



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1766A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Russo Francesco

MATERIA: Metodi matematici per l'ingegneria - prof. Fagnani

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

INTRODUZIONE

DOCENTI: Fabio Fagnani } → ANALISI
 Urentino Battisti }
 Franco Pellicani → PROBABILITÀ

LEZIONI: MAR e VEN : ANALISI
 MAR : PROBABILITÀ

Introduzione su Analisi:

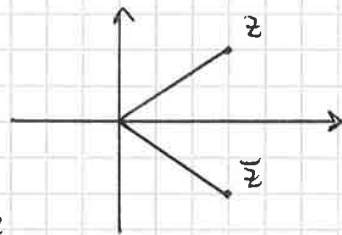
- analisi complessa : calcolo degli integrali
- distribuzioni e trasformate (per i segnali)



X CONIUGATO E MODULO

Prose $z = x + iy$, il suo conugato è $\bar{z} = x - iy$.

Il modulo di z è la lunghezza del vettore che individua z stesso nel piano.



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Mostre: } z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Quindi se $z \neq 0$ allora $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$.

$$\text{Pertanto } \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} = z^{-1}$$

$$\text{Esempio: } \frac{1+i}{1-i} = (1+i) \frac{1}{1-i} = (1+i) \frac{(1+i)}{2} = (1+i) \left(\frac{1}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{1}{2} + i \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = i$$

o PROPRIETÀ DEL CONIUGATO E DEL MODULO

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

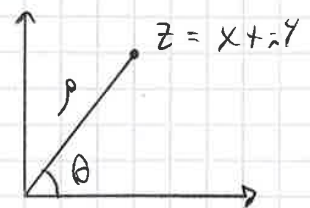
X RAPPRESENTAZIONI TRIGONOMETRICA ED ESPONENZIALE

La rappresent. trigonometrica usa le coordinate polari.

$$\rho = |z|$$

$$\theta = \arg(z) = \arg(z) + 2\pi$$

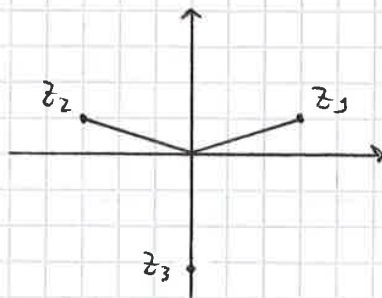
FAMIGLIA DI ANGOLI.
"ARGOMENTO DI z A MENO DI MULTIPLI DI 2π "



● GUARDA



Quando le soluzioni sono:
 $z_1 = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi}$, $z_3 = 1 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = 1 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$



OSSERVAZIONE: se $W \in \mathbb{C}$ le m soluzioni di $z^m = W$ formano sempre un poligono regolare di m vertici con il baricentro in $\emptyset \in \mathbb{C}$

nell'origine del piano complesso.

I numeri complessi di modulo unitario sono raccolti nel insieme $S = \{z = e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

L'insieme S è una circonferenza di raggio 1 e di centro l'origine sul piano complesso.

Se moltiplichiamo due elementi dell'insieme otteniamo ancora un elemento dell'insieme: $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_3}$

Nel corso studieremo funzioni definite su \mathbb{C} :

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

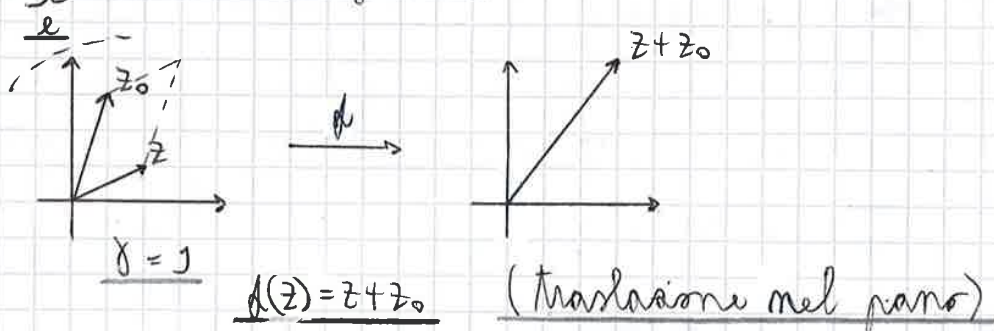
$f: D \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Esempio: $f(z) = \gamma z + z_0$

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$f(z) = \gamma z + z_0$ (retta complessa)

dove $\gamma \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ sono fissati



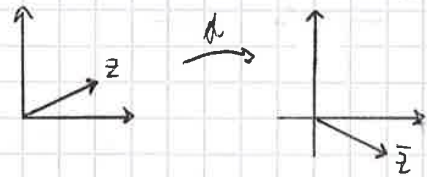
Problema: mostrare che una qualunque rotazione in \mathbb{C} attorno ad un centro qualunque w si può scrivere come $f(z) = \gamma z + z_0$ per opportuno $|\gamma| = 1$ e $z_0 \in \mathbb{C}$

Risolvere: PER ESERCIZIO

Ci sono altre isometrie in \mathbb{C} che _____ possono essere rappresentate in questa forma? No.

Ad esempio, la trasformazione detta CONIUGO: $f(z) = \bar{z}$, la quale è una RIFLESSIONE intorno all'asse x .

Questa trasformazione non si può scrivere nella forma $f(z) = \gamma z + z_0$.



Intuitivamente ciò si può dedurre dal fatto che la RIFLESSIONE comporta un "ribaltamento", un'inversione del piano, non prevista da ROTAZIONE e TRASLAZIONE.

* NOTAZIONI SULLE FUNZIONI

Dato una funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, in generale essa si può rappresentare utilizzando le coordinate cartesiane nel dominio e nel codominio:

$$z = x + iy \quad f(z) = u + iv$$

u e v si possono supporre _____ funzioni di x e y :

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad \text{queste sono tipiche funzioni di Analisi II:}$$

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\det \begin{pmatrix} n \cos \tau & -n \sin \tau \\ n \sin \tau & n \cos \tau \end{pmatrix} = n^2 \neq 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Le RIFLESSIONI hanno il determinante negativo !!!

X ALTRI ESEMPI DI FUNZIONI NOTEVOLI

o POLINOMI

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m$$

$$\text{dove } a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$$

o FUNZIONI RAZIONALI

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}$$

$$\text{non } a_i, b_j \in \mathbb{C}$$

o PARABOLA

$$f(z) = z^2$$

$$z = \rho e^{i\theta} \longleftrightarrow z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$$

L Questa funzione moltiplica e amplifica/comprime il numero z ,
 B tuttavia la rotazione è doppia per ogni z : $\frac{\pi}{4}$ diventa $\frac{\pi}{2}$,
 $\frac{\pi}{2}$ diventa π , ecc.

G Per esempio, una rotazione si vede stirare e avvolgere
 su se stessa.

C In rappresentazione cartesiana:

$$z = x + iy \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$z^2 = x^2 + (iy)^2 + 2xiy = (x^2 - y^2) + i2xy$$

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2 \\ v(x, y) = 2xy \end{cases} \quad \text{sono due paraboloidi} \\ \text{nello spazio tridimensionale.}$$



* TOPOLOGIA DI \mathbb{C}

Esempio: $f_1(z) = \frac{1}{z}$ $f_2(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

$D_1: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ $D_2: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$

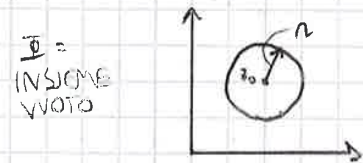
I domini naturali di definizione delle funzioni di variabile complessa sono molto vari e non facilmente riconducibili ad un oggetto base come lo è invece l'intervallo su \mathbb{R} .

Provati: un elemento $z_0 \in \mathbb{C}$ e un insieme $A \subseteq \mathbb{C}$:

- Dal punto di vista insiemistico $z_0 \in A$ oppure $z_0 \notin A$;
- Dal punto di vista topologico ci sono invece tre possibilità:

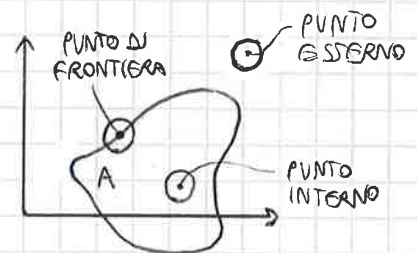
posto $r \in \mathbb{R} > 0$, l'insieme $(r, \text{INTORNO})$
 $B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ è detto CERCHIO APERTO
 centrato in z_0 e avente raggio r
 (il bordo del cerchio NON è compreso nell'insieme);

Def. 1: z_0 si dice INTERNO ad A se
 $\exists r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq A$;



Def. 2: z_0 si dice ESTERNO ad A se z_0 è interno al comple-
 mentare di A (A^c), cioè se $\exists r > 0 : B_r(z_0) \cap A = \mathbb{I}$;

Def. 3: z_0 si dice di FRONTIERA per A se
 non è INTERNO né ESTERNO ad A , ossia
 se $\forall r > 0$ in $B_r(z_0)$ abbiamo sempre
 sia punti di A che di A^c



□ NOTAZIONE

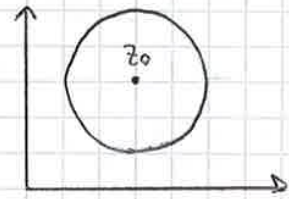
$\overset{\circ}{A}$ indica l'insieme dei punti interni (ossia la parte interna)
 di A .

∂A indica l'insieme dei punti di frontiera (ossia la fron-
 tera) di A .

$\overset{\circ}{A^c}$ indica l'insieme dei punti interni al complementare di A
 (ossia la parte esterna di A).

1) $A = B_n(z_0)$

Se prendo un $w \in B_n(z_0)$
 tale che $|z_0 - w| = n' < n$,
 per avere un cerchio centrato



L
B
G
G

in w tale che tutti i suoi punti sono interni a $B_n(z_0)$
 basta prenderlo con raggio $n - n'$: $B_{n-n'}(w) \subseteq B_n(z_0)$.
 (Verificare se n reale e n' ipotele)

$\overset{\circ}{A} = B_n(z_0)$

$\partial A = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = n\}$

$\overset{\circ}{A^c} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > n\}$

2) $A = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ PIANO PUNCIATO

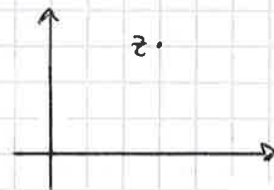
$\overset{\circ}{A} = A$

$\partial A = \{z_0\}$

$\overset{\circ}{A^c} = \emptyset$

$|z - z_0| = n > 0$

$B_n(z_0) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$



X ALTRE DEFINIZIONI

Def. : $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice APERTO se $A = \overset{\circ}{A}$

Def. : $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice CHIUSO se $\partial A \subseteq A$

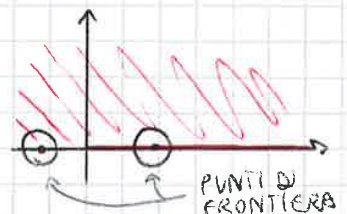
Esempio:

- 1) $\mathbb{C}, \mathbb{R}, B_n(z_0), \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sono aperti
 2) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$
 $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq n\}$ sono chiusi
 \mathbb{C}, \mathbb{R}

*² contenuta in A.

N.B. \mathbb{C} e \mathbb{R} sono sia aperti che chiusi.

- 3) $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0, \text{Re}(z) > 0\}$
 $\overset{\circ}{A} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$
 $\partial A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$



∂A è in parte contenuta e in parte non *².

X REGIONE

$A \subseteq \mathbb{C}$ è una REGIONE se si può ottenere da un dominio eventualmente aggiungendovi parte della frontiera.

N.B. Il DOMINIO è il nostro oggetto fondamentale, mentre la REGIONE è l'equivalente complesso dell'intervallo reale.

I domini sono regioni.

- L
 E
 G
 C
- 1) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ è una regione
 - 2) $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ è una regione
 - 3) \bar{A} è una regione
 - 4) $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0, \text{Re}(z) > 0\}$ è una regione
 - 5) Posto $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$
 $\dot{A} = \emptyset$ non può essere una regione

Esercizio per casa:

posto $A = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$ determinare \dot{A} , ∂A , \bar{A}^c e in particolare dire se A è una regione.

LEZIONE 10 MARZO 15

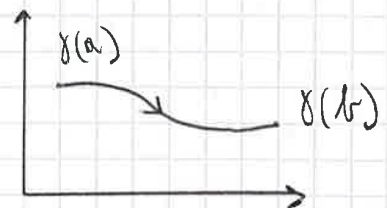
X CURVE

\mathbb{R}
 \cup

Def. Una curva in \mathbb{C} è una funzione continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.

Il parametro che varia fra a e b è t . Quindi in generale $\gamma(t) \in \mathbb{C}$.

*² della curva va segnata una freccia che ne indichi il verso di per = cammino al crescere di t .



*² Sul grafico

L
E
G
G

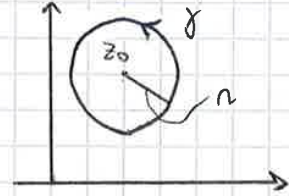
$\gamma'(t) = z_1 - z_0$ VELOCITÀ COSTANTE: MOTO RETTILINEO UNIFORME

$\gamma_2'(t) = 2t(z_1 - z_0)$ VELOCITÀ CHE INCREMENTA: MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

2) circonferenza (percorsa orariamente con moto circolare)

$\gamma(t) = z_0 + ne^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$

circonferenza centrata in z_0 e raggio n , percorsa in senso antiorario.



o CURVA SEMPLICE, CHIUSA, DI JORDAN

Definizione Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ si dice:

(i) SEMPLICE se

$t_1 \neq t_2 \implies \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$

(ii) CHIUSA se $\gamma(a) = \gamma(b)$

(iii) DI JORDAN se è CHIUSA e se $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ quando $t_1 \neq t_2 \wedge \{t_1, t_2\} \neq \{a, b\}$

OSSIA SI CHIUDE MA NON INCROCIA MAI SE STESSA

L
E
G
G

Es: 1) le curve rettilinee $\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ sono SEMPLICI e NON CHIUSE



2) le curve $\gamma(t) = z_0 + ne^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ sono CHIUSE e DI JORDAN.

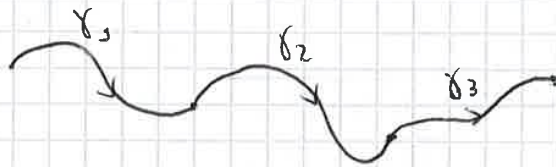
x CONCATENAZIONE DI CURVE

Prete tre curve:

$\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{C}$

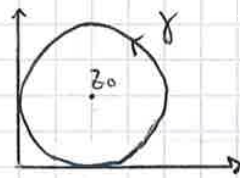
$\gamma_3: [a_3, b_3] \rightarrow \mathbb{C}$



talche $b_1 = a_2$ e $b_2 = a_3$, si può considerare la curva concatenata $\gamma: [a_1, b_3] \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{per } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t) & \text{per } t \in [a_2, b_2] \\ \gamma_3(t) & \text{per } t \in [a_3, b_3] \end{cases}$$

3) $R = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$



$\gamma(t) = z_0 + r e^{-it}$

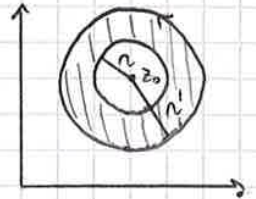
$\text{Int } \gamma = B_r(z_0)$

Quando $z_0 \in \text{Int } \gamma$ ma $z_0 \notin R$,

allora R NON è SEMPLICEMENTE CONNESSO.

4) $R = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$

Le CORONE CIRCOLARI non sono semplicemente connesse.



Nella prossima lezione:

Posto D , regione, e posto $z_0 \in \overline{D}$,

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ studieremo le proprietà seguenti:

limite ($\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$), continuità e derivabilità.

Defn. Si dice che f tende ad l per z tende a z_0 se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } \left. \begin{array}{l} |z - z_0| < \delta \\ z \in D \end{array} \right\} \Rightarrow |f(z) - l| < \epsilon$$



X EXTRA: COSENO E SENO DI NUMERI COMPLESSI

$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Dim.

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} (\cos x + i \sin x + \cos(-x) + i \sin(-x)) = \\ &= \frac{1}{2} [2 \cos x + i (\sin x + \sin(-x))] = \cos x \end{aligned}$$

Stesso per $\sin(x)$.



NOTAZIONE: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$, come per le funzioni reali.

OSSERVAZIONE: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \iff \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - l) = 0$
 $\iff \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - l| = 0$

//

Parti

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$z = x + iy \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

$$l = \operatorname{Re}(l) + i \operatorname{Im}(l)$$

o osservi che

$$|f(z) - l| = \sqrt{(u(x, y) - \operatorname{Re}(l))^2 + (v(x, y) - \operatorname{Im}(l))^2}$$

Quando $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - l| = 0$ equivale a dire che:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \sqrt{(u(x, y) - \operatorname{Re}(l))^2 + (v(x, y) - \operatorname{Im}(l))^2} = 0$$

Questo è un limite nel senso di Analisi II. ← GEOMETRIA, FORSE | USAb

Vale il seguente risultato finale: Dimostrare

PROPOSIZIONE: sono fatti equivalenti:

$$\textcircled{1} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$$

$$\textcircled{2} \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - l| = 0$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} u(x, y) = \operatorname{Re}(l) \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} v(x, y) = \operatorname{Im}(l) \end{cases}$$

↙↘

Quindi la continuità di $f(z)$ dipende dalla continuità delle sue componenti u e v .

OSSERVAZIONE: polinomi, funzioni razionali, esponenziali, f. trigonometriche, f. iperboliche e loro composizioni sono continue ove definite.

Es. $f(z) = \frac{z^3}{1+z}$ $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

$$= \frac{z^3(1+\bar{z})}{|1+z|^2} = \frac{(x+iy)^3(1+x-iy)}{(1+x)^2 + y^2} = \dots = u(x,y) + i v(x,y)$$

con u e v f. razionali in x e y , quindi continue ove definite.

X DERIVABILITÀ

Se $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, sia $z_0 \in D$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$.

Def: si dice che f sia derivabile in z_0 se esiste finito

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Tale limite, se esiste, si indica con $f'(z_0)$ ed è detto "derivata di f nel punto z_0 ".

Come nel caso reale valgono le usuali regole di derivazione:

Es: poste f e g derivabili in z_0 , $f+g$ e $f \cdot g$ sono derivabili.

$$1) (f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$2) (f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$$

$$3) (f(g(z_0)))' = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$$

4) Tutto il resto è come in Analisi I.

Es. $f(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$, $f'(z) = \sum_{k=0}^m k a_k \cdot z^{k-1}$

$f(z) = e^z$, $f'(z) = e^z$

Passando a coordinate cartesiane:

$$u(x, y) + i v(x, y) = u(x_0, y_0) + i v(x_0, y_0) + (Re(f'(z_0)) + i Im(f'(z_0))) \cdot ((x-x_0) + i(y-y_0)) + o(z-z_0)$$

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) + Re(f'(z_0))(x-x_0) - Im(f'(z_0))(y-y_0) + w_1(x, y)$$

$$o(z-z_0) = w_1(x, y) + i w_2(x, y)$$

$$v(x, y) = v(x_0, y_0) + Im(f'(z_0))(x-x_0) + Re(f'(z_0))(y-y_0) + w_2(x, y)$$

Devo verificare che i resti siano giusti.

A quel punto potrei dire che la derivabilità coincide con la differenziabilità.

Perché $\frac{o(z-z_0)}{z-z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$

allora anche $\frac{|o(z-z_0)|}{|z-z_0|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ ossia

$$\frac{\sqrt{w_1^2(x, y) + w_2^2(x, y)}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$$

Da cui, per confronto:

$$\frac{|w_1(x, y)|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0 \quad (\text{stesso per } w_2(x, y))$$

Segue: $w_1(x, y) = o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$
 $w_2(x, y) = o(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})$

Segue che u e v sono entrambe differenziabili in (x_0, y_0) ;

inoltre:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = Re(f'(z_0)) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -Im(f'(z_0)) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = Im(f'(z_0)) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = Re(f'(z_0)) \end{cases}$$

Nota: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$

Queste Relazioni di Cauchy-Riemann (CR).

LEZIONE 20 MARZO '95

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, e sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$.

~~f è bice OLOMORFA~~

X FUNZIONI OLOMORFE

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, e sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$.

f è bice OLOMORFA su D se è derivabile in ogni punto di D (e la sua derivata $f'(z)$ è continua su D).

La parte fra parentesi è superflua in quanto

X EXTRA: quando f soddisfa le Relazioni di CR è bice che f sia INTERA.

OSSERV: se $\operatorname{Re}(f)$ o $\operatorname{Im}(f)$ è costante ed f è olomorfa, allora necessariamente f è costante, ossia anche l'altra componente di f è costante.

Esercizio per casa

 $f(z) = e^z$ Verificare CR e calcolare $f'(z)$. È armonica?

OSSERVAZIONE: i polinomi, le funzioni razionali, gli esponenziali, le funzioni iperboliche e trigonometriche e tutte le loro composizioni sono armoniche dove definite.

X FUNZIONI ARMONICHE

Prosta D dominio, una funzione $m: D \rightarrow \mathbb{R}$ è ARMONICA se m è di classe C^2 su D e vale:

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

Esempio:

1) $m(x, y) = a + bx + cy$ è armonica su tutto \mathbb{R}^2 .

2) $m(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$

$$\frac{\partial m}{\partial x} = 2ax + cy \quad \frac{\partial m}{\partial y} = 2by + cx$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial x^2} = 2a \quad \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} = 2b$$

$$2a + 2b = 0 \Rightarrow b = -a$$

ossia avente tutti i termini con lo stesso grado

Quindi, ogni polinomio di grado 2 omogeneo del tipo

$m(x, y) = a(x^2 - y^2) + cxy$ è armonico.



Esempio:

$u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ è armonica. Cerchiamo $v(x, y)$ tale che calcolano le condizioni di CR:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

Resolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1 \end{cases}$$

POTREBBE ESSERE FUNZIONE DI Y

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y \Rightarrow v(x, y) = \int 2y dx = 2xy + c(y)$$

Misiamo ora la seconda equazione:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 1 = 2x + c'(y)$$

Si ottiene $c'(y) = 1 \Rightarrow c(y) = y + c$

Quindi otteniamo:

$$v(x, y) = 2xy + y + c$$

Quindi u sono infatti completamente armonici, separati da una costante, per una funzione u armonica.

Se la parte da una funzione non armonica non è possibile trovare per essa alcun complemento armonico.

X INTEGRALI SU CURVE

OSSERVARE CHE IN ALCUNI PUNTI

Sia la curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ di classe C^1 a tratti, detta

CURVA REGOLARE

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$



Esempio:

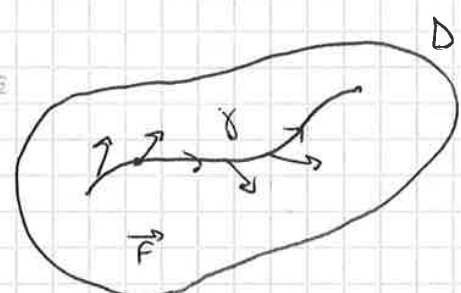
$$y(t) = e^{i\alpha t} = \cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t)$$

$$y'(t) = i\alpha e^{i\alpha t}$$

$$\int_a^b e^{i\alpha t} dt = \frac{1}{i\alpha} \int_a^b i\alpha e^{i\alpha t} dt = \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha t} \Big|_a^b = \frac{e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}}{i\alpha}$$

INTEGRALE DI LINEA DI UN CAMPO

Provi $D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio e $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ curva regolare, sia
 in D un CAMPO $\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, che ad ogni punto del dominio

$\vec{F}(x, y) = (\alpha(x, y), \beta(x, y))$
 COMPONENTI
 COSI' COME UNA FUNZIONE COMPLESSA $f: D \rightarrow \mathbb{C}$
 ASSOCIARE UN VETTORE


$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) = (x(t), y(t))$$

(In questo caso le due notazioni sono equivalenti: \mathbb{C} ed \mathbb{R}^2 sono entrambi spazi bidimensionali)

Calcoliamo $\int_{\gamma} \vec{F}$

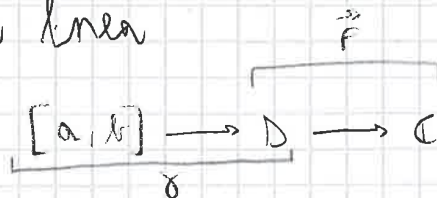
$$\int_{\gamma} \vec{F}(x, y) d\vec{l} = \int_a^b (\alpha(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \beta(x(t), y(t)) \cdot y'(t)) dt$$

Questo è l'INTEGRALE DI LINEA di \vec{F} lungo γ , e rappresenta il LAVORO di \vec{F} lungo γ .

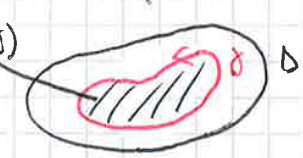
N.B. Ripassare gli integrali di linea

LEZIONE 26 MARZO 15

TEOREMA DI GREEN



Se \vec{F} è un campo di classe C^1 su D e γ è una curva di Jordan in D non ~~non~~ ~~interna~~ contenuta $\text{Int}(\gamma) \subseteq D$, allora

$$\int_{\gamma} \vec{F} d\vec{l} = \iint_{\text{Int}(\gamma)} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) dx dy$$


= FINIRE PER VOSSO

0 PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

i) LINEARITÀ RISPETTO A $f(z)$

← FUNZIONE INTEGRANDA

Posti: $f_1, f_2: D \rightarrow \mathbb{C}$ continue, $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ regolare,
 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, allora:

$$\int_{\gamma} [\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z)] dz = \lambda_1 \int_{\gamma} f_1(z) dz + \lambda_2 \int_{\gamma} f_2(z) dz$$

Questa proprietà segue immediatamente dalla corrispondente proprietà dell'integrale di Riemann. L
E
G
G

ii) ADDITIVITÀ RISPETTO ALLA CONCATENAZIONE DI CAMMINI

Posti: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua, $\gamma_1: [a, b] \rightarrow D$ e $\gamma_2: [b, c] \rightarrow D$ curve regolari tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, indichiamo con $\gamma_1 \vee \gamma_2$ la concatenazione delle due curve. Allora:

$$\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

Questa proprietà segue dall'additività dell'integrale di Riemann.

iii) INVARIANZA RISPETTO ALLE RIPARAMETRIZZAZIONI

La riparametrizzazione di una curva è una differente formula che la descrive, che lascia inalterato supporto e verso di percorrenza.

$\gamma \circ \gamma^{-1}$
 = BESTA
 GRECO

Posti: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ continua, $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ curva regolare e $\gamma^{-1}: [a, b] \rightarrow [a, b]$ funzione C^1 strettamente crescente, allora:

$$\int_{\gamma \circ \gamma^{-1}} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz$$

con $[(\gamma \circ \gamma^{-1})(s)] = \gamma(\gamma^{-1}(s))$

X TEOREMA DI CAUCHY-GOURSAT

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ una curva di Jordan tale che $\text{Int}(\gamma) \subseteq D$ e tale da essere percorsa in senso antiorario.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Dem:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} (u, -v) dl + i \int_{\gamma} (v, u) dl =$$

$$\stackrel{\text{GREEN}}{=} \iint_{\text{Int} \gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + i \iint_{\text{Int} \gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy =$$

$$\stackrel{\text{CR}}{=} 0 + i \cdot 0 = 0$$

~~Summe of integral of functions olomorfe lungo cammini chiusi sono null.~~

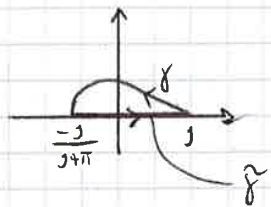
COROLLARIO: posti $D \subseteq \mathbb{C}$ semplicemente connesso,

$f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ curva di Jordan, s. ha:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad D \equiv \mathbb{C} \text{ (APPUNTO 1MO)}$$

Es $f(z) = z^2 e^z + 18z^3 \sinh(z)$, $\gamma(t) = R e^{it} \quad t \in [0, 2\pi]$
 $\int_{\gamma} (z^2 e^z + 18z^3 \sinh z) dz = 0$

Es $\gamma: [0, \pi] \rightarrow D \quad \gamma(t) = \frac{e^{-t}}{1+t}$



$$\int_{\gamma} z^2 dz \stackrel{\text{Def}}{=} \int_0^{\pi} \frac{e^{2it}}{(1+t)^2} \left(\frac{e^{-t}}{1+t} \right)' dt \quad \text{NON È RISOLVIBILE}$$

Consideriamo $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma}(t) = -\frac{j}{1+\pi} + t \left[1 + \frac{j}{1+\pi} \right]$

Per concatenare le due curve facciamo prima una traslazione in $\tilde{\gamma}: \tilde{\gamma}: [\pi, \pi+1] \rightarrow \mathbb{C}$, con $\tilde{\gamma}(t) = -\frac{j}{1+\pi} + (t-\pi) \left(1 + \frac{j}{1+\pi} \right)$

∩∩

LEZIONE 31 MARZO JS

X DOMINIO CON BORDO

Il dominio $D \subseteq \mathbb{C}$ si dice DOMINIO CON BORDO se la sua frontiera ∂D è l'unione di un numero finito di supporti di curve di Jordan orientate a fine a fine, cioè $\exists \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ curve di Jordan in \mathbb{C} tali che:

$$\text{supporto}(\gamma_i) \cap \text{supporto}(\gamma_j) = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

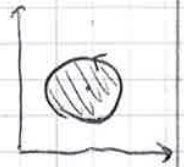
e tali che: $\partial D = \bigcup_{i=1}^n \text{supporto}(\gamma_i)$

N.B. Non conta il verso di percorrenza delle curve di Jordan, conservate

Esempio

$D = B_n(z_0) \quad \gamma(t) = z_0 + R e^{it} \quad \partial D = \text{supporto}(\gamma)$

D è un dominio con bordo



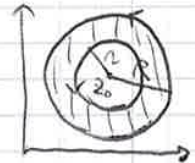
Esempio

$D = \{z \in \mathbb{C} \mid n < |z - z_0| < R\}$ con $0 < n < R$

$\gamma_1(t) = z_0 + n e^{it} \quad \gamma_2(t) = z_0 + R e^{it}$

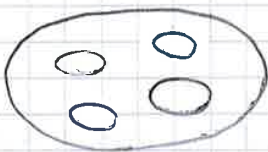
$\partial D = \text{supporto}(\gamma_1) \cup \text{supporto}(\gamma_2)$

D è un dominio con bordo.



Esempio

Esempio tipico di dominio con bordo



Sia dato $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio con bordo e siano $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ le curve di Jordan che ne parametrizzano la frontiera ∂D

Si dice che le curve sono orientate positivamente se percorrendole il dominio risulta essere alla loro sinistra



e dato che sono percorsi in sensi opposti non hanno contributo all'integrale, per cui si torna alla situazione iniziale con le tre curve separate: $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \rightarrow \dots$

SEGMENTI A CONTRIBUTO 0

CONSEGUENZE DEL TEOREMA PRECEDENTE

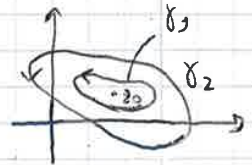
COROLLARIO: Sia $f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.

Siano γ_1, γ_2 curve di Jordan, $z_0 \in \text{Int}(\gamma_i)$ (con $i=1,2$);

$\text{Int}(\gamma_1) \cap \text{Int}(\gamma_2) = \emptyset$. ↳ PERCORSE IN SENSO ANTICLOCKWISE

Allora:

$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$



z^2 di Jordan

Dim:

* $\Omega = \text{Int}(\gamma_2) \cap \text{Int}(\gamma_1)^c$, con $\partial\Omega$ parametrizzato con orientamento positivo dalle curve γ_2 e $-\gamma_1$ (ossia γ_1 percorsa al contrario, cioè in senso orario):

* Siano $\gamma_1 \subseteq \text{Int}(\gamma_2)$ e γ_2 dominio con bordo

$$\begin{aligned} \emptyset &= \int_{\partial\Omega} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{-\gamma_1} f(z) dz = \\ &= \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz = \emptyset \end{aligned}$$

Sempre gli integrali di $f(z)$ lungo γ_1 e lungo γ_2 sono uguali. L.V.B.

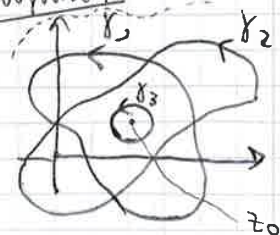
di Jordan

Se le curve γ_1 e γ_2 ~~non~~ ~~però~~ ~~si~~ ~~intersecano~~ non defl. = non esiste più un dominio con bordo. Per verificare se gli integrali di $f(z)$ lungo γ_1 e lungo γ_2 sono uguali?

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz \stackrel{?}{=} \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \text{Sì!}$$

" " "

$\int_{\gamma_3} f(z) dz$

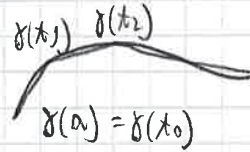


Per verificare se sono uguali si prende una terza curva γ_3

X LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Prosta $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, la lunghezza di γ è:

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$



$\gamma(b)$

Dem

$$y - y_0 = \alpha'(x) \cdot (x - x_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$

$$\gamma(t_{i+1}) = \gamma(t_i) + \gamma'(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) + o(t_{i+1} - t_i)$$

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \approx |\gamma'(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)|$$

← PUO' PERCHE' SEMPRE POSITIVO

$$\sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \approx \sum_i |\gamma'(t_i)| \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$\lim \rightarrow \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

è CONSIGLIATO

RIVEDERE DEFINIZIONE DI L DI CURVA DA GEOMETRIA

LEZIONE 10 APRILE '15

*³ ossia tale che p sia limitata

X PROPOSIZIONE

Siano $D \subseteq \mathbb{C}$ un dominio, $\gamma : D \rightarrow \mathbb{C}$ continua e tale che $|\alpha(z)| \leq M$

$\forall z \in D, *^3$, e $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ una curva regolare.



Allora $|\int_{\gamma} \alpha(z) dz| \leq M \cdot L(\gamma)$ ← LUNGHEZZA DELLA CURVA γ

In altre parole, l'area sottesa dalla funzione α lungo la curva γ è minore o uguale al massimo della funzione per la lunghezza della curva.

Dem:

$$|\int_{\gamma} \alpha(z) dz| = |\int_a^b \alpha(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt| \leq \int_a^b |\alpha(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \leq$$

$$\leq \int_a^b M |\gamma'(t)| dt = M \cdot L(\gamma)$$

→ compresso, a patto che $\text{Int}(\gamma) \subseteq D$.

Data l'orbitata δ e, segue che $I = \mathbb{R}$ necessariamente.

Questo dimostra la Formula di Cauchy.

*³ il punto di singolarità appartenente alla parte interna della curva, il quale non va raggruppato in $d(z)$ che si usa per indicare la "parte olomorfa", la quale permette di sfruttare la F. di Cauchy

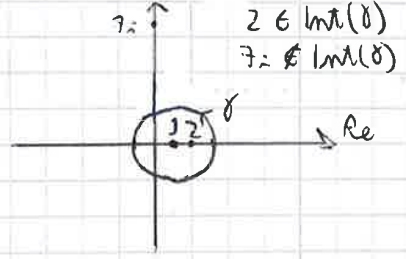
ECCOL

Esempio: $\gamma(t) = 1 + 2e^{-it} \quad t \in [0, 2\pi]$

Calcolare $\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-7i)(z-2)} dz$

N.B. Ogni volta che si deve calcolare l'integrale di * su una curva è importante disegnare la curva e i punti in cui la *², per individuare *³.

Se poniamo $f(z) = \frac{e^z}{z-7i}$,
 $f(z)$ è olomorfa su $\text{Int}(\delta)$ e:
 $\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-7i)(z-2)} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-2} dz =$
 $= 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i \cdot \frac{e^2}{2-7i}$



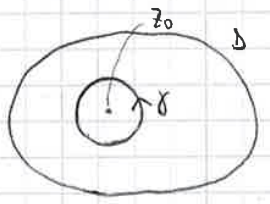
* una funzione
 *² funzione non è olomorfa

X CONSEGUENZE DELLA FORMULA DI CAUCHY

1) Siano $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $z_0 \in D$, $\gamma(t) = z_0 + Re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\text{Supp}(\gamma) \subset D$, $\text{Int}(\delta) \subset D$.

$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$
 $= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{-it})}{Re^{-it}} \cdot R e^{-it} dt =$
 $= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{-it}) dt$ FORMULA DELLA MEDIA



La formula della media vale anche per la parte reale e la parte immaginaria:

$\text{Re}(f(z_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re}(f(z_0 + Re^{-it})) dt$ (stesso discorso per $\text{Im}(f(z_0))$)

Quindi anche le funzioni armoniche godono della proprietà della media: il valore che esse assumono in un punto z_0 è la media dei valori che assumono su una qualunque circonferenza centrata in z_0 .



X (INDICE DI) INVOLGIMENTO

L'indice di avvolgimento di una curva γ rispetto ad un punto

$z_0 \in \text{int}(\gamma)$ è:

$$I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-z_0} dz$$

L'indice di avvolgimento è lo stesso per qualsiasi punto $z_0 \in \text{int}(\gamma)$.

LEZIONE 16 APRILE 15

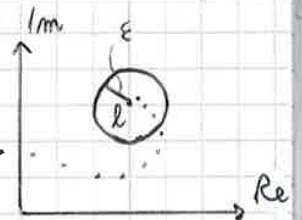
X SUCCESSIONI E SERIE COMPLESSE

Sea $\{z_m\}$ una successione di numeri complessi.

Def: si dice che $\{z_m\}$ tende ad $l \in \mathbb{C}$ per $m \rightarrow +\infty$ se:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{m} \in \mathbb{N} \text{ tale che } |z_m - l| < \epsilon \quad \forall m \geq \bar{m}$$

$$\Downarrow \\ z_m \in B_\epsilon(l)$$



I limiti di successioni complesse godono di proprietà analoghe al caso reale (somma, prodotto, ecc.).

NOTA: in simboli $\lim_{m \rightarrow +\infty} z_m = l$, $z_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} l$

OSSERVAZIONE: $z_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} l \iff z_m - l \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$
 \Downarrow
 $|z_m - l| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$

complessa

Sea $\{z_m\}$ successione \forall , sea $z_m = a_m + i b_m$ ed $l = \text{Re}(l) + i \text{Im}(l)$.

$$z_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} l \iff \begin{cases} a_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \text{Re}(l) \\ b_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \text{Im}(l) \end{cases} \quad \lceil \mathbb{C}$$

\Downarrow

Quindi se $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge allora per confronto convergono anche $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Perché $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ convergono allora $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge. *l.v.d.*

QUASI SEMPRE SULL'ESAME

Esempio: — Sia $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Studiamo $\sum_{m=0}^{\infty} z^m$ SERIE GEOMETRICA.

La successione $\{z^m\}$ tende a 0: — infatti $|z^m| = |z|^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ e dunque $z^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

RICORDO: È IL MODULO COMPLESSO

Si noti che: $\sum_{k=0}^m z^k = \frac{z^{m+1} - 1}{z - 1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{-1}{z - 1} = \frac{1}{1 - z}$

Quindi la serie geometrica $\sum_{m=0}^{\infty} z^m$ è convergente $|z| < 1$, e solo se se e solo se

$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1 - z} \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| < 1$

ovviamente

anche

In realtà si può anche far vedere che la serie converge assolutamente:

$\sum_{m=0}^{\infty} |z|^m = \frac{1}{1 - |z|} \quad (\text{se } |z| < 1)$

X PROPRIETÀ DELLA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$|\sum_{k=0}^{\infty} z_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$

SIMBOLO ELEMENTO NON CONI. ASSOLUTA

NOTA: se $|z| > 1$ allora $|z^m| = |z|^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \infty$

dunque $z^m \not\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ e pertanto $\sum_{m=0}^{\infty} z^m$ non converge.

Esempio: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k z^{2k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{i z^2}{2} \right)^k$. Se poniamo $w = \frac{i z^2}{2}$

otteniamo la serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty} w^k$ che converge se e solo se $|w| < 1$:

$|\frac{i z^2}{2}| < 1 \Rightarrow \frac{|z|^2}{2} < 1 \Rightarrow |z|^2 < 2 \Rightarrow |z| < \sqrt{2}$

Si osserva che nella serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}$ se considerassimo (stagliando) che $a_m = \frac{z^m}{2^m}$ avremmo:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{z^{m+1}}{2^{m+1}} \cdot \frac{2^m}{z^m} \right| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{z}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow R=2$$

MENTRE INVECE È $\sqrt{2}$!!!

Esempio: $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$ SERIE ESPONENZIALE

$$a_m = \frac{1}{m!} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{m!}{1} \right| = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m+1} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow R = +\infty$ ossia la serie converge su tutto il piano complesso.

Esempio: $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} (-z^2)^m = \sum_{m=0}^{\infty} w^m$ Questa serie geometrica converge se:

NON SI PUÒ USARE IL CRITERIO DEL RAPPORTO

$$|w| < 1 \Leftrightarrow |-z^2| < 1 \Rightarrow |z^2| < 1 \Rightarrow |z|^2 < 1 \Rightarrow |z| < 1$$

e si ottiene: $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \frac{1}{1 - (-z^2)} = \frac{1}{1+z^2}$

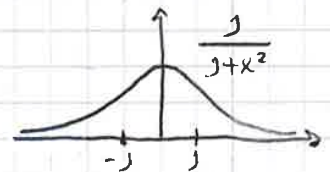
FORSE ESPAZIO?

$\forall z: |z| < 1$

Se la consideriamo per $z = x \in \mathbb{R}$ allora:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m x^{2m} \quad \text{per } |x| < 1$$

↑ SERIE DI TAYLOR



La serie di potenze di $\frac{1}{1+z^2}$ non esiste in $z = -i$ e $z = i$, quindi non converge oltre tali punti. Dal caso \checkmark complesso si deduce che perché la serie reale $\frac{1}{1+x^2}$ non converga oltre $x = \pm 1$ anche se in quei punti esiste.

*2 Per tale motivo si ha che R sia uguale a 1, poiché $|\pm i| = 1$.

Quindi possiamo scrivere $d(z)$ come:

$$d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k$$

*³ centrata in z_0

La serie di potenze di un $d(z)$ è somma e dunque la serie di Taylor di $d(z)$ centrata in z_0 .

Verifichiamo che vale l'inverso:

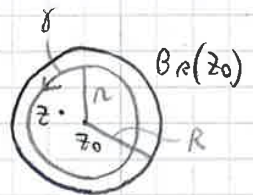
Vale anche l'inverso: VEDI TEOREMA QUI SOTTO

ogni funzione olomorfa è somma di una serie di potenze (che quindi sarà la sua stessa serie di Taylor).

*⁶ Prendiamo una curva $\gamma(t) \in B_R(z_0)$.

* TEOREMA

Sia $d: B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora essa è la somma di una serie di potenze, (che quindi sarà la sua stessa serie di Taylor) centrata in z_0 .



Dim: *⁴. $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ *⁵: $|z-z_0| < r < R$

(La variabile di integrazione che gira su γ è w).

Consideriamo la formula di Cauchy:

$$d^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(w)}{(w-z_0)^{k+1}} dw$$

*⁵ Consideriamo un punto $z \in B_R(z_0)$ tale che $z-z_0 = \rho e^{i\theta}$ e $\rho < r < R$. Possiamo non scontare.

$$\begin{aligned} \text{Quindi: } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(w)}{w-z_0} \cdot \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(w)}{w-z_0} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(w)}{w-z_0} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k \right] dw \end{aligned}$$

Si osserva che $\rho = \frac{z-z_0}{w-z_0}$ sia tale che $|\rho| = \frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} < 1$.

Quindi la serie nell'integrale è convergente e si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{w-z_0}{w-z}$$

Sostituiamo il risultato:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(w)}{w-z_0} \cdot \frac{w-z_0}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d(w)}{w-z} dw = d(z) \end{aligned}$$

↑ FORMULA DI CAUCHY

A questo punto, se ρ porta γ ad avere $r=R$, si ottiene $z \in B_R(z_0)$, come da ipotesi.

contraddice l'ipotesi che d sia non completamente nulla

3) $a_k \neq 0$ per qualche k .

Sia $m_0 = \min \{ k : a_k \neq 0 \}$.

$$f(z) = \sum_{k=m_0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^{m_0} \sum_{k=m_0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-m_0} = (z-z_0)^{m_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m_0} (z-z_0)^n$$

ORA ABBIAMO UN
NUOVA UNA SERIE DI
POTENZE $n = k - m_0$

Es.: se $z_0 = 0$:
 $f(z) = z^3 + z^7 = z^3(1+z^4)$

(E LEGITO
SCRIVERLO PERCHÉ
È UNA SERIE DI POTENZE)

Avremo $g(z_0) = a_{m_0} \neq 0$, quindi:

$f(z) = (z-z_0)^{m_0} g(z)$ con $g(z)$ olomorfa e $g(z_0) \neq 0$

Scrivendo $(z-z_0)^{m_0}$ ho "portato fuori" la parte di $f(z)$ che si annulla in z_0 .

Si osserva che gli zeri di f sono z_0 e gli zeri di g .^{*5} Con un ragionamento di continuità (permanenza del segno) si ha che $\exists r > 0 : f(z) > 0 \forall z \in B_r(z_0) \supseteq \emptyset$.^{sicuro?} ^{*5} ma g non ha zeri. sicuro?

Quindi in $B_r(z_0)$ l'unico zero di f è appunto z_0 . m_0 è detta la molteplicità dello zero z_0 . Se $m_0 = 1$ lo zero si dice SEMPLICE.

X SINGOLARITÀ E SERIE DI LAURENT

completamente

Siano $d, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni olomorfe, con g non nulla. Consideriamo $h(z) = \frac{d(z)}{g(z)}$. ~~h è definita su~~
h è definita su $D \setminus \{ z \in D \mid g(z) = 0 \}$

SONO TUTTI ZERI ISOLATI

Sia $z_0 \in D : g(z_0) = 0$

Prossimo numero: $g(z) = (z-z_0)^m \cdot \tilde{g}(z)$, dove $\tilde{g}(z) \neq 0$

$\forall z \in B_r(z_0)$, ^{*6} Sostituiamo e otteniamo: ^{*6} non $r > 0$.

$$h(z) = \frac{d(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{-m} \frac{d(z)}{\tilde{g}(z)} = \tilde{h}(z)$$

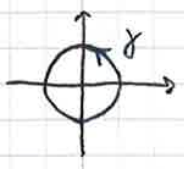
$\tilde{h}(z)$ è olomorfa su $B_r(z_0)$, mentre $(z-z_0)^{-m}$ è la "parte singolare" di $h(z)$.



Esempio: f una \mathcal{O} Jordan con centro $z_0 = \phi$; calcolare $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3} dz$

$$e^z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

$$h(z) = \frac{e^z}{z^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{m-3}}{m!} = z^{-3} + z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-1} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{z^{m-3}}{m!}$$



Res ϕ $\left(\frac{e^z}{z^3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$

$\uparrow \frac{1}{2!}$
 $\uparrow \frac{(-1+3)!}{2!} = 1$
 $\uparrow \text{PARTE OLMORFA}$

Lo sviluppo di Laurent valgono in condizioni molto più generali $n =$ spettro a quelli di Taylor. Sia $D = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ (con $r < R$) una corona circolare e sia $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Allora f ammette sviluppo in serie di Laurent su D :

$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ e $a_k = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$

NOTA SU FOGGIO A SINISTRA \rightarrow



Un caso particolare è quello in cui:

$D = B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, e $h: B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ è

una funzione olomorfa

$h(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, con $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$

e $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z) dz = \text{Res}_{z_0}(h)$

Esempio: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \quad \forall w \in \mathbb{C}$

\Downarrow
 $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2} + \dots$

$\int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \cdot a_{-1} = 2\pi i$

$m_0 = 1$
 $a_{-1} = \frac{1^{(k+m_0)}(z_0)}{(-1+1)!} = \frac{1}{0!} = 1$
 $k + m_0 = m$
 $\phi = \phi$

OPOLI E SINGOLARITÀ DELLE SERIE DI LAURENT

Se $f: B_R(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ possono verificarsi varie situazioni diverse:

- 1) $a_k = 0 \quad \forall k < 0$. In tal caso abbiamo una serie di potenze, che è olomorfa su tutto $B_R(z_0)$.

X CRITERIO DELLA RADICE

Per la serie di potenze vale anche il criterio della radice:

$$\text{positiva } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ si ha:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

Se l esiste finito o infinito si ha $R = \frac{1}{l}$.

~~X METODO ALTERNATIVO PER RICONOSCERE UNA SINGOLARITÀ ESSENZIALE~~

LEZIONE DI ESERCITAZIONI 21 APRILE '15

Es 1

Determina poli e residui della funzione: $f(z) = \frac{e^z}{z^3 - z^2 - 5z - 3}$

e^z è olomorfa e $\neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$.

Per z^3 ecc., che è olomorfa, ha lo zero $z_0 = -1$

$$\begin{array}{r|l} z^3 - z^2 - 5z - 3 & z+1 \\ z^3 + z^2 & z^2 - 2z - 3 \\ \hline // -2z^2 - 5z - 3 & \\ -2z^2 - 2z & \\ \hline // -3z - 3 & \\ -3z - 3 & \\ \hline // & \\ // & \end{array} \Rightarrow (z+1)(z^2 - 2z - 3)$$

$$z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Quindi $D = (z+1)^2(z-3)$

ossia i poli sono: $-z_0 = -1$ con $m_0 = 2$ (DOPPIO)
 $-z_0 = 3$ con $m_0 = 1$ (SEMPLICE)

Dobbiamo scrivere $f(z)$ "espellendo" $\frac{1}{(z-3)}$: *³ per poi usare il Metodo di Heaviside.

$$f(z) = \frac{R}{z-3} + \underbrace{n(z)}_{\text{OLOMORFA}}$$

$$R = \lim_{z \rightarrow 3} (z-3) \cdot f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{e^z}{(z+1)^2} = \frac{e^3}{16}$$

Non è dunque necessario avere tutto lo sviluppo per calcolare il residuo come vedd a-1. Basta sapere che $f(z)$ AMMETTA lo sviluppo *³.

D FRATTI DI ORDINE SUPERIORE A 1

$$f(z) = \frac{c_2}{(z+1)^2} + \frac{c_1}{(z+1)} + n(z)$$

Il coefficiente di $\frac{1}{z-z_0}$ è il Residuo $\text{Res}_{z_0}(f)$

Calcoliamo:
 METODO 1

\uparrow PARTE OLOMORFA

$$\bullet c_2 = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)^2 \cdot f(z)$$

$$\bullet \hat{f}(z) = f(z) - \frac{c_2}{(z+1)^2} = \frac{c_1}{(z+1)} + n(z) \text{ e poi come prima}$$

METODO 2 Sviluppiamo una nuova funzione $g(z)$:

$$\bullet g(z) = (z+1)^2 f(z) = c_2 + c_1(z+1) + (z+1)^2 n(z)$$

$$g'(z) = c_1 + 2 \cdot (z+1) \cdot n(z) \rightarrow g'(z_0) = g'(-1) = c_1$$

$$g'(z) = c_1 + 2(z-z_0) \cdot n(z) \rightarrow g'(z_0) = c_1$$

$$g(z) = (z-i)^2 \cdot f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z}$$

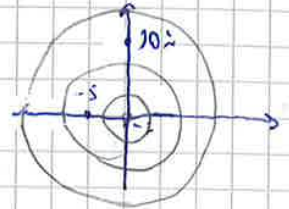
$$g'(z) = \frac{\pi e^{\pi z} \cdot z - e^{\pi z}}{z^2} = \frac{e^{\pi z} (\pi z - 1)}{z^2}$$

$$g'(i) = \dots = i\pi - 1 = \dots \text{Res}_i(f)$$

Quindi $I = \int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z(z-i)} dz = 2\pi i (\text{Res}_0(f) + \text{Res}_i(f)) =$
 $= 2\pi i (\pi i - 1) = -2\pi^2 - 6\pi i$

Ex. 6

Sia $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z+5)(z-10i)}$



supp(f) = {z | |z| = R} con R parametro

Calcolare $I_R = \int_{\gamma} f(z) dz$

POU: z = -i, z = -5, z = 10i

Casi rilevanti: 1) 0 < R < 1 2) 1 < R < 5 3) 5 < R < 10 4) 10 < R

$$\text{Res}_{-i}(f) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) f(z) = \frac{1}{(-5)(-10i)} = -\frac{1}{(5-i)10i}$$

$$\text{Res}_{-5}(f) = \lim_{z \rightarrow -5} (z+5) f(z) = \frac{1}{(-5+i)(-5-10i)}$$

$$\text{Res}_{10i}(f) = \lim_{z \rightarrow 10i} (z-10i) f(z) = \frac{1}{10i(5+10i)}$$

1) 0 < R < 1 I = 0

2) 1 < R < 5 I = 2\pi i \cdot \text{Res}_{-i}(f)

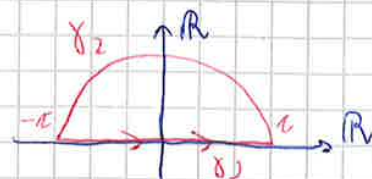
3) 5 < R < 10 I = 2\pi i [\text{Res}_{-i}(f) + \text{Res}_{-5}(f)]

4) 10 < R I = 2\pi i [\text{Res}_{-i}(f) + \text{Res}_{-5}(f) + \text{Res}_{10i}(f)]

Ex. 7

Calcolare $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2} dz$ (è un integrale su \mathbb{R} , ossia reale)

$$I = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2} dz$$



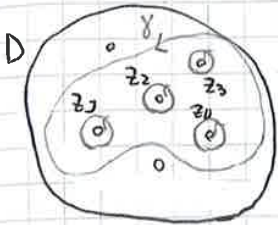
$\gamma_1(t) = t$ con $t \in [-r, r]$

$\gamma_2(t) = r e^{it}$ con $t \in [0, \pi]$

$|\gamma_2(t)| = r \quad \forall t \in [0, 2\pi]$

↪ È UNA SEMICIRCONFERENZA

Dem.



Si assegnano delle piccole circonferenze attorno a punti di singolarità $\in (\text{Int}(\gamma) \cap D^c)$, tale da non toccare $\text{Supp}(\gamma)$, ossia:
 $\gamma_m(t) = z_m + r e^{it}$, con r piccolo da modo che $\text{Supp}(\gamma_m) \subseteq \text{Int}(\gamma)$.

$\Omega = \text{Int}(\gamma) \cap \text{Int}(\gamma_1^c) \cap \text{Int}(\gamma_2^c) \cap \dots \cap \text{Int}(\gamma_m^c)$ è un dominio con bordo e $\gamma \cup -\gamma_1 \cup -\gamma_2 \cup \dots \cup -\gamma_m$ è il bordo con l'orientamento positivo.

Quindi per l'Estensione di Cauchy-Goursat: $\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 0 =$
 $= \int_{\gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^m \int_{-\gamma_k} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} f(z) dz =$
 $= \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^m 2\pi i \cdot \text{Res}_{z_k}(f) = 0 \quad \text{r.v.d.}$

PER DEF. DI RESIDUO

X PRINCIPIO DELL' ARGOMENTO

Siano $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, γ curva di Jordan in D tale che $\text{Int}(\gamma) \cap D^c$ sia un insieme finito di punti.

Assumiamo inoltre che f non abbia zeri sul $\text{Supp}(\gamma)$. Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P$$

con Z numero di zeri di f in $\text{Int}(\gamma)$ contati con la loro molteplicità, e P numero di poli di f in $\text{Int}(\gamma)$ contati con la loro molteplicità (non si contano singolarità eliminabili ed essenziali).

ANCHE SE $K < 0$

ESEMPIO

Esempio: $f(z) = z^k$, $\gamma(t) = e^{it}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{k z^{k-1}}{z^k} dz = k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = k$$



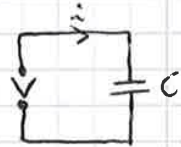
Se invece z_0 è un polo di f con molteplicità m_0 allora
 $f(z) = (z - z_0)^{-m_0} \cdot \tilde{f}(z)$, con $\tilde{f}(z)$ olomorfa in un
 intorno di z_0 , e $\tilde{f}(z_0) \neq 0$.

Ripetendo il conto di prima si ottiene che $\text{Res}_{z_0} \left(\frac{f'}{f} \right) = -m_0$. r.v.d.

X MOTIVAZIONI PER ESSERE IL CONCETTO DI FUNZIONE

Esempio 1: la carica di un condensatore

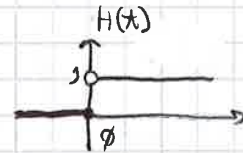
$i = C \cdot V' \Rightarrow V' = \frac{i}{C}$



Sia $V(t) = \bar{V} \cdot H(t)$

con $H(t)$ la funzione di Heaviside:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$



Quindi $i(t) = C \cdot V'(t) = C \cdot \bar{V} \cdot H'(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ H(t) \text{ non derivabile in } t=0 \\ \text{oppure } H'(t) \text{ al più } H'(t) = +\infty, \\ \text{per cui } i(0) \text{ non esiste} \\ \text{e vale } +\infty \end{cases}$

Perché $V'(t) = \frac{i(t)}{C}$ si avrà:

$$V(t) = \int_{-\infty}^t \frac{i(\tau)}{C} d\tau \stackrel{?}{=} \bar{V} \cdot H(t)$$

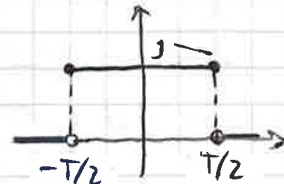
* ∞ in quanto
vale 0 o $+\infty$

L'uguaglianza non è valida perché i non dipende da \bar{V} * ∞ ,
 ossia non c'è verso di recuperare il potenziale \bar{V} .

Esempio 2:

Sia la FUNZIONE PORTA

$$P_T(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Se considero una densità di carica $\rho_m(x) = \bar{q} \cdot m \cdot P_{\frac{T}{m}}(x)$,

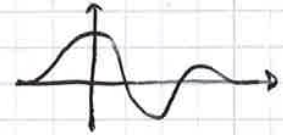
↘ ↘

Es: $\exists H(A)$ funzione di Heaviside

$$\text{supp}(H) =]\emptyset, +\infty[= [\emptyset, +\infty[\quad \swarrow \text{CRUSURA DI}$$

$$\exists \sin(x) \quad \text{supp}(\sin(x)) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}$$

Def: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una FUNZIONE TEST se f è in classe $C^\infty(\mathbb{R})$ ed il suo supporto è $*^3$ (ossia è compatto), così $\exists n > \emptyset: f(x) = 0$ se $|x| > n$.



$*^3$ limitato e chiuso

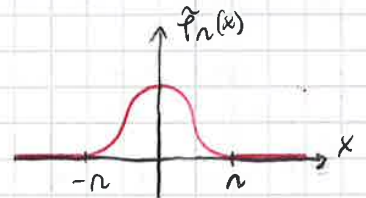
NOTAZIONE: \mathcal{D} è l'insieme di tutte le funzioni test.

Alcune funzioni test:

• \emptyset

$$\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{n^2-x^2}} & |x| < n \\ \emptyset & |x| \geq n \end{cases} \quad (n > \emptyset)$$

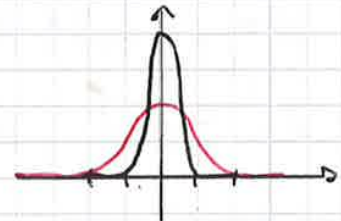
$\tilde{f}_n(x) \in C^\infty$, perché tutte le derivate successive si accordano a \emptyset in $x = n$



$$f_n(x) = \frac{\tilde{f}_n(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_n(x) dx} \quad (\text{versione normalizzata di } \tilde{f}_n(x))$$

\leftarrow AREA

Più n è piccolo più le campane sono alte e strette perché l'area non cambia. Più la campana è stretta più lo strumento è di qualità.



NOTA: in generale le funzioni test non sono lineari.

TUTTAVIA È LINEARE \mathcal{D} (PENSA ALLO SPAZIO DELLE F. CONTINUE (O X NON È UN))

PROPRIETÀ ELEMENTARI DI \mathcal{D}

1) \mathcal{D} è uno spazio vettoriale: una combinazione lineare di funzioni test è ancora una funzione test

2) $f \in \mathcal{D} \Rightarrow f(x-x_0) \in \mathcal{D} \quad \forall x_0$ TRASLAZIONE

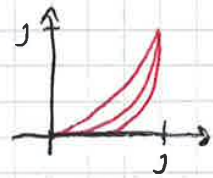
3) $f \in \mathcal{D}, a \neq \emptyset \Rightarrow f(ax) \in \mathcal{D}$ RISCALAMENTO

4) $f \in \mathcal{D}, \psi \in C^\infty \Rightarrow f \cdot \psi \in \mathcal{D}$

5) $f \in \mathcal{D} \Rightarrow f' \in \mathcal{D}$

Es. $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = x^m$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x^m = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



La funz. limite è $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$, quindi

$f_m \rightarrow f$ puntualmente.

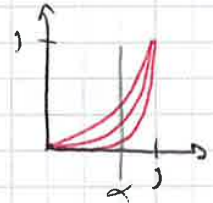
$$\|f_m - f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_m(x) - f(x)| =$$

$$= \sup_{x \in [0, 1]} x^m = 1 \neq 0 \quad \forall m.$$

Allora, poiché $\|f_m - f\|_\infty \not\rightarrow 0$, non c'è convergenza uniforme.

Si osserva che se invece avessimo ristretto il dominio a $[0, \alpha]$, con $\alpha < 1$, allora

$$\sup_{x \in [0, \alpha]} |f_m(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \alpha]} x^m = \alpha^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$



TEOREMA: se f_m è continua e $f_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f$ uniformemente, allora f è anch'essa continua.

CONVERGENZA IN D

Def. Sia f_n una funzione test e sia f una funzione test. Si dice: f_n converge a f in D (e si scrive $f_n \xrightarrow{D} f$) se:

1) EQUIVOCITÀ DEI SUPPORTI: $\exists n > 0$ tale che $f_n(\bar{x}) = \emptyset$

$\forall x : |x| > n$, uguale $\forall n$;

2) $\forall k \Rightarrow$ ha che $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformemente su \mathbb{R}

CONVERGENZA UNIFORME DI TUTTE LE DERIVATE:

(Non vogliamo che le distribuzioni siano

OSSERVAZIONE: se $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è già dimostrata essere lineare,

la verifica della continuità $*$ può semplificarsi: poiché

$$\underline{f_m \xrightarrow{\mathcal{D}} f \iff f_m - f \xrightarrow{\mathcal{D}} 0} \quad \text{e dunque}$$

$$\underline{T(f_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} T(f) \iff T(f_m) - T(f) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0} \quad \left(\begin{array}{l} *^2 \text{ di } T \text{ si} \\ \text{ha linearità di } T \text{ permette} \\ \text{l'equivalenza} \end{array} \right)$$

la linearità di T permette l'equivalenza

$$\underline{T(f_m - f) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0}$$

Se scivo $f_m - f = \Psi_m$ allora posso risolvere la combinazione

$$\underline{\text{di continuità da verificare come: } T(\Psi_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0}$$

Esempio: Delta di Dirac

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \delta_{x_0}: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } \delta_{x_0}(f) = f(x_0)$$

La Delta di Dirac è una distribuzione che descrive un segnale "puntuale" a valore non infinito.

* FUNZIONI INTEGRABILI SU UN INTERVALLO I

*³ su I se


$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è dice INTEGRABILE *³ f è continua a tratti e assolutamente integrabile su I (ossia $\int_I |f(x)| dx < +\infty$).

f è dice LOCALMENTE INTEGRABILE su I se è integrabile su ogni sottointervallo limitato di I.

Simboli: $R^1(I)$ indica le funzioni integrabili su I

$R_{loc}^1(I)$ indica le funzioni localmente integrabili su I

Si ha $C^0(I) \subseteq R_{loc}^1(I)$. Inoltre $R^1(I) \subseteq R_{loc}^1(I)$.

L	Esempio	$\sin(x) \in C^0(\mathbb{R})$	$\sin(x) \notin R^1(\mathbb{R})$	$\sin(x)$ È INDETERMIN.
R	Esempio	$\frac{1}{1+x^2} \in R^1(\mathbb{R})$		
G	Esempio	$1 \in R_{loc}^1(\mathbb{R})$	$1 \notin R^1(\mathbb{R})$	$\int_{-\infty}^{\infty} 1 dx = \infty \neq \infty$ INDETERMIN.

3) Sia $\Psi_m \xrightarrow{D} \emptyset$. Verifichiamo se $T_f(\Psi_m) \rightarrow \emptyset$; per farlo
 usiamo la convergenza assoluta: ✓ STESSO INTERVALLO PER TUTTI GLI m
PER DEF. DI CONVERGENZA IN D

$$|T_f(\Psi_m)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \Psi_m(x) dx \right| = \left| \int_{-n}^n f(x) \Psi_m(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{-n}^n |f(x)| \cdot |\Psi_m(x)| dx \leq \int_{-n}^n |f(x)| \sup_x |\Psi_m(x)| dx =$$

$$= \sup_x |\Psi_m(x)| \underbrace{\int_{-n}^n |f(x)| dx}_{\in \mathbb{R}}$$

$\downarrow m \rightarrow +\infty$
 \emptyset

di moltiplicazione

* ~~dato che~~
 $f_m \xrightarrow{D} \emptyset \Rightarrow \exists n > 0 : f_m(x) = \emptyset$
 se $|x| > n$

Quindi, per confronto, dato che $|T_f(\Psi_m)| \rightarrow \emptyset$, allora anche

$T_f(\Psi_m) \rightarrow \emptyset$. Dunque la proprietà di continuità delle distribuzioni è rispettata.

Esempio di distribuzioni regolari: T_{e^x} , $T_{\sin(x)}$, $T_{x^2 e^x + 3}$ | LEGB

MA HO MESSO Ψ_m
 INVECE DI f_m PER
 COMODITÀ

\downarrow PROSSIMO
 QUADERNO

SEZIONE PROBABILITA'

14 Giu) Lezione 5 Mar (17.5 pag - di cui 5 di esempi), Lezione 18 Mar (7.5 pag - di cui 5 di esempi) – (Totale 25 pag - di cui 10 di esempi) -- Fare esercizi di calcolo combinatorio

15 Giu) Lezione 25 Mar (8 pag - di cui 5.5 di esempi), Lezione 27 Mar (9 pag - di cui 1.5 di esempi) – (Totale 17 pag - di cui 7 di esempi) --- Fare esercizi sulle variabili casuali

16 Giu) Lezione 1 Apr (8 pag - di cui 1.5 di esempi), Lezione 22 Apr (8 pag - di cui 3 di esempi), Lezione 29 Apr (8.5 pag - di cui 3 di esempi), Distribuzione binomiale negativa con esempio sopra - Distribuzione ipergeometrica (6 Mag, 4.5 pag - di cui 2.5 di esempi) – (Totale 29 pag - di cui 10 di esempi) --- Fare esercizi su valore atteso, varianza e distribuzioni notevoli ripassate

17 Giu) Distribuzioni notevoli continue (6 Mag, 8.5 pag - di cui 4 di esempi), Lezione 13 Mag (7.5 pag - di cui 3 di esempi) – (Totale 16 pag - di cui 7 di esempi) --- Fare esercizi su distribuzioni notevoli ripassate e su variabili casuali di tipo "massimi" e "minimi"

18 Giu) Lezione 26 Mag (5 pag - di cui 3 di esempi), Lezione 27 Mag (10.5 pag - di cui 7 di esempi), Lezione 10 Giu (5.5 pag - di cui 3 di esempi), se voglio ci sono a seguire esercizi di riepilogo (3 pag di esempi) – (Totale 24 pag - di cui 16 di esempi) --- Fare esercizi su variabili casuali doppie e su distribuzioni e valori attesi condizionati

• LA DERIVABILITÀ COMPLESSA IMPlica LE CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

1) Se parte dalla definizione di derivabilità complessa:

$$f(z) \text{ è derivabile in } z_0 \text{ se esiste finito } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

2) Se spostata $f'(z_0)$ a sinistra $\left(\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right) = 0 \right)$.

3) Si risolvono facilmente lo sviluppo di Taylor al 1° ordine:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + o(z - z_0).$$

4) Si decomponesse in $u(x, y) + i v(x, y)$, $(z - z_0)$ in $(x - x_0) + i(y - y_0)$ e $f'(z_0)$ in $\operatorname{Re}(f'(z_0)) + i \operatorname{Im}(f'(z_0))$, e ——— l'σ-piùdo come $w_1(x, y) + i \cdot w_2(x, y)$.

5) Si scrivono separatamente l'equazione reale ($u(x, y) = \dots$) e quella immaginaria ($v(x, y) = \dots$) facendo attenzione ai prodotti.

6) Si controllano i resti: $\frac{o(z - z_0)}{z - z_0} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$, da cui $\frac{|o(z - z_0)|}{|z - z_0|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ che si espande in radici quadrate reali.

7) Per confronto si ha che $\frac{|w_1(x, y)|}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} 0$ (vale anche per w_2).

8) Si deduce che $w_1(x, y) = o(\sqrt{\dots})$, così come $w_2(x, y)$. Questi risultati garantiscono che u e v sono differenziabili in (x_0, y_0) .

9) Facendo le derivate parziali delle due equazioni di $u(x, y)$ e di $v(x, y)$ si ottengono:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{Re}(f'(z_0)) & , & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\operatorname{Im}(f'(z_0)) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \operatorname{Im}(f'(z_0)) & , & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \operatorname{Re}(f'(z_0)) \end{cases}$$

10) Le due uguaglianze $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ sono le Condizioni di Cauchy-Riemann.

• DERIVATA DI UNA DISTRIBUZIONE REGOLARE \mathcal{C} A TRATTI

- Ipotesi: 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è \mathcal{C} a tratti, con x_1, x_2, \dots, x_n discontinuità con eventuali salti;
- 2) $f' \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$

□ Tesi: $T'f = Tf + \sum_{k=1}^n [f(x_k^+) - f(x_k^-)] \delta_{x_k}$

- Dimostrazione per f con una sola discontinuità: x_0 - punti chiave:

1) $\langle T'f, \varphi \rangle = - \langle Tf, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \varphi'(x) dx$

- 2) Giacché non posso integrare per parti a causa dell'esistenza

di $f'(x)$ in x_0 , splitto l'integrale:

$$= - \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \cdot \varphi'(x) dx - \int_{x_0}^{\infty} f(x) \cdot \varphi'(x) dx$$

- 3) Integro per parti:

$$= - \left[f(x) \cdot \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x) \varphi(x) dx \right] +$$

$$- \left[f(x) \cdot \varphi(x) \Big|_{x_0}^{\infty} - \int_{x_0}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx \right]$$

- 4) Riorganizzo (solo per motivazione formale) i due integrali:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \cdot \varphi(x) dx - f(x_0^-) \cdot \varphi(x_0) + f(x_0^+) \cdot \varphi(x_0) =$$

$$= \langle Tf, \varphi \rangle + [f(x_0^+) - f(x_0^-)] \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

5) quindi $T'f = Tf + [f(x_0^+) - f(x_0^-)] \cdot \delta_{x_0}$

(AMPIEZZA DEL SALTO)

Verifichiamo che $T(x-x_0)$ sia lineare e continua:

LIN: $\langle T(x-x_0), \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) \rangle \stackrel{\text{DEF}}{=} \dots$

$\stackrel{\text{DEF}}{=} \langle T(x), \lambda f_1(x+x_0) + \mu f_2(x+x_0) \rangle \stackrel{\text{LINEARITÀ}}{=} \dots$

$\stackrel{\text{LINEARITÀ}}{=} \lambda \langle T(x), f_1(x+x_0) \rangle + \mu \langle T(x), f_2(x+x_0) \rangle \stackrel{\text{DEF}}{=} \dots$

$\stackrel{\text{DEF}}{=} \lambda \langle T(x-x_0), f_1(x) \rangle + \mu \langle T(x-x_0), f_2(x) \rangle$ *Q.V.D.*

CONT: Sia $f_m \xrightarrow{D} \emptyset$ *← non $\forall m$?* Per definizione:

$\langle T(x-x_0), f_m(x) \rangle = \langle T(x), f_m(x+x_0) \rangle$

$T(x)$ È UNA DISTR. E QUINDI È CONT. DIMOSTRATA LA SUA CONTINUITÀ



Perché $T(x)$ è continua, questa ultima espressione tende a \emptyset per $m \rightarrow +\infty$. Quindi è dimostrata la continuità di $T(x-x_0)$.

Esempio: $\delta_{x_0}, y_0 \in \mathbb{R}, f(x) = x - y_0$

PER DISTR. δ_{x_0}

→ $\delta_{x_0}(x - y_0)$ che valore ha?

EH? $\langle \delta_{x_0}(x - y_0), f(x) \rangle = \langle \delta_{x_0}(x), f(x + y_0) \rangle = f(x_0 + y_0)$

COSA DEDUCCO $\delta_{x_0}(x - y_0) = \delta_{x_0 + y_0}$ È $x - y_0$?

L
R
G
G

LEZIONE 5 MAGGIO 2015

X RIPASSO

$f \in \mathcal{D}$ funzione test

T distribuzione tale che $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$T(f) = \langle T, f \rangle = \langle T(x), f(x) \rangle$

↑ AVVISO DI NOTAZIONE PER RICORDARE RISPETTO A QUANTE VARIABILI SIA f UNA FUNZIONE



Esempi:

L
B
G
G

$$\textcircled{a}) \delta_{x_0} \cdot \langle \delta'_{x_0}, f \rangle = - \langle \delta_{x_0}, f' \rangle = -f'(x_0)$$

Significa δ'_{x_0} deriva la funzione test in x_0 .

$$\textcircled{b}) \langle \delta''_{x_0}, f \rangle = \langle (\delta'_{x_0})', f \rangle = - \langle \delta'_{x_0}, f' \rangle = \langle \delta_{x_0}, f'' \rangle = f''(x_0)$$

In generale: $\langle \delta^{(k)}_{x_0}, f \rangle = (-1)^k \cdot f^{(k)}(x_0)$

Se f è derivabile, con $f' \in R'_{loc}$, per una distr. regolare si ha:

$$\langle T'_f, f \rangle = - \langle T_f, f' \rangle = \langle T f', f \rangle$$

Quindi $T'_f = T f'$.

Se però f non è una funzione derivabile? È comunque
valido $\langle T'_f, f \rangle = - \langle T_f, f' \rangle$

Deriviamo la funzione di Heaviside:

L
B
G

$$H(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < 0 \\ 1 & \text{se } z \geq 0 \end{cases} \quad H \in R'_{loc} \quad \text{che aspetta ormai } T_H?$$

G

$$\langle T'_H, f \rangle = - \langle T_H, f' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \cdot f'(x) dx =$$

$$= - \int_0^{+\infty} f'(x) dx = - f(x) \Big|_0^{+\infty} = f(0) = \langle \delta_0, f \rangle$$

Significa $T'_H = \delta_0$.

* Distribuzione regolare

Caso più generale: sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tranne che in un punto x_0 dove presenta un eventuale salto, e ipotizziamo che $f' \in R'_{loc}$ (oss. f' è definita su $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$). Sia una * T_f .

Calcoliamo T'_f . Si osserva che non è possibile considerare T'_f .

Vale $T'_f \neq T f'$? No in questo caso

ossia lo supponiamo sempre integrabile, anche se la discontinuità è asintotica



L
 B
 G
 G
 Esempio: $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x < 0 \\ -2x+3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ $T_f = ?$

$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ -2 & x > 0 \\ 3 & x = 0 \end{cases}$

Dunque $T_f = T_{f'} + 3 \cdot \delta_0$ $3 - 0$

2) MOLTIPLICAZIONE DI DISTRIBUZIONI

$\mathbb{1}$ È LA FUNZIONE INDICATRICE

L
 E
 G
 G
 OSS. $d(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbb{1}_{(0,1)} \in \mathcal{R}'_{loc}$
 mentre invece $d(x) \cdot d(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{(0,1)} \notin \mathcal{R}'_{loc}$

Quindi $T_d \cdot T_d$ qui non avrebbe senso.

In generale non si può definire il concetto di moltiplicazione di due distribuzioni.

Si può invece definire il prodotto di una distribuzione per una funzione di classe C^∞ .

Posto T distribuzione e $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, definiamo $\Psi \cdot T$ come la distribuzione data da:

$\langle \Psi \cdot T, \varphi \rangle = \langle T, \Psi \cdot \varphi \rangle$, con $\varphi \in \mathcal{D}$

Inoltre per le distribuzioni regolari vale anche:

$\langle T_{\Psi d}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x) \cdot d(x) \cdot \varphi(x) dx = \langle T_d, \Psi \cdot \varphi \rangle$

È questa una buona definizione?

a) $\Psi \cdot \varphi \in \mathcal{D}$, dunque $\langle T, \Psi \cdot \varphi \rangle$ ha senso.

b) LINEARITÀ: essa

SI

c) CONTINUITÀ: essa

SI

~~Due integrali separati~~ Il limite è finito perché, essendo $\frac{1}{x}$ dispari, le sue due "esplosioni" si compensano.



Tale distribuzione prende il nome di valore principale di $\frac{1}{x}$, scritto come V.P. ($\frac{1}{x}$).

V.P. ($\frac{1}{x}$) è la distribuzione definita come:

$$\langle \text{V.P.} \left(\frac{1}{x} \right), f \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right]$$

$$\text{Mentre } T'_{\ln|x|} = \text{V.P.} \left(\frac{1}{x} \right) \quad (\neq T_{\frac{1}{x}})$$

Esercizio: $X \cdot \text{V.P.} \left(\frac{1}{x} \right) = T_0$

Dimostrazione tramite i concetti di moltiplicazione e di valore principale:

FATTO SUL

QUADRO ESERCUZIONI

NOTA: \mathcal{D} è l'insieme di tutte le funzioni test.

\mathcal{D}' è l'insieme di tutte le distribuzioni.

Un'idea | Suggestive $T_m \xrightarrow{D'} S_0$ come variche

L | Suggestive la S_{x_0} rappresenta bene anche dati puntiformi, oltre a
E | quelli impulsivi.
G

Esempio

L | Sia (x_m) una successione di numeri reali tale che $x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \infty$
B

Consideriamo $T_m = \delta_{x_m}$. $T_m \xrightarrow{D'} ?$

Sia $f \in \mathcal{D}$. $\langle T_m, f \rangle = f(x_m)$

$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle T_m, f \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} f(x_m) = 0$

Quindi $T_m \xrightarrow{D'} 0$

che ha

E | Spiegazione: un segnale, Υ energia costante (vedi onda elet =
magnetica), tende a 0 perché allontanandosi sparse dal punto.

Similmente $T_m = e^m \cdot \delta_{x_m} \xrightarrow{D'} 0$

X SUPPORTO DI UNA DISTRIBUZIONE

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con _____

$$\text{Supp}(f) = \{x \mid f(x) \neq 0\}$$

SE NON RICORDI, RIGUARDA ALL'INIZIO DELLA TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

Vogliamo estendere questo concetto alle distribuzioni.

OSS. — data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si dice che f sia nulla sull'intervallo aperto $A \subseteq \mathbb{R}$ se $f(x) = 0 \quad \forall x \in A$.

Si indica con N_f l'unione di tutti gli intervalli aperti dove f è annullata, ed è detto "insieme di nullità di f ".

$$N_f = [\text{Supp}(f)]^c$$

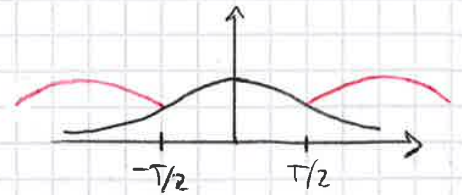
LEZIONE 15 MAG 15

X TRASFORMATE DI FOURIER

INTEGRABILE

Sev una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \in R^1(\mathbb{R})$.

Tagliamo la funzione nei punti $-\frac{T}{2}$ e $\frac{T}{2}$ e ripetiamo la funzione ~~una~~ una volta chiusa in questo intervallo lungo \mathbb{R} .



Questa nuova funzione ~~estesa~~ estesa è periodica di periodo T , ed è ~~integrabile~~ integrabile ed ~~abbiamo~~ è detta "ESTENSIONE T-PERIODICA di f ". Indichiamo ora per comodità tale estensione come $f(x)$ e scriviamone la serie di Fourier in versione complessa:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ik \frac{2\pi}{T} x} \quad x \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \quad (\text{Sommatoria di armoniche})$$

$$\text{con } c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{T} x} dx \quad \text{con } \frac{k}{T} = w$$

L' ~~esponente~~ esponente dell' integrale è il prodotto scalare della funzione f per delle armoniche tra loro ortogonali: $\langle f, e^{-ik \frac{2\pi}{T} x} \rangle$

Portiamo T dell' integrale all' infinito:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{T} x} dx \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi w x} dx = \hat{f}(w)$$

$\frac{k}{T}$
↓
 w

~~Mettiamo ora lo sviluppo in serie di $f(x)$ nell' integrale:~~

Se scriviamo ora c_k come integrale nello sviluppo di $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-ik \frac{2\pi}{T} x} dx \right) e^{-ik \frac{2\pi}{T} x}$$

per $T \rightarrow \infty$ è $\hat{f}\left(\frac{k}{T}\right)$

Se portiamo T all' ∞ la sommatoria diventa una somma intu = egrale perché $\frac{1}{T} \rightarrow 0$ e $\frac{k}{T} \rightarrow 0$: $\sum \Delta k \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int \Delta w$

Example.

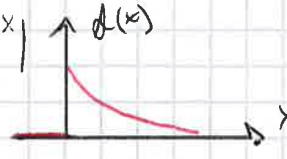
1) $f(x) = H(x) e^{-\alpha x}$ non $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\text{Re}(\alpha) > 0$

U SIAMO ASSICURATI CHE $f \in R^3(\mathbb{R})$

$|f(x)| = H(x) |e^{-\alpha x}| = H(x) \cdot e^{-\text{Re}(\alpha) \cdot x} \in R^3(\mathbb{R})$

$|e^{-\alpha x}| = |e^{-(\text{Re}(\alpha) + i \text{Im}(\alpha))x}| = |e^{-\text{Re}(\alpha) \cdot x} \cdot e^{-i \text{Im}(\alpha) \cdot x}|$

$\underbrace{\quad}_{A \cdot e^{i\theta}}$



$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi wx} dx =$

$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} e^{-i2\pi wx} dx = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i2\pi w)x} dx =$

$= -\frac{1}{\alpha + i2\pi w} e^{-(\alpha + i2\pi w)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + i2\pi w}$

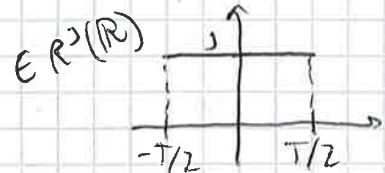
Se $\alpha \in \mathbb{R} \wedge \alpha > 0$: $|\hat{f}(w)| = \frac{1}{|\alpha + i2\pi w|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 w^2}}$

Si osserva che $|\hat{f}(w)| \sim \frac{1}{2\pi|w|}$ se $w \rightarrow \pm\infty$

Quindi \hat{f} non è $R^3(\mathbb{R})$, poiché una funzione di forma $\frac{1}{x}$ fornisce un integrale divergente.

Questo è l'intero che spesso invalida la FORMULA DI INVERSIONE.

2) Sia la funzione porta $f(x) = P_T(x)$



$\hat{P}_T(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(x) e^{-i2\pi wx} dx = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi wx} dx =$

$= -\frac{1}{i2\pi w} e^{-i2\pi wx} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{i\pi w T} - e^{-i\pi w T}}{2\pi i w}$

$= \frac{\text{SIN}(\pi w T)}{\pi w}$

$\frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} = \text{SIN}(\alpha x)$

~~all'infinito~~