frac{y}{\delta(x)}$$

Chiamiamo $u_\tau = \text{VELOCITA' DI ATTRITO} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$

Introduciamo due parametri per valutare la distanza dalla lamina

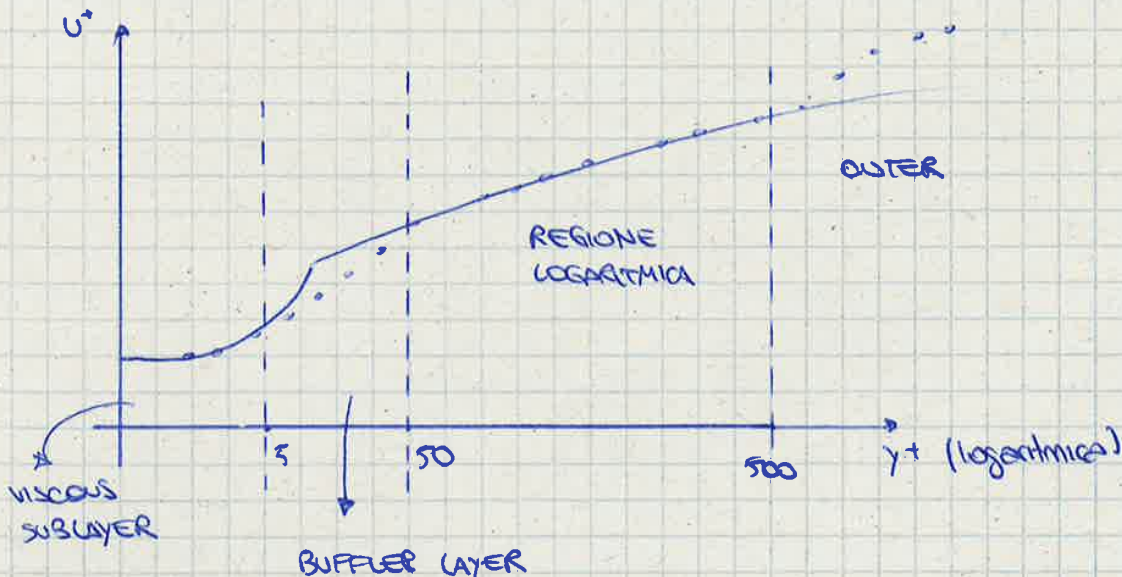
geometrico $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$ e viscoso $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}$

se $0 \leq y^+ \leq 5 \rightarrow u^+ = y^+ \rightarrow \text{SOTTOSTRATO VISCOLO}$

$5 \leq y^+ \leq 50 \rightarrow \text{ZONA DI RACCORDO}$

$50 \leq y^+ \leq 500/1000 \rightarrow \text{REGIONE LOGARITMICA} \quad u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C$ con $k = 0.41$ (Coef. di Von Karman) $C = 5$

$y^+ > 500/1000 \rightarrow \text{OUTER}$



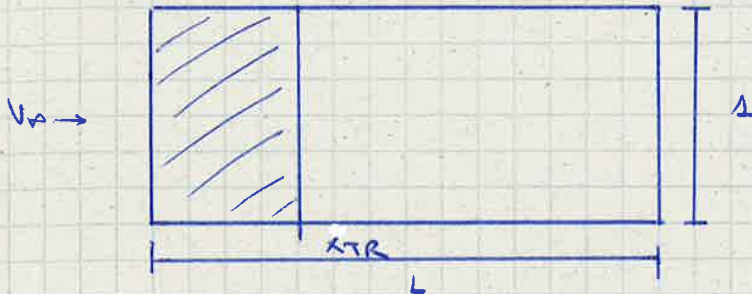
I pallini indicano i dati sperimentali

LAMINA PIANA CON TRANSIZIONE

TRANSIZIONE IMPOSTA

Per indurre la transizione inserisco degli ostacoli

CASI LIMITE $x_{TR} = 0 \rightarrow$ SL TURBOLENTO
 $x_{TR} = L \rightarrow$ SL LAMINARE



Consideriamo una piastra piana di lunghezza L e profondità unitaria
 Valuteremo quanto vale D

$$D = D_{TUR} - D_{x=0}^{TUR} + D_{x=0}^{LAM}$$

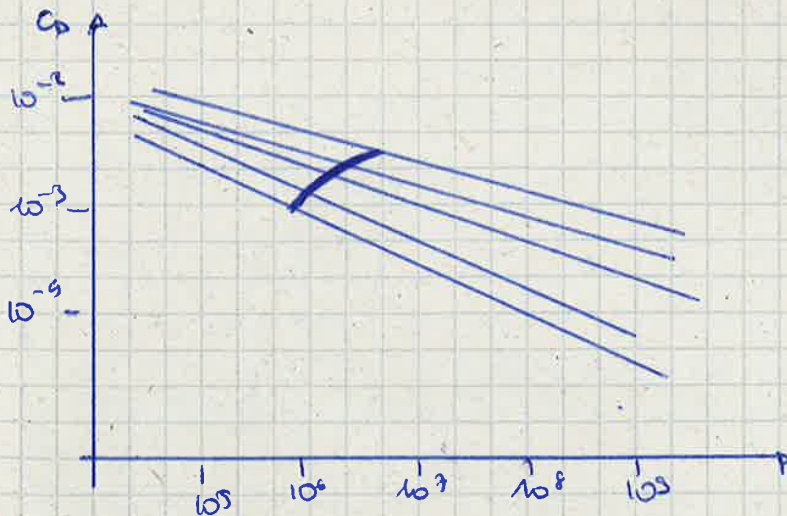
$x = x_{TR}$ $x = x_{TR}$

$$D = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_{D_{TUR}} (Re_L) L \cdot 1 - \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_{D_{TUR}} (Re_{x_{TR}}) x_{TR} + \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 C_{D_{LAM}} (Re_{x_{TR}}) x_{TR}$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 L} = C_{D_{TUR}} (Re_L) - \frac{x_{TR}}{L} C_{D_{TUR}} (Re_{x_{TR}}) + \frac{x_{TR}}{L} C_{D_{LAM}} (Re_{x_{TR}}) =$$

$$= \frac{0.074}{Re_L^{1/2}} - \frac{x_{TR}}{L} \left[\frac{0.074}{(Re_{x_{TR}})^{1/2}} - \frac{1.328}{Re_{x_{TR}}^{1/2}} \right]$$

$$= \left[\frac{0.074}{Re_L^{1/2}} - \frac{x_{TR}}{L} \left[\frac{0.074}{\left(\frac{x_{TR}}{L} Re_L\right)^{1/2}} - \frac{1.328}{\left(\frac{x_{TR}}{L} Re_L\right)^{1/2}} \right] \right]$$



● $R \neq 1 \rightarrow$ non si conservano più M_0 e T_0 , ma si conserva l'ENTALPIA DI RECUPERO

$$M_{rec} = h_r R \frac{U^2}{2} \quad \text{con } R = \text{FATTORE DI RECUPERO} \begin{cases} \rightarrow \text{SL} & R = (A)^{\frac{1}{2}} \\ \rightarrow \text{SLT} & R = (A)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$T_{rec} = T \left(1 + R \frac{\gamma-1}{\gamma} M^2 \right) = \text{cost}$$

Si dimostra che il fattore correttivo χ è

$$\begin{cases} \rightarrow \text{SL} & \chi_L = \left(\frac{T_p + T_w}{2 T_w} + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_w^2}{4} \right)^{-0,125} \\ \rightarrow \text{SLT} & \chi_L = \left(\frac{T_p + T_w}{2 T_w} + R \frac{\gamma-1}{2} \frac{M_w^2}{4} \right)^{-0,65} \end{cases}$$

PARETE ADIABATICA

$$T_w = T_{rec} = T_p \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_w^2 \right)$$

$$\chi_L = \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_w^2 \right)^{-0,125}$$

$$\chi_T = \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_w^2 \right)^{-0,65}$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [u (u_e - u)] + (u_e - u) \frac{du}{dx} \right\} dy = + \frac{\tau_p}{\rho}$$

Sappiamo che $\delta^* = \int_0^{\infty} (1 - \frac{u}{u_e}) dy \rightarrow u_e \delta^* = \int_0^{\infty} (u_e - u) dy$

$$\Theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{u_e} (1 - \frac{u}{u_e}) dy \rightarrow u_e^2 \Theta = \int_0^{\infty} u (u_e - u) dy$$

Quindi $\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dx} (u_e^2 \Theta) + u_e \delta^* \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}}$

Possiamo scrivere che

$$\frac{d}{dx} (u_e^2 \Theta) = u_e^2 \frac{d\Theta}{dx} + \Theta \frac{du_e^2}{dx} = u_e^2 \frac{d\Theta}{dx} + 2 u_e \Theta \frac{du_e}{dx}$$

$$u_e^2 \frac{d\Theta}{dx} + 2 u_e \Theta \frac{du_e}{dx} + u_e \delta^* \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho}$$

$$\frac{d\Theta}{dx} + 2 \frac{\Theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} + \frac{\delta^*}{u_e} \frac{du_e}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho u_e^2}$$

$$\frac{d\Theta}{dx} + \frac{\Theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} \left[2 + \frac{\delta^*}{\Theta} \right] = \frac{C_f}{2}$$

↓
H

Abbiamo quindi dimostrato che dipende da Θ , δ^* , τ_p , C_f e H

EQUAZIONE INTEGRALE PER LO STRATO LIMITE LAMINARE - METODO DI THWAITES

Definiamo $l = \frac{1}{2} C_f Re_x$ dove $Re_x = \frac{u_e x}{\nu}$

$$l = \frac{u_e \Theta}{\nu} \frac{d\Theta}{dx} + \frac{u_e \Theta}{\nu} \frac{\Theta}{u_e} \frac{du_e}{dx} (2+H) = \frac{u_e \Theta}{\nu} \frac{d\Theta}{dx} + \frac{\Theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx} (2+H)$$

Definiamo $\lambda = \frac{\Theta^2}{\nu} \frac{du_e}{dx}$

e riscriviamo $\frac{u_e \Theta}{\nu} \frac{d\Theta}{dx} = \frac{1}{2} \frac{u_e}{\nu} \frac{d\Theta^2}{dx}$

Quindi $l = \frac{1}{2} \frac{u_e}{\nu} \frac{d\Theta^2}{dx} + (2+H) \lambda$

$$\frac{u_e}{\nu} \frac{d\Theta^2}{dx} = 2l - 2(2+H) \lambda$$

Da degli esperimenti realizzati sullo strato limite laminare, sappiamo che

$$\frac{u_e}{\nu} \frac{d\Theta^2}{dx} = 9.45 - 6\lambda$$

↓

$$l = 9.225$$

$$(2+H) \cdot 2 = 6 \rightarrow H = 1$$

Dall'analisi di questi dati è lampante un problema. Infatti sia l (dipendente da λ) che H (dipendente dal gradiente di pressione) non dovrebbero essere costanti.

Fisicamente però non rappresenta un problema perché in ogni caso le variazioni di l e H si equilibrano vicendevolmente (rimanendo quindi costante la loro somma)

ESUAZIONE INTEGRALE PER LO STRATO LIMITE TURBOLENTO - HT. DI HEAD

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \\ \rho \left(\bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} + \bar{v} \frac{d\bar{u}}{dy} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{cases} \quad \text{con } \tau = (\mu + \mu_t) \frac{d\bar{u}}{dy}$$

ottingo $\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\theta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} [2 + H] = \frac{C_f}{2}$



a causa dei vortici presenti nello strato limite turbolento può essere inglobata nuova aria che si trova a contatto con lo strato limite → fenomeno di TRASCINAMENTO (ENTRAINMENT)

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\delta} U dy = \int_0^{\delta} [U_e - (U_e - u)] dy = \int_0^{\delta} U_e dy - \int_0^{\delta} (U_e - u) dy \quad \rightarrow \text{quantità di aria inglobata} \\ Q &= U_e \int_0^{\delta} dy - U_e \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy \\ Q &= U_e \delta - U_e \delta^* = U_e (\delta - \delta^*) \end{aligned}$$

Valutiamo la differenza di massa (q.tà di massa inglobata)

$$\sigma_T = \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} [U_e (\delta - \delta^*)]$$

Definiamo ora $H_i = \frac{\delta - \delta^*}{\theta} \rightarrow \delta - \delta^* = \theta H_i$

Otteniamo sperimentalmente che

$$\sigma_T = \frac{d}{dx} [U_e \theta H_i] = U_e \theta 0.306 (H_i - 3) \quad - 9.6168$$

Con

$$\begin{cases} H_i = 3.3 + 9.8234 (H - 1.1)^{-1.257} & \text{per } H < 1.6 \\ H_i = 3.3 + 1.5501 (H - 0.6778)^{-3.064} & \text{per } H > 1.6 \end{cases}$$

viceversa possiamo ricavare i corrispondenti valori di H

$$\begin{cases} H = 1.1 + 9.8604 (H_i - 3.3)^{-0.777} & \text{per } H_i > 5.3 \\ H = 0.6778 + 1.1538 (H_i - 3.3)^{-0.5264} & \text{per } H_i < 5.3 \end{cases}$$

Da tutto questo possiamo ricavare la LEGGE DI LUDWIGG - TILTMANN

$$C_f = 9.246 \cdot 10^{-0.678 \cdot H} \cdot Re_{\theta}^{-0.268}$$

ESERCITAZIONE 4: MATLAB

23-10-14
51

MOTI BIDIMENSIONALI

Riprendiamo in esame le equazioni di Eulero

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & 1 \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p & 2 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla E = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) & 3 \end{cases}$$

Se parliamo di un gas sappiamo che

$$\begin{cases} p = R^* T \\ E = e + \frac{V^2}{2} \\ e = c_v T \end{cases}$$

In un moto su un profilo alare non posso imporre una condizione di aderenza (la parete nulla), ma posso imporre quella di tangenza ($\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$)

Supponiamo che il fluido sia stazionario $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = 0$ e incompressibile ($\rho = \text{cost}$).
Queste condizioni possono essere verificate da un liquido e da un gas se $M < 0.3$.

Le equazioni di Eulero diventano

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p + \rho \vec{v} \cdot \vec{v} &= 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{CAMPO DI MOTI SOLENOIDALE} \\ 2 \rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p &= 0 \rightarrow \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \rightarrow p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost} \quad (\text{su una linea di corrente}) \\ 3 \rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla E = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) & \end{aligned}$$

A occuperemo delle equazioni di bilancio della massa e della quantità di moto.

Supponiamo di aggiungere alle condizioni di stazionarietà e incompressibilità anche quella di irrotazionalità
 $\vec{\omega} = 0 \Leftrightarrow \nabla \times \vec{v} = 0$

Le equazioni di Eulero si possono riscrivere

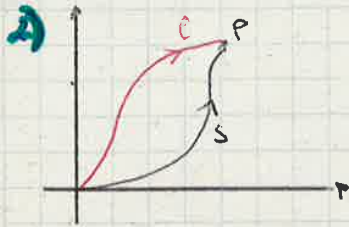
$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \rightarrow p + \frac{1}{2} \rho V^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho V_0^2 = p^0 = \text{cost} \rightarrow \text{in tutto il campo di moto} \textcircled{2} \\ \nabla \times \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$\textcircled{2}$ si può riscrivere come $p - p_0 = \frac{1}{2} \rho (V_0^2 - V^2) \rightarrow \boxed{c_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2} = 1 - \frac{V^2}{V_0^2}}$

Nel caso di un campo irrotazionale è ammesso un potenziale ϕ

$$\begin{cases} p = \text{cost} \Leftrightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \text{IRROTAZIONALE} \Leftrightarrow \nabla \times \vec{v} = 0 \\ \phi \Rightarrow \vec{v} = \nabla \phi \end{cases}$$

56



Prendiamo di nuovo la linea s che unisce O e P .
Prendiamo una nuova linea c che unisca sempre O e P ma seguendo un percorso diverso

Calcoliamo il potenziale nel due casi:

$$\phi_P = \int_{O,s}^P (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds$$

$$\phi_P = \int_{O,c}^P (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds \quad \int_{O,s}^P (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds = \int_{O,c}^P (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds \quad \ominus$$

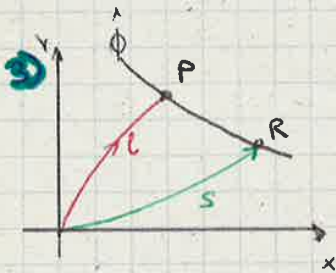
$$\ominus \int_{O,s}^P = \int_{O,c}^P \rightarrow \int_{O,s}^P - \int_{O,c}^P = 0 \rightarrow \int_{O,s}^P + \int_P^{O,c} = 0 \rightarrow \boxed{\oint_{s,c} (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds = 0}$$

La circuitazione del potenziale è nulla

Si poteva arrivare alla stessa conclusione applicando semplicemente il teorema del rotore

$$\Gamma = \oint_{s,c} (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds = \int_{\sigma} (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

Dove σ è l'area racchiusa tra c e s e \vec{n} è il vettore normale alla superficie nel punto considerato.



Prendiamo una linea a potenziale costante $\hat{\phi}$ → LINEA EQUIPOTENZIALE

Cosa succede se mi muovo su questa linea?

Prendiamo una linea s che parte da O e raggiunge $\hat{\phi}$ nel punto R e prendiamo una linea c che parte da O e raggiunge $\hat{\phi}$ nel punto P .

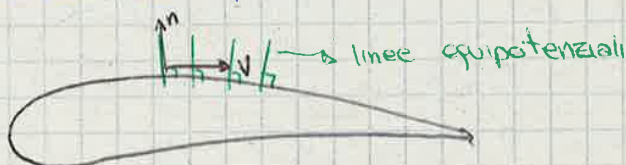
Calcoliamo il potenziale lungo la linea OR percorrendo s e poi percorrendo c e poi il tratto PR

$$\phi_{P_1} = \int_{O,s}^P (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds$$

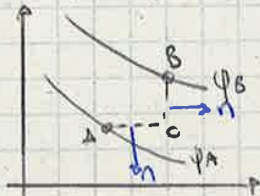
$$\phi_{P_2} = \int_{O,c}^P (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds + \int_R^P (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds$$

$$\phi_{P_1} = \phi_{P_2} = \hat{\phi} \rightarrow \int_R^P (\vec{v} \cdot \vec{E}) ds = 0 \rightarrow \boxed{\vec{v} \cdot \vec{E} = 0} \rightarrow \text{se mi muovo lungo una linea equipotenziale le velocità debbano essere sempre perpendicolari}$$

Su un profilo alare (imposta la condizione di tangenza) sappiamo quindi che le linee di potenziale sono perpendicolari alla superficie



Andiamo a dimostrare mediante le funzioni di corrente che il moto è sclenoidale e irrotazionale



Calcoliamo il percorso da A a B passando per C per valutare $d\psi$
 ($d\psi$ è la portata del tubo di flusso $\psi_B - \psi_A$)

→ v segue \vec{n} che è discorde a r

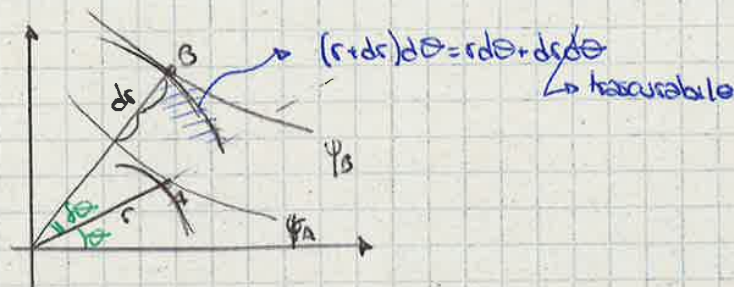
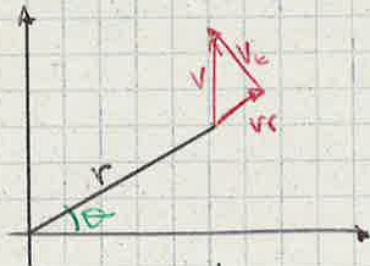
$$\begin{cases} d\psi = -v dx + u dy \\ d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{v = \frac{\partial \psi}{\partial y} ; u = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

Quindi abbiamo che $\rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$ cid

$\rightarrow \nabla \times \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \nabla^2 \psi = 0$ cid

Andiamo ora a ricavare l'espressione della velocità in coordinate polari

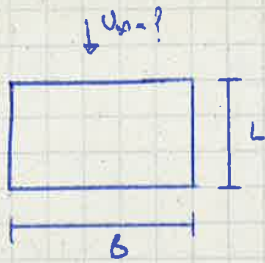


$$\begin{cases} d\psi = -v_r dr + v_\theta r d\theta \\ d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} d\theta \end{cases}$$

→

$$\boxed{v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} ; v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}}$$

60



$z = 11'000 \text{ m}$
 $L = 2 \text{ m}$
 $B = 80 \text{ m}$

$p = 341'000 \text{ Pa}$
 condizioni adiabatiche

Calcolare il coefficiente di attrito

Per $z = 11'000 \text{ m} \rightarrow T_0 = 216,6 \text{ K}$
 $P_0 = 22'616 \text{ Pa}$

$U_0 = 3,806 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

$P^0 = P_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

$\left(\frac{P_0}{P^0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \rightarrow M_0 = \sqrt{\left[\left(\frac{P_0}{P^0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] \cdot \frac{2}{\gamma-1}} = 2,4$

Ora che conosco il Mach posso calcolare U_0

$M_0 = \frac{U_0}{\sqrt{\gamma R T_0}} \rightarrow U_0 = M_0 \sqrt{\gamma R T_0} = 2,4 \cdot \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 216,6} = 708 \text{ m/s}$

Andiamo quindi a valutare il Reynolds

$Re = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{708 \cdot 2}{1,454 \cdot 10^{-5}} = 9,7 \cdot 10^7$ • l'aria quindi è compressibile

Calcoliamo C_D INCOMPRESSIBILE

$C_{D,inc} = \frac{98255}{\sqrt{Re}} = 2,13 \cdot 10^{-3}$

Andiamo a valutare il coefficiente di correzione

$R = P_0^{1/3} = (971)^{1/3} = 9882$

$T_{rec} = \left(1 + R \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right) = 447,8 \text{ K}$

$\chi_t = \left(1 + \frac{3}{4} R \frac{\gamma-1}{2} M_0^2 \right)^{-0,65} = 0,665$

Calcoliamo quindi C_D per il caso compressibile

$C_D = C_{D,inc} \cdot \chi_t = 1,632 \cdot 10^{-3}$

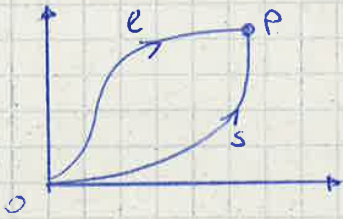
$D = \frac{1}{2} \rho U_0^2 \cdot C_D \cdot S = \frac{1}{2} \cdot 93638 \cdot 708^2 \cdot 1,632 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10 = 6'234 \text{ N}$

↓

$\frac{P_{00}}{P_0} = R^* T_0 \rightarrow P_{00} = 93638$

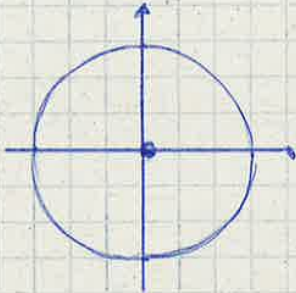
62

Se abbiamo una generica curva chiusa che non concetena l'origine (sorgente/pozzo)



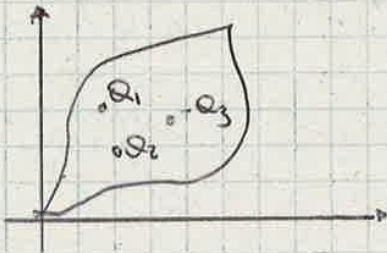
$$\oint_{se} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0 = \oint_{e} (\nabla \cdot \vec{v}) ds$$

Se invece la curva concetena l'origine abbiamo



$$\oint (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = Q$$

Se la linea concetena più origini gli effetti si sommano



$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

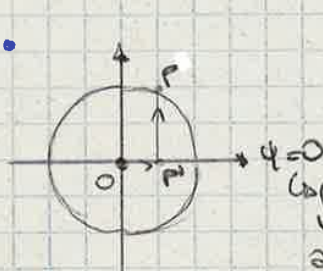
Immaginiamo di restringere progressivamente il raggio della circonferenza fino a farla degenerare in un punto

$r \rightarrow 0$ allora $\sigma \rightarrow 0$ allora $v \rightarrow \infty$ allora $\nabla \cdot \vec{v} = \infty$ IMPOSSIBILE!

In un pozzo/sorgente l'origine è un punto di singolarità

Andiamo ora a calcolare i valori di ϕ e ψ per questo campo di moto

⊗ facciamo questo perché sarebbe impossibile calcolare il valore in 0 (P. singolarità)



$$\psi_P = \int_0^P (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \int_0^P (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \int_{P'}^P (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$$

↳ posso decidere il valore perché è def. a meno di una costante

↳ la linea di corrente allineata con l'asse x ha valore nullo

$$\psi_P = \int_P^P (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \int_{P'}^P v \cdot r d\theta = \int_{P'}^P \frac{Q}{2\pi r} r d\theta = \frac{Q}{2\pi} \int_0^\theta d\theta \rightarrow \boxed{\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta}$$

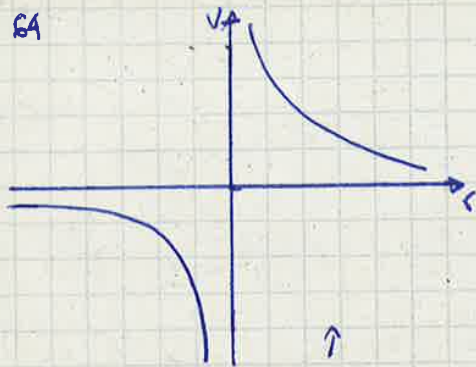
con $0 \leq \theta \leq 2\pi$

VERIFICA

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\theta} = \frac{Q}{2\pi r} = v$$

$$v_\theta = \frac{d\psi}{dr} = 0$$

64



In un moto vorticoso le particelle percorrono una traiettoria circolare senza però ruotare su loro stesse → VORTICE IRROTAZIONALE

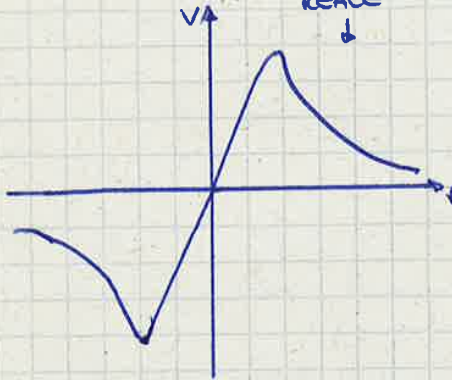
Quando $r \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$ nella realtà ciò non può avvenire perché la viscosità tende a rallentare il moto.



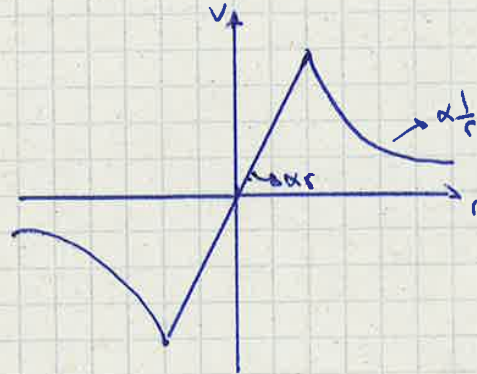
ANDAMENTO IDEALE



REALE



CUORE DEL VORTICE (il moto diventa rotazionale)



VORTICE DI RANKINE

Se consideriamo una linea chiusa che contenga più vortici, gli effetti si sommano

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3$$

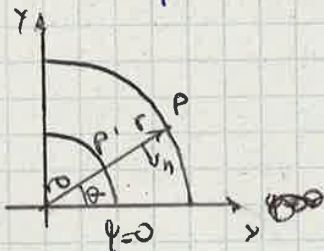


Osserviamo che $v = \frac{k}{r}$, ma sappiamo anche che $v = \frac{\Gamma}{2\pi r}$

Unendo i due risultati osserviamo che la costante k è proporzionale all'intensità del vortice

$$k = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

Passiamo quindi andare a valutare i valori di ϕ e ψ in questo campo di moto.



$\phi = \int_0^r (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$ → ci troviamo in difficoltà perché 0 è un punto di singolarità

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^r (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \int_0^{r_1} (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \int_{r_1}^r (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = - \int_{r_1}^r v dr = \\ &= - \int_{r_1}^r \frac{\Gamma}{2\pi r} dr = - \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r - \ln r_1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\phi = - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}}$$

VERIFICA $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$

$v_\theta = - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi} = v$ ok

66 II caso: $\lambda=0$

68
 2) Data una pila piana inestesa senza incidenza con strato limite laminare, verificare il METODO DI THOMAS

$$\text{Cendo} \rightarrow \begin{cases} \frac{d\psi(x)}{dx} \\ \psi(x) \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{\theta^2}{L} \frac{u_e}{dx} \rightarrow \begin{cases} \ell(\lambda) \\ \eta(\lambda) \end{cases} \rightarrow \ell = \frac{1}{2} C_f Re_\theta \\ \eta = \frac{\delta^+}{\theta}$$

I caso: $u_e = \text{cost}$

• $\frac{du_e}{dx} = 0$

• $\theta^2(x) = \frac{0.45L}{u_e^6} \int_0^x u_e^5 dx = \frac{0.45L}{u_e} x = \frac{0.45Lx}{u_e}$

• $\lambda = \frac{\theta^2}{L} \frac{du_e}{dx} = 0$

• $\ell = 0.22$
 $\eta = 2.61$

• $\ell = \frac{1}{2} C_f Re_\theta \rightarrow C_f = \frac{2\ell}{Re_\theta} = \frac{0.44}{\frac{u_e \theta}{L}} = \frac{0.44}{u_e \cdot 0.87 \sqrt{\frac{Lx}{u_e}} \cdot \frac{1}{L}} = \frac{0.65}{\sqrt{Re_x}} = \frac{0.65}{\sqrt{Re_x}} \text{ cd}$

• $k_p = \frac{1}{2} \rho u_e^2 C_f = 0.325 \sqrt{\frac{\rho u_e^3 L}{x}}$

• $\delta^+ = \eta \cdot \theta = 2.61 \cdot \frac{0.45Lx}{u_e} = 1.17 \frac{Lx}{u_e}$

II caso $\rightarrow \frac{du_e}{dx} = a \rightarrow u_e = ax$

• $\theta^2 = \frac{0.45L}{u_e^6} \int_0^x u_e^5(x) dx = \frac{0.45L}{a^6 x^6} \cdot \frac{a^5}{6} x^6 = \frac{0.45L}{6} \cdot \frac{1}{a} = \frac{0.075L}{a}$

• $\lambda = \frac{\theta^2}{L} \frac{du_e}{dx} = \frac{0.075L}{L} \cdot \frac{1}{x} \cdot a = 0.075$

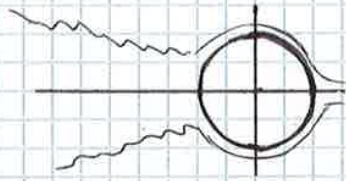
• $\ell = 0.22 + 1.57 \cdot 0.075 - 1.8 \cdot 0.075^2 = 0.33$
 $\eta = 2.61 - 3.75 \cdot 0.075 + 5.27 \cdot 0.075^2 = 2.36$

• $C_f = \frac{2\ell}{Re_\theta} = \frac{0.66}{\frac{ax \cdot 0.27 \sqrt{\frac{L}{a}} \cdot \frac{1}{L}}{L}} =$

AERODINAMICA
APPLICATA
Di Cicca
quaderno 2

76

Questa è la situazione ideale, ma dobbiamo sempre tenere presente degli effetti legati alla viscosità -
 Si crea una scia.

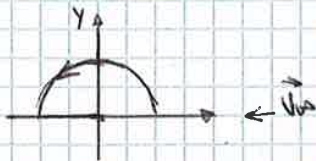


Dietro, dal momento che non si chiudono le linee di corrente, non si recupera più la pressione totale

Si ha quindi un $\Delta p \rightarrow$ RESISTENZA DI FORMA

Nel caso ideale non c'è resistenza di forma \rightarrow PARADOSSO DI D'ALEMBERT.

CORRENTE UNIFORME + DOPPIETTA + VORTICE



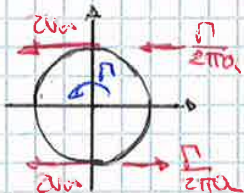
$$\psi = V_m r \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = V_m \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \cos\theta$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = V_m \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

o se $r=a \rightarrow \begin{cases} v_r=0 \\ v_\theta = 2V_m \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{cases} \rightarrow$ il campo non è più simmetrico

DISTRIBUZIONE DI VELOCITÀ



Si crea una differenza di velocità tra sopra e sotto.

Questa asimmetria fa sì che nasca una forza laterale. Questo effetto è chiamato EFFETTO MAGNUS

(le particelle superiori vengono accelerate mentre quelle sottostanti vengono rallentate, il risultato è che il corpo viene fatto deviare)

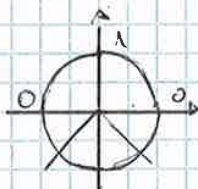
Questo modello è utilizzato per simulare un cilindro messo in rotazione in un campo di moto uniforme. Essendo asimmetrico i punti di arresto non si troveranno più a $\theta=0$ e $\theta=\pi$

$$v_\theta = 0 \rightarrow 2V_m \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} = 0 \rightarrow \sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi a V_m} \quad (\text{stanno nel III e IV quadrante})$$

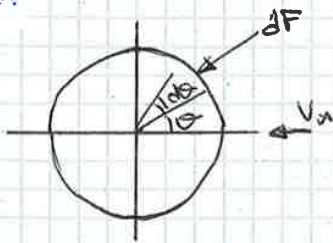
\downarrow

$$-1 \leq \sin\theta \leq 0$$

$$0 \leq \Gamma \leq 4\pi a V_m$$



Il caso $\Gamma=0$ implica che il cilindro non è in rotazione $\rightarrow \begin{matrix} \theta=0 \\ \theta=\pi \\ 2 \end{matrix}$ cud



$$dF = (\rho - \rho_0) a d\theta \cdot 1$$

$$\begin{cases} dF_x = -dF \cos \theta \\ dF_y = -dF \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int dF_x = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi a} a \sin \theta \cos \theta d\theta \\ \int dF_y = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi a} a \sin^2 \theta d\theta \end{cases}$$

Valutiamo quindi la resistenza di forma che si sviluppa

$$D = \int_0^{2\pi} dF_x = \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \left[\frac{\cos \theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

PARADOSSO DI D'ALEMBERT !!!

Valutiamo ora la portanza

$$L = \int_0^{2\pi} dF_y = \int_0^{2\pi} \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi a} a \sin^2 \theta d\theta = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \right] d\theta$$

$$\boxed{L = \rho V_\infty \Gamma} \rightarrow \text{TEOREMA DI KUTTA-JOUKOWSKI}$$

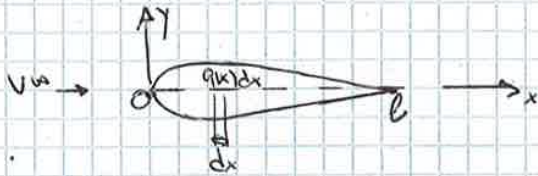
(vale per qualsiasi generico profilo)

Qualsiasi corpo bidimensionale attorno al quale esiste una circolazione della velocità Γ , se investito da una corrente di fluido con V_∞ indisturbata allora è soggetto ad una forza per unità di lunghezza data da (vedi sopra)

83. Bisogna invece verificare che

$$C_p = C_{p_a} + C_{p_m} + C_{p_s}$$

Consideriamo il seguente profilo simmetrico

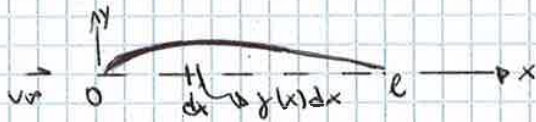


Immaginiamo di avere una distribuzione di sorgenti/pozzi lungo la corda del profilo

Definiamo la FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DELLA PORTATA $[q] = m/s$

Devo fare in modo che q sia nulla $\int_0^l q(x)dx = 0$

Possiamo anche immaginare di avere una distribuzione di vortici sul profilo medio

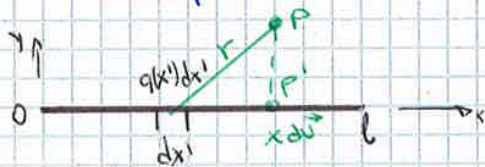


In questo caso si parlerà di FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DELL'INTENSITA' $[\gamma] = m/s$

Analizziamo i due casi:

DISTRIBUZIONE DI SORGENTI/POZZI

Dal momento che il profilo è simmetrico posso considerare la corda medio



Bisogna conoscere la velocità del campo di moto attorno alla sorgente

$$dV = \frac{q(x')dx'}{2\pi r}$$

Consideriamo P' sulla corda alla posizione x, la sua velocità è du

$$du = \frac{q(x')dx'}{2\pi(x-x')}$$

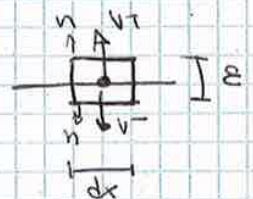
$$u(x) = \int_0^l \frac{q(x')dx'}{2\pi(x-x')}$$

Consideriamo la porzione di spazio nelle immediate vicinanze di $x=x'$

calcoliamo quindi la portata $Q = \oint (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds$

$$q(x)dx' = 2v(x)dx' \rightarrow v^\pm(x) = \pm \frac{q(x)}{2}$$

↑
C'È UNA DISCONTINUITÀ



82

$$\frac{dy^+}{dx} = \alpha + \frac{v^+}{V_m}$$

$$\frac{dy^-}{dx} = \alpha + \frac{v^-}{V_m}$$

EQUAZIONE DI TANGENZA

Andiamo a ricavare ora l'espressione per il coefficiente di ~~pressione~~ pressione

$$C_p = 1 - \frac{v^2}{V_m^2} = 1 - \frac{u^2 + v^2}{V_m^2} = 1 - \frac{(V_m \cos \alpha + u')^2 + (V_m \sin \alpha + v')^2}{V_m^2}$$

$$C_p = 1 - \frac{V_m^2 \cos^2 \alpha + 2u'V_m \cos \alpha + v'^2 + V_m^2 \sin^2 \alpha + 2v'V_m \sin \alpha + v'^2}{V_m^2}$$

$$C_p = 1 - \frac{V_m^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2u'V_m \cos \alpha + 2v'V_m \sin \alpha + v'^2 + v'^2}{V_m^2}$$

$$C_p = 1 - \left(1 + \frac{2u'}{V_m} + \frac{2v'x}{V_m} + \frac{u'^2}{V_m^2} + \frac{v'^2}{V_m^2} \right) = 1 - \left(1 + \frac{2u'}{V_m} \right)$$

$$C_p = -\frac{2u'}{V_m}$$

Abbiamo quindi dimostrato che i C_p si possono sommare (l'espressione è lineare)

20/11/2014

Consideriamo ora un profilo non simmetrico



$$v \cong u = V_m \cos \alpha + u'$$

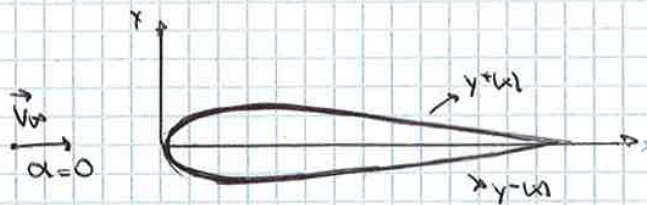
$$v^+ - v^- \cong u^+ - u^- = (V_m \cos \alpha + u'^+) - (V_m \cos \alpha + u'^-)$$

$$v^+ - v^- = u'^+ - u'^-$$

La differenza dei moduli è uguale alla velocità aggiunta.

Come faccio a decidere se sia più opportuno scegliere una distribuzione di valori o pezzi per simulare le mie condizioni.

80a PROFILO SIMMETRICO INVESTITO SENZA INCIDENZA



Dall'equazione di tangenza (ci concentriamo solo sulla parte dorsale) si avrà:

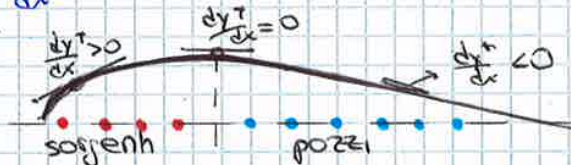
$$\frac{dy^+}{dx} = \alpha + \frac{v^+}{V_\infty} = \frac{q(x)}{2V_\infty}$$

Il problema è quindi risolto \rightarrow $q(x) = 2V_\infty \frac{dy^+}{dx}$

Sapendo ~~che~~ la velocità della corrente che investe il profilo e la sua forma ricaviamo la distribuzione di pozzi/sorgenti necessaria a simulare il profilo.

Se $\frac{dy^+}{dx} > 0 \rightarrow q(x) > 0 \rightarrow$ sorgenti

Se $\frac{dy^+}{dx} < 0 \rightarrow q(x) < 0 \rightarrow$ pozzi



VERIFICA $\int_0^l q(x) dx = 0 \rightarrow \int_0^l 2V_\infty \frac{dy^+}{dx} dx = 2V_\infty \int_0^l dy^+ = 0 \rightarrow 2V_\infty [y^+]_0^l = 0$

Possiamo ora andare a ricavare $u'(x) \rightarrow$ se conosciamo $u'(x)$ possiamo andare a ricavare C_p

$$u'(x) = \int_0^l \frac{q(x) dx'}{2\pi (x-x')}$$

$$C_p = -\frac{2u'^2}{V_\infty}$$

Essendo il profilo simmetrico $u'^- = u'^+$, quindi $\Delta C_p = 0 \rightarrow$ non dà contributo alla portanza

Questa teoria però cade in difetto nei punti di arresto (bordi di attacco)



$$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \vec{V}'$$

$$\vec{V}' = \vec{V}_\infty + \vec{V}' = 0 \rightarrow \vec{V}' = -\vec{V}_\infty$$

\rightarrow discorda con l'ipotesi delle piccole perturbazioni secondo cui $V' \ll V_\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{u}} \int_0^c \frac{2Vw \left[A_0 \frac{1+\cos\theta}{2} + \sum_n A_n \sin(n\theta) \right]}{\frac{e}{2}(1-\cos\theta) - \frac{e}{2}(1-\cos\theta')} \cdot \frac{e}{2} \sin\theta' d\theta = Vw \left(\alpha - \frac{dy}{dx} \right)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0 (1+\cos\theta') + \sum A_n \sin\theta' \sin(n\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = \alpha - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy(\theta)}{dx} = \alpha - \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \frac{A_0 (1+\cos\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' + \int_0^\pi \frac{\sum A_n \sin\theta' \sin(n\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' \right]$$

↳ $G(\theta, \alpha)$

INTEGRALE DI GRAMERT

$$G_U = \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta)}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

$$G_U^\pi = \int_0^\pi \frac{\sin\theta' \sin(n\theta')}{\cos\theta' - \cos\theta} d\theta' = -\pi \cos(n\theta)$$

Si ricava quindi che:

- in una lamina piana inestesa senza incidenza (o comunque molto bassa), la distribuzione di velocità è:

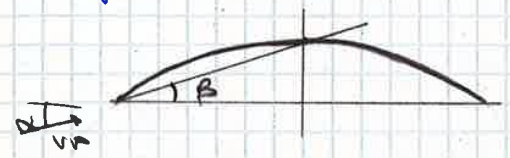
$$V(\theta) = Vw \left(1 + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right)$$

e di conseguenza avremo $V^+ \rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$
 $V^- \rightarrow -\pi \leq \theta \leq 0$

$$\begin{aligned} \text{E quindi } \gamma(\theta) &= V^+ - V^- = Vw \left(1 + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right) - Vw \left(1 + \alpha \frac{1+\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} \right) = \\ &= Vw \left(1 + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right) - Vw \left(1 - \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right) = \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\gamma(\theta) = 2Vw\alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}}$$

- per un arco di cerchio invertito con incidenza aurea



$$V(\theta) = Vw \left(1 + 2\beta \sin\theta + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right)$$

Ricaviamo ora la distribuzione di vortici

$$\gamma(\theta) = V^+ - V^- = Vw \left(1 + 2\beta \sin\theta + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right) - Vw \left(1 + 2\beta \sin(-\theta) + \alpha \frac{1+\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} \right) =$$

$$\gamma(\theta) = Vw \left(1 + 2\beta \sin\theta + \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right) - Vw \left(1 - 2\beta \sin\theta - \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \right) =$$

$$\boxed{\gamma(\theta) = 2Vw \left(\alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + 2\beta \sin\theta \right)}$$

↑
questo termine è dovuto all'incrocamento

$$\int_0^\pi \frac{dy(\theta)}{dx} \cos(m\theta) d\theta = (\alpha - \alpha_0) \int_0^\pi \cos(m\theta) d\theta + \sum_1^N A_n \int_0^\pi \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

$$\int_0^\pi \frac{dy(\theta)}{dx} d\theta = \sum A_n \cdot \frac{\pi}{2} \quad (n=m)$$

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy(\theta)}{dx} \cos(n\theta) d\theta$$

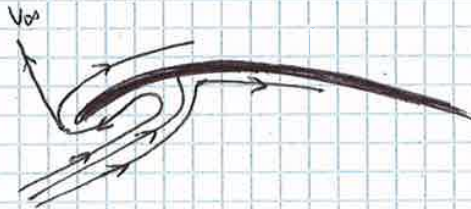
Il problema quindi è risolto (se conosco la forma del profilo posso calcolare tutti i coefficienti A_n)

$$V(\theta) = V_\infty \left(1 + 2\beta \sin\theta + \alpha \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta} \right)$$

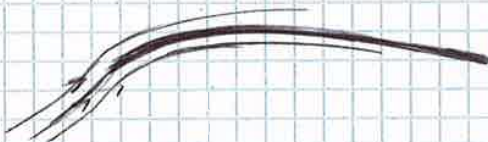
Facciamo il caso in cui $\theta=0$
 $\alpha=0 \rightarrow \alpha \neq \alpha_{10} \rightarrow V_{\text{CORRENDA TURBO}} \rightarrow \alpha$

(non proprio in perché è smorzata dagli effetti viscosi)

Ecco in pratica cosa succede



Se invece scelgo $\alpha = \alpha_{10}$



24-11-2014

CALCOLO COEFFICIENTE DI PORTANZA

$$C_e = \int_0^c \Delta c_p \frac{dx}{c}$$

so che $c_p^+ = -\frac{2v^+}{V_\infty} = -\frac{2r}{2V_\infty} = -\frac{r}{V_\infty}$

$$-c_p^- = -\frac{2v^-}{V_\infty} = +\frac{r}{V_\infty}$$

Di conseguenza $\Delta c_p = c_p^- - c_p^+ = \frac{r}{V_\infty} - \left(-\frac{r}{V_\infty}\right) = \frac{2r}{V_\infty}$

Si sa inoltre che $x = \frac{c}{2} (1 - \cos\theta) \Leftrightarrow dx = \frac{c \sin\theta}{2} d\theta$

90:

CALCOLO DEL COEFFICIENTE DI PRESSIONE

$$c_p^+ = -\frac{2v_1^+}{v_n} \rightarrow c_p^+ = -\frac{2v_1^+}{v_n} \rightarrow u^+ = \frac{v}{2}$$

$$c_p^+ = -\frac{2v}{2v_n} = -\frac{v}{v_n}$$

Sapendo che $y(\theta) = 2v_n \left[A_0 \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \sum A_n \sin(n\theta) \right]$

Stendi $c_p^+ = -\frac{2v}{2v_n} = -\frac{2v_n}{v_n} \left[A_0 \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \sum A_n \sin(n\theta) \right]$

$$-c_p^+ = -2 \left(\alpha - \alpha_0 \right) \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} - 2 \sum A_n \sin(n\theta)$$

↓
 lamina curva investita con incidenza α_0
 ↓
 lamina curva investita con incidenza α
 ↓
 lamina curva investita con incidenza $\alpha - \alpha_0$ → problema già risolto

$$c_{p10}^+ = -2 \sum A_n \sin(n\theta) - \frac{2 \sin\theta}{\pi} \underbrace{\sum A_n \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}}_{G_n}$$

$$G_n = \frac{\pi \sin(n\theta)}{\sin\theta} = \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta')}{\cos\theta' \cdot \cos\theta} d\theta'$$

$$c_{p10}^+ = -\frac{2 \sin\theta}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum A_n \cos(n\theta')}{\cos\theta' \cdot \cos\theta} d\theta'$$

So che $\frac{dy(\theta)}{dx} = \alpha - A_0 + \sum A_n \cos(n\theta)$

$$\sum A_n \cos(n\theta) = \frac{dy(\theta)}{dx} - (\alpha - A_0) = \frac{dy(\theta)}{dx} - (\alpha - (\alpha - \alpha_{10})) = \frac{dy(\theta)}{dx} - \alpha_{10}$$

$$-c_{p10}^+ = -\frac{2 \sin\theta}{\pi} \left[\int_0^\pi \frac{\frac{dy(\theta')}{dx}(\theta')}{\cos\theta' \cdot \cos\theta} d\theta' - \int_0^\pi \frac{\alpha_{10}}{\cos\theta' \cdot \cos\theta} d\theta' \right]$$

$$G_n = \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta')}{\cos\theta' \cdot \cos\theta} d\theta' = \frac{\pi \sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

$$G_0 = \int_0^\pi \frac{1}{\cos\theta' \cdot \cos\theta} d\theta' = 0$$

$$c_{p10}^+ = -\frac{2 \sin\theta}{\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{dy(\theta')}{dx}(\theta') - \frac{dy(\theta')}{dx}(\theta)}{\cos\theta' \cdot \cos\theta} d\theta'$$

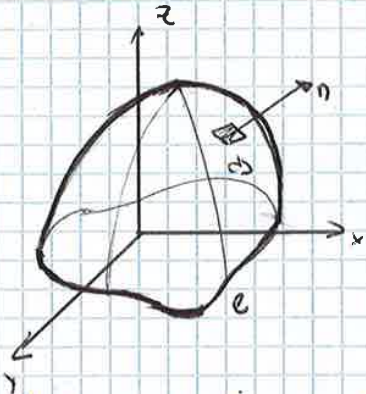
$$c_p^+ = -2 (\alpha - \alpha_{10}) \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{2 \sin\theta}{\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{dy(\theta')}{dx}(\theta') - \frac{dy(\theta')}{dx}(\theta)}{\cos\theta' \cdot \cos\theta} d\theta'$$

02/10/2019

52

DISTRIBUZIONI SUPERFICIALI DI SINGOLARITÀ

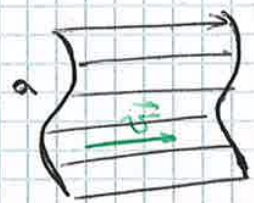
DISTRIBUZIONE DI VORTICI



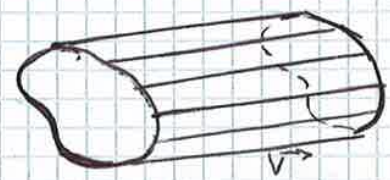
$$\Gamma = \oint_e \vec{v} \cdot d\vec{e} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} \, ds$$

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, ds$$

Introduciamo il concetto di SUPERFICIE DI CORRENTE



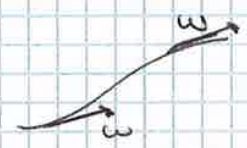
E riprendiamo quello di TUBO DI FLUSSO



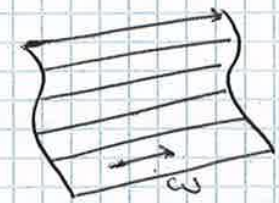
La portata che attraversa il tubo di flusso è costante $\alpha = \text{cost}$

Riprendendo invece il concetto del campo di vorticità $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ introduciamo

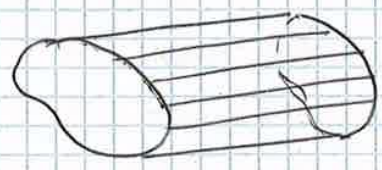
LINEA VORTICOSA



SUPERFICIE VORTICOSA



TUBO VORTICOSO



$\Gamma = \text{cost}$ per tutte le linee che concatenano il tubo

$$\Gamma = \oint_e \vec{v} \cdot d\vec{e} = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, ds$$

con $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$

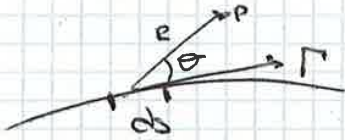
$$\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

questo dice che il campo di vorticità è un campo solenoidale

99

LEGGE DI BIOT e SAVART

considero un filetto vorticoso con circolazione Γ .
 considero un elemento ds



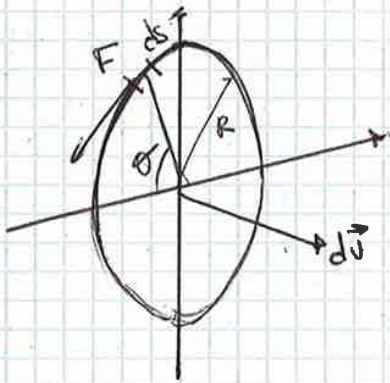
$$d\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{s} \times \vec{R}}{R^3}$$

↳ velocità indotta dal solo elemento

poiché $|d\vec{s} \times \vec{R}| = ds R \sin\theta$

$$d\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{ds R \sin\theta}{R^3} = \boxed{\frac{\Gamma}{4\pi R^2} \sin\theta ds}$$

Possiamo trovare le velocità indotte da ogni filetto vorticoso dell'ala.

VORTICE AD ANELLO CIRCOLARE (ANELLO VORTICOSO)

Velocità indotta nell'anello vorticoso nell'origine

$d\vec{v}$ esce dal foglio (\perp a $\vec{\Gamma}$ e a \vec{R})

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \sin\theta ds$$

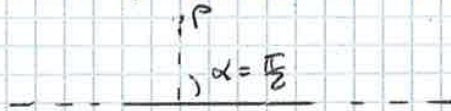
$$\hookrightarrow ds = R d\theta$$

$$\text{quindi } dv = \frac{\Gamma}{4\pi R} d\theta$$

Per costruzione $\theta = \pi/2$, quindi

$$v_p = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{4\pi R} d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi R} 2\pi = \boxed{\frac{\Gamma}{2R} = v_p}$$

36 Traslino P portandolo sulla stessa linea del punto A



$$V_p = \int \frac{\Gamma}{4\pi r} \quad (\text{caso di vertice semidefinito})$$

La V_p è esattamente la metà di prima



P si trova prossimo al segmento, a metà tra A e B

$$V_p = \int \frac{\Gamma}{4\pi r} 2 \cos \alpha = \int \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \alpha$$

Se $\frac{e}{r} \cong 91 \rightarrow \cos \alpha \cong 995 \rightarrow$ l'errore che si commette trascurando i tratti fuori da AB è molto piccolo rispetto a prima.

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_p + \phi_v = -\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi &= \psi_p + \psi_v = -\frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{aligned} \right\} \text{sovrapposizione degli effetti}$$

$$\left\{ \begin{aligned} v_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \left(-\frac{Q}{2\pi}\right) = -\frac{Q}{2\pi r} \\ v_\theta &= -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \right.$$

verifica:

$$\left\{ \begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r} \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{aligned} \right.$$

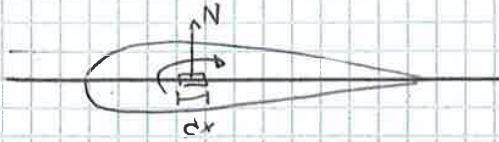
$$\frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} - 2\pi \phi$$

$$\ln r = \frac{\Gamma \theta - 2\pi \phi}{\frac{Q}{2\pi}} \rightarrow r = e^{\left(\frac{\Gamma \theta - 2\pi \phi}{\frac{Q}{2\pi}}\right)} = e^{\frac{\Gamma}{Q} \theta} \cdot \underbrace{e^{\left(-\frac{2\pi \phi}{\frac{Q}{2\pi}}\right)}}_{\text{cost}^b} = k e^{\frac{\Gamma}{Q} \theta}$$

Se θ cresce, cresce anche r (spirale che si apre)

100

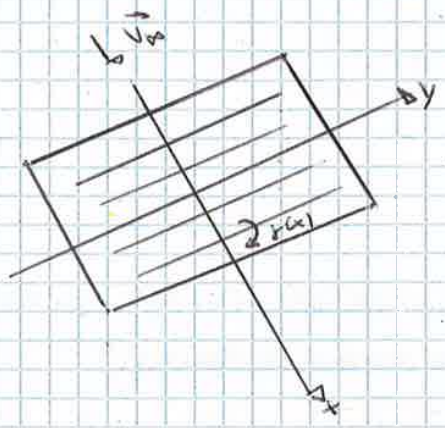
DIMOSTRAZIONE PER IL CASO 2D



$$p^- - p^+ = \rho v \omega y(x)$$

$$L = \int_0^c (p^- - p^+) dx = \int_0^c \rho v \omega y(x) dx = \rho v \omega \Gamma$$

SUPERFICIE VORTICOSA ADERENTE



Nel caso in cui una superficie vorticoso sia aderente alla superficie la differenza di pressione è nulla

$$\Delta p = 0$$

Inoltre \vec{v}_m e $\gamma(s)\vec{n}$ possono non essere parallele
 Più in generale le linee di corrente non sono parallele a quelle vorticoso

SUPERFICIE VORTICOSA LIBERA

