NUMERO: 1751A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia Angela

MATERIA: Geometria - prof. Casnati

Esercitazione sulle matrici

Matrice: definita da m, n, due numeri naturali diversi da zero. Corrisponde a una tabella ordinata di m, n dove m è il numero di righe, n è il numero di colonne. I numeri della tabella sono detti "entrate" e sono racchiusi tra parentesi tonde (o quadre)

es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$ $m=2$, $n=3$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$ $m=3$, $n=1$

$\begin{pmatrix} 1 & \pi \\ \sqrt{3} & -2 \\ 0 & e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$ $m=3$, $n=2$ $\qquad (-3 \quad \sqrt{2} \quad 7+\sqrt{5}) \in \mathbb{R}^{1,3}$ $m=1$, $n=3$

$\begin{pmatrix} 1 & e & 7 \\ \pi & -e/2 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ $m=n=3$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 4 & \end{pmatrix}$ non è una matrice: dobbiamo avere numeri reali in qualsiasi posizione della griglia

Possiamo indicare una matrice come $\in$ a $\mathbb{R}^{m,n}$.

$\mathbb{R}^{m,n}$ insieme delle matrici a entrate reali con m righe e n colonne

- $m = 1$ matrice riga
- $n = 1$ matrice colonna
- $m = n = 1$ è un numero $\mathbb{R}^{1,1} \sim \mathbb{R}$ es (7)
- $m = n$ matrici quadrate

Le matrici sono indicate con lettere maiuscole

$A = (a_{ij})$ $\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ $\quad a_{2,2} = 4$, $a_{1,1} = 1$ $\quad a_{1,3}$ NON ESISTE, $a_{3,1} = \pi$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matrice nulla: $0_{m,n}$ è matrice nulla di $\mathbb{R}^{m,n}$. Tutte le entrate sono zero

Matrice opposta di una matrice $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ è definita come $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ dove $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \pi \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -\pi \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Vale $A + (-A) = 0_{m,n}$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & e \end{pmatrix}$ $\quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & e \end{pmatrix}$

Proprietà dell'operazione di trasposizione m,n

$\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

1) ${}^t({}^tA) = A$

2) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

3) ${}^t(\alpha A) = \alpha\, {}^t(A)$

Matrici quadrate

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i,j \leq n$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$a_{ii} \quad i = 1, \dots, n$ sono elementi della diagonale principale

es.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 8 & 1/3 \\ 2 & \pi & e \end{pmatrix} \quad a_{1,1} = 1 \quad a_{2,2} = 8 \quad a_{3,3} = e$

Diagonale principale $(1 \ 8 \ e)$

Matrici identità

insieme

$I_n \in \mathbb{R}^{n,n}$

$I_1 = (1)$

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Le matrici identità hanno 1 come elemento in ogni entrata sulla diagonale principale e zero altrove

(Sottoinsieme delle matrici quadrate)

Matrici triangolari superiori / inferiori

(in riferimento alla diagonale)

$A = (a_{ij}) \quad 1 \leq i,j \leq n$

Superiori $\quad a_{ij} = 0 \quad i > j$

Inferiori $\quad a_{ij} = 0 \quad i < j$

es. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -e \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\pi & 0 \\ -\sqrt{2} & 8 & 2 \end{pmatrix}$ MATRICE TRIANG. INFERIORE

MATRICE TRIANG. SUP.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 312

$\hookrightarrow$ $(1)\ X + Y = M$
$(2)\ X - Y = {}^tM$

$(1)+(2) \longrightarrow 2X = M + {}^tM$
$X = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$

$(1)-(2) \longrightarrow 2Y = M - {}^tM \longrightarrow Y = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$

$$\begin{cases} X = \dfrac{M + {}^tM}{2} \\ Y = \dfrac{M - {}^tM}{2} \end{cases}$$

<u>Verifico</u>

${}^tX = {}^t\left(\frac{1}{2}(M + {}^tM)\right) = \frac{1}{2}\,{}^t(M + {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}(M + {}^tM) = X$

$\hookrightarrow$ X è simmetrica

${}^tY = {}^t\left(\frac{1}{2}(M - {}^tM)\right) = \frac{1}{2}\,{}^t(M - {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t(-{}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) =$
$= \frac{1}{2}({}^tM - M) = -\frac{1}{2}(M - {}^tM) = -Y$

$\hookrightarrow$ Y è antisimmetrica

es. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{2}(M + {}^tM) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 5/2 & 4 \end{pmatrix}$ X è simmetrica

$Y = \frac{1}{2}(M - {}^tM) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ Y è antisimmetrica

$A \; B \in \mathbb{R}^{n,n}$

prodotto distributivo rispetto alla somma

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$M \in \mathbb{R}^{m,m} \quad M^p \quad p \in \mathbb{N} = \{1, 2 \dots\}$

$M^1 = M$

$M^p = M M^{p-1}$

MM

Proprietà del prodotto di matrici

$A \in \mathbb{R}^{m,p} \quad B \in \mathbb{R}^{p,q} \quad C \in \mathbb{R}^{q,n}$

$\underbrace{(AB)}_{mq}\underset{q,n}{\times C} = mn$

$\underset{m,p}{A}\underset{pn}{(BC)} = mn$

- $\underset{m \times n}{(AB)C} = \underset{m \times n}{A(BC)}$ proprietà associativa
- $\exists! \, I_p \in \mathbb{R}^{p,p}$

  $\forall A \in \mathbb{R}^{m,p} \quad A I_p = A$

  $\forall B \in \mathbb{R}^{p,n} \quad I_p B = B$

$I_1 = (1)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} (1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$\overset{3,2}{A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \overset{I_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{A}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}$$

$$I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{B^{2\times 3}}{\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{22} & b_{2,3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2,3} \end{pmatrix}$$

- $\alpha \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,p} \quad B \in \mathbb{R}^{p,n}$

  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ Gli scalari possono essere spostati da una matrice all'altra
- $A \in \mathbb{R}^{m,p} \quad B, C \in \mathbb{R}^{p,n}$

  $mp \times pn = mn \quad mn + mn$

  $A(B+C) = AB + AC$
- $A, B \in \mathbb{R}^{m,p} \quad C \in \mathbb{R}^{p,n}$

  $mp \quad pn = m,n \quad m,n \quad m,n$

  $(A+B)C = AC + BC$
- $A \in \mathbb{R}^{m,p} \quad B \in \mathbb{R}^{p,q}$

  $\boxed{{}^t(A+B) = {}^tB \, {}^tA}$

  $\underset{p \times m}{{}^tA} \quad \underset{q \times p}{{}^tB}$

la trasposta di una somma è QUASI la trasposta delle matrici moltiplicate → devo invertirle

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 312

1) Se A è invertibile esiste $\exists x : ({}^tA)x = I_n$?   Se A è invertibile, lo è anche la sua trasposta?

$({}^tA)^t({}^tx)$
${}^t({}^tx A)$

$\updownarrow$ ${}^t(YA) = I_n$?

Se A è invertibile $\exists Y (= {}^tx)$

${}^t(YA) = I_n$? Trasponendo entrambi i membri

$YA = {}^tI_n = I_n$

Sì ${}^tx = Y = A^{-1} \longrightarrow x = {}^t(A^{-1})$

Prop $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile $\longrightarrow {}^tA$ è invertibile

$$\boxed{({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})}$$

2) A e B invertibili $\longrightarrow \exists x : (AB)x = I_n$?

$A(Bx) = I_n$

$\updownarrow$

$\exists x$ invertibile: $Bx = A^{-1}$ $A^{-1}(A(Bx)) = A^{-1}I_n$

$A^{-1}ABx = A^{-1}$

$x = B^{-1}A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$ $\cancel{I_n}\, Bx = A^{-1}$

Prop Se $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertibile $\longrightarrow AB$ è invertibile e $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

es. Se $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ e A, AB sono invertibili $\longrightarrow B$ è invertibile?

${}^tAX = I_n$?

Trasponiamo entrambi i membri

${}^tXA = I_n^t = I_n$

moltiplichiamo a destra per A^{-1} che sappiamo esistere perché A è invertibile per ipotesi

${}^tX = I_nA^{-1}$

${}^tX = {}^tX \cdot I_n = {}^tX(AA^{-1}) = \underbrace{({}^tXA)}\,A^{-1} = \underbrace{I_nA^{-1}} = A^{-1}$

Trasponiamo

$X = {}^t(A^{-1})$

Sistema scritto in forma matriciale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{m \times 1}$$

sistema, equazione matriciale

$AX = B$ → matrice dei termini noti

A → matrice incompleta

X → matrice delle incognite

Le soluzioni del sistema sono $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ tali che valga l'identità matriciale $A\bar{X} = B$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es.
$$\begin{cases} b - d + e + f = 3 \\ a + d - g = 0 \\ 2b + c + 3e = 0 \end{cases}$$

cerchi $\underbrace{a\ b\ c\ d\ e\ f\ g}_{7 \text{ incognite}}$

$f = 3 - b + d - e$
$a = g - d$
$c = -2b - 3e$

$$\begin{pmatrix} g - d \\ b \\ -2b - 3e \\ d \\ e \\ 3 - b + d - e \\ g \end{pmatrix}$$

Qualunque valore assegni a $b\ d\ e\ g$ ho soluzione

$b = 1$
$d = e = g = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni sono tutte le sequenze ordinate a partire dai valori dati a $b\ d\ e\ g$

Matrici ridotte per riga

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in ogni equazione c'è un'entrata non nulla che è unica entrata nella sua colonna

In ogni riga della sua matrice (incompleta) c'è un'entrata non nulla che è l'unica entrata non nulla nella sua colonna

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$ si dice fortemente ridotta per righe se vale la seguente proprietà:

1) se la riga di indice i_0 contiene entrate non nulle allora esiste j_0 tale che l'entrata $a_{i_0 j_0} = 1$ e $a_{i j_0} = 0$ con $i \neq i_0$

[una sola entrata $a_{i_0 j_0}$ detta PIVOT (della riga di indice i_0) che vale 1 e tale che $a_{i j_0} = 0$ $i \neq i_0$]

2) se $\exists\, i_0$ t.c. $a_{i_0 j} = 0$ $\forall j = 1 \dots N$ → $a_{ij} = 0$ $\forall i \geq i_0$ → di indice $i > i_0$ sono anch'esse nulle

Se tutte le entrate della riga di indice $i_0 < m$ sono nulle allora le entrate di ogni riga

$$\begin{pmatrix} 1/3 - y \\ y \\ y - 2/3 \end{pmatrix} \quad y \in \mathbb{R}$$

Dal punto di vista della matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

matrice dei coeff. — matrici dei termini noti

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3} R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 2/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & -2/3 \\ 1 & 1 & 0 & 1/3 \end{array}\right)$$

Operazioni elementari di riga: sommare a una riga il multiplo di un'altra

Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo

scambiare due righe

$\to$ non cambia insieme soluzioni

(1) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+2z=-3 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right)$

(2) $\xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x \quad +3z=-2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right)$

se $(x_0\ y_0\ z_0)$ è soluzione di (1) si ha $\begin{cases} x_0+y_0+z_0-1=0 \\ x_0-y_0+2z_0+3=0 \end{cases}$

Per quanto riguarda (2) si ha $\begin{cases} x_0+y_0+z_0-1=0 \\ 2x_0+3z_0+2=(x_0+y_0+z_0-1)+(x_0-y_0+2z_0+3)=0 \end{cases}$

Quindi $(x_0\ y_0\ z_0)$ è anche soluzione di (2)

L'insieme delle soluzioni di (1) è contenuto in quello del sistema (2)

Poiché viceversa il sistema (1) si può ottenere da (2) sostituendo alla seconda equazione la seconda equazione meno la prima anche l'insieme delle soluzioni di (2) è contenuto in (1) dunque tali sistemi coincidono cioè (1) e (2) hanno le stesse soluzioni $\to$ sono equivalenti

Due sistemi sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 + R_4]{R_2 \to R_2 + 3R_4} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 - \frac{2}{3} R_2} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_1 \to -R_1 \\ R_2 \to 1/3 R_2 \\ R_4 \to -R_4}}{\xrightarrow{*}} \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*sistemo Pivot

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2/3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fortemente ridotto per righe

↳ rango 3

Rango di una matrice

A seconda delle (scelte) operazioni di riga cambiamo le matrici. Si dimostra però che

Prop $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ $A', A'' \in \mathbb{R}^{m,n}$ ottenute da A mediante operaz. elem. di riga e ridotte per righe

$\longrightarrow$ # n° righe non nulle di A' = # n° righe non nulle di A''

Def $A \in \mathbb{R}^{m,n}$
Sia A' ottenuta da A con op. el. di riga e ridotta per righe. Si definisce rango di A $rk(A)$ il numero di righe non nulle di A'

Proprietà
- $rk(A) \leq m$ per definizione
- $rk(A)$ coincide con il numero di pivot di una forma ridotta per righe di A, ogni pivot è su una colonna diversa quindi $rk(A) \leq n$

$\longrightarrow A \in K^{m,n}$ $rk(A) \leq \min\{m, n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \quad R_2 \to R_2 + \alpha R_1 = 0$$

Ha rango 1 se non è nulla e se una è multipla dell'altra (vale solo per rango 1)

questo è rango 2

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 312

b) In seguito alla dimostrazione a) si possono esprimere le incognite i cui coeff. sono pivot ($rk(A) = \#$ pivot) in funzione delle rimanenti (in totale $n - rk(A)$) cui possiamo dare valori arbitrari

c) $AX_0 = B$

$X_0 \in \mathbb{R}^{n,n}$

Sia $X \in k^{n,1}$ soluzione del sistema ① cioè tale che $AX = B$. Posto $Y = X - X_0 \rightarrow$
$AY = A(X - X_0) = AX + A(-X_0) = AX + A(-1)X_0 = AX - AX_0 = B - B = 0_{m,1}$ Quindi Y è soluzione di ②

$\supseteq$ Y è soluzione di ② $\longleftrightarrow$ $AY = 0_{m,1}$

$A(X_0 + Y) = AX_0 + AY = B + 0_{m,1} = B$

$\hookrightarrow$ $X_0 + Y$ è soluzione di ①   il 2° insieme è contenuto nel 1°

Viceversa sia $Y \in k^{n,1}$ soluzione di ② cioè tale che $AY = 0_{m,1}$ posto $X = Y + X_0$ si ha $AX = A(Y + X_0) = AY + AX_0 = 0_{m,1} + B = B$
Quindi X è soluzione del sistema

$\subseteq$ X soluz. di ① $\longleftrightarrow$ $AX = B$

$X = X_0 + (X - X_0)$

$A(X - X_0) = AX + A(-X_0)$

$AX - AX_0 = B - B = 0_{m,1}$

$\hookrightarrow$ $X - X_0$ è soluzione di ②   il 1° insieme è contenuto nel 2°

es. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ / $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

I due ranghi sono $\neq$ r incompatibile, mi fermo

$$\left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$ Questo è compatibile

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} b - c + d = 1/3 \\ a + b = 2/3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} d &= 1/3 - b + c \\ a &= 2/3 - b \end{aligned}$$

$$\text{Sol } \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 - b \\ b \\ c \\ 1/3 - b + c \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in k \right\}$$

$4 - \overset{\text{rango}}{2} = 2$

$$\text{Soluz. } 0_m = \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \\ c \\ -b+c \end{pmatrix} \middle| \, b, c \in k \right\}$$
Omogeneo

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&-1\\1&2&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&-1\\0&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&-2\\0&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}1X_1+1X_2=(1\ -1)\\1X_1+2X_2=(1\ 0)\end{cases}$$

$$\begin{cases}1X_1+0X_2=(1\ -2)\\0X_1+1X_2=(0\ 1)\end{cases}\longrightarrow X\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

Teorema di Rouché-Capelli per le equazioni matriciali

$AX=I_m$

Th = $A\in\mathbb{R}^{m,n}$ $B\in k^{m,p}$

① $AX=B$

② $AX=O_{m,p}$

a) ① ha soluzione solo se (è compatibile) $rk(A)=rk(A/B)$

b) se ① ha soluz → le sue soluz. (matrici $n\times p$) dipendono da $n-rk(A)$ righe libere

c) se ① ha soluzione e X_0 $\in k^{n,p}$ è una soluz. fissata allora le sue soluzioni $X\in k^{n,p}$ sono tutte le matrici nella forma $X=X_0+Y$ dove $Y\in k^{n,p}$ appartiene all'insieme delle soluzioni di ②

$\{$soluzioni di ①$\}=\{X_0+Y \mid Y$ è soluz. di ②$\}$

Calcolo dell'inversa di una matrice

Chiedere se A sia compatibile equivale a chiedere se la matrice A sia invertibile. Infatti se l'equazione A è compatibile la sua unica soluzione è A^{-1}. L'equazione $AX=I_n$ è compatibile se e solo se $rk(A)=rk(A|I_n)$ ✱

$A\in k^{n,n}$ $AX=I_n$

ha soluzione solo se $rk(A)=rk(A/I_n)$

Prop $A\in\mathbb{R}^{m,n}$ è invertibile se e solo se il rango di A vale n $rk(A)=n$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&2&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&1&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&-1\\0&1&-1&1\end{array}\right)\quad \begin{matrix}X_1=(2\ -1)\\X_2=(-1\ 1)\end{matrix}\quad A^{-1}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

✱ ma $A|I_n$ è fortemente ridotta per righe ed il suo rango è esattamente $rk(I_n)=n$

Abbiamo dimostrato che A è invertibile solo se $rk(A)=n$

Se A è invertibile per calcolare l'inversa si può scrivere la matrice completa $(A|I_n)$ e ridurre questa a una matrice fortemente ridotta $(A'|A'')$ su ogni riga di A' deve esserci un'entrata pari a 1 perché $rk(A)=n$ poiché ci sono n colonne su ogni riga tutte le entrate sono nulle eccetto una che vale 1 e si trova su una colonna diversa. Per permutazione di righe si arriva a $(I_n|A''')$. Si osserva che l'equazione di partenza è equivalente a $I_nX=A'''$ dunque $A^{-1}=A'''$

Esercitazione

Sia data l'equazione matriciale di secondo grado $t^2 - 5t + 6I_2 = O_2$

- Si discuta il numero di soluzioni dell'eq. seguendo le osservazioni:

a) mostrare che la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ è soluzione

b) verificare che anche la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ è soluzione

c) esistono altre soluzioni? (Provare A modificare A scegliendo $a_{1,2}$ qualsiasi

d) generalizzare mostrando che ogni matrice è del tipo $P^{-1}AP$ è soluzione

a) $t^2 - 5t + 6I_2 = O_2$

$A^2 - 5A + 6I_2 \overset{?}{=} O_2$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 0 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

b) analogo

c) $\bar{A} \begin{bmatrix} 2 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\qquad \bar{A}^2 = \begin{bmatrix} 2 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5k \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5k \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5k \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -5k \\ 0 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

d) $(P^{-1}AP)^2 - 5(P^{-1}AP) + 6I_2 \overset{?}{=} O_2$

$$(P^{-1}AP)^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{I_2}AP = P^{-1}A^2P$$

$$P^{-1}A^2P - 5P^{-1}AP + 6P^{-1}I_2P \Rightarrow P^{-1}\underbrace{(A^2 - 5A + 6I_2)}_{O_2}P = O_2 \text{ matrice nulla}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 312

- calcolare l'inversa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$BX = I_3$

$(B \mid I_3) \xrightarrow{\text{RIDUZIONE}} (I_3 \mid B^{-1})$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ la guardo come se fosse un'unica matrice

$$\xrightarrow{R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(a sinistra I_3, a destra B^{-1} ?)

Verifico $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Sia $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,1}$. Supponiamo che il sistema $AX = B$ abbia 2 soluzioni distinte X_1, X_2. Quali delle seguenti è vero?
  1) Il sistema ha ∞ soluz.
  2) La matrice A è invertibile
  3) Il sistema non ha altre soluz.
  4) $X_1 - X_2$ è soluz del sistema

$AX = B \qquad X_1 \neq X_2$

(1) $AX_1 = B$
(2) $AX_2 = B$

se A è invertibile $A^{-1}AX = A^{-1}B$
$X = A^{-1}B$ ma le soluz. sono distinte (non è 2)

(1)-(2) $A(x_1 - x_2) = 0$

$x_1 - x_2$ è soluz. del sistema omogeneo
non posso dedurre che è soluz anche del sistema iniziale, B dovrebbe essere fatto tutto di zeri (non è la 4)

$AX = B \qquad AX = 0$

$A\bar{X} = B \qquad AX_0 = 0$

$\bar{X}$ soluz. sistema completo $\quad X_0$ = soluz sistema omogeneo $\longrightarrow X = \bar{X} + tX_0 \quad t \in \mathbb{R}$ sono tutte soluz. del sist. completo $AX = B$

Nel caso di matrici triangolari superiori / inferiori e matrici diagonali (particolari matrici triangolari) si ha il prodotto delle entrate in diagonale come determinante

es $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -3 - 3\cdot 3 = -12$

Come si comporta il determinante nelle operazioni principali

I determinanti non si calcolano quasi mai con le formule di Laplace, si tiene conto delle seguenti proprietà

Prop $A \in K^{n,n}$

E1) Se A' è ottenuta da A sommando a una riga (colonna) un multiplo di un'altra $\rightarrow \det(A') = \det(A)$ *

E2) Se A' è ottenuto da A moltiplicando una riga (colonna) per $\alpha \in K \rightarrow \det(A') = \alpha \det(A)$ *

E3) Se A' è ottenuto da A scambiando due righe (colonne) diverse $\rightarrow \det(A') = -\det(A)$ *

se moltiplico per $-\frac{1}{2}$ $\alpha = -2$

il prodotto

es. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3$

$-\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$

Corollario (deriva dalla 3ª prop.)

Se $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \rightarrow \forall i = 1 \dots n$

$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

La 3ª proprietà ci permette di sviluppare il determinante di una qualsiasi matrice A, invece che secondo la prima riga, secondo una riga qualsiasi

es $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3(1-2) = -3$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 \cdot 4 = -12$

Th $A \in K^{n,n}$

$\det(A) = \det({}^tA)$

* Poiché ogni operazione elementare di riga su ${}^tA$ equivale ad un'analoga operazione elementare di colonne su A vale

se ho una colonna nulla $\rightarrow {}^tA$ diventa riga nulla e i calcoli sono + semplici

Corollario: Se $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \rightarrow \forall j = 1 \dots n \in K^{m,m}$

$\det(A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$

Quindi si può parlare di sviluppo di Laplace secondo la colonna di indice j

Matrice aggiunta

$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in K^{n,n}$

$\tilde{A} = {}^t(A_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

Definiamo aggiunta di A la matrice $\tilde{A}$ la cui entrata di posizione (i,j) è il complemento algebrico A_{ji} dell'entrata a_{ji}.

Si consideri il prodotto $A \cdot \tilde{A}$. sarà una matrice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix}$$

$$a_{11} A_{21} \rightarrow a_{11}(-1) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Lemma $A \in K^{n,n}$

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)\, I_n$$

Prop: $A \in K^{n,n}$ è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$

In tal caso $[\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ e ...$]$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A} \longrightarrow \text{non usarlo per matrici > di } 2 \times 2$$

Dim se A è invertibile $\longrightarrow$ $\det A \neq 0$

$\leftarrow$ sia $\det(A) \neq 0$

$$\left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}\right) A = A\left(\frac{1}{\det(A)} \tilde{A}\right) = \frac{\det(A)}{\det(A)} I_n \Rightarrow I_n$$

Supp. A invertibile
Esiste la matrice A^{-1} che soddisfa $AA^{-1} = I_n$
calcolo il det di ambo i membri

$1 = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$

dunque $\det(A) \neq 0$ e si ha che

$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Viceversa se $\det(A) \neq 0$ allora

$A\left(\frac{1}{\det(A)} \tilde{A}\right) = \frac{1}{\det(A)} A\tilde{A} =$

$\frac{1}{\det(A)} (\det(A) I_n) = I_n$

$\hookrightarrow$ quindi A è invertibile e vale la formula

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \underbrace{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}^{\text{Matrice aggiunta}}}_{\tilde{A}} \cdot \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$A_{11} = a_{22}$
$A_{12} = -a_{21}$
$A_{22} = a_{11}$
$A_{21} = -a_{12}$

es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

① calcoli $\det(A)$
② fai la ${}^tA$
③ calcoli le varie entrate $\begin{pmatrix} \frac{|\ldots|}{\det(A)} & \frac{|\ldots|}{\det(A)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \end{pmatrix}$

geometria lineare

VETTORE APPLICATO

→ "algebrizzare" gli enti della geometria euclidea cioè associargli delle matrici

nel piano e nello spazio euclideo S_2 S_3 S_n vale per S_2 e S_3

Per due punti passa una retta che individua tre regioni: una limitata (segmento) e due illimitate (semirette)

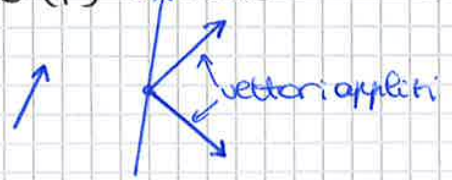
segmento nullo o degenere se $A=B$

A, B $\quad \overline{AB} = \overline{BA}$

Segmento: siano A e B due punti di S_n (se $n=2$ nel piano, se $n=3$ nello spazio). Se $A \neq B$ esiste un'unica retta r passante per A e B e tali punti dividono r in 3 parti: una semiretta di origine A, una di origine B e una parte limitata di retta tra A e B detto segmento di estremi A e B

un vettore applicato in O è un segmento con un (punto) estremo in O → origine o punto di applicazione

l'estremo in O è detto estremo vincolato. L'altro (P) è detto estremo libero



$V_n(O)$ insieme dei vettori applicati in O
O è punto di applicazione
l'altro (punto) estremo è libero

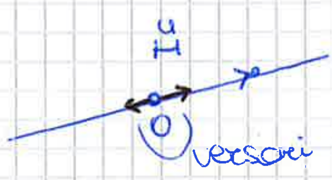
$\vec{OP} \neq \vec{PO}$ perché uno è applicato in O l'altro no

$\vec{O}$ vettore nullo (se $O=P$) ha direzione e verso indeterminati

i due punti O e P identificano la direzione (retta passante per O e P)
se O divide in due piani, il semipiano contenente il 2° estremo è il verso. Il verso è la semiretta di origine O e contente P
il modulo del vettore è la lunghezza di $\overline{OP}$ rispetto all'unità u
spazio puntato con unità di misura fissata

$\vec{OP}$, $P \neq O$:
- direzione = retta
- verso = semiretta
- modulo = numero positivo $|\vec{OP}|$

} identificano il vettore



i versori sono vettori di lunghezza 1
ci sono due versori fissata la direzione

la nozione di sistema di riferimento cartesiano ortogonale → fissata di un sistema di riferimento nel piano: dare una misura u
terna O (punto), $\vec{i}, \vec{j}$ (due versori)

1) $\vec{i}, \vec{j}$ versori applicati in O
2) direzioni di $\vec{i}$ e $\vec{j}$ $\perp$
3) $\vec{i}$ si sovrappone a $\vec{j}$ con una rotazione antioraria di un angolo retto

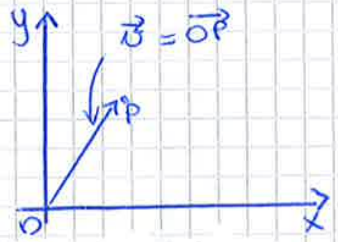
Distanza tra due punti nello spazio

$A(x_A, y_A, z_A)$

$B = (x_B, y_B, z_B)$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$

Prime operazioni sui vettori



Il vettore è identificato dal secondo punto (P) che corrisponde a una coppia ordinata

$\overrightarrow{OP} \longleftrightarrow P \longleftrightarrow (x_P, y_P)$

$\overrightarrow{OP} \longleftrightarrow (x_P, y_P)$

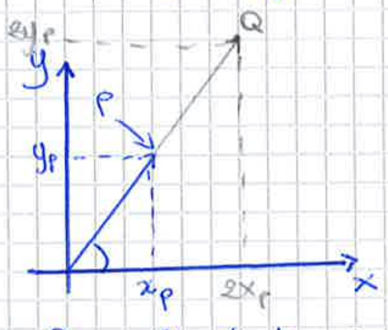
Il prodotto di un vettore applicato per uno scalare corrisponde alla matrice

matrice $\quad \alpha$

$(x \quad y) = (\alpha x \quad \alpha y)$

corrisponde a $\overrightarrow{OP}$

Definisco $\alpha\overrightarrow{OP}$ il vettore corrispondente alla matrice $\alpha(x \ y)$



$\alpha = 2$

$2\overrightarrow{OP}\,(2x_P \quad 2y_P)$

Due triangoli simili: le ipotenuse sono proporzionali $|2\overrightarrow{OP}| = 2|\overrightarrow{OP}|$

Le direzioni dei due vettori coincidono perché formano lo stesso angolo con l'asse delle x

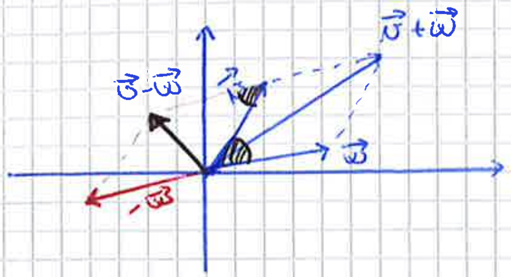
Si trovano nello stesso quadrante: stesso verso

NB $\quad \vec{v} \in V_n(O) \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow \alpha\vec{v}$
- $\vec{0}$ se $\alpha = 0$ o $\vec{v} = \vec{0}$
- è un vettore avente stessa direzione di $\vec{v}$
- verso: verso di $\vec{v}$ se $\alpha > 0$; opposto a $\vec{v}$ se $\alpha < 0$
- $|\alpha\vec{v}| = |\alpha|\,|\vec{v}|$ se $\alpha \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$

$|\alpha|$ in $\mathbb{R}$; $|\vec{v}|$ in $V_n(O)$

$\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
$\vec{w} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$
$\Big\} \ \vec{v} + \vec{w} = (3+1)\vec{i} + (2-3)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = 4\vec{i} - \vec{j}$



rette tagliate da trasversale

$\vec{v} + \vec{w}$

$\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$ interpretazione geometrica: diagonale uscente da O del parallelogramma avente lati $\vec{v}$ e $-\vec{w}$

Vettori paralleli

$\vec{OP}$ $\vec{OQ}$ sono paralleli se O, P, Q sono allineati (caso in cui uno dei due è nullo) $P \neq O$ si scrive $\vec{OP} // \vec{OQ}$

Prop $\vec{v}$ $\vec{w}$ $\in V_n(O)$ $\vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{v} // \vec{w} \leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R} : \vec{w} = \alpha\vec{v}$ se sono paralleli uno è multiplo dell'altro

Dim se $\vec{w} = \alpha\vec{v}$: se $\vec{w} = \vec{0}$ $\vec{w} // \vec{v}$ per definiz. Se $\vec{w} \neq 0$ interpretazione geometrica del prodotto per scalare
$\leftarrow$ Ovvia viceversa supp. $\vec{w} // \vec{v}$ se $\vec{w} = 0$ $\vec{w} = 0\vec{v}$ se $\vec{w} \neq \vec{0}$ se $\vec{v}, \vec{w}$ concordi : e $\times$ per il modulo che è supposto $\neq 0$

$\rightarrow$ $\vec{v} = |\vec{v}| \left(\frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} \right)$ $\alpha\vec{v}$

$\alpha = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$ se sono discordi $\alpha = \frac{-|\vec{w}|}{|\vec{v}|}$. Allora $\alpha\vec{v}$ è un vettore avente stessa direzione di $\vec{v}$ se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ concordi, opposta se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ discordi (coincidente con $\vec{w}$)

è un vettore unitario $\rightarrow$ versore
ha la stessa direzione / verso del vettore

$|\alpha||\vec{v}| = \left(\frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}\right)|\vec{v}| = |\vec{w}|$
$\hookrightarrow \vec{w} = \alpha\vec{v}$

1) $\vec{w} = \vec{0}$ $\vec{w} = 0\vec{v}$
2) $\vec{w} \neq \vec{0}$

$\vec{w} = |\vec{w}| \left(\frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} \right)$

$\frac{1}{|\vec{w}|} \vec{w} = \pm \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$

$\vec{w} = \pm \underbrace{\frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|}}_{\alpha} \vec{v}$

Se $\vec{OP} // \vec{OQ}$ sono non nulli diciamo che i due vettori sono concordi se hanno lo stesso verso / discordi se hanno versi distinti. Nel caso uno dei due sia nullo es. $\vec{OP} = \vec{0}$ cioè P = O i tre punti O, P e Q risultano ovviamente allineati

$\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$
$\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$
$\alpha(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ dire che sono // vuol dire risolvere l'equazione

$$\begin{cases} 3\alpha = 1 \\ 2\alpha = 1 \\ -\alpha = 2 \end{cases} \longrightarrow \text{non sono paralleli}$$

② A, B, C, D sono complanari se e solo se

$$\boxed{\text{rk}\begin{pmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{pmatrix} \leq 2} \longleftrightarrow \text{A B C D complanari}$$

determinante di complanarità det = 0

Prodotto scalare di vettori

Def Dati $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$

$\vec{w} = w_x\vec{i} + w_y\vec{j} + w_z\vec{k}$ definiamo il prodotto scalare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ il numero

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = (v_x \; v_y \; v_z)\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

stesso cosa $(\vec{v} \cdot \vec{w})$

1) $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{(v_x-0)^2+(v_y-0)^2+(v_z-0)^2} = \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

il modulo di v è la radice quadrata del prodotto scalare di v per se stesso

$\hookrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$

2) $\langle \vec{i}, \vec{i} \rangle = 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$ ① $\quad 1 = \langle \vec{i}, \vec{i} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle$

Si considerino i versori $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

$\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} \quad \vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}$

② $\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = 0 \quad \langle \vec{i}\,\vec{j} \rangle = \langle \vec{j}\,\vec{i} \rangle = \langle \vec{i}\,\vec{k} \rangle = \langle \vec{k}\,\vec{i} \rangle = \langle \vec{j}\,\vec{k} \rangle = \langle \vec{k}\,\vec{j} \rangle = 0$

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Prop

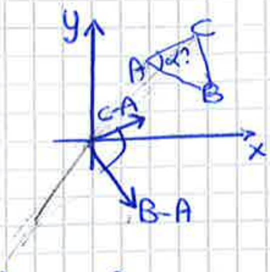
1) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_m(o) \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ — poch: casi in cui il prodotto è commut

2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V_m(o) \quad \langle \vec{u}, \vec{v}+\vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

3) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V_m(o) \; \alpha \in k \quad \alpha\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \alpha\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \alpha\vec{w} \rangle$

4) $\forall \vec{v} \in V_m(o) \; \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ e $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

il prodotto scalare è definito positivo



$B-A = -\vec{j} + 2\vec{k}$ $\sqrt{1+4}$ $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0+3+4=7$

$C-A = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ $\sqrt{1+9+4}$

$\alpha = (C-A)\widehat{\ }(B-A) = \arccos \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{14}}$ α = acuto

trovo anche gli altri due traslando in B e C
se sono positivi acutangolo
se 1 negativo e due positivi ottusangolo

Equazione di Cauchy-Schwartz

$$-1 \le \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}||\vec{w}|} \le 1$$

il coseno è limitato tra -1 e 1

$$-|\vec{v}||\vec{w}| \le \langle \vec{v}\, \vec{w} \rangle \le |\vec{v}||\vec{w}|$$

$$\boxed{|\langle \vec{v}\, \vec{w} \rangle| \le |\vec{v}||\vec{w}|}$$

è uguale quando i due vettori sono paralleli (discordi o concordi)

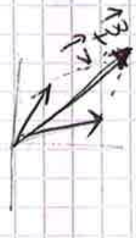
Da qui si deriva la disuguaglianza triangolare

$$|\vec{v}+\vec{w}|^2 = \langle \vec{v}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \le |\vec{v}|^2$$
$$+ 2|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| + |\vec{w}|^2 \underset{C-S}{\le} |\vec{v}|^2 + 2|\vec{v}||\vec{w}| + |\vec{w}|^2 = (|\vec{v}| + |\vec{w}|)^2$$

Cauchy-Schwartz

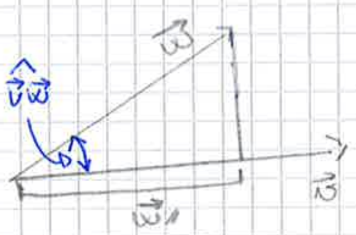
da dis. triangolare

$$|\vec{v}+\vec{w}| \le |\vec{v}| + |\vec{w}| \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V_n(O)$$



Proiezioni

$$\langle \vec{v}\, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}\vec{w}}$$



$$\vec{w}_{//} = \left[|\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}\,\vec{w}}\right] = \frac{\langle \vec{v}\, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}|} = \frac{\langle \vec{v}\, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{v}\, \vec{v} \rangle}\vec{v}$$

$$\vec{w} = \vec{w}_{//} + \vec{w}_{\perp}$$

$|\vec{v}||\vec{w}| \cos \widehat{\vec{v}\,\vec{w}}$

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ è il
Prodotto della lunghezza di $\vec{v}$ per la lunghezza della proiezione di $\vec{w}$ lungo la direzione di $\vec{v}$ (o viceversa)

Prop

1) $\forall \vec{v}\ \vec{w} \in V_m(O) \quad \vec{v} \times \vec{w} = - \vec{w} \times \vec{v}$

2) $\forall \vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w} \in V_m(O) \quad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$

3) $\forall \vec{v}\ \vec{w} \in V_m(O) \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha(\vec{v} \times \vec{w}) = (\alpha \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (\alpha \vec{w})$

Non esiste propri. associative $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0}$
$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

Le proprietà del prodotto vettoriale e le tabelle di moltiplic. dei vettori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ci permettono di calcolare il prodotto vettoriale senza la definizione

Es $(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \times (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ tanti modi

$* \quad \cancel{3\vec{i} \times \vec{i}} + 3\vec{i} \times (-\vec{j}) + 3\vec{i} \times \vec{k} + 2\vec{j} \times \vec{i} + \cancel{2\vec{j} \times (-\vec{j})} + 2\vec{j} \times \vec{k} + (-)\vec{k} \times \vec{i} +$
$+ (-)\vec{k} \times (-\vec{j}) + \cancel{(-)\vec{k} \times \vec{k}} =$
$= -3\vec{k} - 3\vec{j} - 2\vec{k} + 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{i} =$
$= 3\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k}$
$\vec{i} \quad -4\vec{j} \quad -5\vec{k}$

$* \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ det

$2 \cdot 1 - (-1)(-1) = 1 \qquad 1\vec{i}$
$(3 \cdot 1) - (1 \cdot 1) = 2 \qquad -2\vec{j}$
$3 \cdot (-1) - (1 \cdot 2) = -5 \qquad -5\vec{k}$

Prop $\vec{v}\ \vec{w} \in V_n(O)$

1) (se) $\vec{v} \parallel \vec{w} \rightarrow \vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

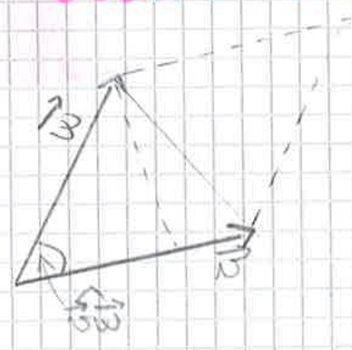
2) (se) $\vec{v} \nparallel \vec{w} \rightarrow \vec{v} \times \vec{w}$ è un vettore tale che

a) dir $(\vec{v} \times \vec{w})$ ortogonale al piano di $\vec{v}$ e $\vec{w}$

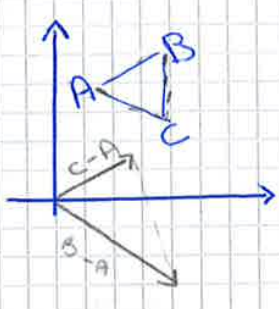
b) verso di $\vec{v} \times \vec{w}$ è tale che $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w})$ orientato con la regola della mano destra

c) $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \operatorname{sen} \widehat{\vec{v}\vec{w}}$

es.



A=(1 2 -1)
B=(1 1 1)
C=(2 -1 1)



Il prodotto misto non è esattamente il volume, è il volume con segno (orientazione degli spigoli)

Esercitazione

- $A\begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & -3 \\ 4 & \boxed{5} & -1 \\ -2 & \boxed{-1} & 4 \end{pmatrix}$ Sviluppo secondo Laplace secondo la seconda colonna

$$\det(A) = -1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14+10+10 = 6$$

Somma degli indici di posizione pari $\to +$
dispari $\to -$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_1+R_3} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2-2R_1} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 3\cdot 1 = 6$$

- $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & \overset{1,4}{\boxed{-3}} \\ 4 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 2 & -1 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & -2 & \boxed{0} \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} \overset{1,1}{4} & \overset{1,2}{1} & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\left(4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 3\left(4\cdot 2 - (-4-1)\right) = 3(8+5) = 3\cdot 13 = 39$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_4} -\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_2+R_3} -\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4 \to R_4+2R_3} -\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} = -(-3)\cdot 1\cdot 1\cdot 13 = 39$$

- determinante di Vandermonde di ordine 4

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_4 \to C_4 - x_1 C_3} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \to C_3 - x_1 C_2} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \to C_2 - x_1 C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & x_2^2(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & x_3^2(x_3 - x_1) \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4(x_4 - x_1) & x_4^2(x_4 - x_1) \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 312

$$a_{13} = (-1)^{1+3}\frac{A_{13}}{6} = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{14}{6}$$

$$a_{21} = (-1)^{2+1}\frac{A_{21}}{6} = -\frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{14}{6}$$

$$a_{22} = (-1)^{2+2}\frac{A_{22}}{6} = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a_{23} = (-1)^{2+3}\frac{A_{23}}{6} = -\frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{5}{3}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{14}{6} \\ -\frac{14}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Discutere al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema

- $$\begin{cases} x - ay + z = 18 \\ ax + 2y + 3z = b^2 \\ x - 4y - z = 2b+1 \end{cases}$$

$AX = B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ a & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 18 \\ b^2 \\ 2b+1 \end{pmatrix}$$

$\det A$ $= 0$

$\det A$ $\neq 0$ $\exists!$ soluz. $X = A^{-1}B$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 10 + a(-a-3) - 4a - 2 =$$

$$= 10 - a^2 - 3a - 4a - 2 = -(a^2 + 7a - 8) = -(a+8)(a-1)$$

$\det A = 0$ $\quad a = -8$ e $a = 1$

$\longrightarrow$ se $a \neq -8 \wedge a \neq 1$ allora $\exists!$ soluzione $X = A^{-1}B$

$\longrightarrow$ se $a = -8$

il suo rango non è massimo quando $\det(A) = 0$

$$(A|B) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 1 & 18 \\ -8 & 2 & 3 & b^2 \\ 1 & -4 & -1 & 2b+1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 1 & 18 \\ -8 & 2 & 3 & b^2 \\ 0 & -12 & -2 & 2b-17 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 8R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 1 & 18 \\ 0 & 66 & 11 & b^2+144 \\ 0 & -12 & -2 & 2b-17 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to -\frac{1}{2}R_3]{R_2 \to \frac{1}{11}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 1 & 18 \\ 0 & 6 & 1 & (b^2+144)/11 \\ 0 & 6 & 1 & -\frac{2b-17}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 8 & 1 & 18 \\ 0 & 6 & 1 & (b^2+144)/11 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b^2+144}{11} + \frac{2b-17}{2} \end{array}\right)$$

$rk(A) = 2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 312

- $\begin{cases} 2x - 1y - 3z = 0 \\ 4x + 5y - z = 8 \\ -2x - y + 4z = 2 \end{cases}$ $AX = B$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & +4 \end{pmatrix}$ $\det A = 6$

$x = \dfrac{\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 8 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\det A}$ $y = \dfrac{\det \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 2 & +4 \end{vmatrix}}{\det A}$ $z = \dfrac{\det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 8 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\det A}$

Rette

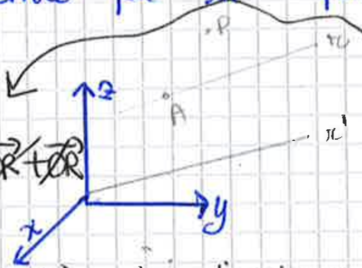
Dò due punti della retta $\to$ unica retta che passa

dò un punto e una retta (r') $\to$ c'è unica sola retta (r) // a quella dato passante per il punto.

Si noti che dare r' equivale a dare un qualsiasi vettore $\vec{v} \neq \vec{0}$ avente r' come direzione

$P \in r \iff AP \parallel \vec{v}_r$

$\iff P-A \parallel \vec{v}_r$



$P - R = \vec{OP} - \vec{OR}$

$(P-R) + \vec{OR} = \vec{OP} - \cancel{\vec{OR}} + \cancel{\vec{OR}}$

$\vec{OP} = (P-R) + \vec{OR}$

Ma $P-R$ è // a PR (dunque a r) e ho direzione r' quindi è // a $\vec{v} \neq \vec{0}$ menzionato prima

Dire che due vettori sono // $\to \exists$ una costante $t \in \mathbb{R}$: $\boxed{P - A = t \cdot \vec{v}_r}$

$\vec{OP} = \vec{OR} + t\vec{v}$

su un sistema di riferimento cartesiano $\vec{v}_r = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

$A = (x_A, y_A, z_A)$ $\vec{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}$ punto generico $P(x, y, z)$

$(x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k} = t(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$

$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k} + t(l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k})$

$\begin{cases} x - x_A = lt \\ y - y_A = mt \\ z - z_A = nt \end{cases}$ $\begin{cases} x = x_A + lt \\ y = y_A + mt \\ z = z_A + nt \end{cases}$ Equazioni parametriche della retta r passante per A // al vettore $\vec{v}_r = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$

Es $A(1, -1, 2)$ Quali di questi punti $\in$ a r?

$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

$B(-1, -2, 3)$

$C(3, 0, 1)$

$D(3, 0, -1)$

$B \in r$? $\begin{cases} -1 = 1 + 2t \\ -2 = -1 + t \\ 3 = 2 - t \end{cases}$ $\to$ $\begin{matrix} -1 = -1 \\ -2 = -2 \\ t = -1 \end{matrix}$ Sì $B \in r$

t è il parametro

$C \in r$? Sì $\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 0 = -1 + t \\ 1 = 2 - t \end{cases}$

$D \in r$? No $\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 0 = -1 + t \\ -1 = 2 - t \end{cases}$

Sono incidenti r) e s) ?

Un metodo sarebbe vedere se un punto di una retta sta sull' altra

I metodo
$$\begin{cases} 3-4t = 1+2t \\ -2t = -1+t \\ 1+2t = 2-t \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{array}{l} 2 = 6t \\ -3t = -1 \\ -1 = -3t \end{array}}$$
$t = \frac{1}{3}$

Qui ti domandi se si possono incontrare nello stesso istante non se passano per uno stesso punto

Esiste un istante t dove i due treni si scontrano?

esistono due istanti t e t' in cui i treni passano per lo stesso posto

$$\begin{cases} 3-4t' = 1+2t \\ -2t' = -1+t \\ 1+2t' = 2-t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2t+4t' = 2 \\ t+2t' = 1 \\ t+2t' = 1 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ le due rette hanno ∞ punti in comune

$$r)\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t-1 \\ z = 2-t \end{cases} \qquad s)\begin{cases} x = 3+t \\ y = -2t \\ z = 1+t \end{cases}$$

$2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\qquad$ $\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\begin{cases} 1+2t' = 3+t \\ t'-1 = -2t \\ 2-t' = 1+t \end{cases} \qquad \begin{cases} t-2t' = -2 \\ 2t+t' = 1 \\ t+t' = 1 \end{cases}$$
$\hookrightarrow t = 0$, $t' = 1$

r) $t' = 1$ $\qquad$ s) $t = 0$

$(3,0,1)$ $\qquad$ $(3,0,1)$

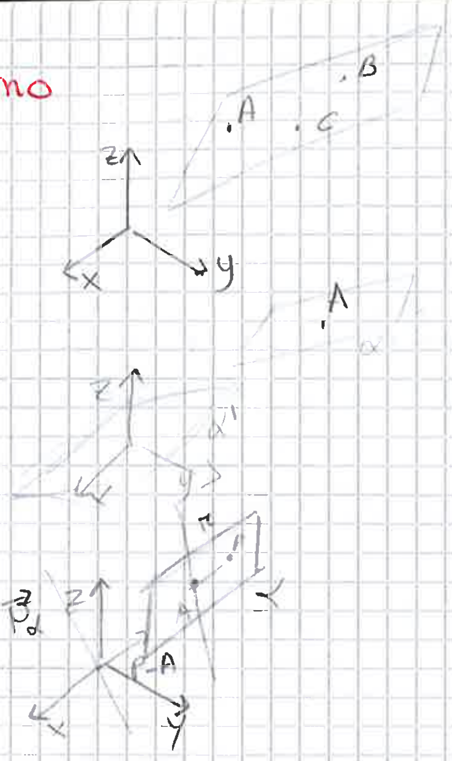
se due rette r e u non sono // e risolvendo il sistema $r \cap u = \emptyset$, r e u sono sghembe
$\hookrightarrow$ è incompatibile

* vettore $\perp$
si parte dal vettore // si scambiano le componenti invertendo il segno di una di esse

es $\vec{v}_{//} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$
$\vec{v}_{\perp} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$

Piano

almeno uno tra a, b, c deve essere $\neq 0$



Il piano può essere individuato da un suo punto qualsiasi A e da una retta r per l'origine ad esso $\perp$ e una tale retta, è individuata da un qualsiasi vettore non nullo $\vec{v}_\alpha$ in essa contenuto

se $P \in \alpha \longleftrightarrow \overline{AP} \perp r \longleftrightarrow P-A \perp \vec{v}_\alpha \longleftrightarrow \boxed{\langle P-A, \vec{v}_\alpha \rangle = 0}$

↳ i punti $P \in \alpha$ sono tutti e soli i punti che

In un sistema di riferimento
$A = (x_A, y_A, z_A)$
$P = (x, y, z)$
$\vec{v}_\alpha = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

$P - A = (x - x_A)\vec{i} + (y - y_A)\vec{j} + (z - z_A)\vec{k}$

allora $\langle P-A, \vec{v}_\alpha \rangle = 0$ diviene

$$\boxed{a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0}$$

sviluppando i prodotti e ponendo $d = ax_A + by_A + cz_A$ si ottiene $\boxed{ax + by + cz = d}$ —> equazione cartesiana del piano α passante per A e $\perp$ a $\vec{v}_\alpha$

Equazione cartesiana

i punti per il quale vale l'equazione è al piano

Es
$A = (1, 2, -1)$
$\vec{v}_\alpha = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$
$2(x-1) - 1(y-2) + 3(z+1) = 0$
$\alpha \; | \; 2x - y + 3z + 3 = 0 |$ equazione lineare in x, y, z

Quale di questi punti è al piano?
$B = (1, -1, 0)$
$C = (0, -1, 1)$

$B \in \alpha$? $2 \cdot 1 - 1(-1) + 3 \cdot 0 + 3 \neq 0$

$C \in \alpha$? $2 \cdot 0 - 1(-1) + 3 \cdot 1 + 3 \neq 0$

$D \; (0, 0, -1) \in \alpha$

I coeff. di x, y, z indicano il vettore $\perp$ al piano

Viceversa, fissati a, b, c, d (cioè ai ho $ax + by + cz = d$) e $\vec{v}_\alpha \neq 0$ si considera il luogo α dei punti P dello spazio le cui coordinate

Stabilire le posizioni relative tra una retta e un piano

$\alpha: ax + by + cz = d$

$r: \begin{cases} x = x_A + \ell t \\ y = y_A + mt \\ z = z_A + nt \end{cases}$

Si risolve $a(x_A + \ell t) + b(y_A + mt) + c(z_A + nt) = d$ se ottengo

Punto generico di r prendo le coordinate e sostituisco nel piano

$0 = 0$ la retta è contenuta nel piano

$0 = a$ parallele $a \neq 0$

$at = b$ unica soluzione hanno in comune un unico punto dato da $\frac{b}{a}$

se prendo un vettore // a r ($\vec{v}'$) e un vettore ⊥ ad α ($\vec{v}$) e $\langle \vec{v}, \vec{v}' \rangle = 0 \rightarrow \vec{v}' \perp \vec{v}$ e $\alpha \parallel r$

Es $3x + y - 2z = 1$

$u \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $\quad v \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ $\quad w \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

$\alpha \cap u \quad 3(1+t) + 1(2+t) - 2(3+2t) = 1$

$3 + 3t + 2 + t - 6 - 4t = 1$

$0 = 2$

$\alpha \cap v \quad 3t + (1+t) - 2 \cdot 2t = 1$

$3t + 1 + t - 4t = 1$

$0 = 0$

$\alpha \cap w \quad 3t + 1t - 2t = 1$

$2t = 1 \longrightarrow t = 1$

$\alpha \cap w = \{(1/2, 1/2, 1/2)\}$

$a(x_A + \ell t) + b(y_A + mt) + c(z_A + nt) = d$

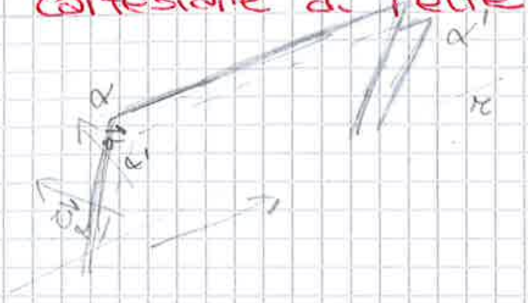
$(a\ell + bm + cn)t = d - ax_A - by_A - cz_A$

$\langle a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \ell\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k} \rangle$

⊥ $\quad$ //

se viene zero $\vec{v} \perp \vec{w}$ e $\alpha \parallel r$
se no hanno almeno un punto in comune

Equazioni cartesiane di rette



Due piani non //, α' e α'' si intersecano lungo una retta e, viceversa, ogni retta r può essere descritta come ∩ tra una coppia qualsiasi di piani distinti che la contengono

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d \end{cases}$$

equazioni cartesiane della retta r

Rappresenta una retta se e solo se $\boxed{rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2}$

r è parallela a $\vec{v}=\vec{w}\times\vec{w}'$ (vettori ⊥ a α e α')

es. $\begin{cases} 3x+y+z=1 \\ 3x+y-z=0 \end{cases}$ $\quad rk\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}=2$

$\vec{v}_r\ (a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k})\times(a'\vec{i}+b'\vec{j}+c'\vec{k})\ // r$

$(3\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = \cancel{3\vec{k}}+3\vec{j}-\cancel{3\vec{k}}+3\vec{j}-\vec{i}-\vec{i}$
$=-2\vec{i}+6\vec{j}$

$\begin{cases} x=-2t \\ y=1/2+6t \\ z=1/2 \end{cases}$ $\quad (0,1/2,1/2)\in r$

$\vec{i}$ $\quad\vec{k}$ $\quad\vec{j}$
se in senso orario +
se in senso antiorario −

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 3 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$t=\dfrac{x-x_A}{l}=\dfrac{y-y_A}{m}=\dfrac{z-z_A}{n}$ $\quad$ Guardo a due a due ho piani non //

$x-1/2=0$

$\begin{cases} x=-2t \\ y=1/2+6t \\ z=1/2+0t \end{cases}\longrightarrow t=\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y-1/2}{6}=\dfrac{z-1/2}{0}$

$\to\begin{cases} z=1/2 \\ 6x=-2(y-1/2) \end{cases}$

due coppie che rappresentano la stessa retta $\begin{cases} 6x+2y=1 \\ z=1/2 \end{cases}$

$$\begin{cases} u \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \\ v \begin{cases} a''x + b''y + c''z = d'' \\ a'''x + b'''y + c'''z = d''' \end{cases} \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{array}\right)}_{(A|B)} \qquad A = \text{prime tre colonne}$$

rk(A) rk(A|B)

Non può essere 0 e 1 perché non si avrebbero piani

rk(A)	rk(A|B)	rk(A|0)	
① 2	2	2	$u = v$
2	3	2	$u \parallel v$
3	3	3	1 punto
3	4	3	u, v sghembe

A ha 3 colonne non può avere rk 4

① Questo sistema ha ∞ soluzioni sono coincidenti

Risolvendo il sistema omogeneo associato

$d = d' = 0$ rette $\parallel$ a u

$d'' = d''' = 0$ rette $\parallel$ a v

Es

$$u \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$v \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$rk(A) = 2$

$rk(A|B) = 3 \longrightarrow u \parallel v$

$D(P_0, \alpha) =$
$d(P_0, H) = \inf\{d(P_0, P) \mid P \in \alpha\} = d(P, \alpha)$

perché $H \in \alpha \longrightarrow d(P_0, P) = d(P_0, \alpha)$ è un minimo

Formula esplicita per trovare $d(P_0, \alpha)$

il vettore $\perp$ è: $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ $\qquad \vec{w}_{//} = \frac{|\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle|}{|\vec{v}|}$

ma mi serve il modulo $\frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ che dobbiamo moltiplicare per $P_0 - P$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} |(a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z))|$$

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax + by + cz)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \boxed{\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = d(P_0, \alpha)}$$

Es.

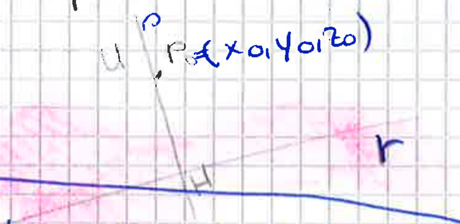
$P_0(2, -1, 1)$

$\alpha: 2x + 3y - z = 1$

$$d(P_0\ \alpha) = \frac{|4 - 3 - 1 - 1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$r)\ ax + by + c = 0 \qquad d(r, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Distanza punto-retta



Si deve valutare $d(P_0, r) = \inf\{d(P_0, P) \mid P \in r\}$

Si consideri la retta s passante per P_0 $\perp$ ad r $\rightarrow$ H intersezione

$d(P_0, r) = d(P_0, H)$ e di quindi l'estremo inferiore è il minimo.

la retta s deve essere $\perp$ e incidente a r. Un primo modo è osservare che s è contenuta in α (passante per P_0) e $\perp$ a $r \rightarrow r \cap s = r \cap \alpha$

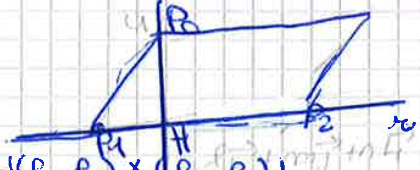
$$r) \begin{cases} x = x_A + \ell t \\ y = y_A + mt \\ z = z_A + nt \end{cases}$$

$\circledast$ calcoli equazione di α e intersechi con $r \longrightarrow H$

$\alpha)\ \ell(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$

intersecare l'eq. di questo piano con $\circledast \rightarrow$ trovi H. Retta che passa per P_0 e H

Prodotto vettoriale
prendo P_0 caso, distanza con P_0
prodotto vettoriale /



$A = |(P_0 - P_1) \times (P_1 - P_2)|$

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = |P_0 H| = \frac{A}{|P_1 P_2|}$$

punti arbitrari

Distanza piano-retta

Unico caso interessante quando sono //

un punto a caso della retta → distanza

$d(r, \alpha) = d(P, \alpha)$

Due rette nello spazio

Ha senso chiedere la distanza se sono // distinte o sghembe

$d(r, r') = d(H_r, H_{r'})$

es. $u \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 2t \end{cases}$ $v: \begin{cases} x = -2t \\ y = 2t \\ z = 1-4t \end{cases}$

// a $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ // a $-2\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$

Prendo il piano $\alpha: x - y + 2z = 0$

$\alpha \cap u$ $1+t-2+t+4t = 0 \longrightarrow 6t = 1$ $t = \frac{1}{6}$

$A = (7/6, 11/6, 2/6)$

$\alpha \cap v$ $-2t - 2t + 2 - 8t = 0$ $-2(-2t)+2(2t)-4(1-4t) = 0$

$12t = 2$ $t = 1/6$ $+4t + 4t - 4 + 16t = 0$

$B = (-2/6, 2/6, 2/6)$ $8t = 4$ $t = \frac{1}{2}$ $B(1, 1, \frac{1}{2})$

$d(u, v) = d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{7}{6} - \left(-\frac{2}{6}\right)\right)^2 + \left(\frac{11}{6} - \frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6} - \frac{2}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$\sqrt{\left(\frac{7}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{11}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{6} - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6^2} + \frac{5^2}{6^2} + \frac{1}{6^2}} = \frac{\sqrt{27}}{6} =$

$= \frac{3}{6}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

metodo del fascio

Supponiamo di conoscere una retta mediante equazione cartesiane

$$r \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

$$\alpha : a''x + b''y + c''z = d''$$

$r \subset \alpha$ se ogni punto di $r \in$ ad α
Quindi bisogna risolvere

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

→ tale condizione è soddisfatta se e solo se l'equazione di α è della forma

$\lambda(ax + by + cz - d) + \mu(a'x + b'y + c'z - d') = 0$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\alpha \supseteq r \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right)$$

A (le prime tre colonne), $(A|B)$ (tutta la matrice)

$rk(A)$	$rk(A\|B)$		
non può essere 1, due piani sono per forza distinti			
2	2	$r \subset \alpha$	$3-2=1$ ∞ soluzioni
2	3	$r \parallel \alpha$	$r \not\subset \alpha$
3	3	1 soluzione	1 pto unico

$R_2 \longrightarrow R_2 - \alpha R_1 \qquad R_2 - \alpha R_1$

$R_3 \longrightarrow R_3 - \beta R_1 \longrightarrow R_3 - \beta R_1 - \gamma(R_2 - \alpha R_1) = R_3 - (\beta - \alpha\gamma)R_1 - \gamma R_2 = 0$

$\hookrightarrow R_3 = \lambda R_1 + \mu R_2 \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Vuol dire che il piano può essere scritto come una costante per R_1 e R_2
Quindi $r \subset \alpha$ se hai una combinazione lineare

stesso cosa di (x_0, y_0)
$y - y_0 = m(x - x_0)$
$y - y_0 - m(x - x_0) = 0$

es. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$

$\lambda(x + y + z - 1) + \mu(2x - y + z) = 0$

$(\lambda + 2\mu)x + (\lambda - \mu)y + (\lambda + \mu)z - \lambda = 0$

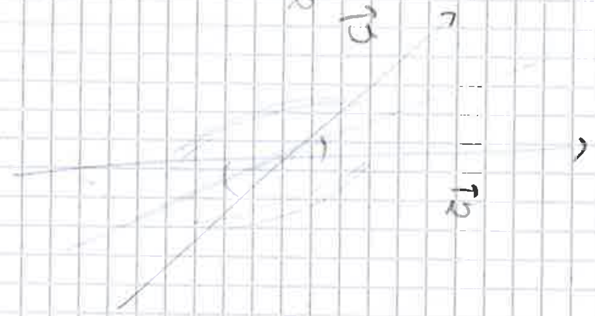
$\lambda + 2\mu + 2(\lambda - \mu) + 3(\lambda + \mu) = 0$

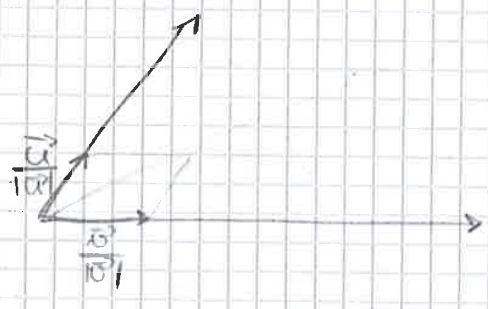
$\frac{\vec v}{|\vec v|} = vers(\vec v)$ $\qquad \vec v_p = vers(\vec v)\,|\vec v_p|$

$Pr_{\vec v}(\vec u) = \left(\frac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec v|}\right)\frac{\vec v}{|\vec v|} = \frac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec v|^2}\,\vec v = \frac{\langle\vec u,\vec v\rangle}{\langle\vec v,\vec v\rangle}\,\vec v$

$Pr_{\vec v}(\vec u) = \underbrace{\frac{2\sqrt2-1}{2}}_{\text{modulo di u su v}}\;\underbrace{\frac{\vec v}{2}}_{\text{versore di v}} = \left(\frac{2\sqrt2-1}{4}\right)(\sqrt2\,\vec i+\vec j-\vec k) = \left(\frac{2\sqrt2-1}{4}\right)\sqrt2\,\vec i+\left(\frac{2\sqrt2-1}{4}\right)\vec j - \left(\frac{2\sqrt2-1}{4}\right)\vec k$

3)





$\vec b_1 = \frac{\vec u}{|\vec u|}+\frac{\vec v}{|\vec v|} = \frac{1}{3}\vec u+\frac{1}{2}\vec v$

$\vec b_2 = \frac{\vec u}{|\vec u|}-\frac{\vec v}{|\vec v|} = \frac{1}{3}\vec u-\frac{1}{2}\vec v$

- Dati i vettori $\vec u = \vec i - h\vec j$ e $\vec v = 2h\vec j - \vec k$ determinare (se esistono) valori del parametro $h\in\mathbb{R}$ tali che

1) $\vec u$ e $\vec v$ siano ortogonali
2) $\vec u$ e $\vec v$ siano paralleli

$\vec u\cdot\vec v = 0 \leftrightarrow \vec u\perp\vec v$
$(\vec u,\vec v\neq\vec 0)$

$(\vec u\times\vec v)=\vec 0 \longrightarrow$ sono // $\leftrightarrow \vec u = \lambda\vec v$ condizione di parallelismo dove $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$
$(\vec u,\vec v\neq\vec 0)$

$\vec u = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$
$\vec v = (v_1, v_2, v_3)$

$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\cdot\vec{v}_3 = 0 \longleftrightarrow \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ complanari $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \neq \vec{0}$

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 - a^2$$

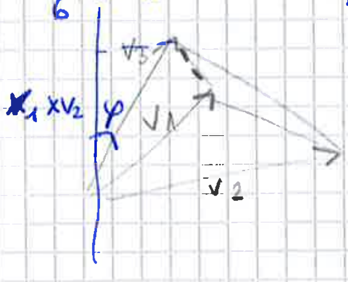
↳ ha rk massimo
det $\neq 0$

$\exists\, a \,/\; a - 1 - a^2 = 0$

$a^2 - a + 1 \overset{?}{=} 0$

$\Delta = 1 - 4 < 0$ Non esistono $a \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ siano complanari

2) $\frac{1}{6}\left|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\cdot\vec{v}_3\right|$ volume tetraedro di spigoli $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$



Volume $= \frac{1}{3}$ (area di base) $\cdot\, h$

base $\leq |\vec{v}_1|$

altezza$_\Delta = |\vec{v}_2| \sin\theta$

$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |\vec{v}_1||\vec{v}_2| \sin\theta$

area $\Delta = \frac{1}{2}|\vec{v}_1||\vec{v}_2|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|$

$h = |\vec{v}_3|\,|\cos\varphi|$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|\cdot|\vec{v}_3|\,|\cos\varphi| = \frac{1}{6}\left|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\cdot\vec{v}_3\right|$$

volume parallelepipedo di spigolo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = |(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\,\vec{v}_3|$

$$\frac{1}{6}\left|(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\cdot\vec{v}_3\right| = \frac{1}{6}|a - 1 - a^2| = \frac{1}{6}\left|-(a^2 - a + 1)\right| = \frac{1}{6}(a^2 - a + 1)$$

$a^2 - a + 1 = 3$

$a^2 - a - 2 = 0$

$(a-2)(a+1) = 0$

$a = 2 \lor a = -1$

3) $$(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{k} \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -a^2\vec{i} + a\vec{k} - \vec{j} =$$

$= -a^2\vec{i} - \vec{j} + a\vec{k}$

$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \sqrt{(-a^2)^2 + (-1)^2 + a^2} = \sqrt{a^4 + a^2 + 1}$

Area $\Delta = \frac{1}{2}|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + a^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$a^4 + a^2 + 1 = 3$

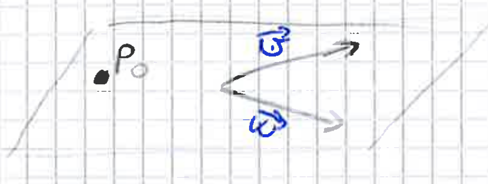
$a^4 + a^2 - 2 = 0$

$(a^2 + 2)(a^2 - 1) = 0 \quad a = \pm 1$

$$\begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ 5x+2z-11=0 \end{cases}$$

equazione cartesiana della retta, non è unico

- Posso ricavare da questo l'equazione parametrica trovi altre forme parametriche



Ɣ vettori non devono essere //

③
$$\begin{cases} x = x_0 + l_1\lambda + l_2\mu \\ y = y_0 + m_1\lambda + m_2\mu \\ z = z_0 + n_1\lambda + n_2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 + \overset{\vec{v}}{1}\lambda + \overset{\vec{w}}{(-1)}\mu \\ y = 0 + 1\lambda + 0\mu \\ z = 1 + 2\lambda + 4\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3+\lambda-\mu \\ y = \lambda \\ z = 1+2\lambda+4\mu \end{cases}$$ eq. parametriche

$ax+by+cz+d=0$ eq. cartesiana

$\lambda = y$

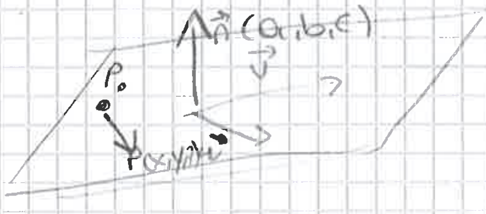
$\mu = 3+\lambda-x = 3+y-x$

$z = 1+2y+4(3+y-x)$ trovo eq. cartesiana

$z = 1+2y+12+4y-4x$

$z = 13+6y-4x$

$-4x+6y-z+13=0$



$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \rightarrow$ vettore $\vec{P_0P}$ ⊥ al vettore normale

- Trovo il vettore normale al piano

$$\vec{v}\times\vec{w} = \vec{n} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j}+\vec{k}+4\vec{i}-4\vec{j} = 4\vec{i}-6\vec{j}+\vec{k}$$

$\vec{n}(4,-6,1)$

① • Determinare la distanza tra $P_0(2,3,-1)$ e $\alpha: x+y+6z-37=0$

② Determinare la distanza tra $P_0(1,0,1)$ ed $r: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+t \\ z=3 \end{cases}$

③ Date le rette $r: \begin{cases} x=1+t \\ y=1 \\ z=1+3t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x=y-1 \\ z=2 \end{cases}$ verificare che sono sghembe e trovare la distanza

④ Determinare il valore di k affinché $r: (x,y,z)=(1-t, 2t, 3+kt)$ ed $s: \begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$ piano // e per tale valore trovare la distanza fra r ed s

⑤ Date le rette
$r_1: (x,y,z)=(3t+1, 3t, t)$
$r_2: (x,y,z)=(u, 2u, -u)$
a) → verificare che r_1 e r_2 sono sghembe
b) → det 2 piani contenenti r_1
c) → trovare un piano contenente r_1 e // a r_2
d) → trovare gli angoli tra r_1 e r_2

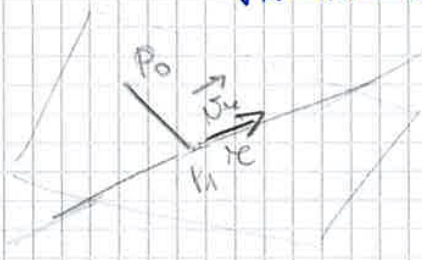
① $\alpha = ax+by+cz=0$

$$d(P_0,\alpha)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$P_0(2,3,-1)$ $\alpha = x+y+6z-37=0$

$$d(P_0,\alpha)=\frac{|2\cdot 1+3\cdot 1+6\cdot(-1)-37|}{\sqrt{1^2+1^2+6^2}}=\frac{38}{\sqrt{38}}=\sqrt{38}$$

②



1) Trovo il piano per P_0 e ⊥ a r

$P_0(1,0,1)$
$\vec{v}_r=(2,1,0)$
$2(x-1)+1(y-0)+0(z-1)=0$
$2x-2+y=0$
$2x+y-2=0$

$$\begin{cases} u - t - 2 + 3 - 9t \\ u - t - 2 + u - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u - 10t = -1 \\ 2u - t = 3 \end{cases}$$

$u = -1 + 10t$

$2(-1 + 10t) - t = 3$

$-2 + 20t - t = 3$

$19t = 5$

$t = 5/19$

$u = -1 + \frac{50}{19}$

$u = \frac{31}{19}$

$t_P \quad u_Q$

Sostituito in $r \longrightarrow P$

Sostituito in $\rho \longrightarrow Q$

Coordinate di P e Q $\longrightarrow$ distanza

(4)

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 3 + kt \end{cases}$$

$\boxed{y = u}$

$2x = 4 - u$

$u + 2 - \frac{1}{2}u - 2z = 0$

$\boxed{x = 2 - \frac{1}{2}u}$

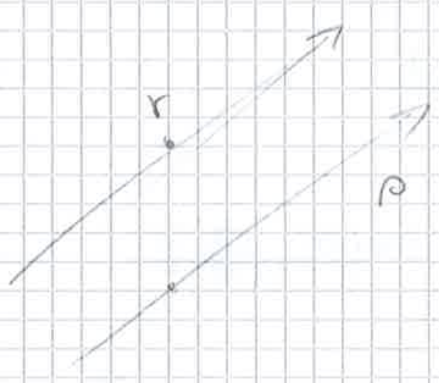
$\boxed{z = \frac{1}{2}u}$

$$\rho: \begin{cases} x = 2 - \frac{1}{2}u \\ y = u \\ z = \frac{1}{2}u \end{cases}$$

$\vec{v}_r = (-1, 2, k)$

$\vec{v}_\rho = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

$\vec{v}_r = 2\vec{v}_\rho \longrightarrow (-1, 2, k) = (-1, 2, 1) \longrightarrow \boxed{k = 1}$



Come prima

Punto di r

P(1, 0, 3)

(5)

b) 2)
$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 3t \\ z = t \end{cases}$$

$x = 1 + 3z$

$y = 3z$

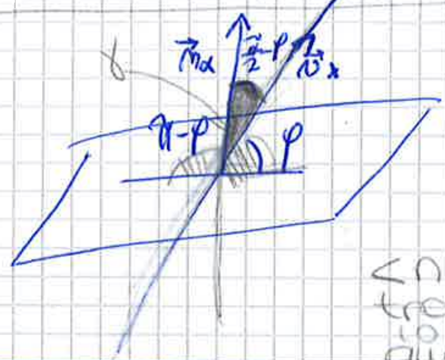
$x - 3z - 1 = 0$

$y - 3z = 0$

c) 3) $\lambda(x - 3z - 1) + \mu(y - 3z) = 0$

$\lambda x - 3\lambda z - \lambda + y\mu - 3\mu z = 0 \longrightarrow \lambda x + \mu y + (-3\lambda - 3\mu)z = 0$

(tra una retta e un piano)



$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \frac{\langle \vec{n}, \vec{v}_r \rangle}{|\vec{n}||\vec{v}_r|}$

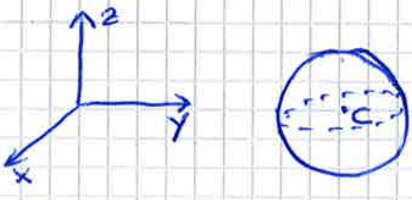
$\pi - \varphi$

$\langle n \cdot v_r \rangle = \cos(\gamma)|\vec{n}||\vec{v}_r|$
trovo γ
io voglio $\varphi \to \gamma = \frac{\pi}{2} - \varphi$
quindi $\cos\gamma = \sin\varphi$

Sfere, Circonferenze $\to$ oggetti non lineari

$C \in S_3 \quad \rho \in]0, +\infty[$ definiamo la sfera $S(C,\rho)$ di centro C e raggio ρ il luogo dei punti $P \in S_3$ tali che $d(P,C) = \rho$

$S(C,\rho) = \{P \in S_3 \mid d(P,C) = \rho\}$



In coordinate
$C = (x_C, y_C, z_C) \in S_3$
$P = (x, y, z)$

equazione cartesiana della sfera nello spazio

$P \in S(C,\rho) \longleftrightarrow \sqrt{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2} = \rho \longleftrightarrow \boxed{(x-x_C)^2+(y-y_C)^2+(z-z_C)^2 = \rho^2}$

$x^2+y^2+z^2-2x_Cx-2y_Cy-2z_Cz+(x_C^2+y_C^2+z_C^2-\rho^2)=0$

$\boxed{x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0}$

$\to$ i coeff. di x^2, y^2, z^2 devono essere uguali tra loro e non nulli

es. $C = (+1, 1, -1) \quad \rho = 2$
$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2 = 4$
$x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-1=0$

Un punto è alla sfera se le sue componenti sostituite nell'equazione verifica l'identità

es. $A(1,1,1)$
$\cancel{1}+\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{2}-\cancel{2}+\cancel{2}-\cancel{1}=0$

L'equazione cartesiana della sfera, eq. di grado due, una parte lineare omogenea e una costante

Dato un'equazione di questo tipo, è una sfera? Quali sono i punti dello spazio che la soddisfano?

$\alpha = -2x_C$ centro
$\beta = -2y_C$
$\gamma = -2z_C$

raggio $\delta = x_C^2+y_C^2+z_C^2-\rho^2$

$x_C = -\alpha/2 \quad y_C = -\beta/2 \quad z_C = -\gamma/2$

$\rho^2 = \alpha^2/4+\beta^2/4+\gamma^2/4-\delta \to \boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta > 0}$ condizione necessaria per avere la sfera

Circonferenza nello spazio

Individuo un piano, π ha una data equazione

$\pi \subseteq S_3$ piano

$C \in \pi$ $\rho_0 \in]0, +\infty[$ definiamo circonferenza $\mathscr{C}$ del piano π di centro C e raggio ρ il luogo dei punti $P \in \pi$ tali che $d(P,C)=\rho$

$\mathscr{C}(\pi, C, \rho) = \{P \in \pi / d(P,C) = \rho_0\} = \pi \cap S(C, \rho)$

Un modo per rappresentare la $\mathscr{C}$ è pensarla come $\cap$ tra π e S

$\pi: \ ax + by + cz = d$

$S(C, \rho): \ x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \end{cases}$$

dette equazioni cartesiane della circonferenza, un modo per rappresentarla

Viceversa dato un sistema di questo tipo, quando rappresenta una circonferenza?

* Devono esistere punti che soddisfano le seconde equazioni (sfera)

* Il piano deve intersecare la sfera in almeno 1 punto
* Il centro della circonferenza deve distare dal piano $\leq$ alla misura del raggio
  $\llcorner$ = circonferenza degenere, piano tangente alla sfera

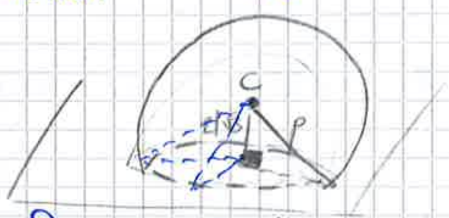
es.
$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2y=7 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2+7$

$(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=9$

$C(1,1,0)$ $\rho=3$ $\longrightarrow$ è una sfera

$d(C,\pi) = \frac{|1+1+0|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} < 3$ (se fosse > non si hanno $\cap$, soluzione è $\emptyset$)



Raggio circonferenza? (ρ') $\quad \rho' = \sqrt{\rho^2 - d(\pi,C)^2}$

$\sqrt{9-4/3} = \sqrt{\frac{23}{3}}$

Posizioni relative di due sfere

esterne — tangenti esternamente — sfere secanti — tangenti internamente — interne

$d(C_1, C_2) > R_1 + R_2$

$d(C_1, C_2) = R_1 + R_2$

$|R_2 - R_1| < d(C_1, C_2) < R_1 + R_2$

$d(C_1, C_2) = |R_2 - R_1|$

$d(C_1, C_2) < |R_2 - R_1|$

c'è anche il caso sfere concentriche $C_1 = C_2$

Se $C_1 \neq C_2 \rightarrow (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \neq (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$. Le coordinate di $\mathcal{C}$ soddisfano le equazioni di $S(C_1, \rho_1)$ e $S(C_2, \rho_2)$ anche quella ottenuta dalle loro sottrazione $\pi \rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\beta_1 - \beta_2)y + (\gamma_1 - \delta_2)z + (\delta_1 - \delta_2) = 0$

$\hookrightarrow$ è un piano $\pi \rightarrow \mathcal{C} = \pi \cap S(C_i, \rho_i)$. π è $\perp$ a $C_1 - C_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\vec{i} + (\beta_1 - \beta_2)\vec{j} + (\gamma_1 - \gamma_2)$ ($\vec{R} \neq \vec{0}$)

es.

$S_1 \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 7 \qquad C_1 = (1,1,0) \qquad R_1 = 3$

$S_2 \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 2 = 0 \qquad C_2 = (2,1,1) \qquad R_2 = 2$

$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4$

$d(C_1, C_2) = \sqrt{2}$ — Sfere secanti

Trovare la circonferenza

Sottraggo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

$- \cancel{4x} - \cancel{2y} - 2z + 2 + 2x + \cancel{2y} + 7 = 0$

$-2x - 2z + 9 = 0 \longrightarrow$ equazione del piano radicale (oppis) del fascio di sfere che contiene la circonferenza

$2x + 2z = 9$

sono

Equazione del centro

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

retta $\perp$ al piano

retta passante per C_1 e C_2

$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}$$

$2x + 2z = 9$

$2(1+t) + 2(t) = 9$

$2 + 2t + 2t = 9$

$4t = 7 \longrightarrow t = 7/4$

il centro è un punto $\left(\frac{11}{4}, 1, \frac{7}{4}\right)$ $\hookrightarrow$ centro di $\mathcal{C}$

$S \quad x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$

$S' \quad x^2 + y^2 + z^2 + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$

$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z + (\delta - \delta') = 0$ il piano esiste se $\alpha \neq \alpha'$, $\beta \neq \beta'$, $\gamma \neq \gamma'$... cioè quando non sono concentriche

Funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ (Curve parametrizzate o parametrizzazioni $n = 2, 3$)

? si considerano queste due qui

funzione definita su un intervallo aperto a valori in $\mathbb{R}^n$. Detta funzione a valori vettoriali o curva parametrizzata o parametrizzazione

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad t \longrightarrow (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

I sottoinsieme $\subset \mathbb{R}$ intervallo aperto; $t \in I$; $f_1, \dots, f_n$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

collezione di n funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ funzioni componenti di f

Es
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$t \longrightarrow (1+t, 2-3t, t, 2t)$
$t = 0 \longrightarrow (1, 2, 0, 0)$
$t = -1 \longrightarrow (0, 5, -1, -2)$

Qualsiasi valori di t associa 4 valori

Es
*) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longrightarrow \cos t, \operatorname{sen} t$

*) $]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^3$
$t \longrightarrow (\ln t, \frac{1}{\sqrt{t}}, t^2)$

non devono per forza avere quel dominio ma lo devono contenere. Fare intersezione dei domini delle funzioni componenti

funzione costante è una funzione della forma $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\quad t \to (L_1 \dots L_n)$

funzione affine se è della forma $a + vt : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\quad t \to (a_1 + v_1 t \dots a_n + v_n t)$ con $a, v \in \mathbb{R}^n$

funzione lineare: se i polinomi sono lineari omogenei

I intervallo aperto $\neq \emptyset$

Una funzione f si dice continua

$f : I \to \mathbb{R}^n$ si dice continua in $t_0 \in I$ se tali sono tutte le sue componenti.
La funzione f si dice continua su I se è continua in ogni punto di I

Una funzione f si dice derivabile

$f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice derivabile in $t_0 \in I$ se tali sono tutte le sue componenti
In tal caso se $(f_1 \dots f_n)$ sono le componenti di f si definisce derivata di f in t_0 la n-upla

$$\left(\frac{df_1}{dt}(t_0) \; \frac{df_2}{dt}(t_0) \dots \frac{df}{dt}(t_0) \right) \in \mathbb{R}^n$$

Si indica con $\frac{df}{dt}(t_0)$ $\quad \frac{df}{dt}\Big|_{t_0}$ $\quad f'(t_0)$ $\quad Df(t_0)$

Se f è derivabile in tutti i punti di I e f' continua diremo che f è di classe C^1 su I e scriveremo $f \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
È facile verificare la validità dei classici teoremi sulle derivate di funzioni a valori in $\mathbb{R}$.
Per esempio, se $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in $t_0 \in I$, si ha:
*) $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$; *) $(\alpha f)'(t_0) = \alpha'(t_0) f(t_0) + \alpha(t_0) f'(t_0)$
*) derivabilità $\Rightarrow$ continuità
Anche in $\mathbb{R}^n$ si può definire la somma / prodotto per uno scalare

*) $(x_1, x_2 \dots x_n) + (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 \dots x_n + y_n)$
*) $\lambda (x_1, x_2 \dots x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n)$

Un insieme di punti $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice curva se è l'immagine di una curva parametrizzata (cioè di una funzione) continua $f: I \to \mathbb{R}^3$

Curve La funzione f è anche detta rappresentazione parametrica o parametrizzazione di $\mathcal{C}$. Una parametrizzazione di $\mathcal{C}$ è un modo per dare una "legge oraria" di percorrenza della curva

S_3 sistema di riferimento fissato $\equiv \mathbb{R}^3$

Gli elementi di $\mathbb{R}^3$ sono elementi dello spazio

Una curva $\mathcal{C}$ in $\mathbb{R}^3$ è un'immagine di una qualsiasi funzione continua $f: I \to \mathbb{R}^3$ I int aperto

f è detta parametrizzazione di $\mathcal{C}$ $\rightarrow$ come mi muovo sulla curva

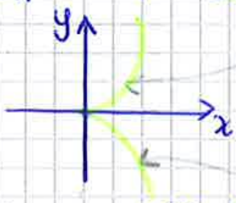
Tutto insieme è la curva parametrizzata

se esiste un piano $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\mathcal{C} \subseteq \pi$ la curva verrà detta piana ($\rightarrow$ altrimenti sarà sghemba)

(*) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $t \to (\cos t, \sin t)$ è la parametrizzazione della circonferenza di raggio 1 e centro è origine. I punti di $\mathcal{C}$ soddisfano $x^2+y^2=\rho^2$

$\mathcal{C}$ è l'immagine della funzione $(x,y)=(\rho\cos t, \rho\sin t)$. Ogni circonferenza è una curva qualsiasi sia centro e raggio

* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $t \to (t^2, t^3)$ Questa curva si chiama cuspide (cubica cuspidata)



$x=t^2$ $y=t^3$

$y^2=x^3$

$t^6=t^6$

$$\begin{cases} y=\sqrt{x^3} \\ y=-\sqrt{x^3} \end{cases}$$

f e g non sono immagini di funzioni

* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $t \to (\sin t, \cos t)$ è una parametrizzazione diversa di (*) per la stessa curva

* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
$t \to (1+t, 2-t, 3t)$ è la retta passante per $A(1,2,0)$ e $\parallel$ a $\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$

Ogni funzione del tipo $f(t)=at+b$ $a,b \in \mathbb{R}$ è continua quindi ogni retta è una curva della definizione.
In modo analogo ogni segmento/semiretta è una curva.
In particolare ogni segmento degenere, quindi ogni punto, può essere pensato come curva (degenere). Poiché ogni retta è contenuta in infiniti piani, ne deduciamo che ogni retta/semiretta/segmento è una curva piana.

* $\varphi: I \to \mathbb{R}$ continua
$f_\varphi: I \to \mathbb{R}^2$ $t \to (t, \varphi(t))$ funzione continua
$\rightarrow$ indica il grafico della funzione φ

$\varphi: I \to \mathbb{R}$ è una funzione, il suo grafico $\Gamma_\varphi \{x, \varphi(x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è una curva. La funzione $f(t)=(t, \varphi(t))$ è una sua parametrizzazione

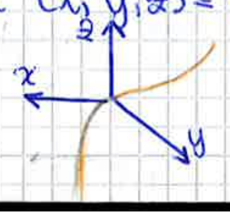
* L'ellisse di centro $C(0,0)$ e semiassi $a,b>0$. I punti soddisfano l'equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. È una curva

* L'iperbole è l'unione di due curve. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

* La parabola con asse coincidente con l'asse delle ascisse $x=\alpha y^2$ è immagine di $(x,y)=(\alpha t^2, t)$

* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $t \to (\rho\cos t, \rho\sin t, ht)$ con $\rho, h \in \left]0, +\infty\right[$ è detta elica cilindrica di raggio ρ e passo h. H è la differenze delle quote

* Un esempio di curva sghemba è la cubica sghemba, immagine di $(x,y,z)=(t,t^2,t^3)$ con $t \in \mathbb{R}$



Sono interessanti le sue proiezioni sui piani coordinati
- su $z=0$ $\rightarrow (x,y)=(t,t^2)$ che è una parabola
- su $y=0$ $\rightarrow (x,z)=(t,t^3)$
- su $x=0$ $\rightarrow (y,z)=(t^2,t^3)$ che è la cuspide

Es $t \xrightarrow{f} (t, t^2, t^3)$

Cubica sghemba è iniettiva perché lo sono la prima e la seconda

è di classe C^1 (in realtà C^∞)

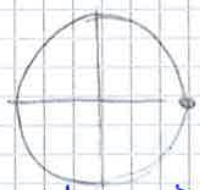
$t \xrightarrow{f'} (1, 2t, 3t^2)$

f' non può mai annullarsi $\hookrightarrow$ è una curva regolare

Es $t \xrightarrow{f} (\cos t, \operatorname{sen} t)$ è di classe C^1

$t \xrightarrow{f'} (-\operatorname{sen} t, \cos t)$ Non si annulla mai $(x^2+y^2=1)$ Gli zeri di uno non sono quelli dell'altro

Non è iniettiva su $\mathbb{R}$ ma se ci restringiamo a $]t, t+2\pi[$ oppure $]0, 2\pi[$



l'unico punto dove sono uguali è 0 e 2π

Nell'intervallo aperto è iniettiva

Globalmente non è iniettiva, non è regolare ma se mi restringo la trasformo in parametrizzazione regolare

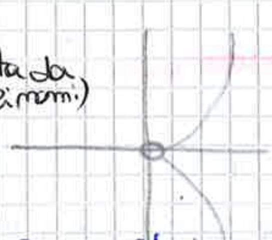
Altri casi non riesco a trasformarla in parametrizzazione

es. cuspide $t \xrightarrow{f} (t^2, t^3)$

iniettiva (lo è t^3), C^1 (formata da polinomi)

$t \xrightarrow{f'} (2t, 3t^2)$

$f'(0) = (0, 0)$



non è regolare

Non si può costruire una parametrizzazione per il pezzo della curva che tiene l'origine

es elica cilindrica

$t \xrightarrow{f} (\rho \cos t, \rho \operatorname{sen} t, ht)$ $\rho, h > 0$ iniettiva, C^1

$t \xrightarrow{f'} (-\rho \operatorname{sen} t, \rho \cos t, h)$

Parametrizzazione regolare, è una curva regolare

Cambio di parametro

Sia $f: I \to C \subseteq \mathbb{R}^3$ una parametrizz. della curva e. Un'applicazione $\tau: J \to I$ è un cambio di parametro

$\boxed{\text{se } \tau \text{ continua e surriettiva}}$

$f: I \to \mathbb{R}^3$ continua

$\tau: J \to I$

$y = f \circ \tau : J \to \mathbb{R}^3$ lo è anche lei

$\hookrightarrow$ spesso è detta riparametrizz. di f rispetto a τ

$t \in I \quad f(t)$ $\quad \exists\, s \in J \;\; t = \tau(s) \quad g(s) = f \circ \tau(s) = f(\tau(s))$ ($= f(t)$)

$g'(s) = f'(\tau(s)) \cdot \tau'(s)$

$\underbrace{f(\tau(s_0))}_{g(s_0)} = P_0 = f(t_0)$

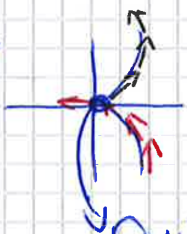
f iniettiva $\Rightarrow t_0 = \tau(s_0)$

$g'(s_0) = f'(t_0) \cdot \tau'(s_0)$

le rette sono $\parallel$ ai vettori $\parallel$ $\longrightarrow$ sono parallele tra loro

Vettore tangente alla curva

Cuspide



$t \xrightarrow{f} (t^2\ t^3)$

$t \xrightarrow{f'} (2t, 3t^2)$

vettore tangente per $t>0$ e $t<0$

Qui qualsiasi vettore tg deve annullarsi, è quello il problema per parametrizzarlo

Es

$t \xrightarrow{f} (x_0 + lt, y_0 + mt, z_0 + mt)$

retta tangente in $f(0) = (x_0, y_0, z_0)$

$f' = (l, m, n)$

$f'(0) = (l, m, m)$

$\tau \longrightarrow (x_0, y_0, z_0) + \tau(l, m, m) = (x_0 + l\tau, y_0 + m\tau, z_0 + m\tau)$

la retta tangente alla retta è la retta stessa

Es

$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Gamma_\varphi \quad f_\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \rightarrow (t, \varphi(t))$

$P_0 \in \Gamma_\varphi \qquad P = f_\varphi(t_0) = (t_0, \varphi(t_0))$

$f'_\varphi\ I \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow (1, \varphi'(t))$

$f'_\varphi(t_0) = (1, \varphi(t_0))$

$\tau \longrightarrow (t_0, \varphi(t_0)) + \tau(1, \varphi'(t_0)) = (t_0 + \tau, \varphi(t_0) + \tau\varphi'(t_0))$

$\begin{cases} x = t_0 + \tau \\ y = \varphi(t_0) + \tau\varphi'(t_0) \end{cases}$

$x - t_0 = \tau = \dfrac{y - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}$ $\qquad y - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)(x - t_0)$

retta tangente

$$\boxed{(f \times g)'(t_0) = f'(t_0) \times g(t_0) + f(t_0) \times g'(t_0)}$$

derivata del prodotto vettoriale $\neq \cancel{f'(t_0) \times g(t_0) + g'(t_0) \times f'(t_0)}$

Bisogna mantenere l'ordine, $\times$ non è commutativo

Esercitazione

- Verificare se le seguenti equazioni rappresentano delle sfere e in caso affermativo calcoliamo centro e raggio

a) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+2=0$

b) $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+7=0$

a) $-2=-2x_0 \rightarrow x_0=1$

$-2=-2y_0 \rightarrow y_0=1$ $\qquad C(1,1,2)$

$-4=-2z_0 \rightarrow z_0=2$

$2 = x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$

$2=6-R^2 \qquad R^2=4 \rightarrow R=2>0$

b) $7 = x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2$

$7=6-R^2 \qquad R^2=-1<0$ non è una sfera

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$a=-2x_0 \qquad x_0=-a/2$

$b=-2y_0 \qquad y_0=-b/2$

$c=-2z_0 \qquad z_0=-c/2$

$$d=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-R^2 \rightarrow R^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-d>0$$

$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+2=0$

$x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-4z+4=-2+1+1+4$

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=4$

- Nello spazio sianodati il piano π e la sfera S rispettivamente di equazioni

$\pi: x+y-z-1=0$

$S: x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z=0$

1) determinare centro e raggio di S

2) determinare centro e raggio della circonferenza $\pi \cap S$

3) Posto $\pi_h: x+y-z+h=0$ trovare h tale che π_h sia tangente a S

- Nello spazio siamo dati la retta $(x,y,z)=(t,t,t)$ e $\pi: 2x-y-z-3=0$

Dire quali delle seguenti affermazioni è vero

a) r e π sono incidenti

b) r e π sono ortogonali

~~c)~~ $r \cap \pi = \emptyset$

d) il fascio avente per asse r passa per π

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$$

$2t-t-t-3=0$

$0=3$ Falso

- Nello spazio siamo dati il piano $\alpha: x-z=0$ e la retta $r: \begin{cases} x=t+1 \\ y=2t \\ z=-t+1 \end{cases}$

a) $r \subseteq \alpha$

b) $r \cap \alpha = \emptyset$

~~c)~~ r e α sono incidenti.

d) Ogni punto di r ha distanza 1 da α

$t+1-(-t+1)=0 \qquad t+\cancel{1}+t-\cancel{1}=0 \qquad t=0$

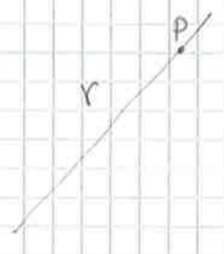
- Per la retta $r \begin{cases} x=t+1 \\ y=2t \\ z=-t+3 \end{cases}$ e per il punto $P(1,0,3)$

a) passa un unico piano

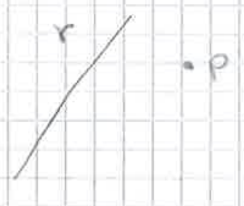
b) passano esattamente due piani

~~c)~~ passano ∞ piani

d) non passano piani



Passano ∞ piani



c'è un solo piano

Uniche opzioni a) c)

Se esiste un valore di t per cui $\begin{cases} 1=t+1 \\ 0=2t \\ 3=-t+3 \end{cases}$ $\boxed{t=0}$

Quindi per $t=0$ so che $P \in r$

Esercitazione

- Nello spazio sia data la circonferenza $\gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2-x+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$
  1) determinare centro e raggio di γ
  2) trovare equazioni per la retta tangente a γ in $(-1,1,0)$
  3) stabilire se esistono sfere passanti per γ di raggio 1

1) $x^2-x \quad +y^2 \quad +z^2+z \quad =3$

$\vec{v}_\perp \ (1,-1,-1)$

$$x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+y^2+z^2+2\cdot\frac{1}{2}z+\frac{1}{4} = 3+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$$

$$C\left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) \qquad R=\sqrt{\frac{7}{2}}$$

retta ⊥ al piano passante per C $\begin{cases} x = 1/2 + 1t \\ y = 0 + (-1)t \\ z = -1/2 + (-1)t \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = 1/2 + t \\ y = -t \\ z = -1/2 - t \end{cases}$

$\begin{cases} x = 1/2+t \\ y = -t \\ z = -1/2-t \\ x-y-z+2 \end{cases}$ $\qquad \cap$ tra il piano e la retta $\perp$ al piano passante per $C \to$ trovo c

$$\frac{1}{2}+t+t+\frac{1}{2}+t+2=0 \ldots$$

$$t=-1$$

$c \begin{cases} x = 1/2-1 = -1/2 \\ y = 1 \\ z = -1/2+1 = 1/2 \end{cases}$

$$d(C,c) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+(0-1)^2+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{R^2-d(C,c)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}-3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) $P(-1,1,0)$

$cP \begin{cases} x = x_p+(x_c-x_p)t \\ y = y_p+(y_c-y_p)t \\ z = z_p+(z_c-z_p)t \end{cases}$

il secondo piano che ci permette di determinare la retta tg a γ in $P(-1,1,0)$ è il piano per P ortogonale alla retta cP (ovvero avente vettore normale // cP)

$$\vec{n} = cP = P-c = (-1,1,0)-\left(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right) = \left(-1+\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{2}(x-(-1))+0(y-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)(z-0)=0 \qquad -\frac{1}{2}(x+1)-\frac{1}{2}z=0$$

$$x+1+z=0 \qquad x+z+1=0$$

$1+1+1+\lambda(-2)=0$

$3-2\lambda=0 \qquad \lambda=\frac{3}{2}$

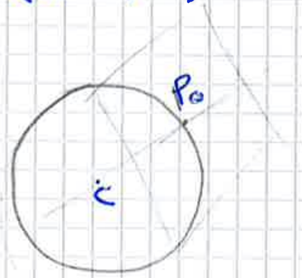
$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+\frac{3}{2}(x-y+2z-2)=0$

- Data la superficie sferica di equazione $\Sigma: x^2+y^2+z^2-2x+4y+3=0$ Determinare l'equazione del piano tangente alla sfera in $P(2,-1,0)$. Trovare poi l'equazione della sfera Σ' simmetrica di Σ rispetto a tale piano tg

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+3=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=2$

$C(1,-2,0) \qquad R=\sqrt{2}$



$\vec{CP}=P-C=(2,-1,0)-(1,-2,0)$

$=(2-1,-1+2,0-0)=(1,1,0)$

$\vec{m}=(1,1,0)$

$P=(2,-1,0)$

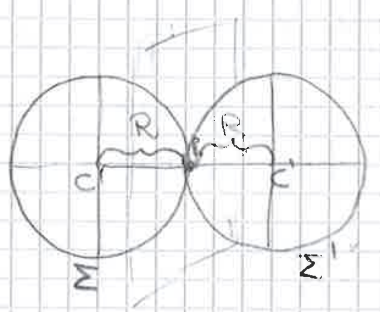
componenti $\vec{n}$

Piano tg $\quad 1(x-2)+1(y+1)+0(z-0)=0$

impongo passante per P

$x-2+y+1=0$

$x+y-1=0$



Σ' ha centro C' tale che CC' abbia P come punto medio e stesso raggio di Σ

$\overline{AB}$ $\begin{cases} x_M = (x_A+x_B)/2 \\ y_M = (y_A+y_B)/2 \\ z_M = (z_A+z_B)/2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_P = (x_C+x_{C'})/2 \longrightarrow x_{C'} = 2x_P - x_C \\ y_P = (y_C+y_{C'})/2 \longrightarrow y_{C'} = 2y_P - y_C \\ z_P = (z_C+z_{C'})/2 \longrightarrow z_{C'} = 2z_P - z_C \end{cases}$

$C' \begin{cases} x_{C'} = 4-1=3 \\ y_{C'} = -2+2=0 \\ z_{C'} = 0-0=0 \end{cases} \qquad C'(3,0,0) \quad R=\sqrt{2}$

$(x-3)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=2$

- Si consideri il sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ formato dalle soluzioni dell' equazione $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3=0$. Quali delle seguenti è vero?

  a) $S=\emptyset$
  ~~b)~~ $S=\{(1,1,1)\}$
  c) S interseca la retta $(x,y,z)=(1+2t,1,1+t)$ in due punti
  d) S è una sfera di raggio 1

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$$
$$S=\{(1,1,1)\}$$

- Dire se la curva $\gamma(t)=(t^2, t\sin t, \cos t)$ è regolare

  1) $\gamma(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ 3) $\gamma(t)$ iniettiva
  2) $\gamma'(t) \neq \vec{0}\ \forall t$

le singole componenti sono derivabili 1) ✓
$\gamma'(t)=(2t, \sin t + t\cos t, -\sin t)$ per $t=0$ si ha $\gamma'(t)=(0,0,0)$
quindi 2) No!

- Data la curva
  $\gamma: (x,y,z)=(\cos t, \sin t, t^2-2)$ 1) dire se è regolare
  2) trovare la retta tg a γ nel suo punto $A(1,0,-2)$

$$\gamma(t)=(\cos t, \sin t, t^2-2)$$
$$\gamma'(t)=(-\sin t, \cos t, 2t) \neq \vec{0}\ \forall t$$

per $t=0$ trovo $A(1,0,-2)$ dunque la direzione della tg in A a $\gamma(t)$ è data da $\gamma'(0)=(0,1,0)$

$$\begin{cases} x=1+0\cdot s \\ y=0+1s \\ z=-2+0\cdot s \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=s \\ z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x-1=0 \\ z+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(t)&=1+(0)t \\ y(t)&=0+(1)t \\ z(t)&=-2+(0)t \end{aligned} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=-2 \end{cases}$$

$(1,t,2)$