



**Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino**

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 1757A -**

**ANNO: 2015**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Mazzia Vittorio**

**MATERIA: Meccanica dei fluidi - prof. Camporeale**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

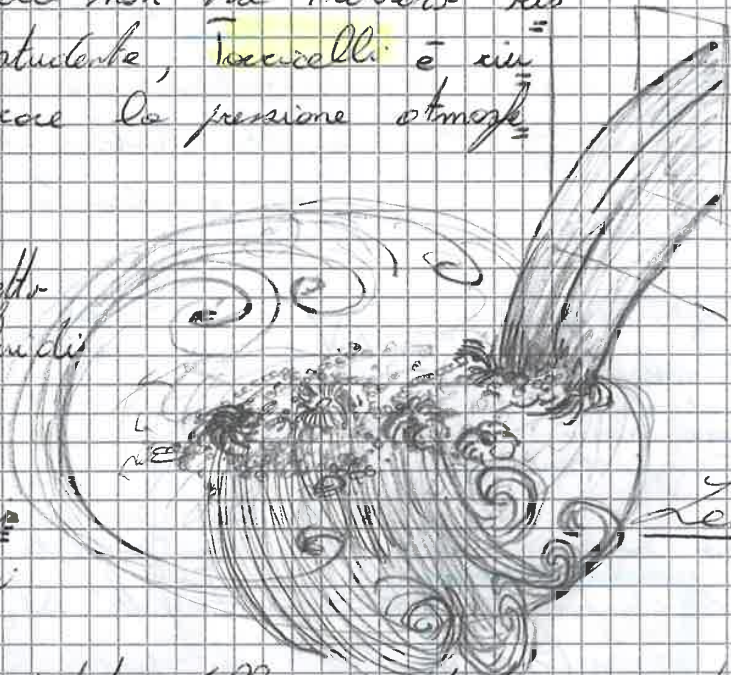
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Lezione 1 1<sup>a</sup> Prof. Composedo cod. Vincenzo 2.03.15  
2<sup>a</sup> Prof. Bianco

## → Cenni storici

Leonardo è stato il primo ad occuparsi di questo ambito. Facendo degli esperimenti ha intuito il concetto di continuità senza formalizzarlo. Ha studiato la fenomenologia delle turbolenze oceaniche e delle rappresentazioni ancora adesso usate. Galileo invece si è posto, riguardo a queste materie, molte domande a cui però non ha trovato risposte. Un suo studente, Torricelli, è riuscito invece a misurare la pressione atmosferica.

Eulero e Lagrange hanno fatto il concetto di meccanica dei fluidi dentro la meccanica del continuo iniziando a formulare l'analisi di queste materie.



Leonardo da Vinci

Quando Newton ha fatto delle importanti scoperte e con lui Taylor che con Bachelor hanno scritto un testo di riferimento ancora adesso di questa materia.

Gli ultimi studi sono incentrati sulla turbolenza che è un caso non ancora completamente risolto.

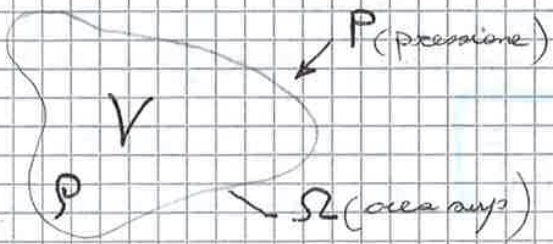
## → Meccanica del continuo

Seguiremo il percorso di statica, cinemotica e dinamica.

Fluido: corpo materiale dotato di grande mobilità delle particelle che lo compongono. Si deforma facilmente attraverso le forze a cui è sottoposto. I legami tra le particelle sono molto deboli. Quando la sollecitazione viene tolta viene mantenuta la forma.

Due fluidi fondamentali: liquidi e gas.

→ Comportamento fisico dei fluidi



$$\frac{dV}{V} = - \frac{dP}{E} \quad E \sim 10^9 \text{ Pa}$$

$E$ : modulo di elasticità a compressione cubica

$$[P] = [P_0] = \left[ \frac{N}{m^2} \right]$$

$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

Il meno mi sottolinea, che se ho un aumento di pressione ho una riduzione di volume

I fluidi reali hanno un comportamento elastico governato da  $E$

$E$   $E(\text{H}_2\text{O}) = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  con  $P = 1 \text{ atm}$

$$\frac{dV}{V} = - 0,5 \cdot 10^{-9} \cdot dP = 10^{-9}$$

Per questo motivo è considerato incompressibile.

\* \* \*

$m = \rho V$  differenziale di  $m$   $dm = \rho dV + V d\rho = 0$

$$\frac{dV}{V} = - \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{E}$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \ln(\rho) \Rightarrow \ln \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P - P_0}{E}$$

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{P - P_0}{E}\right) \approx \rho_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{E}\right)$$

Sviluppo di Taylor trovato al primo ordine

• Gas perfetti

$$p_0 = RT$$

$\frac{848}{M}$  peso molecolare

$$p_0^\gamma = \text{cost}$$

$\gamma = 1,67$  adiabatiche per gas monoatomici  
 $\gamma = 1$  trasf. isoterme

$\Omega$ : super. Cotevole cilindro  $\Delta u$ : diff. velocità tra i due cilindri

$T = \mu \Omega \frac{\Delta u}{\Delta n}$  Legge empirica

$\tau = \frac{T}{A} = \mu \frac{\Delta u}{\Delta n}$

$\tau = \mu \frac{du}{dn}$  Legge di Newton

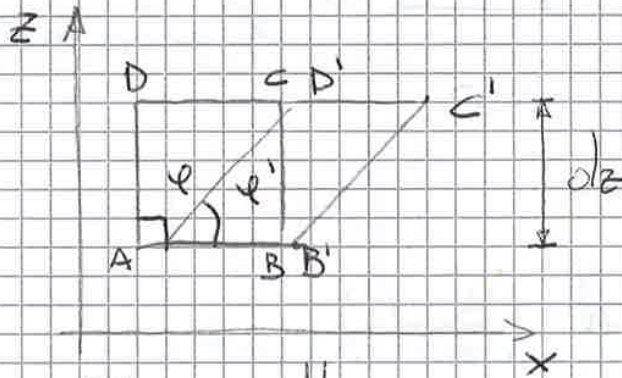
Dove ci sono delle differenze di velocità si creano strati mollemente e quello viscosità degli fluidi newtoniani.

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$  viscosità cinematica

$\left[ \frac{SN}{m^2} \right] = \left[ \mu \right]$  Pressione esercitata al secondo

N.B Con l'aumento della temperatura  $[\nu] = \left[ \frac{m^2}{s} \right]$

per un gas la viscosità aumenta con il liquido diminuisce (olio padella)



I punti A e B si muovono di meno perché la velocità è minore

$\Delta e = e' - e = e + \frac{de}{dt} dt - e = \frac{de}{dt} dt = \frac{D'D' - AA'}{DA} dt$

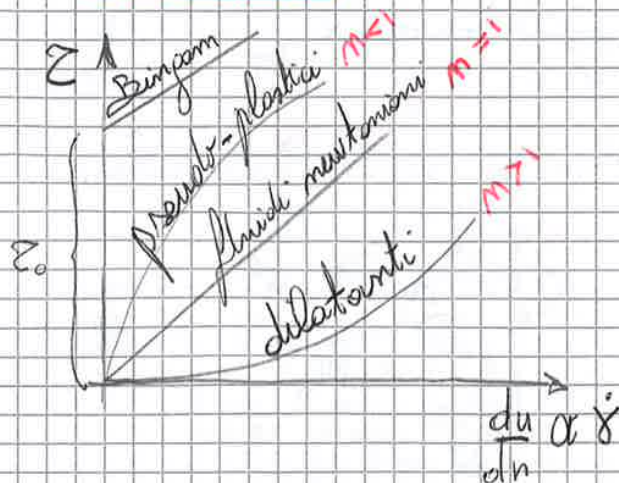
$AA' = u_A \cdot dt$

$D'D' = u_{D'D'} dt = \left( u_A + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) dt$

$\Rightarrow \frac{\frac{du}{dz} dz \cdot dt}{dz} = \frac{du}{dz} dt$

$\dot{\gamma} = \frac{de}{dt} = \frac{du}{dz}$

Le variazioni degli angoli dipendono dalle variazioni delle velocità rispetto a z



$\tau = \mu \dot{\gamma}^m$

- Tixotropici:  $\tau$  diminuisce col tempo. Crete strutture all'interno si rompono
- Reopletici:  $\tau$  aumenta con il tempo (sangue)

$$\vec{\Phi}_m \cdot d\Omega_m - \Phi_x \cos \hat{m}^x d\Omega_m - \Phi_y \cos \hat{m}^y d\Omega_m - \Phi_z \cos \hat{m}^z d\Omega_m = 0$$

$$\vec{\Phi}_m = \vec{\Phi}_x \cos \hat{m}^x + \vec{\Phi}_y \cos \hat{m}^y + \vec{\Phi}_z \cos \hat{m}^z$$

La sferetta unitaria su una superficie può essere calcolata come la combinazione lineare di tre forze che agiscono sui piani  $x, y, z$

$$\Phi_{mx} = \Phi_{xx} \cos \hat{m}^x + \Phi_{yx} \cos \hat{m}^y + \Phi_{zx} \cos \hat{m}^z \quad 1^{\circ} \text{ componente}$$

componente lungo l'asse  $x$   
 orientata del piano su cui agisce la sferetta

$$\Phi_{my} = \Phi_{xy} \cos \hat{m}^x + \Phi_{yy} \cos \hat{m}^y + \Phi_{zy} \cos \hat{m}^z$$

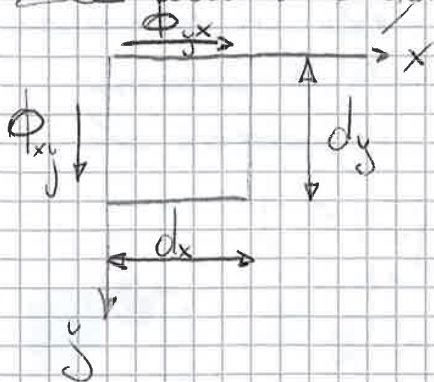
$$\Phi_{mz} = \Phi_{xz} \cos \hat{m}^x + \Phi_{yz} \cos \hat{m}^y + \Phi_{zz} \cos \hat{m}^z$$

Possiamo scrivere in forma matriciale le equazioni ricavate ottenendo il tensore degli sforzi

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{mx} \\ \Phi_{my} \\ \Phi_{mz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} & \Phi_{zx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{zy} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\Phi}_m = \Phi \vec{m}$$

Se usiamo l'equilibrio della sdrucciolata



$$\Phi_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \Phi_{xy} dy dz \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Phi_{yx} = \Phi_{xy}$$

La matrice è simmetrica

Per convenzione diamo un nome alle tensioni o allo matrice

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = \rho \int \vec{f} \, dx \, dy \, dz$$

In generale

$$-\left( \frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \right) dx \, dy \, dz + \rho \int \vec{f} \, dx \, dy \, dz = 0$$

$\rho \text{ grad } p$

$$\rho \vec{f} = \rho \text{ grad } p$$

es. integrale delle statiche

• Nel caso di sole forze gravitazionali

$$-\rho \text{ grad}(z\hat{g}) = \rho \text{ grad } p$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\rho \text{ grad}(-gz\hat{e}_z) = \vec{f} = \{0, 0, -\rho g\}$$

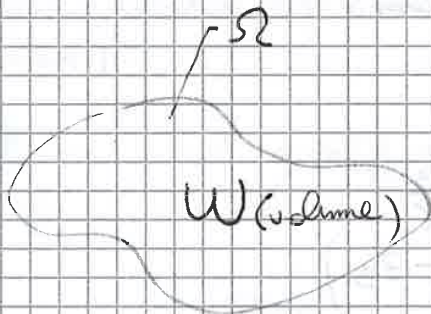
Rimane solo la terza componente

es. integrale delle statiche

(Integriamo su un volume di controllo)

$$\rho \vec{f} = \rho \text{ grad } p$$

$$\int \rho \vec{f} \, dW = \int \rho \text{ grad } p \, dW$$



$$P = \rho g W = \gamma W$$

teorema del gradiente (Green)

$$= - \int_{\Omega} p \vec{n} \, d\Omega = - \vec{S} \text{ (spinta)}$$

$$\vec{P} + \vec{S} = 0$$

$$\vec{S} = \vec{P}$$

peso fluido  
reazione di  
spinta esterna  
reazione della  
sostituzione

**NB**

In un liquido a differenza dei solidi se non c'è movimento le  $\vec{\epsilon}$  sono nulle

Ricorsiamo analiticamente questo punto

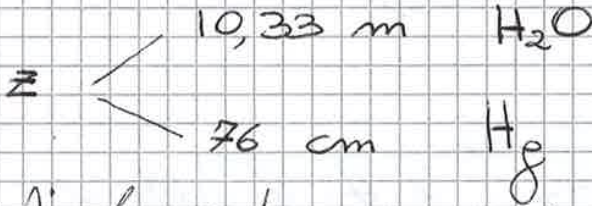
$$P = P_{atm} + \gamma(a - z)$$

$$0 = P_{atm} + \gamma(a - z)$$

$$P_{atm} + \gamma a - \gamma z = 0$$

$$z = \frac{P_{atm} + \gamma a}{\gamma} = \frac{P_{atm}}{\gamma} + a$$

Se ponessimo il mio sistema di riferimento al polo dell'acqua per cui con  $a = 0$  otterrei



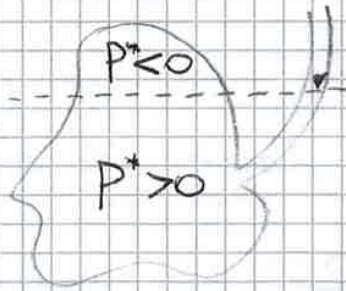
Murata fatta da Torricelli

Ai fini pratici è meglio usare la pressione relativa che ci permette di non considerare la pressione atmosferica.

$$P^* = P_{rel} = P_{tot} - P_{atm} = \gamma(a - z)$$

Come ho fatto precedentemente allo stesso modo posso definire un piano relativo in cui la pressione è negativa.

N.B In questo modo per fare i calcoli mi basta trovare il punto dei corsi idrostatici relativo e che li regolerà la formula

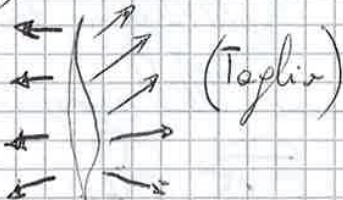


$$P^* = \gamma \Delta z$$

affondamento rispetto al PIGA

### Tensione superficiale

Nelle microfluidità è una forza fondamentale. Ogni volta abbiamo una interfaccia tra due fluidi si osserva che la superficie di contatto è tesa. Si creano delle tensioni nella direzione tangenziale della superficie.



$$S = \frac{F}{L} \left[ \text{Forza al metro} \right]$$

Gas

Liquido



Forze di Von der Waals



$$F_p = F_1 = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \Delta p$$

$$F_s = 2S \cdot L \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$F_s = F_p \rightarrow 2R \Delta p \sin \frac{\varphi}{2} = 2S \cdot L \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$\Delta p = \frac{S}{R}$$

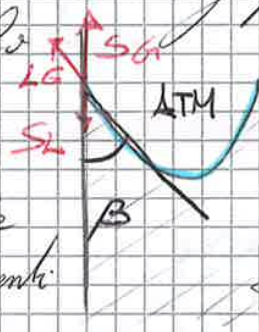
Solito di pressione tra  $P_{ext}$  e  $P_{int}$

Questa analisi può essere generalizzata considerando una superficie qualsiasi considerando i cerchi osculatori. In particolare se l'angolo di due coppie vengono chiamati **coppie principali**

$$\Delta p = S \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

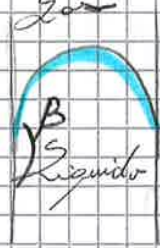
Formula di Laplace - Young

Se ho una curvatura verso l'alto significa che la pressione maggiore è sopra. Questo è quello che succede nei fenomeni capillari. Si può osservare che sul braccio si possono trovare forze L'angolo  $\beta$  che si forma dipende dalle tre componenti



(Per l'acqua  $\beta > 90$ )

Bagna la superficie del solido



Ci sono casi in cui la pressione maggiore è quello del fluido

Non bagna la superficie del solido

Prendiamo una bacchetta e ci inseriamo un tubicino



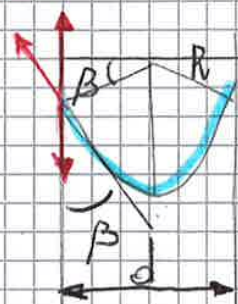
pieno del liquido costante nel tubo

Averemo un dislivello tra idre

**Risultato capillare**

$$\Delta p = \gamma h$$

depressione sull'interfaccia



$$R \cos \beta = \frac{d}{2} \rightarrow R = \frac{d}{2 \cos \beta}$$

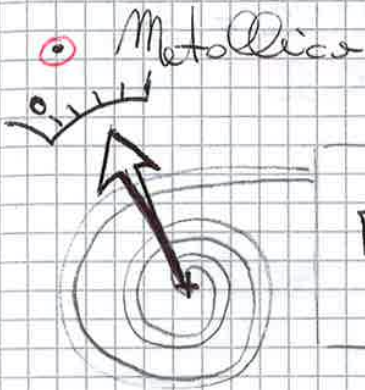
$$\Delta p = S \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{2S}{R} = \frac{4S \cos \beta}{d}$$

$$P_A = \gamma (S + Q + \Delta)$$

$$P_{A'} = P_B + \Delta \gamma_m = \gamma Q + \Delta \gamma_m \quad P_A = P_{A'}$$

$$\gamma S + \gamma Q + \gamma \Delta = \gamma Q + \Delta \gamma_m$$

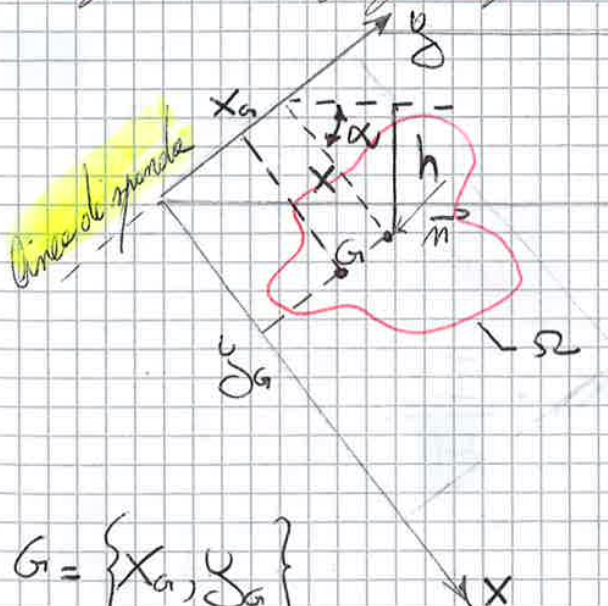
$$S = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$



Se la pressione è oltre tenuta e scende al tubo.

3) Sono molto utilizzati. L'omino in materiale piezoelettrico che più la pressione è oltre più invia un segnale elettrico che mi indica la pressione.

→ Spinte superficie piana orientata in direzione generica



P.c.i.r

$$\vec{dS} = p \cdot \vec{n} d\Omega$$

$$S = \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega$$

$$\vec{S} = \vec{n} \int_{\Omega} p d\Omega =$$

$$= \vec{n} \int_{\Omega} \gamma h d\Omega = \vec{n} \int_{\Omega} \gamma x \sin \alpha d\Omega$$

$$= \vec{n} \gamma \sin \alpha \int_{\Omega} x d\Omega$$

$$G = \{x_G, y_G\}$$

$$x_G = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} x d\Omega$$

$$\rightarrow x_G \Omega$$

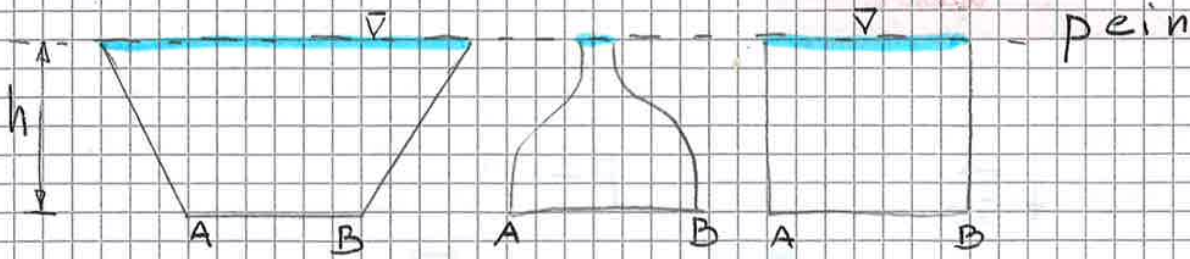
$$= \vec{n} \gamma \sin \alpha x_G \Omega$$

$$\vec{S} = \vec{n} \gamma h_G \Omega \Rightarrow \vec{S} = \vec{n} p_G \Omega$$

pressione sul baricentro

Lezione 3

16.03.15



Tutti e tre i contenitori hanno lo stesso spinto sul fondo.

→ Spinto sulle superfici curve

Sono più complicati perché se  $\vec{\Pi} = \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega$

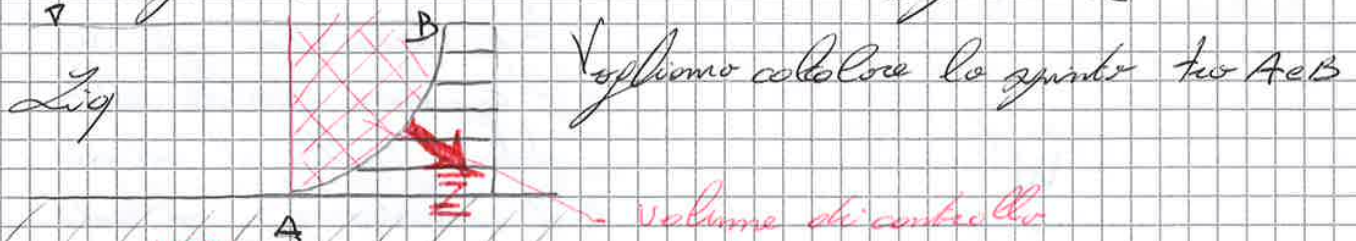
$\vec{n}$  cambia il suo valore in tutti i punti nello spazio.

Il metodo che useremo è quello di far riferimento all'equazione globale della statica

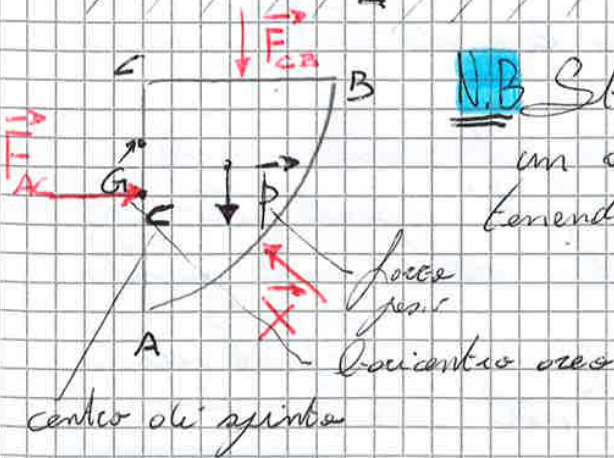
che si applica ad un volume di controllo  $\vec{P} + \vec{S} = 0$

Identifichiamo un volume di controllo che sia costituito da quello che vogliamo calcolare e per tutte le parti

NB c'è anche il metodo di proiettare la superficie in tre piani e calcolare le tensioni separatamente



NB Stiamo considerando un volume e non un arco per cui il baricentro va calcolato tenendo presente questa considerazione



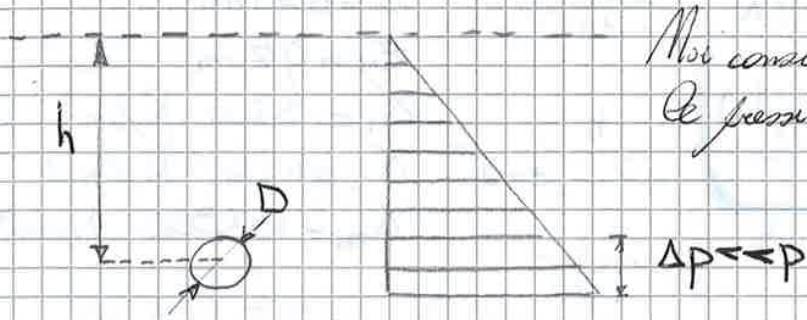
L'incognita del problema è  $\vec{X}$  che ha quel verso perché sto ragionando sulle forze che agiscono sul liquido.

Facciamo l'equilibrio

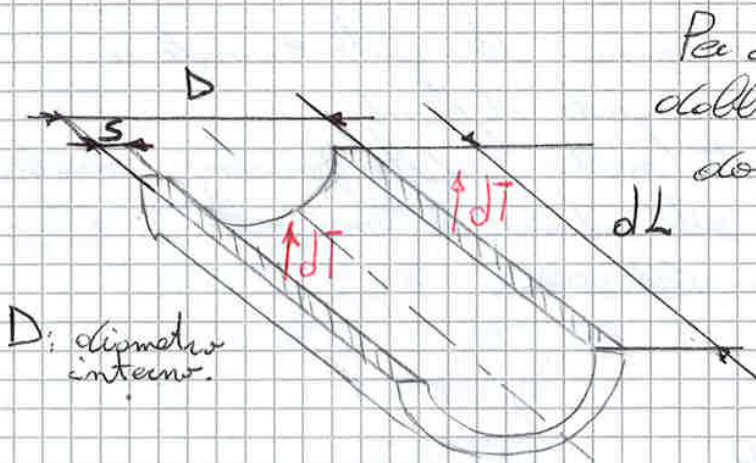
$$\vec{P} + \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{CB} + \vec{X} = 0$$

## → Formula di Moiré

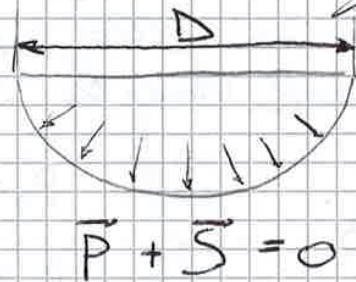
Le pareti di spessore  $s$  e sezioni dei tubi



Facciamo uno spaccato del tubo



Per calcolare le tensioni nel tubo dobbiamo calcolare lo spinto che fa il fluido sulla superficie



Se consideriamo positive le forze verso il basso

$$\vec{F}' + \vec{X}' = 0$$

$$F - X = 0$$

pressione baricentrica per l'asse.

$$X = F = p D dL$$

Affinché il solido sia in equilibrio deve imporre l'equazione

$$2dT = p D dL$$

$$dT = \sigma s dL$$

$$2\sigma s dL = p D dL$$

Ma consideriamo gli spessori costanti perché lo spessore è piccolo e la variazione è trascurabile.

**N.B.**

$$s_{\min} = \frac{p D}{2 \sigma_{\max}}$$

Sezione che giunge al massimo le caratteristiche del materiale

$$s = \frac{p D}{2 \sigma}$$

Formula di Moiré

Per calcolare l'altezza  $h$  dobbiamo utilizzare l'equazione di Stevin.

$$z_D + \frac{P_D}{\gamma_2} = z_E + \frac{P_E}{\gamma_2}$$

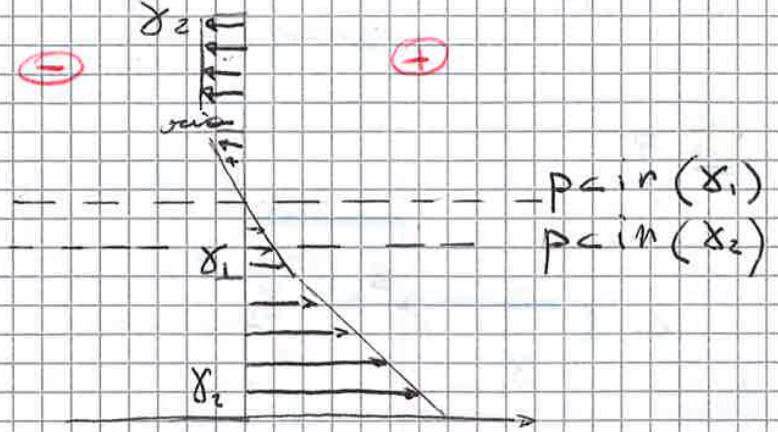
$\downarrow$   
 $h$

$$h = z_D + \frac{P_D}{\gamma_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} a - \frac{\gamma_m \Delta + b}{\gamma_2} = 1.635 \text{ m}$$

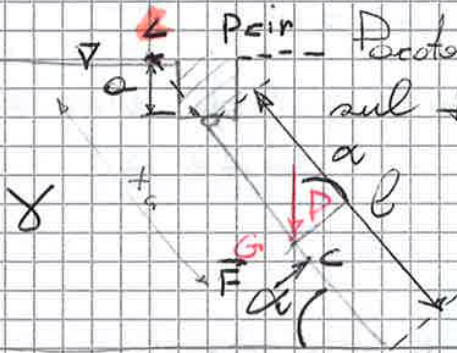
Per calcolare  $m$

$$p(z_u) \equiv m = (h - z_u) \gamma_2$$

$$\left( z_D + \frac{P_D}{\gamma_2} - z_u + \frac{P_u}{\gamma_2} \right)$$



3. Problema che in caso strisciamento si verifica sul terreno



Dati:  $a, \alpha, l, \gamma$

Determinare: peso (P)?

Peso sferico - la porzione rimossa deve

4. posizione linee di spinta

$$|F| = p_a \cdot l \cdot 1 = \gamma \left( a + \frac{l}{2} \sin \alpha \right) l \cdot 1$$

$$\bar{GC} = \frac{\int x \cdot p \cdot dx}{x_a \cdot A} = \frac{\frac{\gamma l^3}{12}}{\left( \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{l}{2} \right) \cdot l} = x_a$$

$$= \frac{l^2}{12 \left( \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{l}{2} \right) l} = 0,23 \text{ m}$$

La risultante  $F$  agisce dal punto  $C$  di intersezione delle linee di spinta

$$\vec{M} = \vec{F} \wedge \vec{h}$$

$$M(P) = |P| \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha$$

Facciamo l'equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera

$$x = \frac{|S_2| \overline{C_2 G} - |S_1| \overline{C_1 G}}{|R|} = -0.093 < 0$$

Lezione 4 → Cinematica dei fluidi

19.03.15

Approccio Lagrangiano

Posizione delle particelle a partire dalle condizioni iniziali →

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

Approccio Euleroiano

Velocità delle particelle nei punti dello spazio →

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

Componenti delle velocità in funzione delle posizioni

$u = \frac{dx}{dt}$  →  $\begin{cases} dx = u(x, y, z, t) dt \\ dy = v(x, y, z, t) dt \\ dz = w(x, y, z, t) dt \end{cases}$

Con l'approccio Euleroiano non posso trovarmi la sparis e partire dalla velocità

La differenza nasce con la definizione del concetto di accelerazione. Se ho un vettore  $\vec{u}_p$  di velocità

Ho una variabile ( $t$ )  $\vec{A} = \frac{d\vec{u}_p}{dt}$  accelerazione istantanea

Nottevolmente la velocità ha più componenti  $\vec{u}_p = \vec{u}_p(x(t), y(t), z(t), t)$   
 Questo visto è l'approccio (Euleroiano) Lagrangiano.  
 Adesso vediamo l'approccio Euleroiano:

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$$

Ho sia il tempo e sia la velocità (indipendenti)

Non dipendono dal tempo ma solo dalla posizione.

Come prima definiamo l'accelerazione della visione Lagrangiano e sudponiamo la derivata totale.

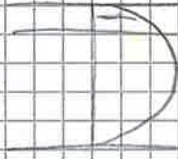
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{d\vec{u}_p}{dt} = \text{Derivata Euleroiana}$$

$$= \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial t} \Big|_{\vec{x}, t} + \left[ \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{u}_p}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right]_{\vec{x}, t}$$

derivata locale: variazione delle velocità nel singolo punto al passare del tempo.      variazione spaziale della velocità

2) Moto permanente (moto stazionario  $\frac{d}{dt} = 0$ )

3) Moto uniforme (sia tempo che e spaziale sono costanti)  $\frac{d}{dx}$  lungo la traiettoria



lungo la traiettoria tutte le velocità in ogni punto sono costanti.

4) Moto piano :  $u = u(x, y, t)$

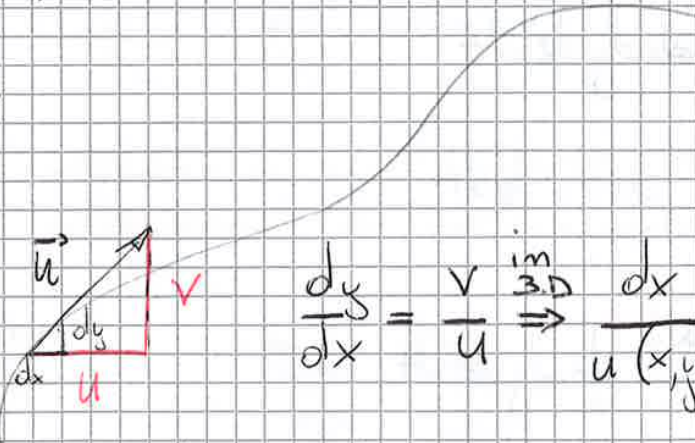
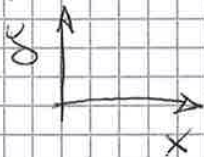
$v = v(x, y, t)$

$w = 0$  → non cambia

Stazionaria  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$  ;  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  in questo modo ho una sola funzione da risolvere

**Traiettoria** : è il luogo dei punti occupati da una particella lungo il moto.

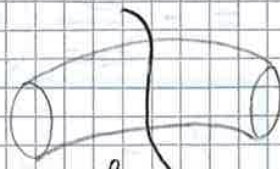
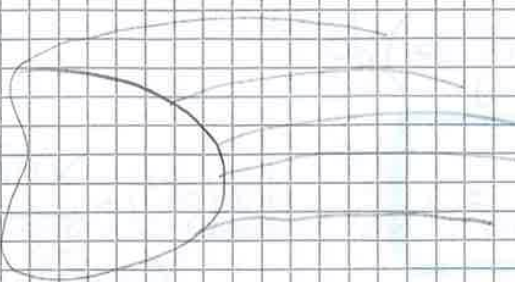
**Linea di corrente** : è definita ad un certo istante ed è tangente in ogni suo punto al vettore velocità.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \stackrel{\text{in 3D}}{\Rightarrow} \frac{dy}{u(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}$$

**N.B** Facendo una foto con tempo di esposizione breve posso vedere il vettore velocità. Questo mi permette di ricostruire la linea di corrente. Invece con un tempo lungo posso vedere la traiettoria.

→ **Tubo di flusso**



$$Q = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{m} \cdot d\Omega$$

Però volume

Ricordando che  $\text{div}(\rho \vec{u}) = \nabla \cdot (\rho \vec{u}) =$

$$= \rho \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \rho \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

NB Il prodotto applicato ad un vettore è un prodotto scalare. Applicato ad una scalare mi dà un vettore

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

Fluido incompressibile =  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{u} = 0$$

Lezione 5

23.03.15

Per cui se è incompressibile

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Se invece abbiamo un moto piano e incompressibile possiamo semplificare ulteriormente la nostra equazione.

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

$$w = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Chiamando  $\psi$  come funzione di corrente

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

Una volta risolto la funzione di corrente possiamo trovare  $u$  e  $v$  perché  $\psi = \psi(x, y)$



Se la sezione non varia nel tempo (condotte incompressibili)

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\rightarrow Q = \text{cost}$$

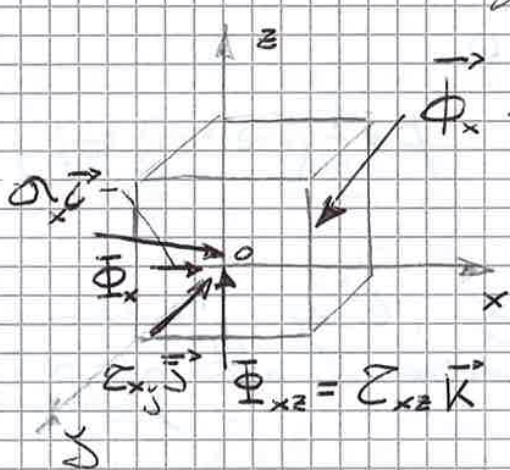
$$U_e \Omega_e = U_a \Omega_a$$

Se la condotta è incompressibile  $\Rightarrow Q = \text{cost}$  ma

rispetto a  $S$  è come se la portata cambiasse ad entità e uscite immediate. Questi pochi non esistono condotte incompressibili e il fluido non è completamente incompressibile

### Dinamica dei fluidi

Quello che cerchiamo è di trovare l'eq. indefinita della dinamica dei fluidi.



$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Forza peso

$$dm \vec{A} = dR = \rho \vec{F} dx dy dz + \Phi_x dy dz + \Phi_y dx dz + \Phi_z dx dy - \left( \Phi_x + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \left( \Phi_y + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dy \right) dx dz - \left( \Phi_z + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} dz \right) dx dy$$

$$dR = \rho (\vec{F} - \vec{A}) = \rho \left( \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right)$$

Perché è vettoriale possiamo scriverlo nelle sue componenti

$$\rho \left( F_x - \frac{Du}{Dt} \right) = \rho \left( \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left( F_y - \frac{Dv}{Dt} \right) = \rho \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \left( F_z - \frac{Dw}{Dt} \right) = \rho \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} \right)$$

Eq. di Navier  
e eq. indefinita  
della dinamica

## → Corso dei fluidi perfetti e ideali

È una idealizzazione perché prevedono l'assenza di sforzi tangenziali viscosi

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0$$

(È come se la viscosità fosse nulla)

Viene sfruttata perché un fluido si comporta quasi così quando si trova alle distanze lontane da una parete solida

$$\vec{\Phi}_x = \left\{ \sigma_x \vec{i}, \tau_{xy} \vec{j}, \tau_{xz} \vec{k} \right\} = \left\{ \sigma_x \vec{i} \right\}$$

$$\vec{\Phi}_y = \sigma_y \vec{j}$$

$$\vec{\Phi}_z = \sigma_z \vec{k}$$

Per cui il tensore degli sforzi diventa diagonale

$$\Phi = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix} = p \mathbf{I} \quad \Rightarrow \begin{aligned} \vec{\Phi}_x &= p \vec{i} \\ \vec{\Phi}_y &= p \vec{j} \\ \vec{\Phi}_z &= p \vec{k} \end{aligned}$$

Per cui

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}$$

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \rho \text{ grad } p$$

Equazioni di Eulero

Le incognite sono  $u, v, w, p, \rho$  per cui

$$A = \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$$

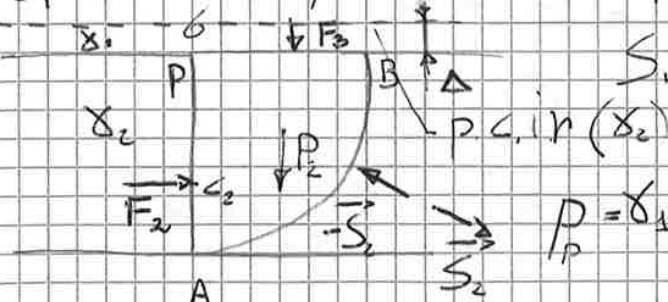
che non è lineare per cui difficilmente risolvibile (solo alcune geometrie particolari)

Bisogna usare il metodo numerico.

Una condizione al contorno è che sul bordo ho  $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ . In verità sullo stesso limite devo usare i fluidi reali (condizione di no-slip)

$$\bar{G}_1 = \frac{h_1}{6} = 0,16$$

$$S_{1x} = 4000 \text{ N}$$



$$S_{1z} = -|P_1| = -\gamma_1 W_1 = -2763 \text{ N}$$

$$p = \gamma_1 h_1 = \gamma_2 \Delta \rightarrow \Delta = \frac{\gamma_1 h_1}{\gamma_2}$$

$$\vec{P}_2 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 - \vec{S}_2 = 0$$

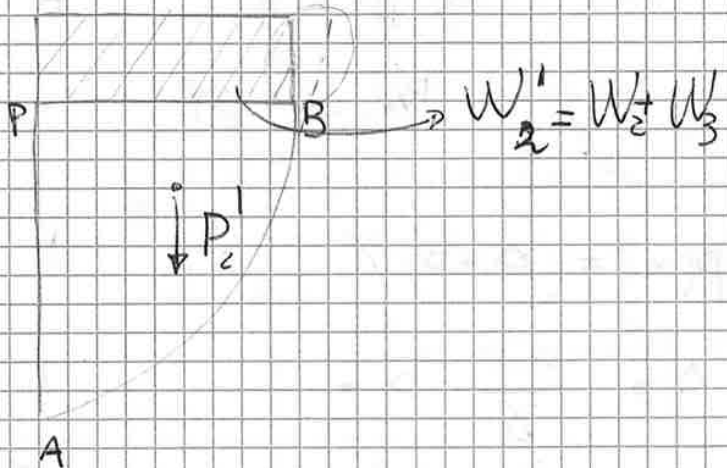
$$S_{2x} = |F_2|$$

$$S_{2z} = -|P_2| - |F_3|$$

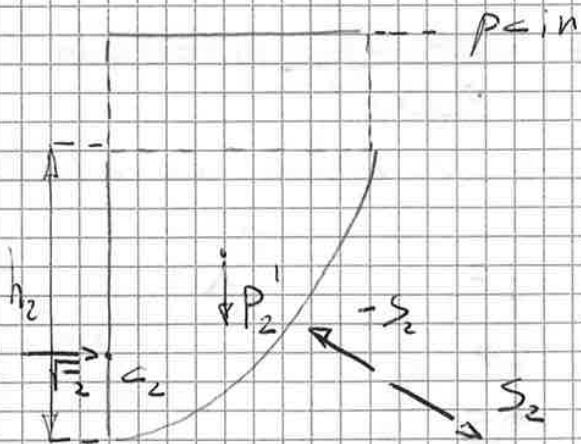
Posso vedere  $F_3$  come una forza peso equivalente

$$|F_3| = \gamma_2 \underbrace{\Delta \overline{PB}}_{W_3}$$

N.B Posso sempre considerare le forze superficiali come volumi che mi danno una forza peso



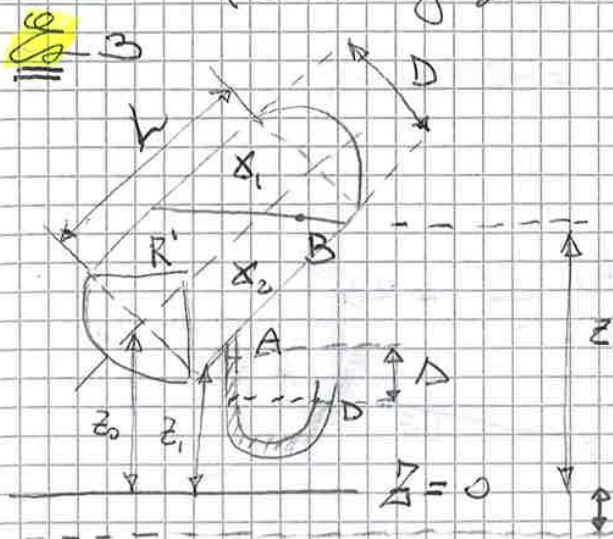
Il mio problema diventa



$$|F_2| = \gamma_2 \left( \frac{h_2}{2} + \Delta \right) h_2$$

$$\bar{G}_2 = \frac{I_{G_2}}{x_{G_2} h_2} = \frac{h_2^2/12}{\left( \frac{h_2}{2} + \Delta \right) h_2}$$

$$|P| = \gamma \left( \frac{2}{3} \pi H^3 \frac{2\alpha}{\gamma} + \pi H^2 \frac{2\alpha}{\gamma} \Delta \right) = 47,81 \text{ N}$$



Dati:  $D, \alpha, R, \Delta, z_A, z_B, z_0, \alpha,$   
 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_m$

Determinare:  $S_2, S_1, pcir(x_1, x_2)$

$$\gamma_m = 13330 \text{ N/m}^3$$

$$\gamma_2 = 9800 \text{ N/m}^3$$

$$z_A = 0,75 \text{ m}$$

$$pcir(x_2) \Delta = 0,2 \text{ m}$$

Collochiamo il pcir del liquido  $\gamma_2$  simultaneamente con il manometro semplice

Segui anche forze

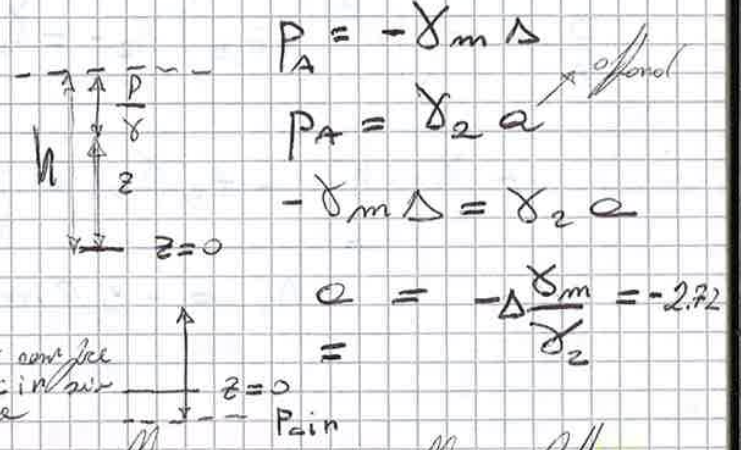
$$P_D = P_A + \gamma_m \Delta$$

$$P_A = -\gamma_m \Delta$$

$$h_A = z_A + \frac{P_A}{\gamma_2} = z_A - \frac{\gamma_m \Delta}{\gamma_2}$$

$$h^{(z)} = -1,07 \text{ m}$$

**N.B.** Il polivetro con il pcir in acqua



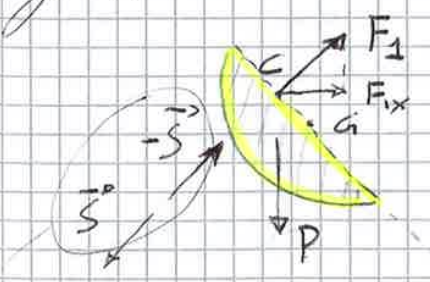
$$P_A = -\gamma_m \Delta$$

$$P_A = \gamma_2 a$$

$$-\gamma_m \Delta = \gamma_2 a$$

$$a = -\Delta \frac{\gamma_m}{\gamma_2} = -2,72$$

Usiamo come volume di controllo quello compreso nelle colonne specifiche



$$\vec{F}_1 + \vec{P} - \vec{F}_{ix} = 0$$

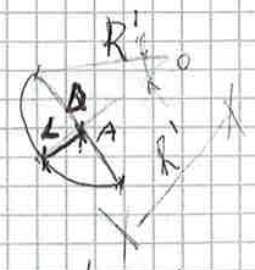
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{ix} + \vec{P}$$

$$|P| = \gamma_2 W_2$$

$$W_2 = \frac{\pi}{6} l (3R^2 + l^2)$$

$$R = \frac{D}{2}; \quad l = R' - AO = R' - R' \cos \beta$$

$$\beta = \arccos \left( \frac{R}{R'} \right) = 36^\circ$$



pcir( $\gamma_2$ )

non sappiamo che segno abbia

$$W_2 = 1,83 \text{ m}^3$$

Lezione 5

30.03.15

- 1)  $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{div } \vec{\Phi}$  Equazione di Cauchy
- 2)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$  Equazione di continuità
- 3) eq. di stato
- 4) relaz. costitutive (reologia)

Con queste posso trovare

$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$  Velocità in un punto dello spazio  
 $p = p(x, y, z, t)$   
 $\rho = \rho(x, y, z, t)$

Queste equazioni (per la completezza del sistema) sono molto complicate da risolvere. Piccole variazioni delle condizioni iniziali possono avere enormi effetti sul risultato.

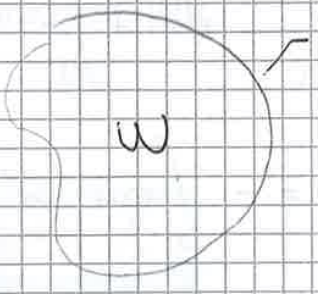
$\rho$  (densità) Equazione globale di equilibrio dinamico  $\rho$  Fenomeno  
 - funzione che da la  $\Delta$  di quant. di moto - funzione onde, il modo di  
- Si mettono dei diffusori per avere un'onda maggiore

Dobbiamo passare dalle equazioni indefinite alle equazioni integrate. Dobbiamo integrare le funzioni per un volume di controllo.

$$\int_W \rho \vec{F} dW = \vec{P}$$

$$\int_W \text{div } \vec{\Phi} dW = - \int_{\Omega} \vec{\Phi} \vec{m} d\Omega$$

$$= - \int_{\Omega} \vec{\Phi}_m d\Omega = - \int_{\Omega} \vec{F} d\Omega$$



$W$  -  $\Omega$

$$\text{div } \vec{\Phi} = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

$$\vec{\Phi} = \{ \vec{\Phi}_x, \vec{\Phi}_y, \vec{\Phi}_z \}$$

In generale se  $\vec{b} = \{ b_x, b_y, b_z \}$

$$\int_W \text{div } \vec{b} dW = - \int_{\Omega} \vec{b} \vec{m} d\Omega$$

$$\vec{P} + \int_S \vec{u} u_n d\Omega + \vec{F}_L = \int_W \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dW$$

Questa è l'equazione globale se viene fuori dall'integrazione dell'equazione di Cauchy.  
Possiamo scriverla in modo più compatto.

$$\int \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} dW = \text{Inerzie locali.}$$

Variazioni temp. della quantità di moto totale all'interno di W.

I

$$\int_S \rho \vec{u} u_n d\Omega = \vec{M} = \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

Sono quantità di moto nell'unità di tempo per cui hanno le dimensioni di una forza; più precisamente potremo definirli flussi di quantità di moto.

Scelta con la via modificata ottengo

Flussi di quantità di moto

$$\vec{P} + \vec{F}_L + \vec{M}_e - \vec{M}_u = \vec{I}$$

↑  
agite sulle superfici del volume

Per  $\vec{I}$  dipendono solo da quello che c'è nel volume di controllo.  $M_e, M_u$  e  $F_L$  dipendono da tutto ciò che c'è sulla superficie di controllo.

Correnti con superfici di ingresso e di uscita trasversali

$$\vec{u} = u_n \vec{n} \quad \vec{n} \Rightarrow \int_S \vec{n} \rho u_n^2 d\Omega$$

Se la superficie è piana  $\rightarrow \vec{n} \int_S \rho u_n^2 d\Omega$

↳ corrente produttivamente variata

$$R_L \gg D$$

$$\vec{M} = \vec{n} \int_S \rho u_n^2 d\Omega = \vec{n} \rho_m Q U \beta$$

velocità media

Usiamo la velocità media e la densità media

Coeff. di resistenza

$$\beta = \frac{\int_S \rho u_n^2 d\Omega}{\rho_m Q U}$$

Questo coeff. è stato valutato sperimentalmente

• Lungo  $\epsilon$ ;  $\frac{Du^2}{Ds} = \frac{\partial}{\partial s} (-\rho z) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( -\rho z - \frac{P}{\rho} \right)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u^2}{2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \rho z + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = - \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2\rho} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t}$$

Teorema di Bernoulli  
esteso al moto  
non-stazionario.

Se il moto è permanente

$$z + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2\rho} = \text{cost} \quad \text{lungo una traiettoria}$$

H: Enunciato di Bernoulli

• Lungo  $\vec{m}$ . Per scrivere l'equazione di bilancio dell'impulso considero la densità uguale in tutti i punti  $\rho = \text{cost}$  (omogenea).

$$\vec{A} = \rho \text{grad}(-\rho z) - \frac{1}{\rho} \text{grad} P$$

Se vale l'omogeneità

$$\vec{A} = \rho \text{grad} \left( -\rho z - \frac{P}{\rho} \right) \Rightarrow -\frac{\vec{A}}{\rho} = \text{grad} \left( z + \frac{P}{\rho} \right)$$

Proiettiamo su  $\vec{m}$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{P}{\rho} \right) = - \frac{u^2}{\rho}$$

• Lungo la binomiale  $\vec{b}$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{P}{\rho} \right) = 0$$

$p = \gamma h$      $h = \frac{p}{\gamma} \Rightarrow$  Vediamo che c'è una complementarità tra la pressione e l'energia potenziale

Questo ci porta a dire che  $\frac{p}{\gamma}$

$\frac{p}{\gamma}$  : **energia potenziale per unità di peso**.    ( $p$  : media del centro degli spessi)

$\gamma W = 1$      $W = \frac{1}{\gamma}$      $\frac{dW}{W} = - \frac{dp}{\gamma} \Rightarrow dW = - \frac{W}{\gamma} dp$

$dW = - \frac{dp}{\gamma \epsilon}$

$dW \propto \frac{p}{\gamma \epsilon}$

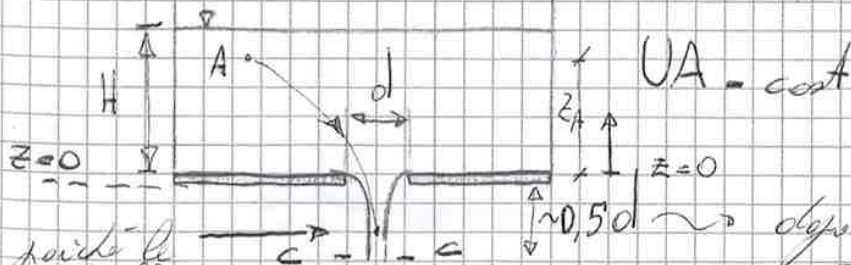
È allora  $p dW \propto \frac{p}{\gamma \epsilon} \frac{p}{\gamma} \sim \frac{1}{\epsilon} \ll 1$   
 $\epsilon \rightarrow 10^3 Pa$

**Processi di Efflusso (Forologie)**

Studio dei processi di efflusso di liquidi attraverso fori aperti nelle pareti. Diamo delle definizioni.

**Luce** : fori nelle pareti    **Abbotente** : contorna tutta l'acqua  
**A strombato** : scende l'acqua da uno strombato

**II.2 (Bottente)**



poiché le particelle scivolano il condotto si restringe

dopo questa distanza c'è la sezione contratta.

Prendo un punto A lontano dalla luce e uno molto vicino alla sezione contratta. Dopo lo ho fatto e applico Bernoulli:

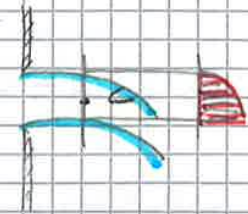
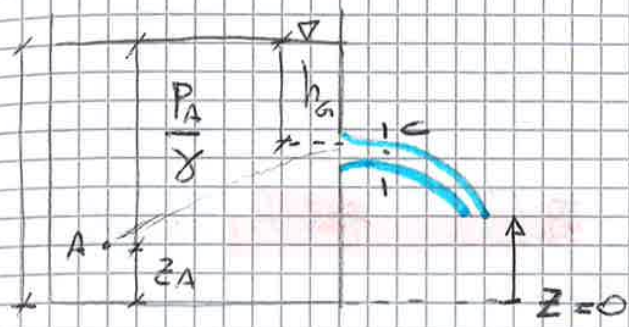
$z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_C + \frac{p_C}{\gamma} + \frac{u_C^2}{2g}$     o perché è libero



6  
Lezione 6

2.04.15

Continuiamo con lo studio delle foce



Regolare l'ordine sull'area per trovare la velocità media

$$H_A = h_A = z_A + \frac{P_A}{\gamma}$$

$$\overbrace{z_A + \frac{P_A}{\gamma}}^H = z_c + \frac{u_c^2}{2g}$$

$$u_c = \sqrt{2g(H - z_c)}$$

Lo scopo delle foce è quello di calcolare la portata velocità media

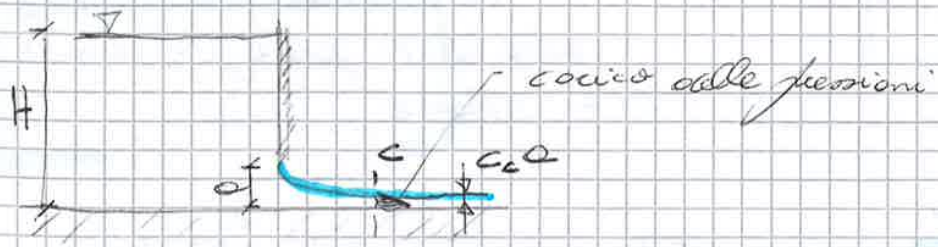
$$Q = c_v c_c \int_{\Omega} u_c d\Omega \quad \Omega = \frac{\pi d^2}{4}$$

Posso approssimare  $\int_{\Omega} u_c$  velocità come

$$u_c \sim \sqrt{2g(H - z_c)} \Rightarrow Q = c_c c_v \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2g h_A}$$

Questo approssi vale quando la spesa colle vene è minore (molto) di  $h_A$ .

Vediamo un'altra luce



$$H = z_c + \frac{P_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g} \Rightarrow u_c = \sqrt{2g(H - c_c a)}$$

$c_c a$  ← altezza del piano dei centri

$u_c$  è costante perché noi stiamo considerando il caso reale con un fluido perfetto. L'equazione di Euler di vento di primo grado

→ Teorema di Bernoulli, esteso alle correnti.

Se oltre alle ipotesi più fatte introduciamo l'irrotazionalità:

$$\vec{w} = \text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{k} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w & \end{vmatrix}$$

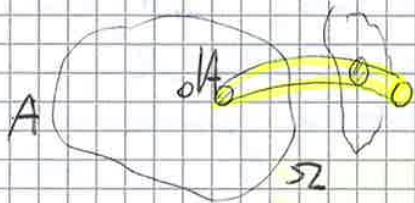
La vorticità è il rotore della velocità

Se è irrotazionale la vorticità è nulla

vorticità

Ci possono essere vortici irrotazionali perché dipende se la particella ruota su se stessa o no. Se non ruota il campo di moto è irrotazionale ma può essere su una traiettoria chiusa. (al centro però c'è una singolarità perché c'è una particella che ruota)

• Introduciamo ora la corrente e prendiamo una sezione trasversale



Pec una superficie infinitesima passa un tubo di flusso

$$dQ = u dA$$

Questo è una portata volumica

$$\gamma dQ = \gamma u dA$$

Questo è una portata in peso

$$\hookrightarrow \left[ \frac{\text{Peso}}{\text{tempo}} \right]$$

$$H = \left[ \frac{E_m}{\text{Peso}} \right]$$

$$\gamma H dQ = \left[ \frac{E_m}{\text{tempo}} \right] = [W]$$

Alliamo una potenza

$$P = \int_{\Omega} \gamma H dQ$$

Potenza complessiva dell'intero flusso.

cost  $\rightarrow$  lungo il tubo di flusso  
 per Bernoulli il axes non varia

$$P = \int \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) u dA$$

Spezziamo l'integrale in due parti

$$P = \int_A \gamma \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) u dA + \int_A \gamma \frac{u^3}{2g} dA$$

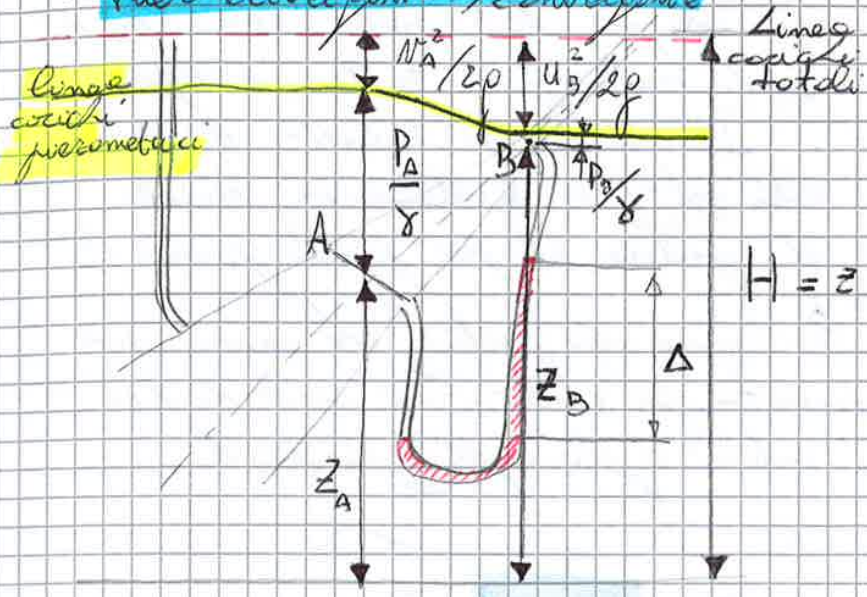
Consideriamo  $\gamma = \text{cost}$

Lezione 2

13.04.15

→ Applicazione del teorema di Bernoulli esteso alle correnti.

• Tubo divergente / convergente



Visto che sono pressioni e densità di una corrente sono uguali al concentro

$$H = z + \frac{P}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

Il manometro differenziale misura una pressione relativa al punto.

Poiché  $Q = UA = \text{cost}$  se  $A$  diminuisce  $U$  deve aumentare facendo diminuire le linee dei costi perennetici

$$S = h_A - h_B = \left( z_A + \frac{P_A}{\gamma} \right) - \left( z_B + \frac{P_B}{\gamma} \right) = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \alpha \frac{U_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \alpha \frac{U_B^2}{2g}$$

$$S = h_A - h_B = \alpha \left( \frac{U_B^2}{2g} - \frac{U_A^2}{2g} \right)$$

$$(U_B^2 - U_A^2) = \frac{2g}{\alpha} \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$U_B = \frac{Q}{\Omega_B} \quad U_A = \frac{Q}{\Omega_A}$$

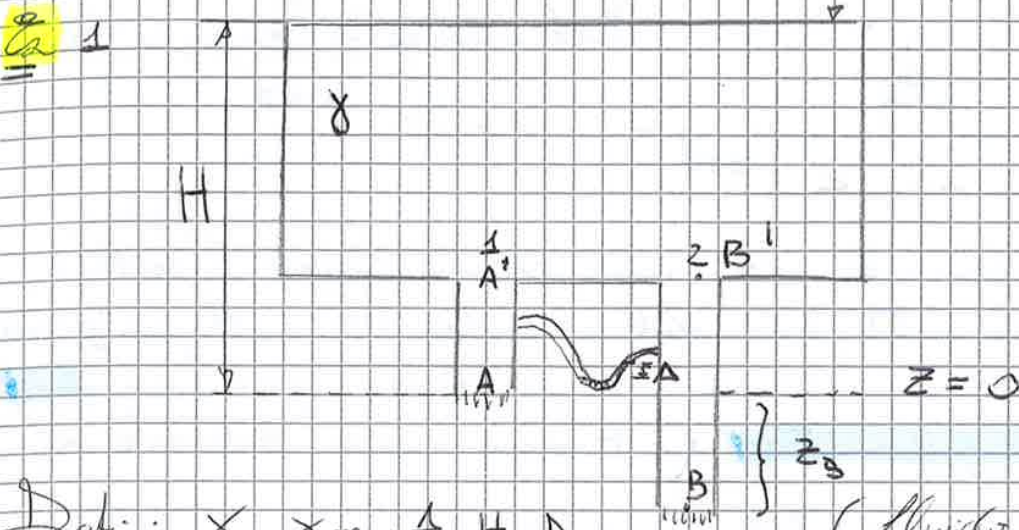
$$Q^2 \left( \frac{1}{\Omega_B^2} - \frac{1}{\Omega_A^2} \right) = \frac{2g}{\alpha} \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$Q = \sqrt{\frac{\Omega_A^2 \Omega_B^2}{\Omega_A^2 - \Omega_B^2} \frac{2g}{\alpha} \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}$$

$$Q = \left\{ \frac{\Omega_A \Omega_B}{\sqrt{\Omega_A^2 - \Omega_B^2}} \sqrt{\frac{2g}{\alpha} \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}} \right\} \sqrt{\Delta} \approx K$$

$Q = K \sqrt{\Delta}$

### Esercizio 3



Dati:  $\gamma, \gamma_m, \Delta, H, D$  (fluido pesante)

Determinare:  $z_B$

• Facciamo il teorema di Bernoulli tra  $A'$  e  $A$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{U_A^2}{2g} = z_{A'} + \frac{P_{A'}}{\gamma} + \frac{U_{A'}^2}{2g}$$

$\leftarrow$  pressione idrostatica → sono uguali

$$h_{A'} = 0$$

$$h^{(1)} = 0$$

Andando a  $z$  deve diminuire perché in  $A'$  c'è un'onda di depressione

$$z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{U_B^2}{2g} = z_{B'} + \frac{P_{B'}}{\gamma} + \frac{U_{B'}^2}{2g}$$

$h_{B'} \rightarrow$  uguale al low

$$h^{(2)} = h_{B'} = z_B \sim \rightarrow \text{quantità negativa } < 0$$

$$S = h^{(1)} - h^{(2)} = -z_B = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$$z_B = -\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} < 0 = 1,26 \text{ m}$$

è un'equazione differenziale di primo grado

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{m\pi d^2}{4\Omega} \sqrt{2gH}$$

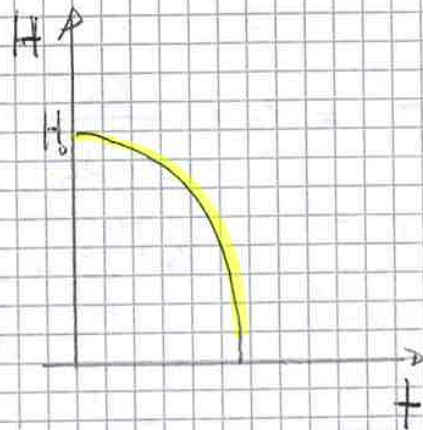
$$H(t=0) = H_0$$

$$\frac{dt}{\sqrt{H}} = \frac{m\pi d^2}{4\Omega} \sqrt{2g} dt$$

$$2\sqrt{H} + C = -\frac{m\pi d^2}{4\Omega} \sqrt{2g} t$$

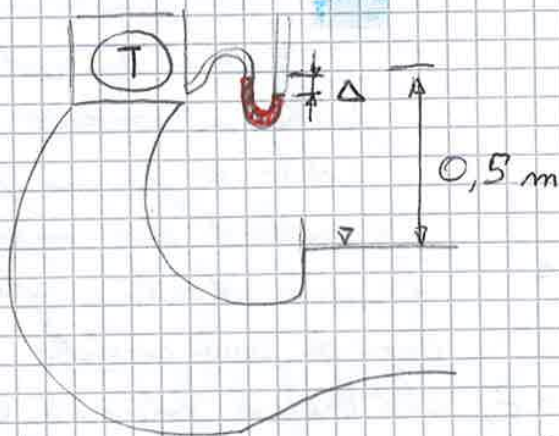
$$2\sqrt{H_0} + C = 0 \rightarrow C = -\sqrt{H_0} \cdot 2$$

$$H = \left( \sqrt{H_0} - \frac{m\pi d^2}{8\Omega} \sqrt{2g} t \right)^2$$



$$T = \frac{8\Omega\sqrt{H_0}}{\sqrt{2g} \cdot m\pi d^2} = 8 \text{ min} = 516 \text{ s}$$

$\frac{g}{3}$

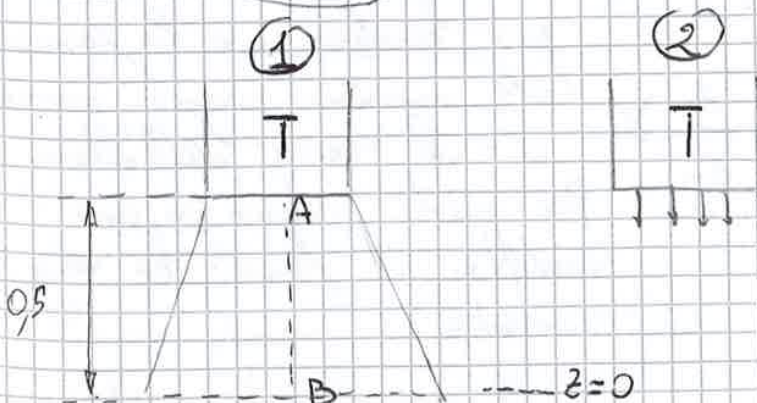


Dati:

$$Q, \Omega_1, \Omega_2 \quad (\Omega_2 > \Omega_1)$$

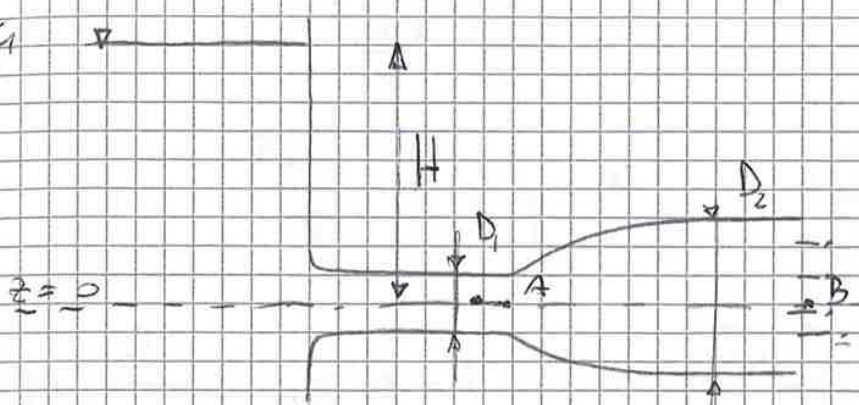
Determinare:

- meglio ① o ②
- $\Delta$



Il diffusore fa sì che il carico all'uscita della turbina sia minore di quello che si avrebbe con la sola pressione atmosferica

5  
6



Dati  
 $\gamma, H, D_1, D_2$   
 Determinare  
 $Q, P_c$

$$\cancel{z_A} + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = \cancel{z_B} + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{u_B^2}{2g}$$

H

$$\frac{u_B^2}{2g} = H \rightarrow u_B = \sqrt{2gH}$$

$$Q = \frac{\pi D_2^2}{4} \sqrt{2gH}$$

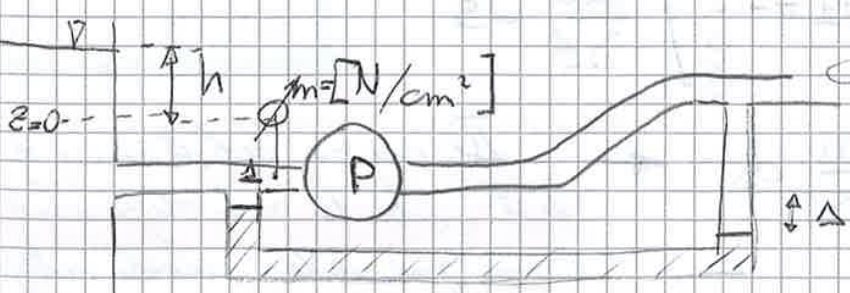
Non c'è contrazione!

$$\frac{P_A}{\gamma} = \frac{u_B^2}{2g} - \frac{u_A^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{1}{\pi^2 D_2^4} - \frac{1}{\pi^2 D_1^4} \right) =$$

$$= \frac{Q^2}{2g} \left( \frac{16}{\pi^2 D_2^4} - \frac{16}{\pi^2 D_1^4} \right)$$

$$P_i = \frac{3 \rho g Q^2}{\pi} \left( \frac{D_1^4 - D_2^4}{D_1^4 D_2^4} \right)$$

6



Dati:  $h, m, \Delta, D_1 = D_2$   
 Determinare: P

Una pompa aumenta il carico del fluido.  
 Una sifone diminuisce il carico trasformandolo in carico.

Potenza pompa  $P = \gamma \Delta H Q$

$$\Delta H = \Delta h = S = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}$$

$\frac{Q}{S} = U$  *velocità media*  
*Non dipende da S*

La eq. di conservazione di Euler  $\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}$   
 Equazione estesa alle correnti

$H_2 = H_1 - \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} ds$

Per una condotta cilindrica abbiamo ricavato che  $\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{dU}{dt}$ , per cui  $\int_1^2 \frac{\partial U}{\partial t} ds = \frac{dU}{dt} \int_1^2 ds = L \frac{dU}{dt}$  *Unica dipendente da S*

$H(s) = H_0 = - \frac{L}{g} \frac{dU}{dt}$  *Eq. estesa alle correnti*

H diminuisce all'aumentare delle velocità. Valutiamo la variazione di H per una particella lungo la traiettoria

$\frac{DH}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left( z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g} \right) =$

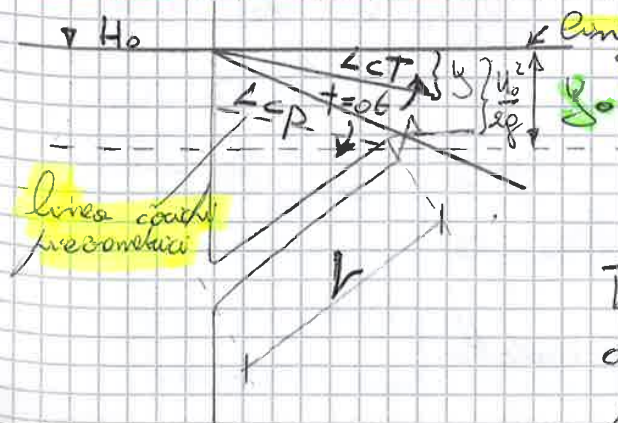
$= \frac{\partial H}{\partial t} + U \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial t} \left( z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g} \right) + U \frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2g} \right) =$

$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} - U \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}$  *non cambia nel tempo*

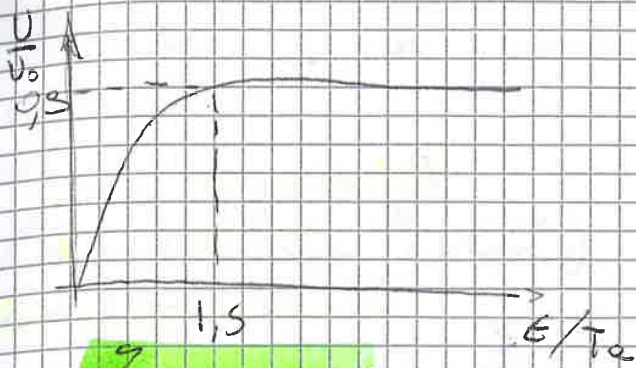
$\frac{DH}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}$

Quindi per ricavare il comportamento di una particella basta osservare la pressione nel tempo

→ Analizziamo ora una condotta



Andiamo a vedere cosa succede quando apriamo la valvola. Ci aspettiamo che dopo un certo tempo la velocità sarà  $U = \sqrt{2g y_0}$  e che H sarà costante. Tutto ciò al tempo infinito. Prima della apertura carico totale = carica pre-compressa.



tole profilo di cui che  $U=90\%$   
di  $U_0$  quando l'istante  
di  $t = 1,5 T_a$

→ **Lezione 8**

20.05.15<sup>8a</sup>

→ **Fluidi reali:**

Hanno componenti fuori della diagonale (fluidi Newtoniani).

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\bar{\Phi}_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Vogliamo avere un legame  
tra questi tensori e quello  
scalare

→ **Ipotesi delle considerazioni:**

- 1) Non c'è memoria degli stati tensionali passati
- 2) Isotropia
- 3) Componente principale
- 4) Newtonianità → legame lineare

} Fluidi  
della  
Stokes

$$\Phi_{ij} = p \delta_{ij} - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \mu (\text{div} \vec{u}) \delta_{ij}$$

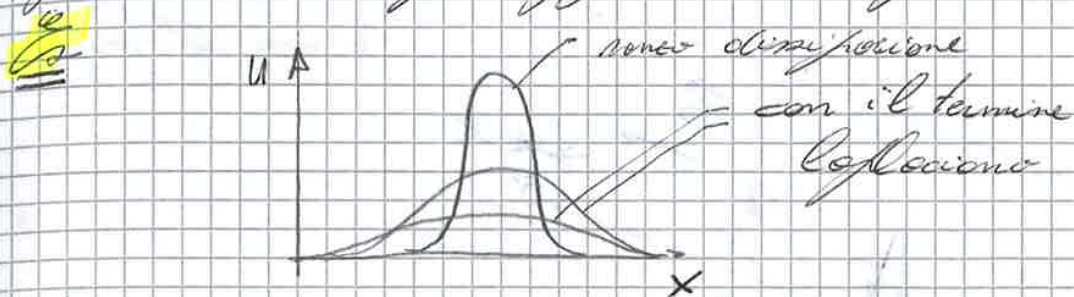
Questo è l'unico legame che soddisfa le quattro condizioni:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Quarta è una equazione indefinita cioè per un volume infinitesimo. Adesso dobbiamo integrarlo per un volume per ottenere l'eq. globale. Notiamo però che è uguale all'eq. globale della dinamica con un termine in più  $-\mu \nabla^2 \vec{u}$ . È una dissipazione di energia meccanica in luce. Il coefficiente moltiplica gli spigoli di una funzione.



Integriamo

$$-\mu \int_W \nabla^2 \vec{u} dW$$

$$\nabla^2 \vec{u} = \text{div}(\text{grad} \vec{u})$$

$$-\mu \int_{dW} \text{div}(\text{grad} \vec{u}) dW = \mu \int_{\Omega} \text{grad} \vec{u} \cdot \vec{n} dS =$$

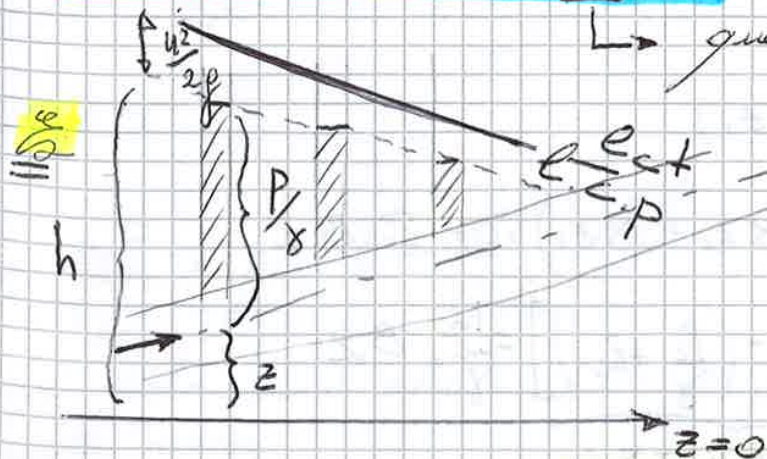
$$= \mu \int \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dS = T$$

Azione di trascinamento

Che cos'è? È un integrale di superficie di  $\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n}$  che è una tensione  $\int_{\Omega} \sigma dS$ . Per cui ci dice il contributo delle forze di attrito sull'area.

$$\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{M}_c - \vec{M} - \vec{I} = \vec{I}$$

↳ questa è l'introduzione



Il termine  $\vec{I}$  fa sì che se mai mettiamo dei piezometri la pressione indicale diminuisce

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -S$$

pendenza indicale

$$\gamma \Omega \Delta h = \Sigma B \Delta = \gamma S \Delta \Omega$$

$$\Sigma = \gamma \frac{\Omega}{B} \Delta = \gamma R \Delta$$

Perimetro bagnato

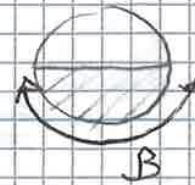
$$R = \frac{\Omega}{B}$$

Per cilindro  $\rightarrow$  Rappresenta area e perimetro

$$\Omega = \pi r^2$$

$$B = 2\pi R$$

$$R = \frac{R}{2}$$



$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \rho \text{grad } p - \mu \nabla^2 \vec{u}$$

Cerchiamo di trovare una forma dell'equazione adimensionale.  
Scegliamo delle grandezze per adimensionare le altre.

- $L_0$ : lunghezza caratteristica
- $U_0$ : velocità caratteristica
- $\tau_0 = \frac{L_0}{U_0}$ : tempo caratteristico

$$\begin{aligned} \vec{u} &= U_0 \vec{u} \\ \vec{x} &= L_0 \vec{x} \\ t &= \tau_0 \vec{t} \end{aligned}$$

Le grandezze caratteristiche sono le scale di misura

$$\vec{F} = -\rho \text{grad } (p) = \{0, 0, -p\} = -\rho \vec{k}$$

$$p = \rho U_0^2 \tilde{p} \quad \frac{kg}{m^3} \frac{m^2}{s^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2} = \frac{N}{m^2} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{m^2}$$

$$-\rho \rho \vec{k} - \rho \frac{D}{D\vec{x}} (u_0 \vec{u}) = \frac{\rho u_0^2}{L_0} \text{grad } \tilde{p} - \frac{\mu u_0}{L_0^2} \nabla^2 \vec{u}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} p = \frac{1}{L_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\rho u_0^2 \tilde{p}) = \frac{\rho u_0^2}{L_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \right)$$

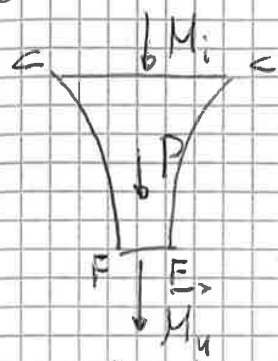
$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial x^2} \vec{u} = \mu \frac{1}{L_0^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} u_0 \vec{u} \right)$$

Moltiplico per  $\frac{L_0}{u_0^2 \rho}$

$$-\frac{D \vec{u}}{D \tilde{x}} = \text{grad } \tilde{p} - \frac{\mu}{\rho u_0 L_0} \nabla^2 \vec{u} + \frac{\rho L_0}{\rho u_0^2} \vec{k}$$

Con questo sono spente tutte le grandezze ma non i componenti dei numeri

2) Se noi andiamo a vedere quali forze agiscono sul volume di controllo



$\vec{I} = 0$  pareti permeabili  
 $\vec{T} = 0$  pareti solida e contatto con l'aria

Il getto ha pressione nulla sia all'interno e sia all'esterno.

$$\vec{P} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$P \cdot + M_e - M_u = 0 \quad P = M_u - M_e$$

$$M_e = \rho Q u_c \quad M_u = \rho Q u_{ff}$$

$$u_c = \sqrt{2g(h + \frac{d}{2})} - \sqrt{2gh}$$

$$Q = \Omega_c u_c = c_c \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh}$$

$$z_c + \frac{P_c}{\gamma} + \frac{u_c^2}{2g} = z_f + \frac{P_f}{\gamma} + \frac{u_{ff}^2}{2g}$$

$$H + \frac{u_c^2}{2g} = \frac{u_{ff}^2}{2g} \quad H + h = \frac{u_{ff}^2}{2g}$$

$$u_{ff} = \sqrt{2g(H+h)}$$

$$M_e = c_c \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \rho$$

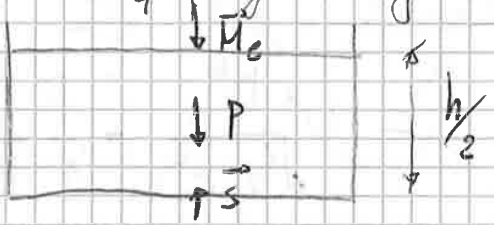
$$M_u = \rho Q u_{ff} = \rho c_c \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \sqrt{2g(H+h)}$$

Così possiamo calcolare  $P = \rho c_c \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \sqrt{2g(H+h)} - \rho g h$

• Calcoliamo la spinta

$$\vec{P} + \vec{S} + \vec{M}_e = 0$$

$$\vec{S} = -\vec{P} - \vec{M}_e$$



$$U \approx \frac{D^4}{d^3 \rho c^2} + \rho U = \frac{4P}{8 \pi D^2} \Rightarrow U = 3,91 \text{ m}$$

Lezione 2 (Inizio la parte del prof. Bini) 27.04.15

$$\varepsilon = \mu \frac{du}{dy} \quad \rho(F-A) = \rho \cos P - \mu \Delta V \text{ (vettoriale)}$$

$R_e, F_z$

$$R_e = \frac{\rho U_m d}{\mu}$$

Questo è il numero che ci interessa di più per le condotte

$$F_z = \frac{U_m}{\sqrt{g L_0}}$$

Se le forze viscose sono piccole  $R_e \rightarrow \infty$  e le forze viscose sono trascurabili

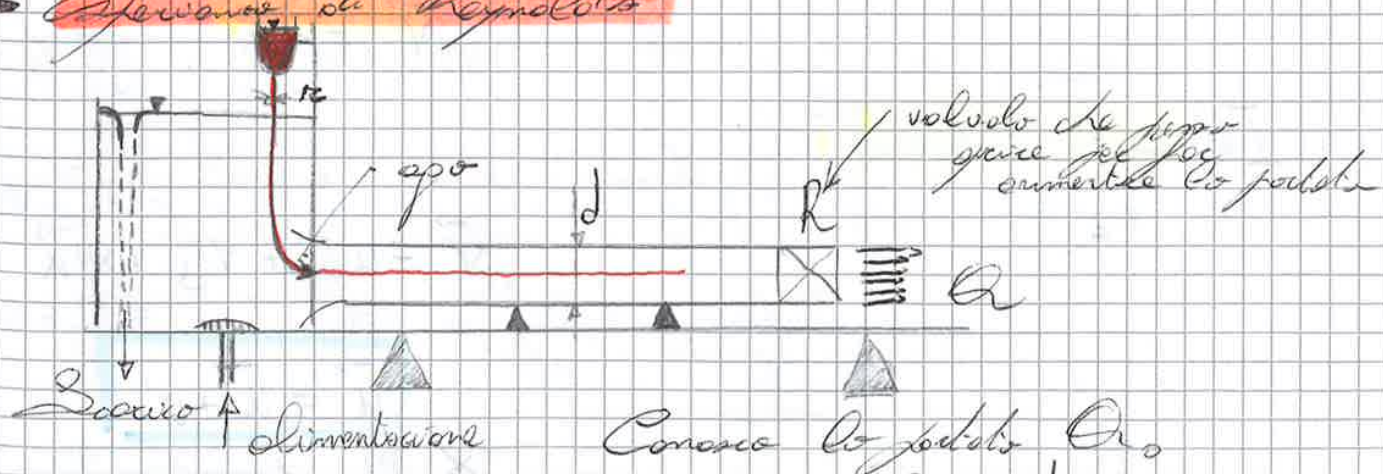
$$\rho(F-A) = \rho \cos P \quad R_e \rightarrow \infty$$

Le forze viscose sono trascurabili

$$\rho(F) = \rho \cos P - \mu \Delta V \text{ (vett)} \quad R_e \rightarrow 0$$

Quest'ultima invece descrive il moto di lento accrescimento dei fluidi reali.

Esperimento di Reynolds



Alimentazione Conoscenza la portata  $Q_0$

$$u_{m_0} = \frac{Q_0}{\Omega} = \frac{Q_0}{\frac{\pi d^2}{4}} \Rightarrow R_{e_0} = \frac{\rho u_{m_0} d}{\mu}$$

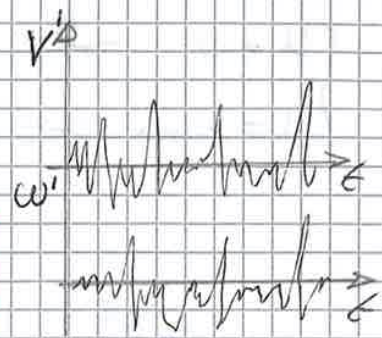
N.B In moto laminare linee di flusso e traiettorie coincidono.

$$\bar{u} = \frac{1}{\tau} \int_{\tau} u' dt = 0$$

Per le altre direzioni ho

$$v = \bar{v} + v'$$

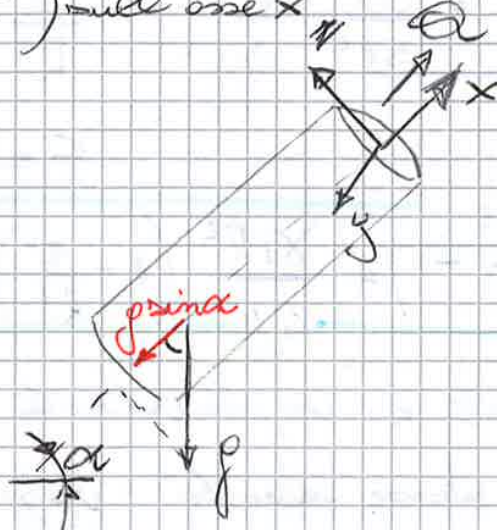
$$w = \bar{w} + w'$$



Ai fini idrodinamici queste oscillazioni non ci servono ma sottopongono solo energia utile al processo. Infatti nel moto turbolento abbiamo una perdita maggiore (alle pareti e oscillazione). Rimasteremo che perdiamo un'energia proporzionale al quadrato delle velocità.

Se moltiplico l'equazione del moto per i vettori ottengo un'equazione scalare ( $\vec{z}$ ) sull'asse x

$$\rho F_x = \frac{\partial p}{\partial x} - \mu \Delta u$$



$$-\rho g \sin \alpha - \frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \nabla^2 u$$

$$-\gamma \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} = -\mu \Delta u$$

$$-\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\mu \Delta u}{\gamma}$$

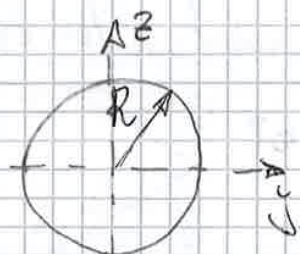
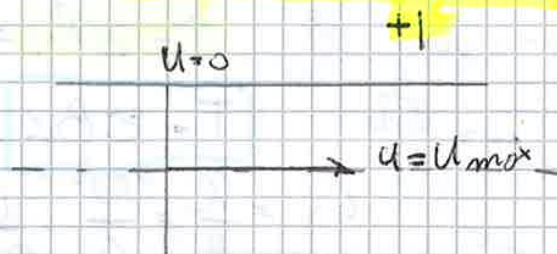
$$-\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial p/\gamma}{\partial x} = -\mu \Delta u$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{\mu \Delta u}{\gamma}$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = h$$

$$\Rightarrow - \frac{dh}{dx} = - \frac{\mu \Delta u}{\gamma}$$

$$-\frac{\gamma h}{\mu} = \Delta u$$



$$\tau_{max} = \tau_0 = \gamma \frac{R}{2} i$$

Per una condotta circolare

$$R = \frac{R}{2} \leftarrow \text{raggio}$$

$$\gamma \frac{R}{2} i = -\mu \frac{du}{dr}$$

$$du = -\frac{\gamma_i R}{2\mu} dr$$

$$\int_{u_{max}}^0 du = -\frac{\gamma_i}{2\mu} \int_0^R r dr$$

} Sono eguali

$$\int du = -\frac{\gamma_i}{2\mu} \int r dr \quad u = -\frac{\gamma_i}{2\mu} \frac{r^2}{2} + cost$$

Per trovare la costante uo lo zero

$$0 = -\frac{\gamma_i}{2\mu} \frac{R^2}{2} + cost$$

$$0 = -\frac{\gamma_i}{4\mu} R^2 + cost \quad cost = \frac{\gamma_i R^2}{4\mu}$$

$$u = \frac{\gamma_i R^2}{4\mu} - \frac{\gamma_i}{4\mu} r^2 = \frac{\gamma_i}{4\mu} (R^2 - r^2) = \frac{\gamma_i R^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Come abbiamo ottenuto prima

• Osservando la espressione dice che esso dipende

$$\tau = f(\rho, \mu, \bar{u}_m, d, \epsilon)$$

dipende dalla  
dimensione e forma del tubo  
d solo se il tubo è circolare

Proprietà / scorrevolezza  
del materiale (tubo)

$$\frac{\tau}{\rho \bar{u}_m d} = f\left(\frac{\epsilon}{d}\right)$$

→ Teorema di Buckingham o pi-grupo

Con questo teorema possiamo diminuire il numero di variabili da cui dipende  $\tau$ . Solitamente si usano  $\rho, \bar{u}_m, d$

Queste si usano per  $\rho, \bar{u}_m, d$

$$\frac{\tau}{\rho \bar{u}_m d} = f\left(\frac{\epsilon}{d}\right)$$

$$[FL^{-2}] = [FL^{-4}T^{-2}]^{\alpha} [LT^{-1}]^{\beta} [L]^\gamma$$

Lezione 10

30.04.15

$$i = \frac{u_m^2}{2g} \lambda(R_e, z)$$

Legge del moto uniforme

Il primo membro rappresenta la perdita di carico per unità di lunghezza.

$$H = h + \frac{u_m^2}{2g}$$

$\downarrow$   
z +  $\frac{p}{\rho}$



Sono paralleli solo nel caso di moto uniforme

→ **Wikimodse** (~1930)

Se il primo e nome de  $\epsilon$  è difficile da calcolare perché non è solo in funzione del materiale ma anche della lavorazione etc.

Prese delle sollecitazioni diverse. Il campo delle sollecitazioni da 2mm in più.

Applicare i piccoli di sollecitazione ad un tubo (tubi di diverse dimensioni)

$$d_s = \epsilon_{s1}$$



$$r_{s,1} = \frac{\epsilon_{s1}}{d_1} \quad r_{s,2} = \frac{\epsilon_{s1}}{d_2} \quad r_{s,3} = \frac{\epsilon_{s1}}{d_3}$$

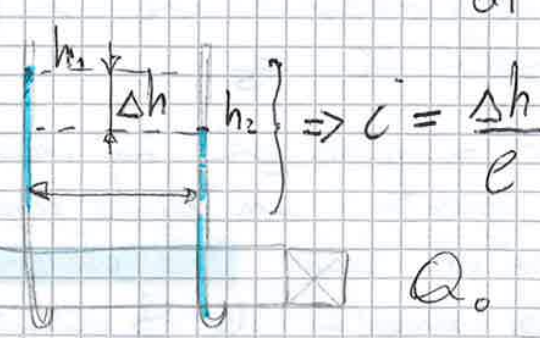
Dimensione dei piani possono essere comprese con le sollecitazioni

$$d_{s2} = \epsilon_{s2}$$

$$r_{s,2} = \frac{\epsilon_{s2}}{d_1}$$

Usa gli stessi tubi ma cambia il diametro dei piccoli di sollecitazione

• **Fec questo esperimento**



$$i = \frac{\Delta h}{l}$$

Conclusione la portata  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_m$

$u_{m0} = \frac{Q_0}{S_0}$	$u_{m1} = \frac{Q_1}{S_1}$	$u_{m2} = \frac{Q_2}{S_2}$	$u_{mm} = \frac{Q_m}{S_m}$
$R_0 = \frac{u_{m0} d_0}{\nu}$	$R_1 = \frac{u_{m1} d_1}{\nu}$	$R_2 = \frac{u_{m2} d_2}{\nu}$	$R_m = \frac{u_{mm} d_m}{\nu}$

i granelli usciranno tutti insieme  $\delta \downarrow$ . Questo è il motivo per cui tutti i corpi si sfilano contemporaneamente. Nel caso reale queste particelle invece si perdono e non formano un unico fronte in cui i corpi si dividono.

**Lezione 11**

4.05.15 10<sup>0</sup>

**→ Turbolenza alla parete (schekle)**

Se siamo in campo laminare e ci spostiamo più avanti dopo un certo tempo il mio moto viene ostacolato. Comincio a turbolare. Le sollecitazioni si fanno a quelle che ho già.

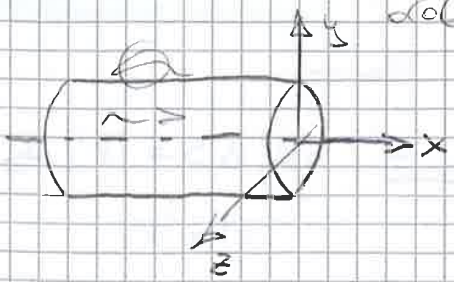
$$Re = \frac{\rho \bar{u} d}{\mu} = \frac{\sum \text{force inerte}}{\sum \text{force viscoso}} = \frac{[MASSA \frac{Du}{Dt}]}{\sum \cdot \text{Area}} = \frac{[\rho Vol (\frac{Du}{Dt} + u \frac{Du}{Dx} + \dots)]}{[\mu \frac{Du}{Dn} L^2]} = \frac{[\rho L^3 u^2 \frac{1}{L}]}{[\mu \frac{u}{L} L^2]} = \frac{[\rho L u^2]}{[\mu u L]} = \frac{[\rho u L]}{[\mu]}$$

Nel caso di moto turbolento la velocità scilbe

$u = \bar{u} + u'$   
 $v = \bar{v} + v'$   
 $w = \bar{w} + w'$

$V = u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2 + w\vec{e}_3$

Quando siamo all'interno di una turbolenza dobbiamo fare una semplificazione



$u = \bar{u} + u'$       $\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_T u' dt = 0$   
 $v = \bar{v} + v' = v'$       $\bar{v}' = \frac{1}{T} \int_T v' dt = 0$   
 $w = \bar{w} + w' = w'$       $\bar{w}' = \frac{1}{T} \int_T w' dt = 0$

Però  $\bar{u'^2}, \bar{v'^2}, \bar{w'^2} \neq 0$



$$\bar{u}_e = \sqrt{\bar{u}^2}$$

valore efficace

$$\frac{\tau_0}{\rho} = u_e^* = m y^\alpha \left(\frac{du}{dy}\right)^\beta$$

$\alpha = \beta = 2$

Usiamo il teorema di Papanicolaou

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{m} y \frac{du}{dy} = u^*$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{ky}} = \int \frac{u^*}{ky} dy$$

$$\bar{u} = \frac{1}{k} u^* \ln y + \text{cost} \quad k=0,4$$

Determiniamo per  $u^*$

$$\frac{u}{u^*} = \frac{1}{k} \ln y + \text{cost}$$

$y = R \quad \bar{u} = u_m$

velocità massima

Dobbiamo trovare la costante

$$\frac{u_m}{u^*} = \frac{1}{k} \ln R + \text{cost}$$

$$\text{cost} = \frac{u_m}{u^*} - \frac{1}{k} \ln R$$

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{k} \ln y + \frac{u_m}{u^*} - \frac{1}{k} \ln R$$

$$\frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{u_m}{u^*} + \frac{1}{k} \ln \frac{y}{R}$$

Distribuzione delle  $\bar{u}$

Quanto vale il valore medio di  $\bar{u}$  ( $\bar{u}$  sono le velocità medie per ogni punto)

$$\bar{u}_m = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \bar{u} d\Omega \cong \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left( u_m + \frac{u^*}{k} \ln \frac{y}{R} \right) 2\pi y dy$$

$$r = R - y$$

$$\frac{\bar{u}_m - u_m}{u^*} = \frac{3}{2k}$$

$k=0,4$  cost di Karman

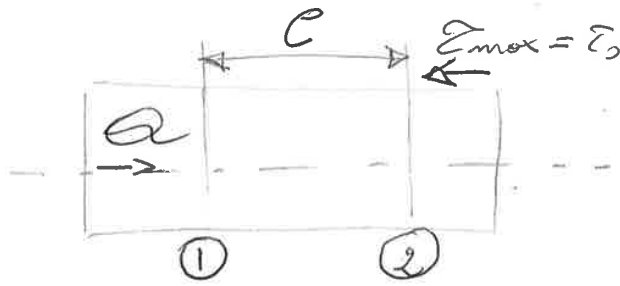
$$i = \frac{\bar{u}_m^2}{2g d}$$

$$g = \gamma R i = \gamma \frac{d}{4} i = \rho g \frac{d}{4} i$$

$$\frac{\tau}{\rho} = \left( \rho \frac{R}{2} i \right) = \frac{\tau_0}{\rho} = (u^*)^2$$

$$i = \frac{u^*^2}{g \frac{R}{2}} \quad \frac{u^*^2}{g \frac{R}{2}} = \frac{\bar{u}_m^2}{2g d}$$





$Q_{a,2}$

$$i = \frac{h_1 - h_2}{e} \cdot \frac{0,83}{1000} = 85 \cdot 10^{-5}$$

$$i = \frac{\bar{u}_m^2}{2g d} = \frac{\bar{u}_m^2}{2g \frac{64}{\rho \bar{u}_m d}} = \frac{32 \bar{u}_m \mu}{\gamma d^2}$$

$$\bar{u}_m = \frac{i d^2 \gamma}{32 \mu}$$

$$Q = \frac{\pi d^2 i \gamma d^2}{4 \cdot 32 \mu} = \frac{\pi}{128} \frac{800}{0,025} 0,6^4 \cdot 85 \cdot 10^{-5} = 0,273 \frac{m^3}{s}$$

$$\Sigma_{max} = \tau_0 = \gamma R i = \gamma \frac{1}{4} i = 1,33 \frac{N}{m^2}$$

$$T = \Sigma \pi d \cdot l = 1,33 \cdot \pi \cdot d \cdot l = 3351,91 N$$