NUMERO: 1764A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Pecora Alessandra

MATERIA: Fondamenti di energia nucleare, Esercitazioni + temi esame - prof. Ravetto

Esercitazione 1 - n 1

10/3

Catena radioattiva composta da 2 elementi

n nuclei $N_1 \rightarrow$ decadimento libero

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1(t)$$ condizione iniziale $N_1(0) = N_{10}$

dal decadimento della specie 1 viene prodotta la specie 2

$$\frac{dN_2}{dt} = \underset{R(t)}{\lambda_1 N_1} - \lambda_2 N_2(t)$$ hp: $N_2(0) = 0$

↳ decadimento della specie 2

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1(t) \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} N_1(0) = N_{10} \\ N_2(0) = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 N_1 \, dt$ = quantità di nuclei decaduti tra t e $t+dt$

se divido per dt

$\lambda_1 N_1$ = ATTIVITÀ = numero di particelle emesse

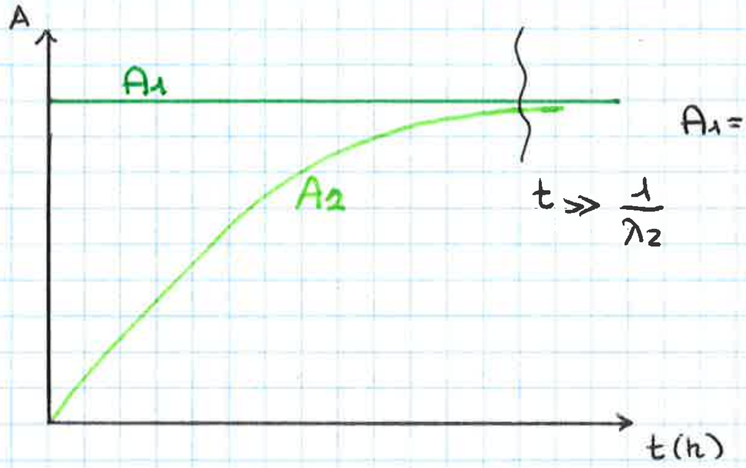
$$\begin{cases} N_1 = N_{10} e^{-\lambda_1 t} \\ \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2(t) \end{cases}$$

↳ R_2 = sorgente della specie 2

$$N_2(t) = N_{20} e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t \underbrace{dt' R_2(t')}_{\text{nuclei introdotti in } dt'} \underbrace{e^{-\lambda_2 (t-t')}}_{}$$

equazione lineare

↳ probabilità che un nucleo della specie 2 generato a t' sia ancora vivo al tempo t



scala di tempo della specie 2

Si raggiunge l'equilibrio quando $e^{-\lambda_2 t}$ può considerarsi trascurabile

Nella scala di tempo della specie 2, la specie 1 non cambia, è come se fosse costante, non si notano cambiamenti!

Le due attività evolvono allo stesso valore, si stabilisce un equilibrio.

L'attività della specie 1 è costante, la specie 2 parte da 0, evolve e diventa uguale alla specie 1.

$$\frac{d(\bar{C}M)}{dt} = C_i \cdot W - \bar{C}(t) \cdot W - \lambda M \bar{C}(t)$$

$$M \frac{d\bar{C}}{dt} = C_i W - \bar{C}(t) W - \lambda M \bar{C}(t)$$

divido per M

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = \frac{C_i W}{M} - \frac{\bar{C}(t) W}{M} - \lambda \bar{C}(t)$$

$$\frac{d\bar{C}}{dt} = \underbrace{\frac{C_i W}{M}}_{R} - \underbrace{\left(\frac{W}{M} + \lambda\right)}_{\lambda^*} \bar{C}(t)$$

$$C(t) = C_0 e^{-\lambda^* t} + \int_0^t e^{-\lambda^*(t-t')} R(t')\, dt' =$$

$$= C_0 e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} + \int_0^t e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)(t-t')} \frac{C_i W}{M}\, dt' =$$

$$= C_0 e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} + \int_0^t e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t + \left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t'} \frac{C_i W}{M}\, dt' =$$

$$= C_0 e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} + \frac{C_i W}{M} e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} \int_0^t e^{\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t'} dt'$$

$$= C_0 e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} + \frac{C_i W}{M} e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} \left. \frac{1}{\lambda + \frac{W}{M}} e^{\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t'} \right]_0^t =$$

$$= C_0 e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} + \frac{C_i W}{M} e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} \frac{1}{\lambda + \frac{W}{M}} \left(e^{\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} - 1\right) =$$

$$= C_0 e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} + \frac{C_i W}{M} \cancel{e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t}} \frac{1}{\lambda + \frac{W}{M}} \cancel{e^{\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t}} +$$

$$- \frac{C_i W}{M} e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} \frac{1}{\lambda + \frac{W}{M}} =$$

$$= C_0 e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} + \frac{C_i W}{M} \cdot \frac{1}{\lambda + \frac{W}{M}} - \frac{C_i W}{M} e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} \frac{1}{\lambda + \frac{W}{M}} =$$

$$= C_0 e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t} + \frac{C_i W}{M} \cdot \frac{1}{\lambda + \frac{W}{M}} \left(1 - e^{-\left(\lambda + \frac{W}{M}\right)t}\right)$$

→ condizione asintotica

si raggiunge un certo equilibrio: quello che decade in un ciclo è lo stesso che il fluido riesce ad accumulare nel passaggio nel reattore

? qtà di nuclei

mi aspetto che dopo un certo tempo i due numeri si compensino

Il fluido inizia a scorrere, nel caso del reattore è l'O_2 che si attiva $\quad N(0)=0$

$$H_2O \rightarrow O^{16} + n^{\beta^-} \rightarrow N^{16} \quad \text{radioattivo}$$

1) primo giro

$C_{in} = 0 \qquad 0 < t < t_1$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N + R$$

$$N(t) = \cancel{\underbrace{N_0}_{=0} e^{-\lambda t}} + \int_0^{t_1} R e^{-\lambda(t-t')} \, dt' =$$

$$N_{01} = -\frac{R}{\lambda} e^{-\lambda(t-t')} \Big]_0^{t_1} = -\frac{R}{\lambda}(e^{-\lambda t_1} - 1)$$

$$= \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_1}) \qquad \text{uscita dal reattore}$$

$t_1 < t < t_1 + t_2$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \qquad \text{la sorgente scompare}$$

$$N(t) = N_{01} e^{-\lambda t} = \frac{R}{\lambda} e^{-\lambda t}(1 - e^{-\lambda t_1})$$

$$N_{i1} = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda_1}) \underbrace{e^{-\lambda t_2}}_{\text{la probabilità di sopravvivere fino } t_2} \qquad \text{ingresso del reattore}$$

? condizione asintotica

l'equilibrio si raggiungerà quando $n \to +\infty$

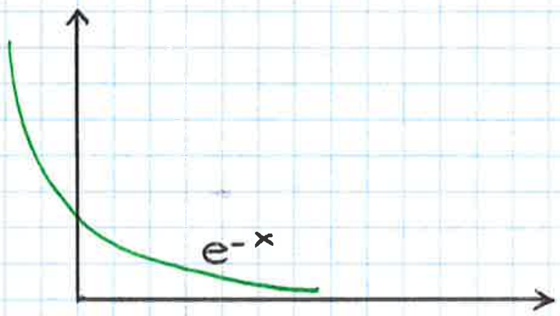
$\Rightarrow$ serie geometrica

converge quando $0 < q < 1$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ $[q<1]$

converge a $\frac{1}{1-q}$

$$\lim_{n \to +\infty} N_{on} = \lim_{n \to +\infty} \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t_1}) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda(t_1+t_2)}}$$

concentrazione di nuclei radioattivi all'uscita del ciclo



n diventa grande quando $n(t_1+t_2) \gg$ vita media del decadimento

$n(t_1+t_2) \gg \frac{1}{\lambda}$

la serie diventa $\frac{1}{1 - e^{-\lambda(t_1+t_2)}}$

$\frac{1}{\lambda} \Rightarrow$ caratteristica del processo fisico, stabilisce la scala del fenomeno

$n\lambda(t_1+t_2) \gg 1$

asintoticamente la quantità di nuclei radioattivi introdotti dalla sorgente nel reattore è pari alla quantità di nuclei decaduti nel ciclo $\rightarrow$ verificare

Esercitazione 1 - n5

REATTORE TERMICO

P-238 $T_{1/2} = 20y = 630720000\ s$

N_1 ↗

nuclide 2 $T_{1/2} = 45y = 1419120000\ s$

N_2 ↗ $N_{20} = 0$

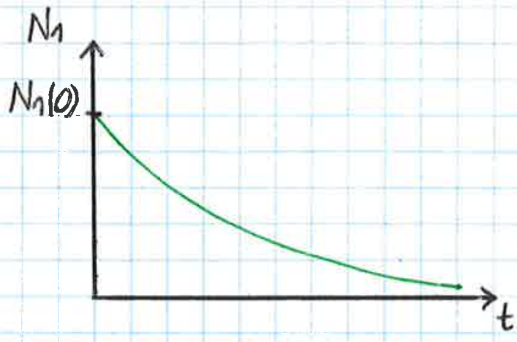
1. decadendo produce il nuclide radioattivo 2.

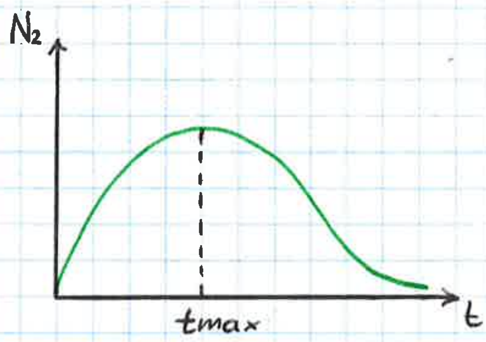
? energia termica prodotta dalle particelle α emesse dai nuclidi 2.

energia delle particelle $\alpha = 4MeV$ generate dal decadimento di 2.

$$t=0 \begin{cases} N_2(0) = 0 \\ N_1(0) \neq 0 \end{cases}$$

? andamento temporale dei nuclidi (popolazione)





$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

$$N_1(t) = N_{10}\, e^{-\lambda_1 t}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1$$

$$N_2(t) = N_{20}\, e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t e^{-\lambda_2 (t-t')} \cdot \lambda_1 N_{10} e^{-\lambda_1 t'}\, dt'$$

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = \frac{\cancel{\lambda_2} - \cancel{\lambda_2} + \lambda_1}{\cancel{\lambda_2 - \lambda_1}} \cdot \frac{\cancel{\lambda_2 - \lambda_1}}{\lambda_2}$$

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$(\lambda_1-\lambda_2)t^*_{max} = \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)$$

$$t^*_{max} = \frac{\ln\lambda_1 - \ln\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \quad [s]$$

? Determinare la qtà iniziale di N_1

N_{10} in nuclei e in grammi affinché dopo 10 anni

la potenza sia 1 . W

$$\boxed{\begin{array}{l} n \rightarrow g \\ \frac{n}{N_A} = \text{grammoatomi} \\ \frac{n}{N_A} \cdot M_{atomica} = g \end{array}}$$

$$1\,MeV = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \frac{J}{eV} \cdot 10^{6} \frac{eV}{MeV}$$

$\lambda_2 N_2(t) \rightarrow$ particelle α emesse al secondo

attività $A_2(t)$

$A_2(10\text{ anni}, N_{10}) \cdot E_\alpha$ = energia rilasciata = 1W

↳ dipende da N_{10}

ogni particella α deposita la sua energia 4 MeV

$$P(t) = \lambda_2 N_2(t) \left[\frac{decad}{s}\right] \cdot 4\,[MeV] \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,[J/eV] \cdot 10^{6}\,[eV/MeV]$$

energia depositata sul materiale

Esercitazione 1 - n 3

Catena radioattiva costituita da 2 nuclei

- specie 1 I^{135} prodotta dalla sorgente R costante nel tempo

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 + R \quad \text{equazione di bilancio}$$

- specie 2 Xe^{135} alimentata dal decadimento della specie 1 radioattivo

$$\frac{dN_2}{dt} = \underbrace{\lambda_1 N_1}_{R_2} - \lambda_2 N_2 - P$$

la specie 2 ha un pozzo

$t=0 \quad N_1(0) = N_2(0) = 0$

fenomeni competitivi ⊕ e ⊖

Il sistema raggiunge una situazione di equilibrio

→ risolvo l'equazione e faccio $t \to +\infty$ oppure per trovare la situazione asintotica impongo N_1 e N_2 costanti

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = 0$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 N_1^{as} + R = 0 \\ \lambda_1 N_1^{as} - \lambda_2 N_2^{as} - P = 0 \end{cases} \qquad N_1^{as} = \frac{R}{\lambda_1}$$

$$\cancel{\lambda_1} \frac{R}{\cancel{\lambda_1}} - \lambda_2 N_2^{as} - P = 0 \qquad N_2^{as} = \frac{R-P}{\lambda_2}$$

$t \downarrow \downarrow$

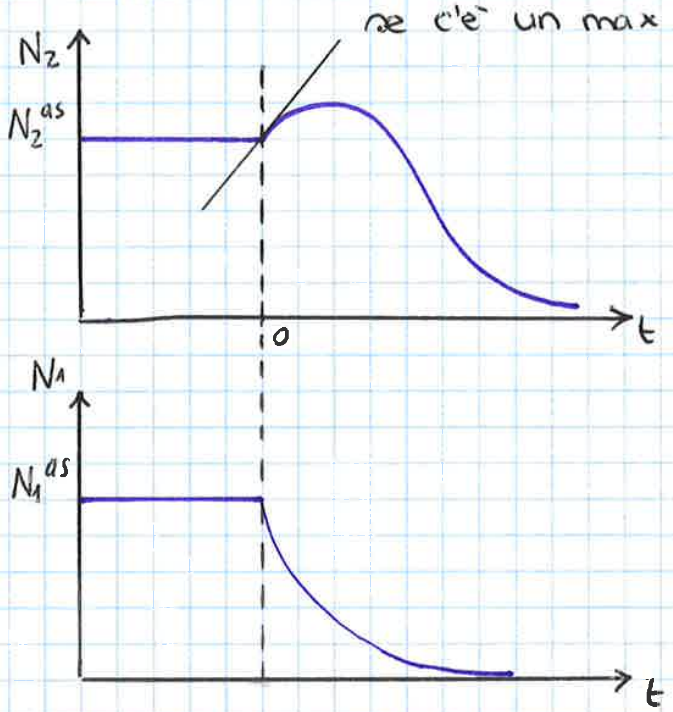
POZZO meccanismo che sottrae nuclei 2

la cattura dei neutroni è il fenomeno che genera un pozzo, nel reattore ci sono nuclei della 2ª specie, quando catturano neutroni si trasformano, non ci sono più.

hp: caso stazionario

Il reattore è spento, cosa capita?

se c'è un max la derivata è ⊕



Quale condizione provoca la crescita di N_2? N_2 viene alimentato dal decadimento di N_1 (dopo un po si spegne)

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1^{as} - \lambda_2 N_2^{as} = \oplus$$

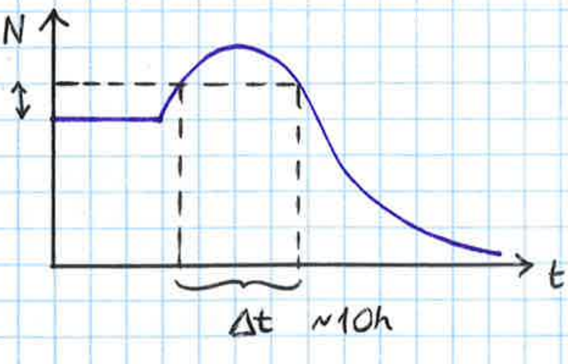
$$\lambda_1 N_1^{as} - \lambda_2 N_2^{as} > 0$$

$t \uparrow \quad Xe \uparrow$

scale dell'ordine di diverse ore

Se per qualche motivo si ferma il reattore, per farlo ripartire devo compensare lo Xe alzando le barre, ma se non riesco a compensare perchè non ho abbastanza riserve tutto il reattore per un certo Δt non può ripartire

compenso solo questo



Nel momento in cui il reattore si spegne $R=0$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 \\ \dfrac{dN_2}{dt} = \underbrace{\lambda_1 N_1}_{R_2} - \lambda_2 N_2 \end{cases}$$

non c'è più il pozzo perché non ci sono più neutroni

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1^{as} e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = N_2^{as} e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t R_2 e^{-\lambda_1 t'} dt' \end{cases}$$

$t \to +\infty \quad N_1 \to 0$

crescita di $N_2 \to \dfrac{dN_2}{dt} > 0$

$$\lambda_1 N_1^{as} - \lambda_2 N_2^{as} > 0$$

$$N_1^{as} > \frac{\lambda_2}{\lambda_1} N_2^{as}$$

condizione affinché per $t>0$ ci sia un max di N_2

$\longrightarrow N_1(t)$ è variabile

$$\begin{cases} N_1(t) = \dfrac{R}{\lambda_1}(1-e^{-\lambda_1 t}) \\ N_2(t) = \int_0^t R_2 e^{-\lambda_2 (t-t')} dt' \end{cases}$$

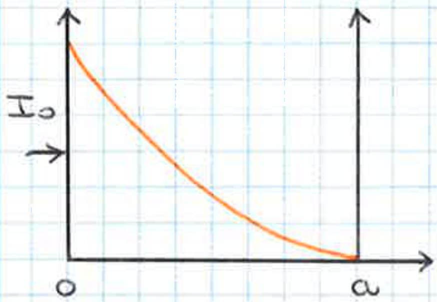
$$R_2 = \lambda_1 N_1(t) - P = \cancel{\lambda_1} \frac{R}{\cancel{\lambda_1}}(1-e^{-\lambda_1 t}) - P$$

$$N_2(t) = \int_0^t [R(1-e^{-\lambda_1 t'}) - P] e^{-\lambda_2 (t-t')} dt' =$$

$$= \int_0^t (R - Re^{-\lambda_1 t'} - P) e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{\lambda_2 t'} dt' =$$

$$= e^{-\lambda_2 t} \int_0^t (Re^{\lambda_2 t'} - Re^{(\lambda_2 - \lambda_1)t'} - Pe^{\lambda_2 t'}) dt' =$$

Esercitazione 2 - n.2



$J^+(0) = I_0$

$\phi(a) = 0$

$L = 5\,cm \qquad a = 2\,cm$

$\Sigma = 17\,cm^{-1}$

$D = \dfrac{1}{3\Sigma} = 0{,}01961$

Non c'è sorgente → due esponenziali che si annullano in a

$$\phi(x) = A\,senh\left(\frac{a-x}{L}\right) = A\,\frac{e^{\frac{a-x}{L}} - e^{-\frac{a-x}{L}}}{2}$$

$$\boxed{J^+(0) = I_0 = \frac{1}{4}\phi(0) - \frac{D}{2}\phi'(0)} =$$

$$= \frac{1}{4}A\,senh\left(\frac{a}{L}\right) - \frac{D}{2}\left[-\frac{A}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right)\right] = I_0$$

$$A\,senh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2AD}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right) = 4I_0$$

$$A\left[senh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2D}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right)\right] = 4I_0$$

$$A = \frac{4I_0}{senh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2D}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right)} \rightarrow 0{,}41923$$

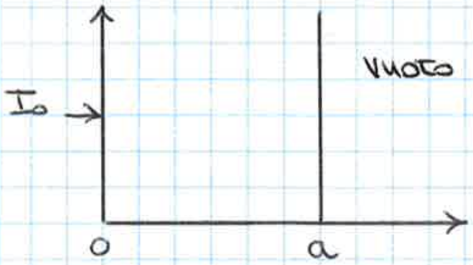
? coeff. di riflessione (non dipende da I_0)

$$\alpha = \frac{J^-(0)}{J^+(0)} = \frac{\frac{1}{4}\phi(0) + \frac{D}{2}\phi'(0)}{\frac{1}{4}\phi(0) - \frac{D}{2}\phi(0)} =$$

$$= \frac{\frac{\cancel{A}}{\cancel{4}2}senh\left(\frac{a}{L}\right) - \frac{\cancel{A}D}{\cancel{2}L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right)}{\frac{\cancel{A}}{\cancel{4}2}senh\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{\cancel{A}D}{\cancel{2}L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right)} =$$

Esercitazione 2 - n3

strato piano con radiazione fotonica



a, D, Σ noti

$\phi(a) = 0$

TEORIA DELLA DIFFUSIONE MONOCINETICA

? R, T, A (Riflessione, Trasmissione, Assorbimento)

$\Sigma_a \left[\frac{1}{m}\right] \qquad \phi \left[\frac{1}{m^2 s}\right]$

$$\phi(x) = C \,\text{senh}\left(\frac{a-x}{L}\right)$$

$$J^+(0) = I_0 = \frac{1}{4}\phi(0) - \frac{D}{2}\phi'(0) =$$

$$= \frac{1}{4} C \,\text{senh}\left(\frac{a}{L}\right) - \frac{D}{2}\left[-\frac{C}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right)\right] = I_0$$

$$\frac{C}{4}\,\text{senh}\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{CD}{2L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right) = I_0$$

$$C\,\text{senh}\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2CD}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right) = 4I_0$$

$$C\left[\text{senh}\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2D}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right)\right] = 4I_0$$

$$C = \frac{4I_0}{\text{senh}\left(\frac{a}{L}\right) + \frac{2D}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right)}$$

$$\lim_{a \to +\infty} R \quad \frac{\tanh(a/L) - 2D/L}{\tanh(a/L) + 2D/L} = \frac{1 - 2D/L}{1 + 2D/L}$$

$$A_\infty + R_\infty = \frac{\frac{D}{L}}{\frac{1}{4} + \frac{D}{2L}} + \frac{1 - \frac{2D}{L}}{1 + \frac{2D}{L}} =$$

$$= \frac{\frac{D}{L}}{\frac{L+2D}{4L}} + \frac{\frac{L-2D}{L}}{\frac{L+2D}{L}} = \frac{D}{\cancel{L}} \cdot \frac{4\cancel{L}}{L+2D} + \frac{L-2D}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L}}{L+2D} =$$

$$= \frac{4D + L - 2D}{L + 2D} = 1$$

$$T_\infty = 0$$

condizioni al contorno

$$\begin{cases} \phi(+\infty)=0 & \text{non può divergere} \Rightarrow B=0 \\ \phi(0)=0 \end{cases}$$

$$\phi(x) = Ae^{-x/L} + \frac{S_0}{\Sigma_a}$$

$$\phi(0) = A + \frac{S_0}{\Sigma_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{S_0}{\Sigma_a}$$

$$\phi(x) = -\frac{S_0}{\Sigma_a} e^{-x/L} + \frac{S_0}{\Sigma_a} = \frac{S_0}{\Sigma_a}\left(1 - e^{-x/L}\right)$$

so che $J_0 = J(0) = 15\ n/cm^2 s$

$$J(0) = -D\phi'(0) = -D\frac{S_0}{\Sigma_a}\cdot\frac{1}{L}e^{-x/L}\Big|_0 = -\frac{DS_0}{\Sigma_a L}$$

$$\left|-\frac{DS_0}{\Sigma_a L}\right| = J_0$$

$$S_0 = \frac{J_0 \Sigma_a L}{D} = \lambda N n$$

$$\frac{\delta J_0}{J_0} = 0{,}05 \qquad \frac{\delta L}{L} = 0{,}1$$

$$N = \frac{J_0 \Sigma_a L}{D\lambda n}$$

$$\delta N = \left|\frac{\partial N}{\partial J_0}\right|\delta J_0 + \left|\frac{\partial N}{\partial L}\right|\delta L =$$

$$= \frac{\Sigma_a L}{D\lambda n}\delta J_0 + \frac{J_0\Sigma_a}{D\lambda n}\delta L$$

$$\frac{\delta N}{N} = \frac{J_0}{N}\left|\frac{\partial N}{\partial J_0}\right|\frac{\delta J_0}{J_0} + \frac{L}{N}\left|\frac{\partial N}{\partial L}\right|\frac{\delta L}{L} =$$

$$= \frac{\cancel{J_0}}{\cancel{J_0}\cancel{\Sigma_a}\cancel{L}}\cancel{D}\cancel{\lambda}\cancel{n}\cdot\frac{\cancel{\Sigma_a}\cancel{L}}{\cancel{D}\cancel{\lambda}\cancel{n}}\frac{\delta J_0}{J_0} + \frac{\delta L}{L} = 0{,}05 + 0{,}1 = 0{,}15$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 132

$$J(a^+) - J(a^-) = S_0$$

$$-D\phi'(a^+) + D\phi'(a^-) = S_0 \Rightarrow -D\phi'_{II}(a) + D\phi'_I(a) = S_0$$

$$D\left(\frac{A}{L}\cosh\frac{a}{L}\right) - D\left(-\frac{B}{L}e^{-a/L}\right) = S_0$$

$$\frac{AD}{L}\cosh\frac{a}{L} + \frac{BD}{L}e^{-a/L} = S_0$$

$$A\cosh\frac{a}{L} + Be^{-a/L} = \frac{LS_0}{D}$$

$$A\cosh\frac{a}{L} + A\cancel{e^{a/L}}\,\mathrm{senh}\frac{a}{L}\,\cancel{e^{-a/L}} = \frac{LS_0}{D}$$

$$A\left(\frac{e^{a/L}+e^{-a/L}}{2} + \frac{e^{a/L}-e^{-a/L}}{2}\right) = \frac{LS_0}{D}$$

$$Ae^{a/L} = \frac{LS_0}{D}$$

$$A = \frac{LS_0}{D}e^{-a/L}$$

$$\phi_I = \frac{LS_0}{D}e^{-a/L}\,\mathrm{senh}\frac{x}{L}$$

$$J(0) = -D\phi'_I(0) = -D\left(\frac{A}{L}\cosh\frac{x}{L}\right) = -\frac{AD}{L}\cosh\frac{x}{L} =$$

$$= -\frac{\cancel{L}S_0}{\cancel{D}}e^{-a/L}\,\frac{\cancel{D}}{\cancel{L}}\cosh\frac{x}{L}\Big|_{x=0} = -S_0e^{-a/L}\cosh 0 = -S_0e^{-a/L}$$

? determinare la lunghezza di diffusione in fz di R e α

$$R = \frac{J(0)_\alpha}{J(0)_{3\alpha}} = \frac{+\cancel{S_0}e^{-\alpha/L}}{+\cancel{S_0}e^{-3\alpha/L}} = e^{2\alpha/L}$$

$$R = e^{\frac{2\alpha}{L}}$$

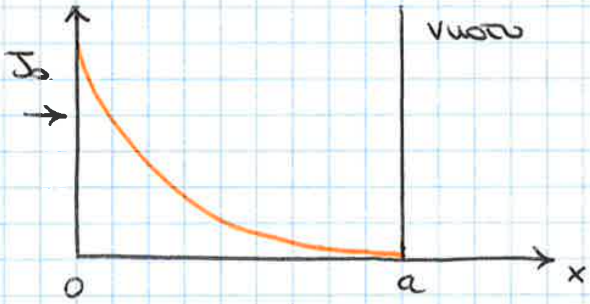
$$\ln R = \frac{2\alpha}{L} \rightarrow L = \frac{2\alpha}{\ln R}$$

Esercitazione 3 - n 1

Schermo di un reattore nucleare esposto a irraggiamento neutronico.

SLAB INFINITO spessore $a = 10\,cm$

TEORIA DELLA DIFFUSIONE MONOCINETICA



J_0 = corrente netta

$D = 0{,}15\,cm$

? soluzione dell'equazione stazionaria della diffusione nel mezzo + grafico

la corrente netta obbedisce alla legge di Fick

Equazione della diffusione nel mezzo

$$D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \Sigma_a\phi(x) = 0$$ non ci sono sorgenti

divido per D

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{\Sigma_a}{D}\phi(x) = 0$$

condizioni al contorno

$$\begin{cases} \phi(a) = 0 \\ J_0 = -D\phi'(x)\big|_{x=0} \end{cases}$$

la soluzione è la somma di due esponenziali che si annulla in a

$$\phi(x) = A\,\mathrm{senh}\left(\frac{a-x}{L}\right) \qquad \phi'(x) = -\frac{A}{L}\cosh\left(\frac{a-x}{L}\right)$$

$$\frac{e^{a/L}+e^{-a/L}}{2}=100 \quad \longrightarrow \quad e^{a/L}+e^{-a/L}=200$$

$$\frac{a}{L}=x$$

$$e^{x}+\frac{1}{e^{x}}=200 \qquad e^{x}=t$$

$$t^2+1=200t$$

$$t^2-200t+1=0$$

$$t=\frac{200\pm\sqrt{200^2-4}}{2} \quad \begin{cases} 199,98 \\ 0,02 \end{cases}$$

$e^{x}=199,98$ $\qquad$ $e^{x}=0,02$

$x\cong 5,298$ $\qquad$ $x\cong -3,9$ non fisico

$\nearrow$

$\frac{a}{L}=5,298$ $\qquad$ $L\cong 1,888\ cm \neq L_{H_2O}$!

hp: lo schermo è costituito da acqua $\Sigma_a=0,0222\ cm^{-1}$

? concentrazione di Boro $[g/cm^3]$ $\Sigma_c=659\ b$, $M_{at}=10,8$
da aggiungere all'acqua per realizzare la condizione precedente $\quad$ (D rimane $0,15\,cm$).

$$\Sigma_{a,B}=\sigma_{a,B}\cdot N_B$$

$$\Sigma_{a,TOT}=\Sigma_{a,B}+\Sigma_{a,H_2O}=\sigma_{a,B}\cdot N_B+\Sigma_{a,H_2O}=\frac{D}{L^2}$$

$$N_B=\frac{\frac{D}{L^2}-\Sigma_{a,H_2O}}{\sigma_{a,B}}=3,0168\cdot 10^{19}\ atomi/cm^3$$

$$\Rightarrow N_B\cdot\frac{1}{N_A}\cdot M_{at}=5,4104\cdot 10^{-4}\ g/cm^3$$

condizioni al contorno

$\phi(0) = 0$

$$\phi(x) = A e^{-x\alpha} + \frac{S}{D\alpha^2}$$ e determino A

$$0 = A e^{-0 \cdot \alpha} + \frac{S}{D\alpha^2}$$

$$A = -\frac{S}{D\alpha^2}$$

quindi ottengo $\phi(x) = \frac{S}{D\alpha^2}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)$

? flusso asintotico

$$\phi_{as} = \frac{S}{D\alpha^2}$$

? corrente neutronica

$$J = -D\phi'$$

$$J(x) = -\cancel{D}\frac{S}{\cancel{D}\alpha^{\cancel{2}}}\left(+\cancel{\alpha}\, e^{-\alpha x}\right) = -\frac{S}{\alpha}e^{-\alpha x}$$

? $R = \dfrac{\text{corrente d'interfaccia con il vuoto}}{\text{flusso asintotico}}$

$J(0)$ e' $\ominus$ → le particelle che escono dal contorno fuggono dalla parte delle x negative

$$J(0) = -D\phi'(0)$$
$$= -\frac{S}{\alpha}$$

$$R = \frac{|S/\alpha|}{S/D\alpha^2} = \frac{\cancel{S}}{\cancel{\alpha}} \cdot \frac{D\alpha^{\cancel{2}}}{\cancel{S}} = D\alpha$$

R non dipende da S, il problema e' lineare, S e' un coeff. moltiplicativo, si semplifica!

Esercitazione 3 - n3

schermo di un reattore nucleare esposto a irraggiamento neutronico.

SCHERMO = slab infinito spesso $a = 30$ cm

bilancio neutronico descrivibile con la TEORIA DI DIFFUSIONE MONOCINETICA

$D = 0{,}1$ cm

$L = 10$ cm

$J_0 = 10^{13}$ n/cm²s corrente netta stazionaria

? soluzione dell'equazione della diffusione

$$D \frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \Sigma_a \phi(x) = 0$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\phi(x) = 0$$

condizioni al contorno

$\phi(a) = 0 \qquad J_0 = -D\phi'(0)$

$$\phi(x) = A \,\mathrm{senh}\left(\frac{a-x}{L}\right)$$

$$J(x) = -DA\left(-\frac{1}{L}\cosh\left(\frac{a-x}{L}\right)\right) = \frac{DA}{L}\cosh\left(\frac{a-x}{L}\right)$$

$$J_0 = J(0)$$

$$J_0 = \frac{DA}{L}\cosh\left(\frac{a}{L}\right) \rightarrow A = \frac{J_0 L}{D\cosh\left(\frac{a}{L}\right)}$$

$$= \frac{\sigma_{1c} \Phi N_{10}}{\lambda - \sigma_{1c} \Phi} \left(e^{-\sigma_{1c} \Phi t} - e^{-\lambda t} \right)$$

$t = 1y$

nuclei trasmutati

$$N_1 = N_{10} - N_1(1y) = N_{10}\left(1 - e^{-\sigma_{1c} \Phi \overset{1y}{t}}\right)$$

$$N_2 = \frac{\sigma_{1c} \Phi N_{10}}{\lambda - \sigma_{1c} \Phi} \left(e^{-\sigma_1 \Phi 1y} - e^{-\lambda 1y} \right)$$

? attività dopo un anno di funzionamento

$$A_2(1y) = \lambda_2 N_2(1y)$$

? equazione di bilancio N_2, $N_2(t)$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\sigma_{2c} N_2 \phi$$ è la cattura che distrugge i nuclei di 2

$$N_2(t) = N_{20} e^{-\sigma_{2c}\phi t}$$

? equazione di bilancio N_3, $N_3(t)$

$$\frac{dN_3(t)}{dt} = \sigma_{2c} N_2 \phi - \sigma_{3a} N_3 \phi \qquad \sigma_{3a} = \sigma_{3c} + \sigma_{3f}$$

$$N_3(t) = \int_0^t dt' \, \sigma_{2c} N_{20} e^{-\sigma_{2c}\phi t'} e^{-\sigma_{3a}\phi(t-t')} =$$

$$= \sigma_{2c} N_{20} e^{-\sigma_{3a}\phi t} \int_0^t dt' \, e^{(\sigma_{3a}-\sigma_{2c})\phi t'} =$$

$$= \frac{\sigma_{2c} N_{20}}{\sigma_{3a}-\sigma_{2c}} e^{-\sigma_{3a}\phi t} \left. e^{(\sigma_{3a}-\sigma_{2c})\phi t'} \right]_0^t =$$

$$= \frac{\sigma_{2c} N_{20}}{\sigma_{3a}-\sigma_{2c}} e^{-\sigma_{3a}\phi t} \left[e^{(\sigma_{3a}-\sigma_{2c})\phi t} - 1 \right] =$$

$$= \frac{\sigma_{2c} N_{20}}{\sigma_{3a}-\sigma_{2c}} \left(e^{-\sigma_{2c}\phi t} - e^{-\sigma_{3a}\phi t} \right)$$

? legge con cui varia la densità di potenza $p(t)$ generata dalle fissioni 1 e 3

$$p(t) = [\sigma_{f1} N_1(t) \phi + \sigma_{f3} N_3(t) \phi] E_f =$$

$$= \phi \left[\sigma_{f1} N_{10} e^{-\sigma_{1a}\phi t} + \sigma_{f3} \frac{\sigma_{2c} N_{20}}{\sigma_{3a}-\sigma_{2c}} \left(e^{-\sigma_{2c}\phi t} - e^{-\sigma_{3a}\phi t} \right) \right] E_f$$

? $p(0)$, $p(1y)$, $N_1(1y)$, $N_2(1y)$, $N_3(1y)$

$$p(0) = \sigma_{1f} N_{10} \phi E_f = 192 \ W/cm^2$$

$$p(1y) = \phi \left(\sigma_{1f} N_1(1y) + \sigma_{3f} N_3(1y) \right) E_f = 137 \ W/cm^3$$

se $N_3(t) > N_3(0)$ vuol dire che produco più di quello che consumo

$$= N_{20}\, e^{-\sigma_{2a}\phi t} + \frac{\sigma_{3a} N_{30}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}}\, e^{-\sigma_{2a}\phi t}\left[e^{\phi(\sigma_{2a}-\sigma_{3c})t} - 1\right] =$$

$$= N_{20}\, e^{-\sigma_{2a}\phi t} + \frac{\sigma_{3a} N_{30}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}} \left(e^{-\phi\sigma_{3c}t} - e^{-\sigma_{2a}\phi t}\right)$$

? N_{30} affinché N_2 abbia un massimo

$$N_2 \to max \Rightarrow \frac{dN_2(t)}{dt} = 0$$

$$-\sigma_{2a} N_2(t)\cancel{\phi} + \sigma_{3c} N_3(t)\cancel{\phi} = 0$$

$$\sigma_{2a}\left[N_{20}\, e^{-\sigma_{2a}\phi t} + \frac{\sigma_{3a} N_{30}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}} \left(e^{-\phi\sigma_{3c}t} - e^{-\sigma_{2a}\phi t}\right)\right] =$$

$$= \sigma_{3c} N_{30}\, e^{-\sigma_{3c}\phi t}$$

$$\sigma_{2a} N_{20}\, e^{-\sigma_{2a}\phi t} + \frac{\sigma_{2a}\sigma_{3a} N_{30}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}} \left(e^{-\sigma_{3c}\phi t} - e^{-\sigma_{2a}\phi t}\right) = \sigma_{3c} N_{30}\, e^{-\sigma_{3c}\phi t}$$

$$\sigma_{2a} N_{20}\, e^{-\sigma_{2a}\phi t} = N_{30}\left[\sigma_{3c}\, e^{-\sigma_{3c}\phi t} - \frac{\sigma_{2a}\sigma_{3a}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}} \left(e^{-\sigma_{3c}\phi t} - e^{-\sigma_{2a}\phi t}\right)\right]$$

trovo N_{30} *

? T_{max} (N_{2MAX})

$$\sigma_{2a} N_{20}\, e^{-\sigma_{2a}\phi t} = N_{30}\sigma_{3c}\, e^{-\sigma_{3c}\phi t} - N_{30}\frac{\sigma_{2a}\sigma_{3a}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}}\, e^{-\sigma_{3c}\phi t} + N_{30}\frac{\sigma_{2a}\sigma_{3a}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}}\, e^{-\sigma_{2a}\phi t}$$

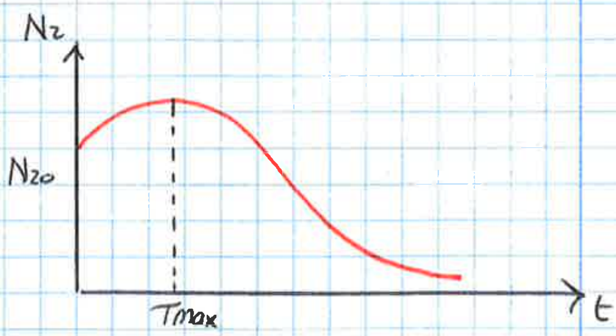
$$e^{-\sigma_{2a}\phi t}\underbrace{\left(\sigma_{2a} N_{20} - N_{30}\frac{\sigma_{2a}\sigma_{3a}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}}\right)}_{A} = e^{-\sigma_{3c}\phi t}\underbrace{\left(N_{30}\sigma_{3c} - N_{30}\frac{\sigma_{2a}\sigma_{3a}}{\sigma_{2a}-\sigma_{3c}}\right)}_{B}$$

$$e^{-\sigma_{2a}\phi t}\cdot A = e^{-\sigma_{3c}\phi t}\cdot B$$

$$e^{(\sigma_{3c}-\sigma_{2a})\phi t} = \frac{B}{A}$$

$$(\sigma_{3c}-\sigma_{2a})\phi t = \log\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$T = \frac{\log\left(\frac{B}{A}\right)}{(\sigma_{3c}-\sigma_{2a})\phi}$$



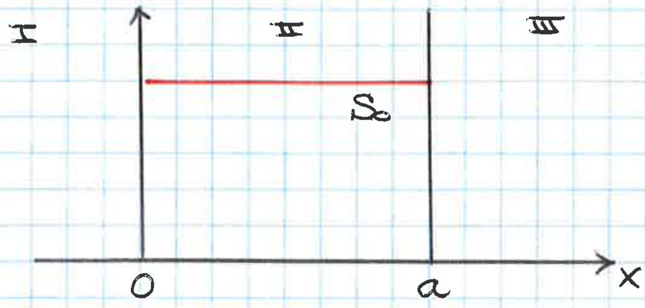
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 132

TEORIA DELLA DIFFUSIONE MONOCINETICA

Esercitazione 2 - n 1

mezzo infinito, caso stazionario

sorgente costante tra 0 e a



fz di Green

$$D\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \Sigma_a\Phi(x) + S_0 = 0$$

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \frac{\Sigma_a}{D}\Phi(x) + \frac{S_0}{D} = 0$$

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\Phi(x) + \frac{S_0}{D} = 0$$

come imporre le condizioni al contorno

$\Phi(0) = 0$

$J(0) = -D\Phi'(0)$ corrente netta

$$\boxed{J^{\pm}(0) = \frac{1}{4}\Phi(0) \mp \frac{D}{2}\Phi'(0)}$$

uscente $\oplus$
entrante $\ominus$

I. $\Phi_I(x) = Ae^{x/L} + Be^{-x/L}$

ma $x \to -\infty$ $\Phi_I \to 0$ $\Rightarrow$ $B = 0$

quindi $\Phi_I(x) = Ae^{x/L}$

III. $\Phi_{III}(x) = Fe^{x/L} + Ge^{-x/L}$

ma $x \to +\infty$ $\Phi_{III} \to 0$ $\Rightarrow$ $F = 0$

quindi $\Phi_{III}(x) = Ge^{-x/L}$

II. $\Phi_{II}(x) = Ce^{x/L} + De^{-x/L} + E$ → si trova tramite l'integrale particolare

imponendo il flusso costante, come costante è la sorgente S_0 $\quad \frac{\Sigma_a}{D} \cdot E = \frac{S_0}{D} \Rightarrow E = \frac{S_0}{\Sigma_a}$

$$\text{II.}\quad \phi(x) = \int_0^a \frac{S_0 L}{2D} e^{-\frac{|x-x'|}{L}} dx' = \overbrace{\int_0^x \frac{S_0 L}{2D} e^{\frac{x'-x}{L}} dx'}^{x'<x} + \overbrace{\int_x^a \frac{S_0 L}{2D} e^{\frac{x-x'}{L}} dx'}^{x'>x} =$$

$$= \frac{S_0 L}{2D} e^{-x/L} \int_0^x e^{\frac{x'}{L}} dx' + \frac{S_0 L}{2D} e^{x/L} \int_x^a e^{-x'/L} dx' =$$

$$= \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-x/L} \left. e^{x'/L} \right]_0^x - \frac{S_0 L^2}{2D} e^{x/L} \left. e^{-x'/L} \right]_x^a =$$

$$= \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-x/L} (e^{x/L} - 1) - \frac{S_0 L^2}{2D} e^{x/L} (e^{-a/L} + e^{x/L})$$

$$= \frac{S_0 L^2}{2D} - \frac{S_0 L^2}{2D} e^{-x/L} - \frac{S_0 L^2}{2D} e^{\frac{x-a}{L}} - \frac{S_0 L^2}{2D} e^{\frac{2x}{L}}$$

$$\text{III.}\quad \phi(x) = \int_0^a \frac{S_0 L}{2D} e^{-\frac{|x-x'|}{L}} dx' \underset{x'<x}{=} \frac{S_0 L}{2D} \int_0^a e^{\frac{x'-x}{L}} dx'$$

? → $k_1 = \dfrac{k_\infty}{1+L^2B_1^2}$ ma $B_1^2 = \left(\dfrac{\pi}{H}\right)^2 = \left(\dfrac{\pi}{100}\right)^2$ è un dato del problema perché H è noto

$k_\infty = k_1(1+L^2B_1^2)$ lo scrivo con 5 cifre significative!

$= 1{,}05475$

? → $S(x,t) = S_0 \cdot \varphi_1(x) \cdot \delta(t)$

impulso lanciato in un sistema privo di neutroni

(sistema spento → $A_n(0) = 0$)

nuclei prodotti come risposta all'impulso = 10''

hp: per applicazioni biomediche → i tempi di decadimento saranno nell'ordine delle ore!

$\varphi_1(x) = \sqrt{\dfrac{2}{H}} \cos\left(\dfrac{\pi}{H}x\right)$ quindi

$$S(x,t) = S_0\left[\sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{\pi}{H}x\right)\right]\delta(t)$$

$$S_n(t) = \int_{-H/2}^{H/2} dx\, S(x,t)\cdot\varphi_n(x) =$$

↑ calcolo le componenti della sorgente

$$= \int_{-H/2}^{H/2} dx\, \underbrace{S(x,t)}\varphi_n(x) = \int_{-H/2}^{H/2} dx\, \underbrace{\varphi_1(x) S_0\, \delta(t)}\, \varphi_n(x) =$$

$$= \left[\int_{-H/2}^{H/2} dx\, \varphi_1(x)\varphi_n(x)\right] S_0\,\delta(t) = \begin{cases} = 0 & (n \neq 1) \\ S_0\,\delta(t) & (n=1) \end{cases}$$

le autofunzioni di Helmotz sono ortogonali

$$= S_0\,\delta(t)\cdot\delta_{1n}$$

Tutte le componenti della sorgente sono nulle tranne quella con $n=1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 132

devo calcolare S_0 → devo fare in modo che il numero medio di nuclei radioattivi prodotti durante la trasmutazione nel transitorio ($0 \to +\infty$) nel bersaglio nell'unità di t e V siano dell'ordine di 10^{11}

$N(x,t) = \Sigma_T \, \phi(x,t)$ nell'unità di volume, nell'unità di t

$$N(t) = \Sigma_T \int_{-2}^{2} dx \, \phi(x,t) \cong \Sigma_T S_0 v \sqrt{\frac{2}{H}} e^{\alpha_1 t} \int_{-2}^{2} dx = S_0 \mathcal{A} \, e^{\alpha_1 t}$$

↳ integro sul bersaglio posto nel centro del sistema ($s = 4$ cm)

$\cong$ approssimazione!

$$\int_{-2}^{2} \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right) \doteq 1$$

$\mathcal{A}$ è un numero che contiene $\Sigma_T v \sqrt{\frac{2}{H}}$

α_1 è negativo! $K_1 < 1$

$$N_0 = \int_0^{+\infty} dt \, N(t) = 10^{11} \text{ dato dal problema}$$

$$N_0 = S_0 \mathcal{A} \int_0^{+\infty} dt \, e^{\alpha_1 t} = S_0 \mathcal{A} \frac{1}{\alpha_1} e^{\alpha_1 t} \Big]_0^{+\infty} = - S_0 \mathcal{A} \frac{1}{\alpha_1} = 10^{11}$$

↳ numero positivo $\alpha_1 \to \ominus$

trovo S_0

$$S_0 = - \frac{10^{11} \alpha_1}{\mathcal{A}} = 6{,}21516 \cdot 10^{11}$$

Si è pelata la mela ai raggi grandi, ho tolto quindi un grande volume (~ buccia dell'arancia!)
Ho tolto tanto materiale moltiplicante, ma il k_{eff} è diminuito di poco. La sfera è un solido molto compatto, è quello che minimizza di più il rapporto superficie - volume!

→ Sorgente stazionaria distribuita come l'armonica fondamentale $S(r,t) = S_0\, \varphi_1(r) \cdot 1$ → costante nel tempo

? Potenza di S affinché in condizioni
$J = 10^{11}$ neutroni / s → corrente uscente

$$\boxed{\varphi_1(r) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{R} r\right)}{r}}$$ armonica fondamentale della sfera

dovrei scrivere R_{new} al posto di R, struttura sotto critica → se mettessi una sorgente stazionaria in una struttura critica, non troverei una soluzione stazionaria! L'andamento della popolazione neutronica sarebbe lineare crescente

Devo trovare S_0 → altra condizione di normalizzazione da fare sulla base della corrente

$$\phi(r,t) = \int_0^t d\tau\, S_n(\tau)\, e^{\alpha_1 (t-t')} \varphi_n(r)$$

↳ rimane solo il termine di ordine 1 perché la sorgente è distribuita come l'armonica fondamentale

$J_{as}(R) = -D S_0 A \left[\frac{df(r)}{dr} \right]_{r=R}$ per unità di area e tempo

ho bisogno della quantità totale $\rightarrow 10''$

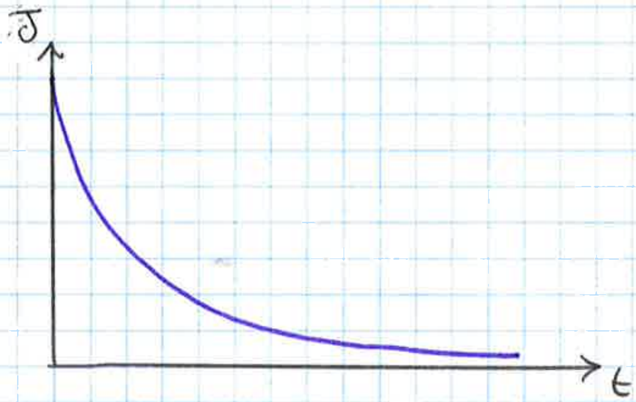
la corrente netta su tutta la superficie sferica è costante

$-D S_0 A \left[\frac{df(r)}{dr} \right]_R \cdot 4\pi R^2 = 10''$

↳ integro sulla superficie

↓

trovo S_0



le fughe massime si hanno per $t = 0^+$, cioè quando si ha il flusso massimo

l'andamento del Φ flusso è un esponenziale decrescente, quando calcolo la corrente devo derivarlo nello spazio, ma la dipendenza temporale rimane. L'andamento della corrente è sempre un esponenziale decrescente

$$\phi(x,t) = A \; e^{\frac{k_1-1}{\ell_1} t}$$

chiamo $\frac{k_1 - 1}{\ell_1} = \alpha_1$

$$\phi(x,t) = \tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{\pi}{H} x\right) e^{\alpha_1 t}$$

? andamento temporale della corrente uscente da una delle facce della struttura

$$J(x,t) = -D \frac{d\phi(x)}{dx} = -D\tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} e^{\alpha_1 t} \frac{\pi}{H} \left[-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{H} x\right) \right]$$

$$J(H/2, t) = D\tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} e^{\alpha_1 t} \frac{\pi}{H} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\cancel{H}} \cdot \frac{\cancel{H}}{2}\right)$$

? S_0 necessaria affinché $J(H/2, t)_{MAX} = 10^{10}\ n/cm^2 s$

$$J(H/2, t) = D\tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{\pi}{H} = 10^{10}\ n/cm^2 s$$

$$S_0 = \frac{10^{10} \cdot H \cdot \sqrt{H}}{D\tau \sqrt{2}\, \pi} = 5{,}1 \cdot 10^{7} \frac{n}{cm^2 s}$$

? neutroni rilasciati durante il transitorio

$$N = \int_0^{+\infty} J(H/2, t)\, dt = D\tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{\pi}{H} \int_0^{+\infty} e^{\alpha_1 t}\, dt =$$

$$= D\tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{\pi}{H} \frac{1}{\alpha_1} \left. e^{\alpha_1 t} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= D\tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{\pi}{H} \frac{1}{\alpha_1} (0 - 1) = -D\tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{\pi}{H} \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha = \frac{k_1 - 1}{\ell_1}$$

$$N = D\tau S_0 \sqrt{\frac{2}{H}} \frac{\pi}{H} \frac{\ell_1}{1 - k_1}$$

$$\begin{cases} A \,\mathrm{senh}\, \frac{a}{L} = Be^{-a/L} \\ \frac{D}{L}\left(Be^{-a/L} + A \cosh \frac{a}{L}\right) = S \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{Be^{-a/L}}{\mathrm{senh}\, \frac{a}{L}} \\ \frac{D}{L}\left(Be^{-a/L} + \dfrac{Be^{-a/L} \cosh a/L}{\mathrm{senh}\, \frac{a}{L}}\right) = S \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{DB}{L}\left(e^{-a/L} + \mathrm{cotgh}\, \frac{a}{L}\right) = S$$

$$B = \frac{SL}{D\left(e^{-a/L} + \mathrm{cotgh}\, \frac{a}{L}\right)} =$$

$$N = \int_0^a J(x)\, dx = \int_0^a -\frac{DA}{L} \cosh \frac{x}{L} = -DA \,\mathrm{senh}\, \frac{a}{L}$$

$$R1 = J(0) = -\frac{DA}{L}$$

$$R2 = \phi(a/2) = A \,\mathrm{senh}\, \frac{a}{2L}$$

$$Q = \frac{|J(0)|}{\phi(a/2)} = \frac{\frac{DA}{L}}{A \,\mathrm{senh}\, \frac{a}{2L}} = 0{,}3$$

$$\frac{D\cancel{A}}{L} \cdot \frac{1}{\cancel{A}\,\mathrm{senh}\, \frac{a}{2L}} = 0{,}3$$

$$D = L \,\mathrm{senh}\, \frac{a}{2L} \cdot 0{,}3 = 1{,}7628 \text{ cm}$$

$$\delta D = \left|\frac{\partial D}{\partial Q}\right| \delta Q + \left|\frac{\partial D}{\partial L}\right| \delta L$$

$$Q = \frac{R_1}{R_2} \qquad \delta Q = \frac{1}{R_2}\delta R_1 - \frac{R_1}{R_2^2}\delta R_2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)\frac{\delta R_1}{R_1} - \frac{R_1}{R_2}\frac{\delta R_2}{R_2} =$$

Esercitazione 4 - n4

ACCENSIONE DI UN REATTORE!

Sorgente neutronica spazialmente distribuita secondo l'armonica fondamentale.

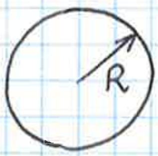
Reattore omogeneo di forma sferica.

TEORIA DELLA DIFFUSIONE MONOCINETICA

$K_\infty = 1{,}08$ $\quad L = 3\,cm$ $\quad D = 0{,}2\,cm$

$v = 2{,}2 \cdot 10^5\,cm/s$ (n termici) $\quad \nu = 2{,}5$

? R che assicura la criticità del sistema



$$K_{eff} = \frac{K_\infty}{1+L^2B_1^2} = 1$$

$$K_\infty = 1 + L^2 B_1^2$$

$$B_1^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2} = 8{,}\overline{88} \cdot 10^{-3}\,cm^{-2}$$

la criticità stabilisce l'uguaglianza tra i parametri materiali e geometrici

$$B_1 = \frac{\pi}{R} \rightarrow R = \frac{\pi}{B} = 33{,}32\,cm$$

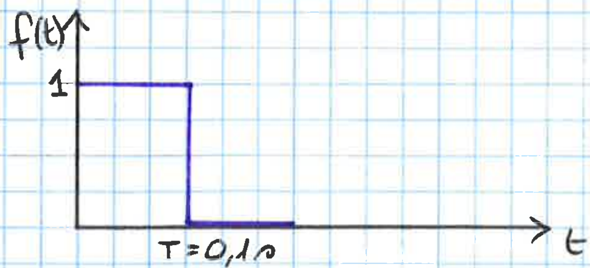
Sistema inizialmente privo di neutroni

Sorgente costante per $T = 0{,}1\,s$

? S affinché dopo il suo spegnimento si raggiunga uno stato stazionario alla potenza $P = 100\,W$

$S(r,t) = S_0\, \varphi_1(r)\, f(t)$

si studi il transitorio



Devo trovare S_0 in modo che la potenza stazionaria sia 100 W

dal flusso Φ costruisco la potenza

$$P = \int_0^R \Phi_{staz}(r) \cdot \Sigma_f \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elemento} \\ \text{di volume}}}{4\pi r^2 dr} \cdot E_f$$ energia nell'unità di t

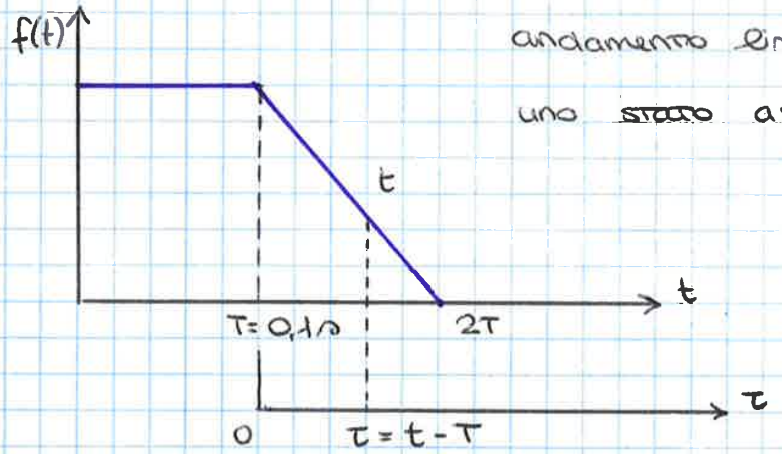
Σ_f ? $\quad k_\infty = \dfrac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}$ ma $\Sigma_a = \dfrac{D}{L^2}$

quindi $\Sigma_f = \dfrac{k_\infty}{\nu} \cdot \dfrac{D}{L^2}$!

$$\Phi_{as} = \Phi(t=T) = v\, S_0\, T \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{\operatorname{sen} Br}{r}$$

(*)

situazione incidentale: la sorgente si spegne con un andamento lineare, si raggiunge uno stato asintotico



? ϕ flusso neutronico

Perche' si raggiunge uno stato asintotico?

Il sistema e' critico, mantiene i neutroni distribuiti come l'armonica fondamentale, il Φ_{as} sara' maggiore del precedente, tra T e 2T il sistema continua ad accumulare neutroni quando si spegne la sorgente

$$\phi(r, 2T) = \left[v T S_0 + v S_0 \left(T - \frac{T^{\cancel{2}}}{2\cancel{T}} \right) \right] \varphi_1(r) =$$

$$= \left(v T S_0 + \frac{1}{2} v S_0 \right) \varphi_1(r) = \frac{3}{2} v T S_0 \varphi_1(r)$$

? P

$$P = \int_0^R E_f \Sigma_f \phi \, 4\pi r^2 \, dr =$$

$$= E_f \Sigma_f \frac{3}{2} v T S_0 4\pi \int_0^R \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{R} r\right)}{\cancel{r}} r^{\cancel{2}} \, dr$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^R \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{R} r\right) \cdot r \, dr \Rightarrow \text{per parti} \\[2ex] f(x) = r \qquad f'(x) = 1 \\[2ex] g'(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{R} r\right) \qquad g(x) = -\frac{R}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{R} r\right) \\[2ex] \displaystyle = -r \frac{R}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{R} r\right) \Big]_0^R + \int_0^R \frac{R}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{R} r\right) dr = \\[2ex] \displaystyle = -\frac{R^2}{\pi} \cos \pi + \frac{R^2}{\pi^2} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{R} r\right) \Big]_0^R = \\[2ex] \displaystyle = \frac{R^2}{\pi} + \frac{R^2}{\pi^2} \left(\mathrm{sen}\, \pi - \mathrm{sen}\, 0 \right) = \frac{R^2}{\pi} \end{array}}$$

$$P = E_f \Sigma_f \frac{3}{2} v T S_0 4\cancel{\pi} \frac{R^2}{\cancel{\pi}} = 150 W$$

Esercitazione 4 - n5

Reattore di forma sferica critico

TEORIA DELLA DIFFUSIONE MONOCINETICA

$D = 0,15\,cm$ $\quad \nu = 2,5 \quad \Sigma_f = 0,00795\,cm^{-1}$

$\Sigma_a > \Sigma_f \Rightarrow \Sigma_a = \Sigma_f + \Sigma_c$ (un po' di cattura c'è sempre)

? R_c in funzione di Σ_a $\quad \boxed{B_{geometrico} = B_{materiale}}$

$$K_{eff} = \frac{K_\infty}{1+L^2B^2} = 1$$

$K_\infty > 1$ per ottenere R_{cr} reale

$$K_\infty = 1 + L^2 B^2$$

$$B^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2}$$

$\boxed{\text{sfera}} \rightarrow \boxed{B = \frac{\pi}{R}}$

$$\boxed{K_\infty = \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a}}$$

$$\frac{\pi^2}{R^2} = \frac{K_\infty - 1}{L^2}$$

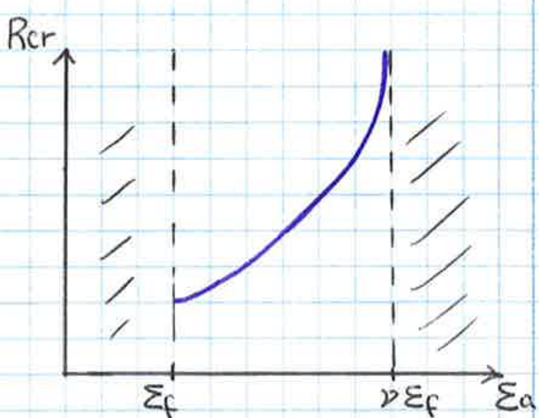
$$R = \sqrt{\frac{\Sigma_a L^2 \pi^2}{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}}$$

$$\boxed{\frac{D}{\Sigma_a} = L^2}$$

$$R_{cr} = \sqrt{\frac{\Sigma_a \frac{D}{\Sigma_a} \pi^2}{\nu\Sigma_f - \Sigma_a}}$$

$K_\infty > 1 \qquad \frac{\nu\Sigma_f}{\Sigma_a} > 1$

$$\begin{cases} \nu\Sigma_f > \Sigma_a \\ \Sigma_a > \Sigma_f \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma_a < \nu\Sigma_f \\ \Sigma_a > \Sigma_f \end{cases}$$



quando $\Sigma_a \approx \nu\Sigma_f$

$K_\infty \rightarrow 1 \qquad R \rightarrow +\infty$

condizione di criticità

quando $\Sigma_a \approx \Sigma_f$ non avviene cattura

Tutti gli assorbimenti hanno come esito la fissione: è il sistema più moltiplicante $\rightarrow R_{min}$

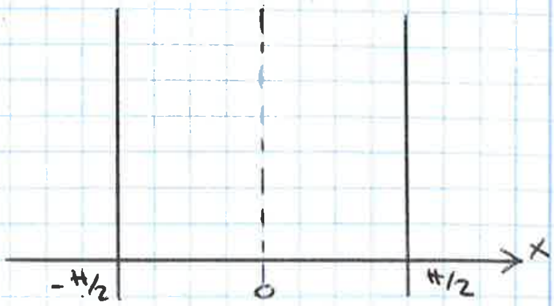
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 132

Esercitazione 5 - n1

ESPERIMENTO OSCILLATO

$\mathcal{D}$: slab piano omogeneo

$\phi(x,0) = 0$



? ϕ_{as}

1) $S(x,t) = S_0 (1 - \cos\omega t) \cdot \varphi_1(x)$ $\qquad$ $K<1$

$$S_n(t) = \int_{\mathcal{D}} S_0 (1-\cos\omega t) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_n(x)$$

↳ resta solo $S_1(t) = S_0(1-\cos\omega t)$

$$\phi(x,t) = v S_0 \varphi_1(x) \int_0^t (1-\cos\omega t') e^{\alpha_1(t-t')} dt'$$

$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{H}} \cos\left(\frac{\pi}{H}x\right)$ prendo solo il coseno perché la sorgente è una funzione pari (simmetrica)

$$\phi(x,t) = v S_0 \varphi_1(x) e^{\alpha_1 t} \int_0^t (1-\cos\omega t') e^{-\alpha_1 t'} dt' =$$

$$= v S_0 \varphi_1(x) e^{\alpha_1 t} \Big[\underbrace{\int_0^t e^{-\alpha_1 t'} dt'}_{①} - \underbrace{\int_0^t \cos\omega t' \cdot e^{-\alpha_1 t'} dt'}_{②} \Big]$$

$$\boxed{① \int_0^t e^{-\alpha_1 t'} dt' = -\frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} \Big]_0^t = -\frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} + \frac{1}{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1}(1 - e^{-\alpha_1 t})}$$

② $\int_0^t \cos\omega t \cdot e^{-\alpha_1 t'} =$

$f = \cos\omega t$ $\qquad$ $f' = -\sin\omega t \cdot \omega$

$g' = e^{-\alpha_1 t}$ $\qquad$ $g = -\frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t}$

$$= -\frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} \cos\omega t' \Big]_0^t - \int_0^t \frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} \sin\omega t' \cdot \omega \, dt' =$$

? Φ_{as}

$$\phi(x,t) = v S_0 \left[\frac{1}{\alpha_1}(e^{\alpha_1 t} - 1) - \frac{\alpha_1 (e^{\alpha_1 t} - \cos\omega t) + \omega \sin\omega t}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right] \varphi_1(x)$$

$$\Phi_{as}(x,t) = v S_0 \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1 \cos\omega t - \omega \sin\omega t}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right) \varphi_1(x)$$

reattore sottocritico $\rightarrow$ $\alpha_1 < 0$

? sfasamento della risposta rispetto alla forzante

$$A\cos(\omega t + \theta) = A\cos\omega t \cos\theta - A \sin\omega t \sin\theta$$

chiamo $A\cos\theta = \alpha_1$ e $A\sin\theta = \omega$

$$A\cos(\omega t + \theta) = \alpha_1 \cos\omega t - \omega \sin\omega t$$

$$\frac{\omega}{\alpha_1} = \operatorname{tg}\theta$$

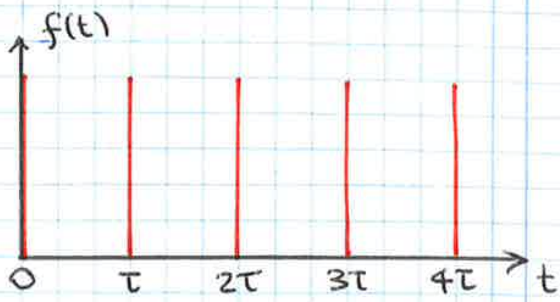
$$A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta = \alpha_1^2 + \omega^2 = A^2$$

$$A = \sqrt{\alpha_1^2 + \omega_1^2}$$

$$\Phi_{as}(x,t) = v S_0 \varphi_1(x) \left[\frac{\cos(\omega t + \theta)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \omega_1^2}} - \frac{1}{\alpha_1} \right]$$

Esercitazione 5 - n 2

$\mathcal{D}$: sfera omogenea $k_1 = 0{,}975$



$\phi(r,0) = 0$

$S(r,t) = S_0 \cdot f(t) \cdot \varphi_1(r)$

? $\phi_{as}(r,t)$

$k_1 < 1$ sistema sottocritico

$t \in [0,\tau]$

$$S_n(t) = \int_{\mathcal{D}} S_0\, f(t)\, \varphi_1(r)\, \varphi_n(r)$$

↳ resta solo $S_1(t) = S_0\, f(t)$

$$\phi(r,t) = v \int_0^{\tau} S_0\, f(t')\, e^{\alpha_1 (t-t')}\, dt' \cdot \varphi_1(r) =$$

$$= v S_0\, \varphi_1(x)\, e^{\alpha_1 t} \int_0^{\tau} f(t')\, e^{-\alpha_1 t'}\, dt' =$$

↳ è una delta di Dirac $\delta(t)$!

$$\phi(r,\tau) = v S_0\, \varphi_1(r)\, e^{\alpha_1 \tau}$$

$t \in [\tau; 2\tau] \rightarrow u \in [0,\tau]$

$$\phi(r,u) = [A_1(0)\, e^{\alpha_1 u} + v S_0\, e^{\alpha_1 u}]\, \varphi_1(r)$$

↳ componente dello stato iniziale lungo l'armonica fondam.

$$A_1(0) = \phi(r,\tau) \cdot \varphi_1(r) = v S_0\, e^{\alpha_1 \tau}$$

$$= [v S_0\, e^{\alpha_1 \tau} e^{\alpha_1 u} + v S_0\, e^{\alpha_1 u}]\, \varphi_1(r) =$$

$$= [v S_0\, e^{\alpha_1 u} (e^{\alpha_1 \tau} + 1)]\, \varphi_1(r)$$

$$\phi(r, 2\tau) = [v S_0\, e^{\alpha_1 \tau} (e^{\alpha_1 \tau} + 1)]\, \varphi_1(r)$$

$$\phi(r, 3\tau) = [v S_0\, e^{\alpha_1 \tau} (1 + e^{\alpha_1 \tau} + e^{\alpha_1 2\tau})]\, \varphi_1(r)$$

$$\phi(r, n\tau) = [v S_0\, e^{\alpha_1 \tau} \sum_{i=0}^{n-1} e^{n \alpha_1 \tau} \cdot \varphi_1(r)$$

$$\phi_{as}(r) = v S_0\, e^{\alpha_1 \tau} \frac{1}{1 - e^{\alpha_1 \tau}}\, \varphi_1(r)$$

Esercitazione 6 - n1

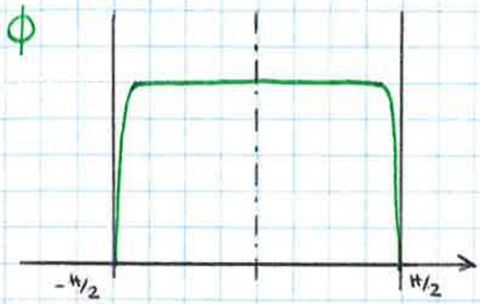
11/5

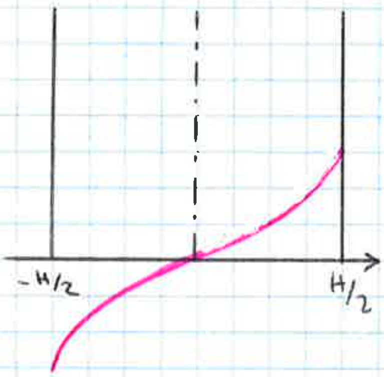
Slab omogeneo $[-H/2, H/2]$

TEORIA DI DIFFUSIONE MONOCINETICA

Nuclei di un isotopo fissile $K_\infty \leq 1$ (mezzo moltiplicante)

Sorgente neutronica costante spazialmente, costante che eccita tutte le armoniche





Caso 1 : $K_\infty < 1$

se anche $K_{eff} < 1$ il sistema ammette 1 soluzione stazionaria

? Equazione della diffusione stazionaria

$$D\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + K_\infty \Sigma_a \phi(x) - \Sigma_a \phi(x) + S = 0$$

$$\boxed{K_\infty = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a}}$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + \frac{K_\infty \Sigma_a}{D} - \frac{\Sigma_a}{D}\phi(x) + \frac{S}{D} = 0$$

$$\boxed{\frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L^2}}$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \frac{1}{L^2}\left(1 - K_\infty\right)\phi(x) + \frac{S}{D} = 0$$

se $K_\infty < 1$

$1 - K_\infty > 0$ contiene fz. esponenziali

[se $K_\infty > 1$

$1 - K_\infty < 0$ contiene fz. trigonometriche]

$$\frac{1 - K_\infty}{L^2} = \alpha^2$$

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - \alpha^2\phi(x) + \frac{S}{D} = 0$$

Caso 2: $K_\infty = 1$

$$\frac{d^2\Phi(x)}{dx^2} + \frac{S}{D} = 0$$

$$\phi(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\frac{S}{D}x + B$$

$$\phi(x) = -\frac{S}{D}\frac{x^2}{2} + Bx + C \qquad A = -\frac{S}{2D}$$

condizioni al contorno

$$\phi(H/2) = 0$$

$$\phi(H/2) = -\frac{S}{2D}\frac{H^2}{4} + B\frac{H}{2} + C = 0$$

$$\phi(-H/2) = 0$$

$$\phi(-H/2) = -\frac{S}{2D}\frac{H^2}{4} - B\frac{H}{2} + C = 0$$

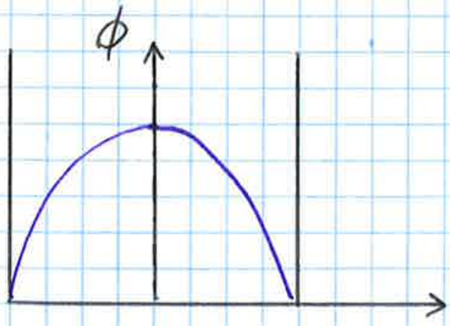
$B = 0$ perchè la soluzione deve essere pari

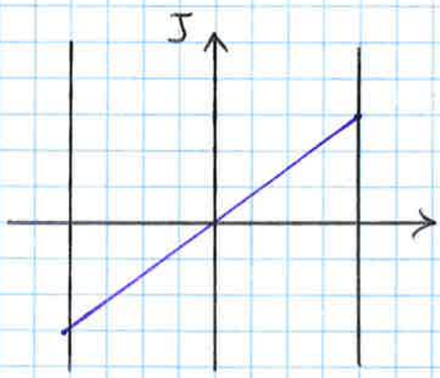
$$C = \frac{SH^2}{8D}$$

$$\phi(x) = -\frac{S}{2D}x^2 + \frac{SH^2}{8D} = \frac{S}{2D}\left(\frac{H^2}{4} - x^2\right)$$

$$J(x) = -D\frac{d\phi(x)}{dx} = -\frac{S}{\cancel{2}}(-\cancel{2}x) = Sx$$

$$\left.\begin{aligned} J\left(\frac{H}{2}\right) &= S\frac{H}{2} \\ J\left(-\frac{H}{2}\right) &= -S\frac{H}{2} \end{aligned}\right\} J(H/2) - J(-H/2) = SH$$





? Corrente neutronica

$$J(x) = -D \frac{d\Phi(x)}{dx} = -\cancel{D} \frac{S_0}{\cancel{D}\alpha^{\cancel{2}}} \cancel{\alpha} e^{-\alpha x} = -\frac{S_0}{\alpha} e^{-\alpha x}$$

$$J(A) = \frac{1}{2} J(0) \qquad A = 12,5\,cm$$

$$\cancel{+}\frac{S_0}{\alpha} e^{-\alpha A} = \cancel{+}\frac{S_0}{2\alpha}$$

$$e^{-\alpha A} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha A = \ln 2$$

$$\alpha = \frac{\ln 2}{A}$$

$$\frac{1-K_\infty}{L^2} = \left(\frac{\ln 2}{A}\right)^2$$

$$1-K_\infty = \left(\frac{\ln 2}{A}\right)^2 L^2$$

$$K_\infty = 1 - \left(\frac{\ln 2}{A}\right)^2 L^2 = 0,69251$$

? $\frac{\delta K_\infty}{K_\infty}$ con $\frac{\delta L}{L} = 3\%$

$$\delta K_\infty = \left| \frac{\partial K_\infty}{\partial L} \right| \delta L$$

$$\delta K_\infty = L \left| \frac{\partial K_\infty}{\partial L} \right| \frac{\delta L}{L}$$

$$\frac{\delta K_\infty}{K_\infty} = \frac{L}{K_\infty} \left| \frac{\partial K_\infty}{\partial L} \right| \frac{\delta L}{L} = \frac{L}{K_\infty} \left| -2L \left(\frac{\ln 2}{A}\right)^2 \right| \frac{\delta L}{L} =$$

$$= \frac{L}{K_\infty} \left(2L \frac{\ln^2 2}{A^2} \right) \frac{\delta L}{L} = 2,66\%$$

? K_∞ limite

$K_\infty = 1$ per cui il sistema diventa critico

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 132

Sorgente localizzata sul piano di simmetria del sistema e temporalmente impulsata

$$S(x,t) = S_0'\,\delta(x)\,\delta(t)$$

$$S_n(t) = \int_D S(x,t)\,\varphi_n(x)\,dx = S_0'\,\delta(t)\int_D \delta(x)\sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{2n-1}{H}\pi x\right)dx =$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{2n-1}{H}\pi x\right)$$

$$= S_0'\,\delta(t)\int_{-H/2}^{H/2}\delta(x)\sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{2n-1}{H}\pi x\right)dx = S_0'\sqrt{\frac{2}{H}}\,\delta(t)$$

$$\boxed{N_{TOT} = \int_0^{+\infty}dt\int_{-H/2}^{H/2}dx\,S(x,t)} = \int_0^{+\infty}\delta(t)\,dt\int_{-H/2}^{H/2}S_0\,\varphi_1(x)\,dx =$$

$$= S_0\int_0^{+\infty}\delta(t)\,dt\int_{-H/2}^{H/2}\sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{\pi}{H}x\right)dx = S_0\sqrt{\frac{2}{H}}\,\frac{H}{\pi}\,2$$

$$\phi(x,t) = v\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}S_n(t')\,e^{\alpha_n(t-t')}\,dt'\,\varphi_n(x) =$$

$$= v\,S_0'\sqrt{\frac{2}{H}}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha_n t}\int_0^{+\infty}\delta(t)\,e^{-\alpha_n t'}\,\varphi_n(x)\,dt' =$$

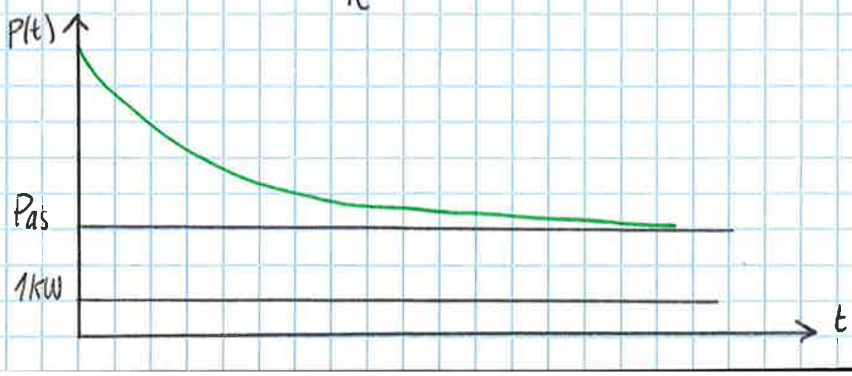
$$= v\,S_0'\sqrt{\frac{2}{H}}\,\varphi_1(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\varphi_n(x)\,v\,S_0'\sqrt{\frac{2}{H}}\,e^{\alpha_n t}$$

$$\phi_{as} = v\,S_0'\sqrt{\frac{2}{H}}\,\varphi_1(x) = v\,S_0'\sqrt{\frac{2}{H}}\cdot\sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{\pi}{H}x\right) = v\,S_0'\sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{\pi x}{H}\right)$$

$$P_{as} = E_f\,\Sigma_f\,v\,S_0'\,\frac{2}{H}\int_{-H/2}^{H/2}\cos\left(\frac{\pi}{H}x\right)dx =$$

$$= E_f\,\Sigma_f\,v\,S_0'\,\frac{2}{\cancel{H}}\,\frac{\cancel{H}}{\pi}\,\sin\left(\frac{\pi}{H}x\right)\Big]_{-H/2}^{H/2} =$$

$$= E_f\,\Sigma_f\,v\,S_0'\,\frac{2}{\pi}\cdot 2$$



$$\Phi(\vec{r},t) = v S_0 e^{\alpha_1 t} \varphi_1(r) \left[\frac{1}{\alpha_1}(1-e^{-\alpha_1 t}) - \frac{\alpha_1 (1 - e^{-\alpha_1 t}\cos\omega t) + \omega \, e^{-\alpha_1 t} \operatorname{sen}\omega t}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right]$$

? $$\Phi = v S_0 \varphi_1(r) \left[\frac{e^{\alpha_1 t} - 1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_1 (e^{\alpha_1 t} - \cos\omega t) + \omega \operatorname{sen}\omega t}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right]$$

$$\Phi_{as} = v S_0 \varphi_1(r) \left[-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_1 \cos\omega t - \omega \operatorname{sen}\omega t}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right]$$

? θ

$$\alpha_1 \cos\omega t - \omega \operatorname{sen}\omega t = Q \cos(\omega t + \theta)$$
$$= Q(\cos\omega t \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\omega t \cos\theta)$$

$$Q\cos\theta = \alpha_1 \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\omega}{\alpha_1} \qquad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{\alpha_1}\right) = -45°$$
$$Q \operatorname{sen}\theta = \omega$$

$$Q^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)}_{1} = \alpha_1^2 + \omega^2$$

$$Q = \sqrt{\alpha_1^2 + \omega^2}$$

<u>dati</u>

$\omega = 200\ s^{-1}$

$\alpha_1 = \frac{k_1 - 1}{\ell_1} = -200\ s^{-1}$

$$\Phi_{as} = v S_0 \varphi_1(\vec{r}) \left(-\frac{1}{\alpha_1} + \frac{Q\cos(\omega t + \theta)}{\alpha_1^2 + \omega^2} \right) =$$
$$= \left(\cos(\omega t + \theta) \frac{\sqrt{\alpha_1^2 + \omega^2}}{\alpha_1^2 + \omega^2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) v S_0 \varphi_1(\vec{r}) =$$
$$= \left(\cos(\omega t + \theta) \frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \omega^2}} - \frac{1}{\alpha_1} \right) v S_0 \varphi_1(\vec{r})$$

? Valor medio della risposta asintotica

$$\bar{\Phi}_{as} = -\frac{1}{\alpha_1} v S_0 \varphi_1(\vec{r})$$

? perchè è indipendente da ω?

$$\bar{\Phi}_{as} = 10^{13}\ n/cm^2 s = -\frac{1}{\alpha_1} v S_0 \varphi_1(\vec{r}_P)$$

$$v S_0 \varphi_1(\vec{r}_P) = 2 \cdot 10^{15}$$

$$\Phi_{max,as} = \bar{\Phi}_{as} + \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \omega^2}} - \frac{1}{\alpha_1} \right) v S_0 \varphi_1(\vec{r}_P) = 2{,}707 \cdot 10^{13}\ n/cm^2 s$$

?

$$C\left(-\frac{D}{L_1}e^{-a/L_2}\frac{\cosh(a/L_1)}{\operatorname{senh}(a/L_1)}+\frac{D}{L_2}e^{-a/L_2}\right)=S_0$$

trovo C

$$C=\frac{S_0 L_1 L_2 \operatorname{senh}(a/L_1)}{-DL_2 e^{-a/L_2}\cosh(a/L_1)+DL_1 e^{-a/L_2}\operatorname{senh}(a/L_1)}=$$

$$=\frac{S_0 L_1 L_2 \operatorname{senh}(a/L_1)}{(L_1\operatorname{senh}(a/L_1)-L_2\cosh(a/L_1))De^{-a/L_2}}$$

$$A=\frac{Ce^{-a/L_2}}{\operatorname{senh}(a/L_1)}=\frac{S_0 L_1 L_2 \cancel{\operatorname{senh}(a/L_1)}\cancel{e^{-a/L_2}}}{(L_1\operatorname{senh}(a/L_1)-L_2\cosh(a/L_1))D\cancel{e^{-a/L_2}}\cancel{\operatorname{senh}(a/L_1)}}$$

$$=\frac{S_0 L_1 L_2}{[L_1\operatorname{senh}(a/L_1)-L_2\cosh(a/L)]D}$$

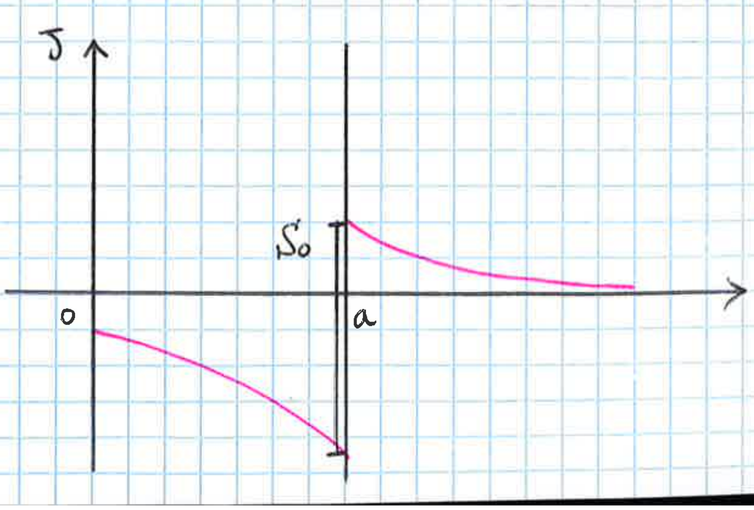
$0<x<a$

$$\phi_I=\frac{S_0 L_2 L_1}{[L_1\operatorname{senh}(a/L_1)-L_2\cosh(a/L_1)]D}\operatorname{senh}(x/L_1)$$

$$J(x)=-\frac{S_0 L_2}{L_1\operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_1}\right)-L_2\cosh\left(\frac{a}{L_1}\right)}\cosh\left(\frac{x}{L_1}\right)$$

$$J(0)=-\frac{S_0 L_2}{L_1\operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_1}\right)-L_2\cosh\left(\frac{a}{L_1}\right)}$$

$$J(a^-)=-\frac{S_0 L_2\cosh\left(\frac{a}{L_1}\right)}{L_1\operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_1}\right)-L_2\cosh\left(\frac{a}{L_1}\right)}$$



Esercitazione 7 - n2 — 19 luglio 2010

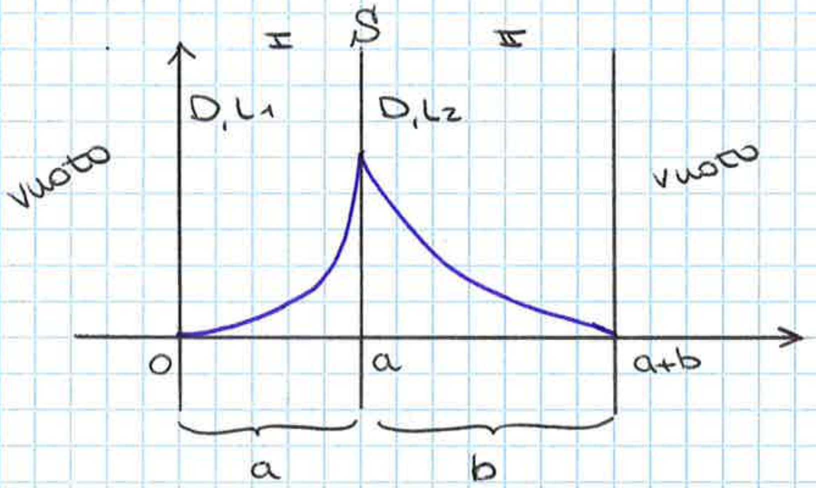
Sistema diffondente costituito da 2 strati infiniti

$S_1 = a$ } $= 10$ cm, materiali omogenei $L_1 = 5$ cm $D = 1$ cm

$S_2 = b$ $L_2 = 10$ cm D

Sorgente piana e stazionaria: S

? soluzione dell'equazione della diffusione stazionaria



$$\Phi_I = A \,\text{senh}\left(\frac{x}{L_1}\right) \qquad \Phi_I' = \frac{A}{L_1}\cosh\left(\frac{x}{L_1}\right)$$

$$\Phi_{II} = C \,\text{senh}\left(\frac{a+b-x}{L_2}\right) \qquad \Phi_{II}' = -\frac{C}{L_2}\cosh\left(\frac{a+b-x}{L_2}\right)$$

$$J_I(x) = -\frac{DA}{L_1}\cosh\left(\frac{x}{L_1}\right)$$

$$J_{II}(x) = \frac{DC}{L_2}\cosh\left(\frac{a+b-x}{L_2}\right)$$

condizioni di continuità

$$\begin{cases} \Phi(a^-) = \Phi(a^+) \\ J(a^+) - J(a^-) = S \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Phi_I(a) = \Phi_{II}(a) \\ J_{II}(a) - J_I(a) = S \end{matrix}$$

$$\begin{cases} A\,\text{senh}\left(\frac{a}{L_1}\right) = C\,\text{senh}\left(\frac{\cancel{a}+b-\cancel{x}}{L_2}\right) \\ \frac{DC}{L_2}\cosh\left(\frac{b}{L_2}\right) - \frac{DA}{L_1}\cosh\left(\frac{a}{L_1}\right) = S \end{cases}$$

$$A = \frac{C\,\text{senh}\left(\frac{b}{L_2}\right)}{\text{senh}\left(\frac{a}{L_1}\right)}$$

? b affinché $R = 1$

$$\frac{L_1}{L_2} \frac{\operatorname{tgh}\left(\frac{a}{L_1}\right)}{\operatorname{tgh}\left(\frac{b}{L_2}\right)} = 1$$

$$\operatorname{tgh}\left(\frac{b}{L_2}\right) = \frac{L_1}{L_2} \operatorname{tgh}\left(\frac{a}{L_1}\right) = 0,482$$

$$\frac{b}{L_2} = 0,526 \quad \rightarrow b = 5,26 \text{ cm}$$

? $$\lim_{a \to +\infty} R = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tgh}(b/L_2)}$$

$$\lim_{b \to +\infty} R = \frac{L_1}{L_2} \operatorname{tgh}(a/L_1)$$

$$\lim_{a,b \to +\infty} R = \frac{L_1}{L_2}$$

?

$$\ln\left(\frac{J(a/2) \quad 1^a\text{armonica}}{J(a/2) \quad 2^a\text{armonica}}\right) \quad \text{non dipende da } \Sigma_a$$

$$J(x,t) = -D\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -D v S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{a}}\, \varphi_n'(x)\, e^{\alpha_n t} =$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{2n-1}{a}\pi x\right)$$

$$\varphi_n(0) = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\varphi_n'(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{2n-1}{a}\pi \cos\left(\frac{2n-1}{a}\pi x\right)$$

$$\varphi_1'(x) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \rightarrow \varphi_1'(a/2) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{\pi}{a}$$

$$\varphi_2'(x) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{3\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \rightarrow \varphi_2'(a/2) = -\sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{3\pi}{a} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) = \sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{3\pi}{a}$$

Numeratore

$$J(a/2) = -D v S_0 \sqrt{\frac{2}{a}}\left(-\sqrt{\frac{2}{a}}\right)\frac{\pi}{a} e^{\alpha_n t} = +D v S_0 \frac{2}{a}\frac{\pi}{a} e^{\alpha t}$$

Denominatore

$$J(a/2) = -D v S_0 \sqrt{\frac{2}{a}}\sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{\pi 3}{a} e^{\alpha_n t} = -D v S_0 \frac{6\pi}{a^2} \cdot e^{\alpha t}$$

considero i valori assoluti

$$\ln\underbrace{\left(\frac{\cancel{D}\cancel{v}\cancel{S_0}\, \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{a^2}}\, e^{\alpha_1 t}}{\cancel{D}\cancel{v}\cancel{S_0}\, \frac{\cancel{6}\cancel{\pi}}{3\cancel{a^2}}\, e^{\alpha_2 t}}\right)}_{R} = \ln\left(\frac{1}{3}\cdot e^{(\alpha_1-\alpha_2)t}\right) =$$

$$= \ln\frac{1}{3} + (\alpha_1 - \alpha_2)t \qquad \alpha = \boxed{-\frac{1}{l_n} = -v\Sigma_a(1+L^2B_n^2)}$$

$$= \ln\frac{1}{3} + \left(-v\Sigma_a(1+L^2B_1^2) + v\Sigma_a(1+L^2B_2^2)\right)t =$$

$$= (\cancel{v\Sigma_a} + v\Sigma_a L^2 B_2^2 - \cancel{v\Sigma_a} - v\Sigma_a L^2 B_1^2)t - \ln 3 =$$

$$= (v\Sigma_a L^2)(B_2^2 - B_1^2)t - \ln 3 \qquad \boxed{L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}}$$

$$= v\cancel{\Sigma_a}\frac{D}{\cancel{\Sigma_a}}(B_2^2 - B_1^2)t - \ln 3 =$$

$$= vD(B_2^2 - B_1^2)t - \ln 3$$

Esercitazione 7 - n 4

Reattore termico $v = 2{,}2 \cdot 10^5$ cm/s

regime sottocritico $k < 1$ $\quad k = 0{,}98$

$\ell_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ s vita media dei neutroni secondo $\varphi_1(x)$

sistema: slab monodimensionale omogeneo $H = 80$ cm

$\Sigma_f = 0{,}02\ \text{cm}^{-1}$

Sorgente distribuita secondo l'armonica fondamentale e linearmente crescente nel tempo

$S(x,t) = S_0\, t\, \varphi_1(x)$

? $\phi(x,t)$

$$\phi(x,t) = v \int_0^t dt'\, S_1(t')\, e^{\frac{k_1-1}{\ell_1}(t-t')} =$$

$$= v \int_0^t dt'\, S_0\, t\, \varphi_1(x)\, e^{\frac{k_1-1}{\ell_1}(t-t')} =$$

$$= v\, S_0\, e^{\frac{k_1-1}{\ell_1} t} \int_0^t dt'\, t\, e^{-\frac{k_1-1}{\ell_1} t'}\, \varphi_1(x) =$$

$\alpha_1 = \dfrac{k_1-1}{\ell_1}$ $\ominus$

$$= v\, S_0\, e^{\alpha_1 t} \int_0^t dt'\, t\, e^{-\alpha_1 t'}\, \varphi_1(x) =$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\int_0^t t'\, e^{-\alpha_1 t'}\, dt' = \\
&= -t' \frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t'} \Big]_0^t + \int_0^t \frac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t}\, dt' = \\
&= -\frac{t}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} - \frac{1}{\alpha_1^2} e^{-\alpha_1 t'} \Big]_0^t = \\
&= -\frac{t}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} - \frac{1}{\alpha_1^2} (e^{-\alpha_1 t} - 1)
\end{aligned}}$$

$f = t' \qquad f' = 1$

$g' = e^{-\alpha_1 t'} \qquad g = -\dfrac{1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t'}$

$$\phi(x,t) = v\, S_0\, e^{\alpha_1 t} \left[-\frac{t}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 t} - \frac{1}{\alpha_1^2} (e^{-\alpha_1 t} - 1) \right] \varphi_1(x) =$$

$$= v\, S_0 \left[-\frac{t}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1^2} (1 - e^{\alpha_1 t}) \right] \varphi_1(x)$$

? $P(1s)$, $E(1s)$

se $k_1 = 1$ $\qquad \alpha_1 = \dfrac{k_1 - 1}{\ell_1} = 0$

$$\phi(x,t) = v\int_0^t dt'\, S_1(t')\, e^{\frac{k_1-1}{\ell_1}(t-t')} = v\int_0^t dt'\, S_1(t') =$$

$$= v\int_0^t dt'\, S_0\, t'\, \varphi_1(x) = v\, S_0\, \varphi_1(x)\int_0^t t'\,dt' =$$

$$= v\, S_0\, \varphi_1(x)\, \frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{P(1s) = E_f \Sigma_f \int_{-H/2}^{H/2} \phi(x,t)\,dx} = E_f \Sigma_f\, v\, S_0 \frac{t^2}{2}\int_{-H/2}^{H/2}\sqrt{\frac{2}{H}}\cos\left(\frac{\pi}{H}x\right)dx$$

$$= E_f \Sigma_f\, v\, S_0 \frac{t^2}{2}\sqrt{\frac{2}{H}}\,\frac{H}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{H}x\right)\Big]_{-H/2}^{H/2} =$$

$$= E_f \Sigma_f\, v\, S_0 \frac{t^2}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{2}{H}}\,\frac{H}{\pi}\,\cancel{2} = 2{,}24\ \mathrm{GW}$$

$$\boxed{E(1s) = \int_0^1 P(t)\,dt} = E_f \Sigma_f\, v\, S_0 \frac{\sqrt{2H}}{\pi}\int_0^1 t^2\,dt =$$

$$= E_f \Sigma_f\, v\, S_0 \frac{\sqrt{2H}}{\pi}\,\frac{t^3}{3}\Big]_0^1 =$$

$$= E_f \Sigma_f\, v\, S_0 \frac{\sqrt{2H}}{\pi}\,\frac{1}{3} = 748{,}12\ \mathrm{MJ}$$