



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1743A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Loverre Michele

**MATERIA: Fondamenti di meccanica strutturale, Appunti +
Esercizi + Temi esame - prof. Invernizzi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE - 8 CFU

prof. Stefano Invernizzi

→ meccanica delle strutture

studio della risposta strutturale dei corpi solidi soggetti a sollecitazioni esterne.
la risposta alla struttura si realizza tramite deformazioni e sollecitazioni interne

→ trave

elemento strutturale caratterizzato da una lunghezza decisamente superiore alle dimensioni trasversali della sezione

→ reazioni vincolari

Le reazioni vincolari ^{degli} elementi strutturali sono le azioni da esso subite dagli altri elementi strutturali ad esso collegati, compresa l'azione del suolo che questi subiscono e generano

→ collasso strutturale

perdita della stabilità della struttura e che si verifica quando le sollecitazioni ad essa applicate superano un certo limite

I meccanismi di collasso possono essere:

- rigidi, con grandi spostamenti, ribaltamenti e quando si verificano o vengono meno i vincoli e le giunzioni
- svergolamento, riguarda gli elementi strutturali snelli, soggetti prevalentemente a compressione
- snervamento, riguarda, in modo localizzato, un o uno o più punti della struttura
- frattura fragile, avviene come lo snervamento ma si propaga a tutta la struttura (collasso di tipo globale)

→ gradi di libertà di un sistema meccanico

numero di coordinate necessarie e sufficienti a descrivere la configurazione

Un sistema a g gradi di libertà potrà muoversi disponendo in ∞^g differenti configurazioni

→ vincoli

dispositivi o collegamenti atti a eliminare o limitare lo spostamento di alcuni punti della struttura (impongono cioè delle condizioni cinematiche)

- esterni = vincolano la struttura in esame al mondo esterno alla stessa (gli spostamenti impediti sono assoluti)
- interni = collegano più elementi costituenti la struttura in esame (gli spostamenti impediti sono relativi ai punti vincolati)

L'impedimento degli spostamenti avviene attraverso l'applicazione di forze reattive, dette reazioni vincolari.

- ideali = rispondono pienamente alle espressioni teoriche

- reali = le condizioni vengono realizzate solo in via approssimata

→ vincolo di rigidità

La condizione di vincolo è espressa da un'equazione.

Considero un sistema rigido, ovvero un sistema in cui la distanza fra due punti qualunque di esso è costante nel tempo.

Allora suppongo che il sistema è formato da un numero finito di punti P_i ($i=1, \dots, N$).

Supponi Allora il vincolo di rigidità è espresso dall'equazione $d(P_i, P_j) = \text{cost} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$

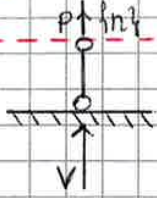
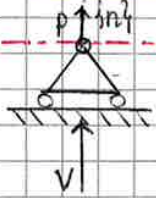
Il vincolo di rigidità è un vincolo di posizione perché l'equazione che lo rappresenta coinvolge le coordinate dei punti del sistema.

Linearizzare il vincolo di rigidità vuol dire considerare solo spostamenti infinitesimi nell'intorno della configurazione iniziale.

- vincoli piani:

ESTERNI

- **cavello o biella** = consente il movimento solo lungo la direzione perpendicolare all'asse

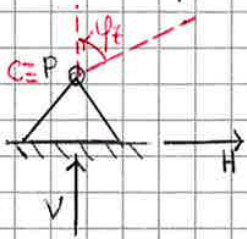


$$\{dsp\}^T \cdot \{n\} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_p \\ v_p \end{cases} \begin{cases} n_x \\ n_y \end{cases} = 0$$

1 eq scalare \Rightarrow 1 vincolo (vincolo semplice)

- V è la forza scalare o reazione vincolare = compare solo se n è una forza applicata
- Il centro istantaneo di rotazione dovrà appartenere all'asse del cavello (ma non è necessariamente un punto proprio)

- **cerniera** = consente solo la rotazione (il punto è vincolato a stare sul piano)

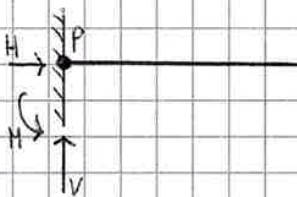


$$\{dsp\} = \{0\} \Rightarrow \begin{cases} u_p \\ v_p \end{cases} = 0$$

2 eq scalari \Rightarrow 2 vincoli (vincolo doppio)

- il centro istantaneo di rotazione è necessariamente il punto P

- **incastro** = impedisce ogni movimento

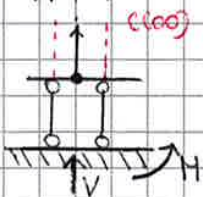


$$\begin{cases} \{dsp\} = \{0\} \\ \psi_f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_p = 0 \\ v_p = 0 \\ \psi_f = 0 \end{cases}$$

3 eq scalari \Rightarrow 3 vincoli (vincolo triplo)

- il centro istantaneo di rotazione non esiste

- **doppio pendolo** = ammette una componente dello spostamento e la rotazione.

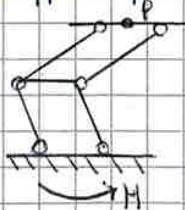


$$\begin{cases} \{dsp\}^T \cdot \{n\} = 0 \\ \psi_f = 0 \end{cases}$$

2 eq scalari \Rightarrow 2 vincoli (vincolo doppio)

- il centro istantaneo di rotazione si troverà su rette parallele all'asse del pendolo doppio
- si troverà dunque all'infinito perché non si hanno rotazioni proprie.
- la rotazione è impedita dal fatto che le bielle hanno i lati paralleli

- **doppio pendolo** = impedisce solo la rotazione



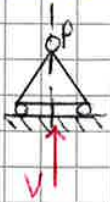
$$\psi_f = 0$$

1 eq scalare \Rightarrow 1 vincolo (vincolo semplice)

- il centro istantaneo di rotazione è all'infinito ma non necessariamente su una retta parallela a quello del vincolo.

Quindi, ricapitolando:

vincolo esterno
CARRELLI/BIELLA



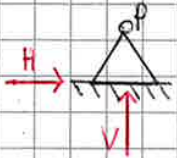
effetto cinematico \rightarrow effetto statico

$$\begin{matrix} u_P \neq 0 \\ v_P = 0 \\ \psi_P \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} H = 0 \\ V \neq 0 \\ M = 0 \end{matrix}$$

CIR

sull'asse \perp

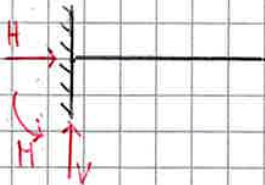
SEMPER



$$\begin{matrix} u_P = 0 \\ v_P = 0 \\ \psi_P \neq 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} H \neq 0 \\ V \neq 0 \\ M = 0 \end{matrix}$$

in P

INCASTRO



$$\begin{matrix} u_P = 0 \\ v_P = 0 \\ \psi_P = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} H \neq 0 \\ V \neq 0 \\ M \neq 0 \end{matrix}$$

\neq

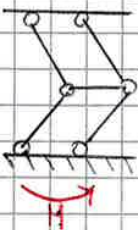
DOPPIO PENDOLO



$$\begin{matrix} u_P \neq 0 \\ v_P = 0 \\ \psi_P = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} H = 0 \\ V \neq 0 \\ M \neq 0 \end{matrix}$$

all'oo sull'asse \perp

DOPPIO DIPENDOLO

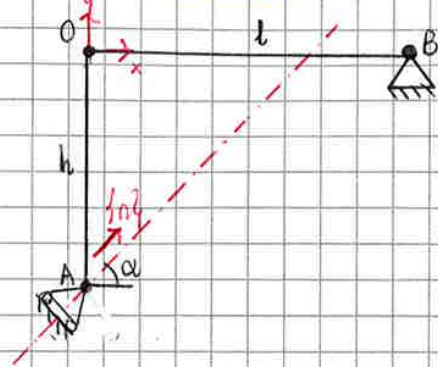


$$\begin{matrix} u_P \neq 0 \\ v_P \neq 0 \\ \psi_P = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} H = 0 \\ V = 0 \\ M \neq 0 \end{matrix}$$

all'oo

- studio algebrico dei sistemi di travi

STUDIO CINEMATICO



$\mathcal{C.I.R} \Rightarrow$ \Rightarrow struttura isostatica
3 condizioni

effetti cinematici imposti dai vincoli:

A) $\dot{ds}_A = \dot{h} = 0$

B) $\dot{ds}_B = \dot{l} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (u_A, v_A) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha) = u_A \cos \alpha + v_A \sin \alpha = 0 \\ u_B = 0 \\ v_B = 0 \end{cases} \quad \text{vincoli}$$

$$\dot{h} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

le incognite del problema saranno i momenti di un punto rappresentativo sul corpo rigido che è scelto arbitrariamente, detto Polo (cinematico)

\Rightarrow le incognite saranno u_0, v_0, φ_0 ovvero le traslazioni elementari del punto O secondo gli assi x e y e la rotazione elementare di tutto il corpo rigido

3 vincoli = 3 movimenti $\Rightarrow 0$ gradi di libertà

Scrivo le eq. coordinati della cinematica.

$$\begin{cases} u_B = u_0 - (y_B - y_0) \varphi_0 \\ v_B = v_0 + (x_B - x_0) \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_B = u_0 \\ v_B = v_0 + x_B \varphi_0 = v_0 + l \varphi_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_A = u_0 - (y_A - y_0) \varphi_0 \\ v_A = v_0 + (x_A - x_0) \varphi_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_A = u_0 + h \varphi_0 \quad (h = y_0 - y_A) \\ v_A = v_0 + x_A \varphi_0 \end{cases}$$

Tenendo conto dei vincoli si ha:

$$u_0 = 0$$

$$v_0 + \varphi_0 l = 0$$

$$u_A = u_0 + h \varphi_0 \Rightarrow (u_0 + h \varphi_0) \cos \alpha + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$v_A = v_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 + \varphi_0 l = 0 \\ (u_0 + h \varphi_0) \cos \alpha + v_0 \sin \alpha = 0 \\ u_0 \cos \alpha + h \varphi_0 \cos \alpha + v_0 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Raggruppo le equazioni in una matrice per vedere se le eq. sono linearmente indipendenti

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & h \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{sist. omogeneo} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & h \cos \alpha \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l \end{bmatrix}$$

soluzione banale $(u_0, v_0, \varphi_0) = (0, 0, 0)$

Per il th di Rouché-Capelli: ci sono soluzioni non banali se $\det C \neq 0$

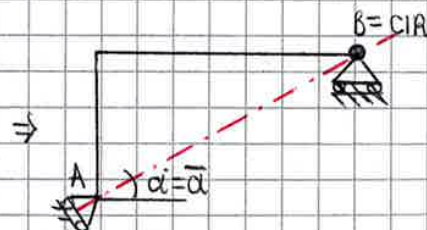
$$\det C = -(l \sin \alpha - h \cos \alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha$$

$$\Rightarrow \det C = 0 \Leftrightarrow l \sin \alpha - h \cos \alpha = 0$$

$$l \tan \alpha - h = 0$$

$$\tan \alpha = \frac{h}{l}$$

$$\alpha = \arctan \frac{h}{l}$$



\Rightarrow se $\alpha = \bar{\alpha}$, il piano di scorrimento del carrello si dispone ortogonalmente alla componente AB, dunque $\mathcal{C.I.R} \equiv \mathcal{C.I.R} \equiv B \Rightarrow$ vincoli maldisposti

$\Rightarrow \forall \alpha \neq \bar{\alpha}$ la struttura è isostatica

Dunque:

imponendo le eq cardinali della ~~costituito~~ costituzione si ottiene la configurazione per cui la struttura risulta ~~equi~~ isostatica, ovvero:

$$[A]\{X\} = -\{F\} \rightarrow \text{eq statiche}$$

$[A]$ = matrice statica

$\{X\}$ = vettore delle reazioni vincolari

$\{F\}$ = vettore delle forze esterne ridotte

$$\Rightarrow \text{rg}(A|F) = \text{rg}(A) \Leftrightarrow \text{ sistema isostatico (o staticamente determinato) }$$

- dualità statico-cinematico

Ricupero angolo:

Suppongo di avere un sistema di trave con g gradi di libertà originali e v gradi di vincolo. Si ha:

$$C) \text{ eq cinematiche } \Rightarrow [C]\{S\} = \{S_X\} = \{0\}$$

$$A) \text{ eq dinamiche } \Rightarrow [A]\{X\} = -\{F\}$$

Si ha inoltre che:

• $v < g \Rightarrow C)$ il sistema algebrico ammette almeno ∞^{g-v} soluzioni ed il sistema meccanico risulta $(g-v)$ volte labile

A) il sistema algebrico è generalmente imponibile ed il sistema delle forze esterne non può essere equilibrato in alcun modo

• $v = g \Rightarrow C)$ il sistema algebrico ammette almeno una soluzione (non nulla) unica ed il sistema risulta isostatico se non vi è maldisposizione dei vincoli ($\det [C] \neq 0$)

A) il sistema algebrico ammette generalmente una soluzione e il sistema si dice staticamente determinato o isostatico

• $v > g \Rightarrow C)$ il sistema algebrico ammette almeno la soluzione nulla e il sistema risulta $(v-g)$ volte iperstatico se non vi è maldisposizione dei vincoli

A) il sistema algebrico ammette generalmente ∞^{v-g} soluzioni ed il sistema si dice staticamente indeterminato o iperstatico.

Dal principio dei lavori virtuali, applicato a sistemi che si muovono di un modo rigido, si ha:

$$\delta W_{ab} = 0$$

ⓐ sistema di forze equilibrato (obbedisce all'eq statica)

ⓑ sistema di spostamenti compatibili con i vincoli congruenti (ob. all'eq cinematica)

$$\Rightarrow \{S\}^T \cdot \{F\} + \{S_X\}^T \{X\} = 0 \rightarrow \text{principio dei l.v. applicato ad un sistema di travi in eq., sottoposto a sollecitazioni esterne e a reazioni vincolari.}$$

\Rightarrow le forze esterne si sostituiscono con le forze ridotte ai poli

(il polo di riduzione delle forze (polo statico) deve essere fatto coincidere con il polo cinematico)

$$\Rightarrow -\{S\}^T \cdot [A]\{X\} + \{S\}^T [C]^T \{X\} = 0 \rightarrow [C]\{S\} = \{S_X\} \quad ((A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \text{ A, B matrici})$$

$$\Rightarrow \{S\}^T (-[A] + [C]^T) \{X\} = 0$$

$$\Rightarrow \{S_X\}^T = ([C]\{S\})^T = \{S\}^T \cdot [C]^T$$

Poiché $\{S\}$ e $\{X\}$ sono arbitrari occorre che si annulli il termine centrale, affinché si verifichi l'identità

$$\Rightarrow -[A] + [C]^T = 0 \Rightarrow [A] = [C]^T$$

DETERMINAZIONE DELLE REAZIONI VINCOLARI (B)**Metodo 1) metodo delle eq. ausiliarie**

Si considerano le $3n$ equazioni di equilibrio globale con l'aggiunta di s eq. ausiliarie di eq. parziale (con $s = \text{grado di vincolamento interno della struttura}$)

vincolamento = complementare dei vincoli interni

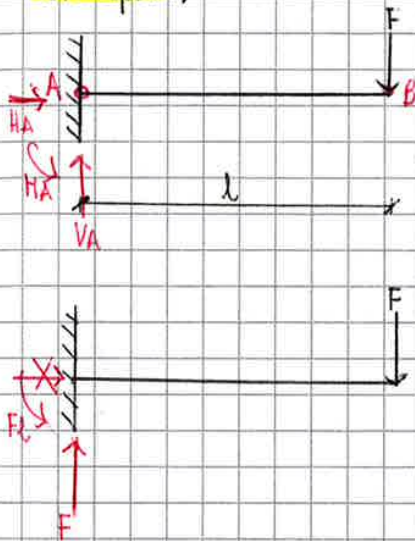
$$s = 3 - g, \quad g = \text{grado di vincolo}$$

L'eq. ausiliaria è scelta immaginando la struttura ridotta in corrispondenza di un vincolo interno.

⇒ $\forall g = \text{grado di vincolo}$, posso scrivere $3 - g$ eq. ausiliarie.

Le s eq. ausiliarie si scelgono in modo da non far intervenire le reazioni interne nel sistema risolvente.

In alcuni casi, saranno sufficienti le 3 eq. di eq. globale:

esempio 1)

- ① vincolo che ~~è~~ centro di istantanea rotazione
- ② vincolo che è fatto di una struttura isostatica o iperstatica
- ③ metto le reazioni vincolari, come voglio (il giusto verso sarà dato dal segno delle stesse).
- ④ scelgo un sist. di riferimento e un polo
- ⑤ scrivo le eq. cardinali della statica

$$\begin{cases} \sum H_i = 0 \rightarrow \\ \sum V_i = 0 \uparrow \\ \sum M_i = 0 \curvearrowright \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A - F = 0 \\ H_A - Fl = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = F \\ H_A = Fl \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = ql \\ H_A = ql^2 \end{cases}$$

$$F = ql \quad H = ql^2$$

$$[F] = [F] \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

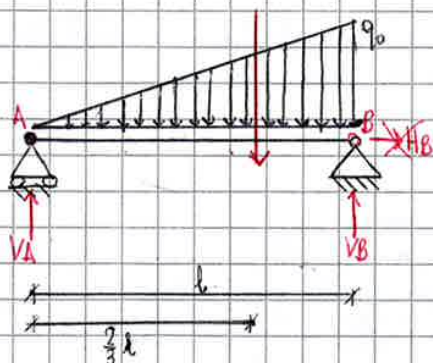
- ⑥ fare il nuovo schema strutturale, riportando i nuovi carichi e i loro momenti delle R.V. e i loro momenti

esempio 2) carico distribuito uniformemente: $q(x) = q$ 

$$q(x) = q$$

$$ql = \int_0^l q(x) dx$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_A = 0 \\ V_A = ql \\ H_A = \frac{ql^2}{2} \end{cases} \curvearrowright A$$

esempio 3) carico distribuito: $q(x) = q_0 x$ 

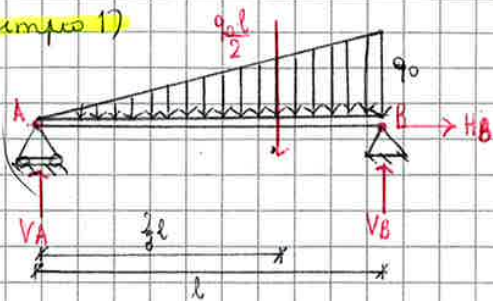
$$\begin{cases} H_B = 0 \\ V_A + V_B - \int_0^l q(x) dx = 0 \\ V_B \cdot l - \int_0^l q(x) \cdot x dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_B = 0 \\ V_A + V_B - \frac{1}{2} q_0 l^2 = 0 \\ V_B l - \frac{1}{3} q_0 l^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_B = 0 \\ V_A = \frac{1}{3} q_0 l \\ V_B = \frac{2}{3} q_0 l \end{cases}$$

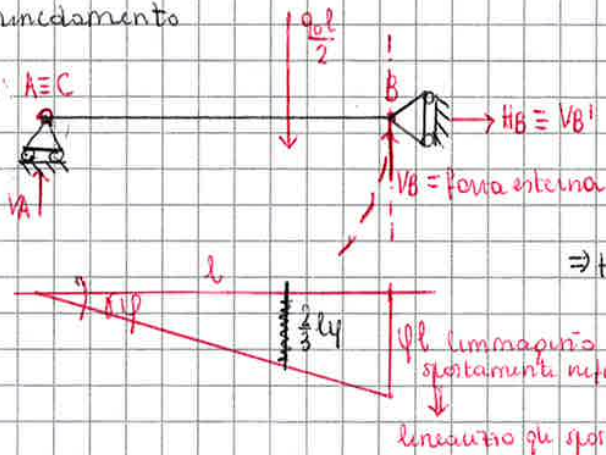
Penso il carico distribuito come una forza concentrata applicata nel baricentro, di intensità $\int_0^l q(x) dx = \frac{1}{2} q_0 l^2$

ESAME = dopo aver determinato le reazioni vincolari fare il nuovo schema strutturale!

esempio 1)



vincolamento

Suppongo di voler determinare V_B .Vincolo la struttura facendo in modo che l'unica reazione vincolare sia H_B .

→ disegno il diagramma degli spostamenti della struttura vincolata

Applico il p.l.v.

la forza $\frac{q_0 l}{2}$ si sposta di $\frac{2}{3} l$ mentre la forza V_B di $\frac{1}{3} l$ l'angolo φ si semplifica, essendo un angolo arbitrario il valore di V_B non deve dipendere da φ ⇒ tenendo conto dei versi: $V_B \cdot \frac{1}{3} l = \frac{q_0 l}{2} \cdot \frac{2}{3} l$

$$\Rightarrow V_B = \frac{1}{3} q_0 l$$

Metodo 3) metodo grafico

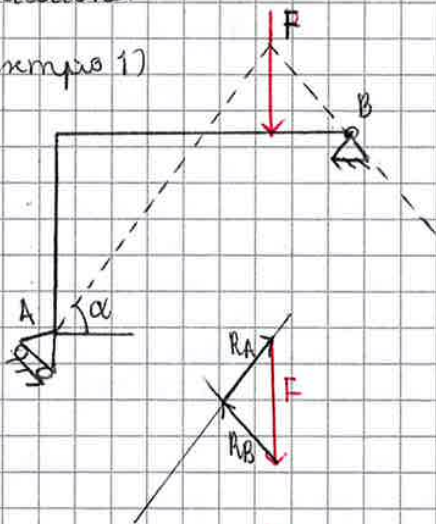
in base alle eq. cardinali della statica

Nel caso abbiamo tre forze in equilibrio nel piano, esse dovranno formare un triangolo se spostate una di seguito all'altra. Ciò discende dalla regola del parallelogramma e quindi dalla prima eq. cardinale della statica (di eq. alla traslazione)

Nel contempo le rette d'azione dovranno passare tutte e tre per uno stesso punto del piano. Il momento delle tre forze deve infatti essere nullo rispetto a qualsiasi punto del piano, e quindi anche rispetto all'intersezione di ciascuna coppia di rette d'azione: la terza retta deve quindi passare per tale punto.

Quest'ultimo requisito discende direttamente dalla seconda equazione cardinale di eq. alla rotazione.

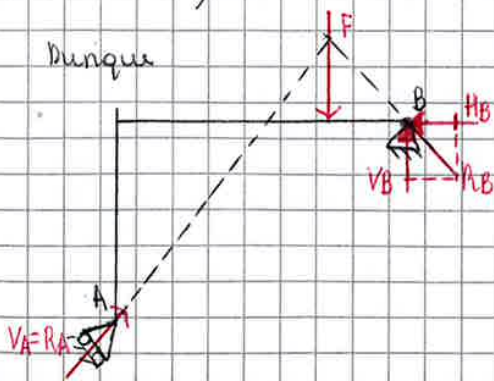
esempio 1)



- So che la retta d'azione di R_A e la retta perpendicolare all'asse del carrello.
- Conosco F
- Posso disegnare il poligono delle forze
- la retta d'azione di R_B sarà la retta passante per i seguenti due punti:
 - 1) B
 - 2) intersezione tra retta d'azione di F e retta d'azione di R_A

A questo punto, conoscendo le rette d'az. devo determinare l'intensità di R_A e R_B , costruendo il poligono delle forze

Dunque



OSSELAZIONE:

Se negli spicchi triangolari del poligono delle forze si interseca il seno dei vettori R_i , $i=1, \dots, h$ ciò significa considerare un problema di equilibrio (autico di equivalenza) e tali vettori rappresenterebbero in questo caso le reazioni d'incastro interno che ogni porzione destra trasmette alla complementare porzione sinistra.

→ la curva delle pressioni corrisponde, procedendo da in capo all'altro della struttura, all'involuppo della retta d'azione della risultante forza risultante.

a" è la direzione della forza R_A

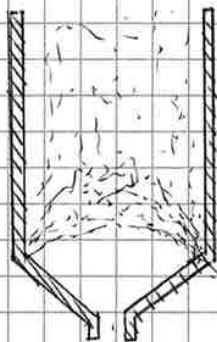
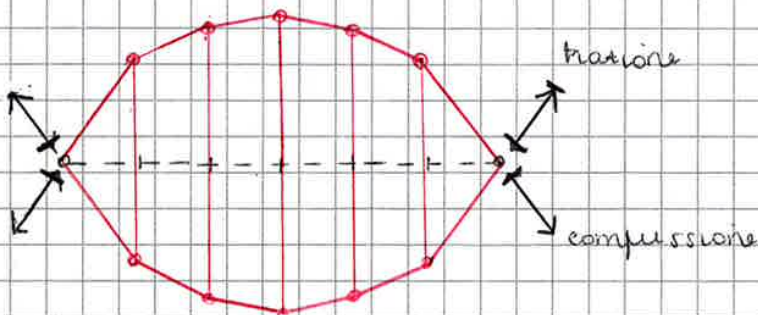
b" è la direzione della forza risultante $R_A + F_1$

c" " " " $R_A + F_1 + F_2$

d" " " " $R_A + F_1 + F_2 + F_3$

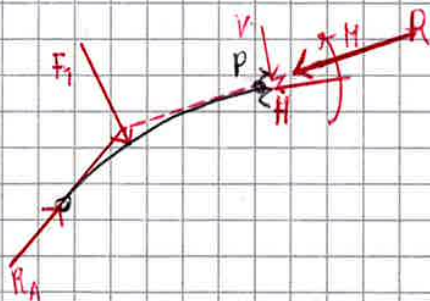
e" " " " $R_A + F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

- l'arco e la fune sono due poligoni funicolari simmetrici



la struttura ad arco ^{"mantiene"} ~~si~~ ^{da sola} e può generarsi da sola (falina)
→ l'arco spinge alle mura

Quindi: se immagino di fare una sezione in un punto qualsiasi di una struttura ad arco:



la sezione ^{più} ~~più~~ con esse considerata come un incastro interno

Componendo V , H e H ottengo R che ha la stessa inclinazione ~~direzione~~ del tratto corrispondente sulla curva di pressione.

L'inclinazione della curva delle pressioni nel tratto sezionato coincide con la retta d'azione di R dove R è la risultante delle reazioni vincolari V e H dell'incastro interno, che saranno rispettivamente T (taglio) e N (sforzo normale).

Dato che R è traslato rispetto l'asse della base si avrà anche un momento di trasporto $M = R \cdot d$ (d = distanza tra l'asse e curva delle pressioni in P) che coincide con il momento M della incastro interno.

$$\Rightarrow PA'' = H + SA''$$

$\Rightarrow H =$ momento di H + momento di SA'' (scegliendo come polo A'')

$$\Rightarrow H = H(y - y_0) \rightarrow \text{momento flettente}$$

Conclusione: la curva delle flessioni, di $(y - y_0)$, rappresenta, a meno di un fattore, l'aumento del momento flettente.

Quello, il seguente viterizzato tra curva delle flessioni e area della trave rappresenta, a meno del fattore H , il momento flettente.

Differenziando due volte si ottiene

$$\frac{dH}{dz} = \frac{d}{dz} H(y - y_0) \quad y = y(z), y_0 = y_0(z)$$

$$\frac{d^2H}{dz^2} = \frac{d^2}{dz^2} H(y - y_0)$$

$$\frac{d^2H}{dz^2} = H \frac{d^2y}{dz^2} - H \frac{d^2y_0}{dz^2} \quad \text{ma valendo } \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{q(z)}{H}$$

$$\frac{d^2H}{dz^2} = -q(z) - H \frac{d^2y_0}{dz^2} \rightarrow \text{eq differenziale del momento flettente nel caso di una trave ad asse curvilineo}$$

→ Assegnato il carico, posso fare dunque in modo che il secondo membro si annulli, cioè scelgo la forma della struttura in modo che il secondo membro si annulli, per annullare il momento flettente.

Non riesco, nella realtà, a far avvenire ciò, essendo i carichi aleatori.

Osservazioni:

- se si realizza in arco che presenti esattamente la forma della curva delle flessioni si ha $y = y_0$ e quindi il momento flettente si annulla in ogni punto.

⇒ Tra sezione e sezione verrebbe allora solo compressione, una sollecitazione di compressione, risultando la reazione interna sempre tangente all'asse della trave curva. Ciò è utile per materiali incoerenti (non resistenti a trazione).

- una fune di lunghezza pari a quella delle curve delle flessioni, si disporrebbe secondo la configurazione di tale curva, non potendo sopportare altri sforzi se non quelli di trazione. Si parla infatti di curva funicolare.

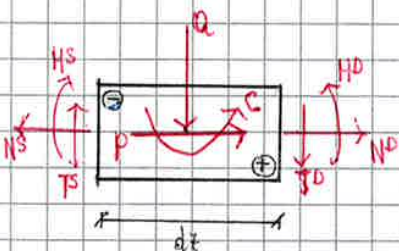
$$\text{se la trave è rettilinea } \frac{d^2y_0}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2H}{dz^2} = -q(z)$$

$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = -p(t) \\ \frac{dT}{dt} = -q(t) \\ \frac{dH}{dt} = T \end{cases} \rightarrow \text{eq indefinite di equilibrio (puoi vari rettificare)}$
 valgono per ogni t dato

ASSENZA di CARICHE DISTRIBUITE \Rightarrow $N = \text{cost}$
 $T = \text{cost}$
 $H = M(x) = ax + b$ (funzione lineare)

In generale
 \Rightarrow quando i carichi distribuiti sono funzioni polinomiali di ordine n si ha

→ le forze sono concentrate, anziché le eq indefinite di equilibrio si ottengono le eq di salto o discrete



\rightarrow per l'eq:

$N^0 = N^S - P$ $T^0 = T^S - Q$ $M^0 = M^S - C$

 \rightarrow eq di salto o discrete

- se le forze sono concentrate, il taglio è costante a tratti
- il diagramma del momento si ottiene per integrazione da quello di taglio
- dove il diagramma di taglio è negativo, il diagramma del momento sarà decrescente per ^{area} ~~area~~ crescente.
- se il carico spinge verso il basso, la concavità di M sarà verso il basso
- se il carico è distribuito in modo simmetrico, il diagramma di taglio sarà antisimmetrico, quello di momento sarà simmetrico

\Rightarrow Studiosie \approx equivalente a studiosa



STRUTTURE ISOSTATICHE (6)

tratture reticolari piano isostatiche

sistemi di aste collegate da cerniere (nodi)

aste = trave ad asse rettilineo incerniata agli estremi, non soggetta a forze sul suo asse ma solo sui nodi

le cerniere vengono considerate come punti materiali in equilibrio sotto l'azione delle forze in gioco.

$$N \neq 0 \Rightarrow N$$

$$T, M = 0$$

$> 0 \Rightarrow$ asta soggetta a trazione $\leftarrow \rightarrow \Rightarrow$ TIRANTE

$< 0 \Rightarrow$ asta soggetta a compressione $\rightarrow \leftarrow \Rightarrow$ PUNTONE

\Rightarrow le strutture isostatiche sono dunque costituite da tranti e puntone

Dimostrare che per un'asta, $T = M = 0$

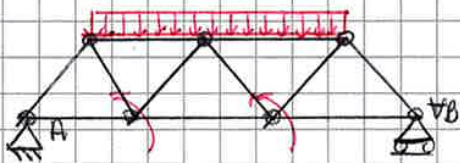
per def. un'asta è incerniata agli estremi $\Rightarrow M(x=A) = 0$
 $M(x=B) = 0$

molte un'asta non è soggetta a forze sul suo asse $\Rightarrow q(x) = 0$
 Utilizzo le eq. indefinite:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x) = 0 \Rightarrow T(x) = T_0$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = T(x) = T_0 \Rightarrow M(x) = T_0 \cdot x \text{ ma } M(x_A) = M(x_B) = 0 \Rightarrow T_0 = 0$$

$$\Rightarrow T = 0, M = 0.$$



Nella realtà $M, T \neq 0$.

Ma se:

- 1) le forze esterne sono applicate nei nodi
 - 2) il peso proprio degli elementi \ll forze esterne applicate
- $\Rightarrow N \gg M, T \approx 0$

Con le modifiche in rosso il funzionamento statico della truttura reticolare sarà simile a quello delle strutture metalliche.

(carichi non tutti concentrati sui nodi + aste incerniate le une alle altre (giunzione salda o bullonata))

Se c'è un carico ripartito su un'asta $i-j \Rightarrow N, T, M \neq 0$ sull'asta $i-j$

Cui questo caso non si parla di asta ma di trave)

Perché su tutte le altre aste $N \neq 0, T, M = 0 \Rightarrow$ studio separatamente solo il tratto $i-j$

analisi statica

sia $a = n^\circ$ aste

$n = n^\circ$ nodi

Suppongo la struttura esternamente isostatica

n° incognite = V_A ha un' ~~equazione~~ incognita (lo sforzo normale)

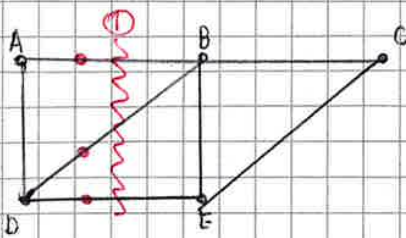
1 incognita dovuta al vincolo di tipo cernello (V_B)

2 incognite dovute al vincolo di tipo cerniera (V_A, H_A)

n° eq risolventi = V_n ha 2 eq. di equilibrio (traslazione orizzontale e traslazione verticale)

la struttura è isostatica (internamente) se n° incognite = n° eq risolventi

$\Rightarrow a + 3 = 2n \rightarrow$ condizione necessaria ma non sufficiente di isostaticità (interna)



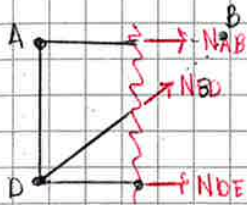
① è una sezione di Ritter

ci sono solo 3 aste (AB, DB, DE) che non confluiscono nello stesso nodo

Per trovare NAB scelgo come polo D

Per trovare NDE scelgo come polo A

Per trovare NBD scelgo come polo A



dove

$$[J_p] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p & \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p & \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_p \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p & \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_p \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_p & \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_p & \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_p \end{bmatrix}$$

Per impostare questa scrittura matriciale con l'eq della cinematica, ricordo che ogni matrice quadrata può essere scritta come somma di una matrice simmetrica e di una antisimmetrica.

A quadrata $\Rightarrow A = \frac{1}{2}(A - A^T) + \frac{1}{2}(A + A^T)$

Quindi:

$$[J_p] = \frac{1}{2}([J_p] - [J_p]^T) + \frac{1}{2}([J_p] + [J_p]^T)$$

Osservo che

$$\frac{1}{2}([J_p] - [J_p]^T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)_p & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)_p \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)_p & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)_p \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)_p & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)_p & 0 \end{bmatrix} = [\varphi_p] = \text{matrice delle rotazioni infinitesime (antisimmetrica)}$$

$$\frac{1}{2}([J_p] + [J_p]^T) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)_p & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_p \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_p & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)_p \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_p & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)_p & \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_p \end{bmatrix} = [\varepsilon] = \text{tensore delle deformazioni (simmetrica)}$$

$$\Rightarrow \{n_a\} = \{n_p\} + ([\varphi_p] + [\varepsilon])\{dr\}$$

$$\Rightarrow \{n_a\} = \{n_p\} + [\varphi_p]\{dr\} + [\varepsilon]\{dr\}$$

termine legato alla deformazione
termine legato alla rotazione
termine legato alla traslazione

Voto che per un corpo rigido, avendo $[\varepsilon] = 0$ (spostamenti causati solo da un atto di moto rigido) si riottiene l'eq cardinale della cinematica

$$\{n_a\} = \{n_p\} + [\varphi_p]\{dr\}$$

$$[\varphi_p] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matrice di rotazione}$$

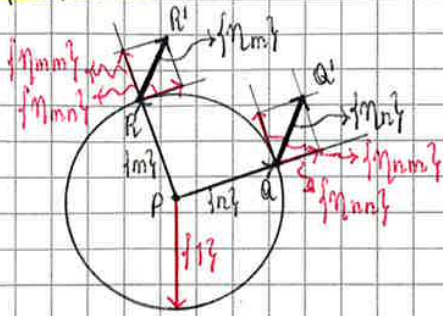
Nella matrice $[\varepsilon]$ si ha: $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y$, $\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z \rightarrow$ dilatazioni assiali

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{yx}, \dots$$

\rightarrow sconnessioni angolari (sono reciproci, ovvero $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$)

$$\Rightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \varepsilon, \gamma \ll 1 \quad (\text{ipotesi di piccoli spostamenti})$$

- legge di trasformazione del tensore delle deformazioni per rotazioni del sistema di riferimento



→ Considero sfera infinitesima di raggio unitario.

→ Q è individuato da $\{\vec{n}\}$

→ vettore spostamento di Q = $\{\eta_n\}$

→ R è individuato da $\{\vec{m}\}$

→ vettore spostamento di R = $\{\eta_m\}$

$$\{\vec{m}\} \perp \{\vec{n}\}$$

P è fumo = non trasla e non ruota $\Rightarrow \{\eta_P\} = \vec{0}$
 $\{\varphi_P\} = \vec{0}$

Si ha:

$$\{\eta_n\} = \{\eta_n\} = \{\eta_P\} + [\varphi_P] \{\vec{dr}\} + [\varepsilon] \{\vec{dr}\}$$

$$\Rightarrow \{\eta_n\} = [\varepsilon] \{\vec{n}\}$$

in questo caso:
 $\Rightarrow \{\vec{dr}\} = \vec{PQ} = \{\vec{n}\}$

Analogamente:

$$\{\eta_m\} = \{\eta_m\} = \{\eta_P\} + [\varphi_P] \{\vec{dr}\} + [\varepsilon] \{\vec{dr}\}$$

$$\Rightarrow \{\eta_m\} = [\varepsilon] \{\vec{m}\}$$

in questo caso:
 $\Rightarrow \{\vec{dr}\} = \vec{PR} = \{\vec{m}\}$

to \vec{n}

→ la proiezione di $\{\eta_n\}$ e $\{\eta_m\}$ sulla direzione \vec{n} vale: (la proiezione è uno scalare!!)
 $\{n_i\}$ = proiezione di \vec{n} su $\vec{i} = \{\vec{i}\} \cdot \{\vec{n}\}$

$$\eta_{nn} = \{\vec{n}\}^T \{\eta_n\} = \{\vec{n}\}^T [\varepsilon] \{\vec{n}\}$$

$$\eta_{mm} = \{\vec{m}\}^T \{\eta_m\} = \{\vec{m}\}^T [\varepsilon] \{\vec{m}\}$$

η_{nm} = proiezione di η_n su \vec{m}
 η_{mn} = proiezione di η_m su \vec{n}
 η_{mm} = proiezione di η_m su \vec{m}

→ la proiezione di $\{\eta_n\}$ e $\{\eta_m\}$ sulla direzione \vec{m} vale:

$$\eta_{nm} = \{\vec{m}\}^T \{\eta_n\} = \{\vec{m}\}^T [\varepsilon] \{\vec{n}\}$$

$$\eta_{mm} = \{\vec{m}\}^T \{\eta_m\} = \{\vec{m}\}^T [\varepsilon] \{\vec{m}\}$$

Osservo che:

$$\Rightarrow \eta_{nm} = \eta_{mn} *$$

$$\Rightarrow \eta_{nn} = \{\vec{n}\}^T [\varepsilon] \{\vec{n}\} = \varepsilon_n \rightarrow \text{dilatazione specifica nella direzione } n$$

$$\Rightarrow \eta_{mm} = \{\vec{m}\}^T [\varepsilon] \{\vec{m}\} = \varepsilon_m \rightarrow \text{dilatazione specifica nella direzione } m$$

} avendo assunto il raggio unitario

* infatti:

$$\eta_{nm} = \{\vec{m}\}^T [\varepsilon] \{\vec{n}\} = \begin{pmatrix} m_x & m_y & m_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} =$$

$$= m_x (\varepsilon_x n_x + \frac{1}{2}\gamma_{xy} n_y + \frac{1}{2}\gamma_{xz} n_z) + m_y (\dots)$$

$$= m_x \varepsilon_x + \dots$$

$$= \varepsilon_x n_x m_x + \varepsilon_y n_y m_y + \varepsilon_z n_z m_z +$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma_{xy} (n_x m_y + n_y m_x) + \frac{1}{2}\gamma_{xz} (n_x m_z + n_z m_x) + \frac{1}{2}\gamma_{yz} (n_y m_z + n_z m_y)$$

mentre

$$\eta_{mn} = \{\vec{n}\}^T [\varepsilon] \{\vec{m}\} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix} = \eta_{nm}$$

direzioni principali della deformazione

direzione secondo cui avvengono solo dilatazioni e non sconvolgimenti angolari ovvero direzioni per cui lo spostamento del punto che sta sulla circonferenza avviene solo nella direzione radiale.

$$\Rightarrow \{n\} \parallel \{n'\}$$

$$\Rightarrow \{n\} = \epsilon_n \{n\} \quad (\text{con } \{n\} \text{ vettore (sfera unitaria)})$$

~~Derivando~~

Esistono dunque delle direzioni principali, se il sistema $\{n\} = \epsilon_n \{n\}$ ammette soluzioni.

$$\text{so che } \{n\} = [\epsilon] \{n\}$$

$$\Rightarrow \{n\} = \epsilon_n \{n\} \Leftrightarrow [\epsilon] \{n\} = \epsilon_n \{n\}$$

ovvero

$$[\epsilon] \{n\} - \epsilon_n \{n\} = \{0\}$$

$$([\epsilon] - [\epsilon_n]) \{n\} = \{0\} \rightarrow [\epsilon] \text{ spunta e seguito dal raccoglimento di } \{n\}$$

Risolvo il sist. omogeneo per trovare le direzioni principali della deformazione.

Il sistema ammette la soluzione banale $\{n\} = \{0\}$ che però non è accettabile dovendo essere $\{n\}$ un vettore per ipotesi ($n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$)

Riscrivo il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} (\epsilon_x - \epsilon_n) & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & (\epsilon_y - \epsilon_n) & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & (\epsilon_z - \epsilon_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{eq. agli autovalori (pensa } \epsilon_n = \lambda)$$

Tal sistema ammette soluzione $\Leftrightarrow \det([\epsilon] - [\epsilon_n]) = 0$ (R-capelli)

la ricerca dunque delle direzioni principali si traduce matematicamente nella ricerca degli autovettori associati agli autovalori di $[\epsilon]$

dilatazioni

autovettori \leftrightarrow deformazioni principali
autovettori \leftrightarrow direzioni principali della deformazione

$$\det([\epsilon] - [\epsilon_n]) = 0$$

$$\epsilon_n^3 - J_I \epsilon_n^2 - J_{II} \epsilon_n - J_{III} = 0 \rightarrow \text{eq. caratteristica}$$

dove:

$$\rightarrow J_I = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$\rightarrow J_{II} = - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \epsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix}$$

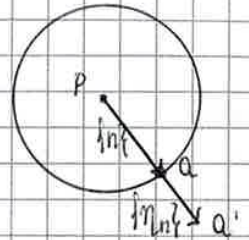
$$\rightarrow J_{III} = |\epsilon|$$

somma dei determinanti dei minori della matrice = J_{II}

invarianti scalari della deformazione (non cambiano al cambiare della terna di riferimento)

Risolviendo l'eq caratteristica, si troveranno tre radici $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (è un'eq di 3° grado) $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \mathbb{R}$ perché $[\epsilon]$ è simmetrico

\Rightarrow sostituendo $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ nel sistema (al posto di ϵ_n) trovo $\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\}$



⇒ la funzione g è derivabile dalla funzione f , ma la funzione f non è ottenibile per integrazione della funzione g . SEMPRE

Ovvero non tutti i campi tensoriali continui e derivabili producono, per integrazione, campi di spostamento.

Se impongo più le equazioni di conseguenza, ovvero impongo che delle relazioni differenziali sulle sei componenti in modo che esse non siano dipendenti, allora è definibile una funzione $q^{-1}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $h = q^{-1}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$q^{-1}: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ovvero f e g sono omeomorfismi

eq di compatibilità:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial z^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \end{cases}$$

si ottengono derivando più convenientemente angoli γ_{ij} rispetto ad entrambe le variabili x e y osservando che le derivate parziali del terzo ordine che si ottengono negli spostamenti, corrispondono a quelle del secondo nelle dilatazioni.

- noto che:

$$[\epsilon] = \epsilon_m [I] - [\epsilon_0] \text{ dove } [\epsilon_0] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 - \epsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 - \epsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 - \epsilon_m \end{bmatrix}$$

$[\epsilon_0]$ mi vedi analogia con $[\sigma_0]$

-estensimetri

- strumento che misura sperimentalmente la deformazione
- è basato sulla variazione di resistenza elettrica di un conduttore soggetto a deformazione = in conduttore filiforme soggetto a carico assiale nasce la figura resistenza elettrica proporzionalmente al carico esercitato.

L'estensimetro viene applicato mediante incollaggio alla superficie dell'elemento strutturale del quale si vuole misurare la deformazione.

Il valore delle dilatazioni avviene direttamente dall'estensimetro calcolando la variazione di resistenza elettrica.

Per il calcolo degli svinimenti angolari, si effettuano più misurazioni su assi diversi. Ad esempio:

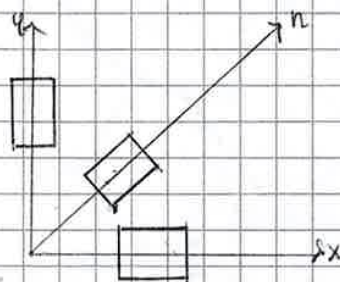
$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (sul piano)

$$\epsilon_{nn} = \{n\}^T [\epsilon] \{n\}$$

$$\{n\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{45} = \epsilon_{nn} = \frac{1}{2} \epsilon_x + \frac{1}{2} \epsilon_y + \frac{1}{2} \gamma_{xy}$$

$$\Rightarrow \text{ricavo } \gamma_{xy}!$$



→ p, q = assi principali nel piano di sezione

σ_n = componente normale = tensione normale

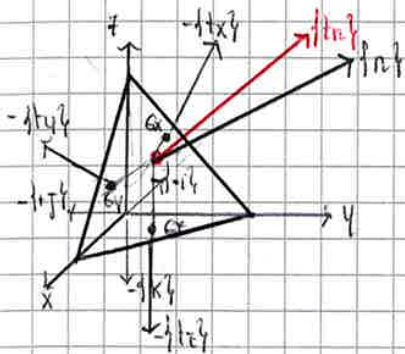
T_{np}, T_{nq} = componenti tangenziali sugli assi p e q

T = componente tangenziale totale = risultante di T_{np} e T_{nq} sul piano di sezione = $\sqrt{T_{np}^2 + T_{nq}^2}$

Fisso P.

→ Determino la legge di variazione del vettore tensione, all'interno della quantità dell'angolo $d\theta$.

• Considero un intorno di P di forma tetraedica con tre lati Δ infinitesimi coordinati e la faccia obliqua con versore normale \vec{n}



I versori sono $-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}$ perché il solido è la parte interna del piano

→ Il tetraedro è sottoposto all'azione dei vettori tensione $-\vec{t}_x, -\vec{t}_y, -\vec{t}_z, \vec{t}_n$

G_x = proiezione del baricentro sul piano xy
 y xz
 z xy

Per l'eq della trazione: $\int t_{ny} d\Omega_n - \int t_{nx} d\Omega_x - \int t_{tz} d\Omega_z - \int t_{nz} d\Omega_z = 0$

Per la geometria del tetraedro si ha: $d\Omega_x = n_x d\Omega$, $d\Omega_y = n_y d\Omega$, $d\Omega_z = n_z d\Omega$ dove n_x, n_y, n_z sono le proiezioni della superficie triangolare $d\Omega$ sui piani coordinati

⇒ $\int t_{ny} = \int t_{nx} n_x + \int t_{ny} n_y + \int t_{nz} n_z$

$$\begin{Bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{xx} \\ t_{xy} \\ t_{xz} \end{Bmatrix} n_x + \begin{Bmatrix} t_{yx} \\ t_{yy} \\ t_{yz} \end{Bmatrix} n_y + \begin{Bmatrix} t_{zx} \\ t_{zy} \\ t_{zz} \end{Bmatrix} n_z \Rightarrow \begin{Bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{xy} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{xz} & t_{yz} & t_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{nx} \\ t_{ny} \\ t_{nz} \end{Bmatrix} = [\sigma] \vec{n}$$

$$\vec{n} = [\epsilon] \vec{u}$$

i, j = indice della normale

j = indice della direzione

se $i=j$ $t_{ii} = \sigma_i$

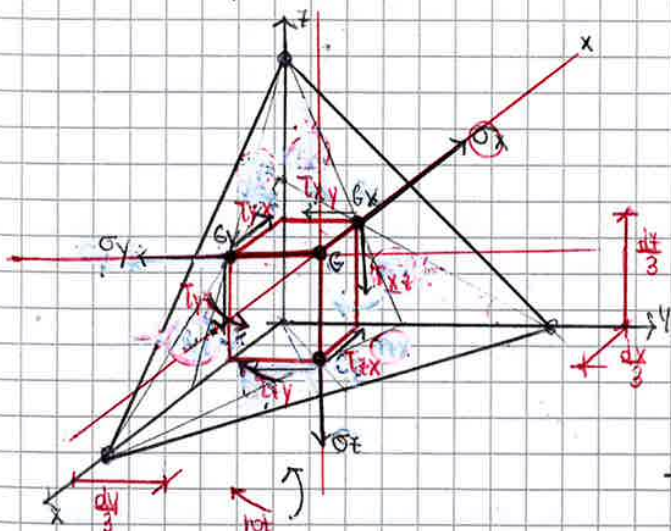
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

→ matrice degli sforzi (o tensione...)

matrice di deformazione del tensore \vec{n} nel versore tensione \vec{t}_n relativo

Dimostrare che $[\sigma]$ è simmetrica

Considero l'eq alla rotazione del tetraedro.



Applico i vettori tensione allibero porzioni di 6 sui piani coordinati

Considero l'asse x (σ_x) e scrivo l'eq del mom:

Osservo che:

non contribuiscono alla rotazione:

- $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ perché parallele all'asse

- $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ perché incidenti all'asse (braccio 0)

⇒ Contribuiscono al momento rispetto all'asse σ_x :

τ_{yx}, τ_{zy}

$$\rightarrow \tau_{yx} \cdot d\Omega_y \cdot \frac{dy}{3} - \tau_{zy} \cdot d\Omega_z \cdot \frac{dz}{3} = 0$$

braccio
piano baricentro

$$[\sigma] - [\sigma] n \cdot n = \{0\}$$

trovo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ risolvendo $\sigma^3 - J_I \sigma^2 - J_{II} \sigma - J_{III} = 0$ ($\sigma_i \in \mathbb{R}$ perché $[\sigma] \in \text{Sym}$)

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \rightarrow$ autovalori \leftrightarrow tensioni principali

$\{n_1\}, \{n_2\}, \{n_3\} \rightarrow$ autovettori \leftrightarrow direzioni principali (se $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$)

Dunque, nel sistema di riferimento principale, il tensore degli sforzi è una matrice diagonale.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\{t_i\} = [\sigma] \{n_i\}$$

\Rightarrow il tensore delle tensioni è l'app. lineare che trasforma una certa direzione \vec{n} nel vettore tensione che agisce sull'elemento di superficie di normale \vec{n}

Ogni tensore degli sforzi, potrà più essere scelto come somma di due componenti:

$$[\sigma] = [\sigma_i] + [\sigma_d]$$

$$[\sigma_i] = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

= tensore idrostatico = non dipende dalla terna di riferimento

\downarrow
i liquidi in pressione si scambiano sforzi interni di tale tipo

le tensioni principali ~~sono~~ sono tutte e tre uguali e quindi tutte le direzioni sono principali

nei fluidi in pressione il vettore tensione \vec{t} è sempre normale a qualsiasi area dA , \vec{t} di conseguenza compressivo, il suo modulo è pari alla pressione del fluido.

$$[\sigma_d] = \begin{bmatrix} \sigma_x - \bar{\sigma} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \bar{\sigma} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$

= tensore deviatorico = varia al variare della orientazione della terna di riferimento

- curve isostatiche = iniluppo delle direzioni principali

Stato tensionale piano:

= il vettore tensione appartiene in ogni caso ad una medesima piana, indipendentemente dalla sezione scelta.

Stato tensionale piano $\Leftrightarrow \exists$ una delle σ_i , tale che $\sigma_i = 0$.

es: sia $i=3$
 $\Rightarrow \sigma_3 = 0$

$$\Rightarrow [O] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \{tn\} = [O] \{n\} \Rightarrow \begin{cases} tn_1 \\ tn_2 \\ tn_3 \end{cases} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow tn_3 = 0$$

avendo tale:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [N] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} [N]^T \text{ e } tn_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} = \text{tensore depl. sforzi rispetto ad una generica terna d'oni } xy\beta$$

\Rightarrow dall'eq caratteristica si ottiene:

$$\sigma_n = 0$$

$$\sigma_n^2 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma_n + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) = 0 \Rightarrow \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

la rotazione dell'angolo:

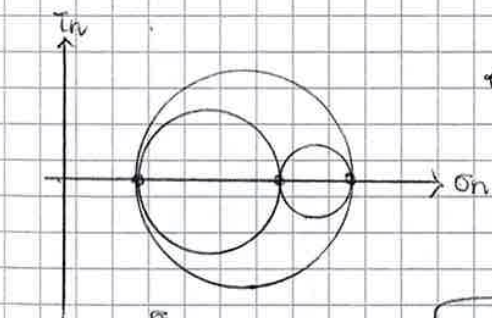
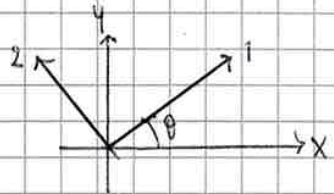
$[O^*] = [N] [O] [N]^T$ Per scoprire di che angolo ruotano xy, per ottenere 12

$$\Rightarrow [O^*] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[O^*] = [N] [O] [N]^T$$

Per trovare $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ devo annullare $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (nel 3^o principale $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$)

$$\tau_{xy} \cos 2\theta - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \text{ con } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad \left(\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$



\leftarrow in generale accade questo

Se lo stato è tensionale piano $\Rightarrow \sigma_3 = 0$

Considero un parallelepipedo elementare con lati paralleli agli oni xy β .

Siano note $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Ossegno la convenzione sui segni

Inti notevoli del piano di Mohr:

$$\begin{aligned} P &= (\sigma_x, \tau_{xy}) \\ P' &= (\sigma_y, -\tau_{xy}) \end{aligned}$$

\Rightarrow Individuo il polo P^* dall'intersezione di σ_{P1} con τ_{P1}

σ_{P1} = retta // σ_n passante per P

τ_{P1} = retta // τ_n passante per P'

$$\Rightarrow P^* = (\sigma_y, +\tau_{xy}) = \text{polo}$$

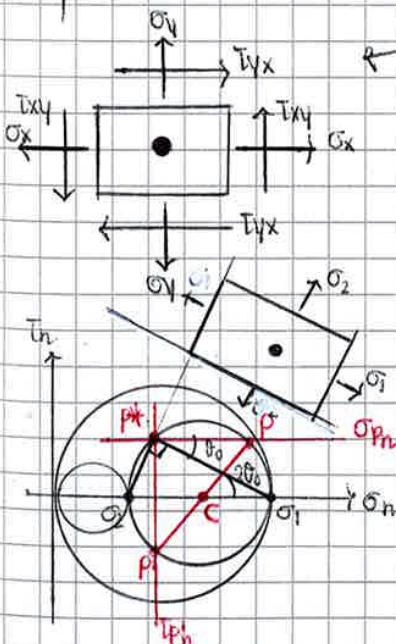
\Rightarrow direzioni dei due oni principali:

n_1 = retta // al segmento $(P^* \sigma_1)$

n_2 = retta // al segmento $(P^* \sigma_2)$

Trovo così le direzioni principali delle tensioni!

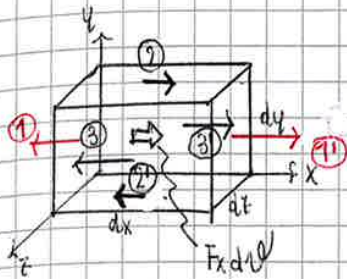
2 punti + 1 centro $\Rightarrow \exists$ 1 circonferenza



SOLIDO ELASTICO ⑧

- eq indefinite di equilibrio

Approccio ①



① $\sigma_x (dy dz)$

② $(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz$ variazione dovuta allo spostamento lungo la direzione x

→ l'equilibrio alla trazione lungo l'asse x

③ $(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz$

④ $\tau_{yx} dx dz$

Arca

⑤ $\tau_{xz} dy dx$

⑥ $(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dy dx$

⇒ per l'equilibrio alla trazione lungo l'asse x:

$$-\sigma_x dy dz + (\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dy dz$$

$$- \tau_{yx} dx dz + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy) dx dz - \tau_{xz} dy dx + (\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dy dx + F_x dV = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

Facendo analogamente sulle altre direzioni, si giunge al sistema seguente:

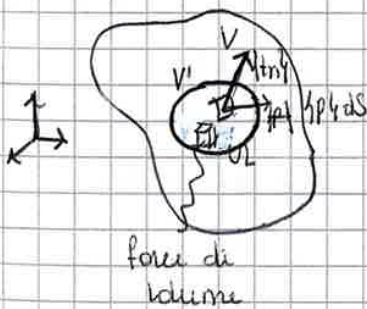
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_z = 0 \end{cases}$$

→ equazioni indefinite di equilibrio

 $V \in V$

problema iperstatico 6 incognite, 3 eq.

Approccio ②



forze di volume

vale l'eq di Cauchy

$$t_n = [\sigma] n$$

$$\Rightarrow t_{nx} = \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z$$

$$\Rightarrow \int_V (\sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) dS + \int_V F_x dV = 0 \rightarrow \text{vale il th di Green: } \int_V f \cdot g \cdot n_x dS = \int_V \frac{\partial f}{\partial x} g dV + \int_V f \frac{\partial g}{\partial x} dV$$

$$\Rightarrow \int_V (\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x) dV = 0$$

scegliendo volume $V \in V$ scelto

⇒ la funzione integranda è nulla

In questo caso $g=1$

perché:

$$\int_V f n_x dS = \int_V \frac{\partial f}{\partial x} dV$$

$$I_F = \int_V \{F_a\}^T \{m_b\} dV$$

$$\rightarrow \{F_a\} - \{F_b\} = [\partial]^T \{a\}$$

$$\begin{aligned} I_F &= \int_V -([\partial]^T \{a\})^T \{m_b\} dV = \\ &= \int_V -\{a\}^T [\partial] \{m_b\} dV = \\ &= - \int_V \{a\}^T [\partial] \{m_b\} dV = \\ &= \int_V \{a\}^T [\partial] \{m_b\} dV - \int_S \{a\}^T [N] \{m_b\} dS \end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{Green:} \quad \int_V f g \, dx = \int_V \frac{\partial f}{\partial x} g \, dx + \int_V \frac{\partial g}{\partial x} f \, dx$$

$$\rightarrow \{e_b\} = [\partial] \{m_b\}$$

$$\rightarrow \{p_a\} = \{a\}^T [N]$$

$$\Rightarrow I_F = \int_V \{a\}^T \{e_b\} dV - \int_S \{p_a\}^T \{m_b\} dS$$

$$\Rightarrow \int_V \{F_a\}^T \{m_b\} dV = \int_V \{a\}^T \{e_b\} dV - \int_S \{p_a\}^T \{m_b\} dS$$

$$\Rightarrow \int_V \{a\}^T \{e_b\} dV = \int_V \{F_a\}^T \{m_b\} dV + \int_S \{p_a\}^T \{m_b\} dS$$

→ plv per corpi deformabili
vale per qualsivoglia legge costitutiva
del materiale

$$\frac{ab}{dx} = \frac{ab}{dx}$$

↗ forze per relative spostamenti
tensioni per relative deformazioni

- legge costitutiva elastica

Un corpo deformabile è elastico quando la sua energia di deformazione, cioè il lavoro eseguito dall'esterno per portarlo in un certo stato deformativo $\{e\}$ o tensoriale $\{\sigma\}$, non dipende dal percorso di carico (eventi precedenti) ma solo dallo stato finale.

⇒ l'energia di deformazione è una funzione di stato!

Immagino un solido all'interno del quale, per ogni punto, \exists , un campo delle tensioni e un campo delle deformazioni, che dipendono dalle forze di volume e di superficie

$$\{F\}, \{p\} \rightarrow \{\sigma\}, \{e\}$$

ipotesi: la configurazione $\{\sigma\}, \{e\}$ nell'intorno di un certo punto, non dipende dall'ordine in cui sono applicate le forze o dal percorso fatto per arrivare al punto.

Questa approssimazione è ragionevole se l'entità delle forze applicate non è eccessivamente elevata.

Applico il plv al caso seguente:

- immagino un solido in equilibrio sotto l'azione delle forze di volume $\{F\}$ e di superficie $\{p\}$

⇒ sistema di forze equilibrato (a)

- immagino di considerare il sistema ottenuto rimuovendo il campo degli spostamenti, compatibilmente con i vincoli presenti

⇒ sistema conseguente (b)

Si immagina ora di incrementare le forze esterne di quantità elementari.

I campi incrementali sono $\{dF\}$ e $\{dp\}$ e generano un campo incrementale di spostamenti $\{dn\}$ da cui discende un campo incrementale di deformazioni $\{de\}$

Quindi si parla di solido elastico, quando il sistema è conservativo, ovvero l'energia immagazzinata nel solido è uguale all'energia rilasciata dal solido.

Adesso immagino un incremento del campo tensoriale ovvero.

- fisso campo degli spostamenti $\{u\}$ e quindi $\{e\}$ prima ho fatto il contrario
- vario il campo tensoriale $\{d\sigma\}$

Possiamo definire il lavoro virtuale infinitesimo

$$d\psi = \{d\sigma\}^T \{e\} \quad * \quad \psi = \text{potenziale elastico complementare}$$

Sapete che:

$$d\phi + d\psi = \{d\sigma\}^T \{de\} + \{d\sigma\}^T \{e\} = d(\{d\sigma\}^T \{e\})$$

↳ derivata del prodotto.

funzione di stato

ϕ potenziale elastico $\Leftrightarrow d\phi$ differenziale esatto

$\{d\sigma\}^T \{e\}$ funzione di stato $\Leftrightarrow d(\{d\sigma\}^T \{e\})$ differenziale esatto

$\Rightarrow d\psi =$ differenziale esatto (diff di differenziali esatti)

$\Rightarrow \psi$ funzione di stato.

$$\psi = \psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon_x}, \dots, \tau_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{yz}}$$

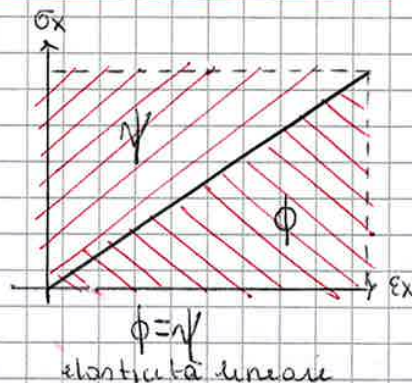
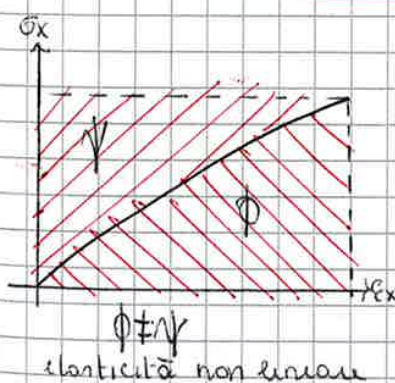
(tutto analogamente a prima).

$$d\psi = \epsilon_x d\sigma_x + \dots + \tau_{yz} d\gamma_{yz}$$

RICORDA:

$f = f(x, y, z)$ è funzione di stato $\Leftrightarrow df$ è differenziale esatto

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$



elasticità lineare

Considero lo sviluppo in serie di Taylor in potenziale elastico

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x-x_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$\begin{aligned} \phi(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{yz}) = & \phi(0) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_x}\right)_0 \epsilon_x + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \gamma_{yz}}\right)_0 \gamma_{yz} + \dots \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x^2}\right)_0 \epsilon_x^2 + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y}\right)_0 \epsilon_x \epsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \gamma_{yz}^2}\right)_0 \gamma_{yz}^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_x \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \epsilon_x \gamma_{yz} + \dots + 2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_y \partial \gamma_{yz}}\right)_0 \epsilon_y \gamma_{yz} + \dots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \int \sigma^T \epsilon \, dV = \gamma$$

Da cui si ha:

$$\Rightarrow d\phi = \int \sigma^T d\epsilon \, dV \neq \phi = \int \sigma^T \epsilon \, dV \quad (\text{a meno di una costante arbitraria})$$

$$\Rightarrow d\psi = \int d\sigma^T \epsilon \, dV \Rightarrow \psi = \int \sigma^T \epsilon \, dV \quad (\text{a meno di una costante arbitraria})$$

$$d\phi + d\psi = d(\int \sigma^T \epsilon \, dV) =$$

$$\neq \phi + \psi = \int \sigma^T \epsilon \, dV$$

$$\Rightarrow \phi + \psi = \int \sigma^T \epsilon \, dV = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} \quad \text{ma } \phi = \psi$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \int \sigma^T \epsilon \, dV = \psi$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \int \epsilon^T \sigma \, dV = \psi$$

perché vale la proprietà commutativa dei vettori

$$\Rightarrow \psi = \frac{1}{2} \int \sigma^T [H]^T \sigma \, dV \rightarrow \text{potenziale elastico complementare}$$

problema elastico lineare

Si ha:

$$[\sigma]^T \sigma + \int F \, dV = \int \delta \, dV \quad \forall \delta \in V \rightarrow \text{eq statica (eq. indefinite di equilibrio)}$$

$$\Rightarrow \sigma = [H] \epsilon$$

$$[\sigma]^T ([H] \epsilon) + \int F \, dV = \int \delta \, dV$$

$$\Rightarrow \epsilon = [\sigma] \eta$$

$$[\sigma]^T [H] [\sigma] \eta + \int F \, dV = \int \delta \, dV$$

$$([\sigma]^T [H] [\sigma]) \eta = - \int F \, dV \rightarrow \text{operatore di Lamé } [L] = [\sigma]^T [H] [\sigma] \text{ } \rightarrow \text{operatore matriciale e differenziale del secondo ordine}$$

$$[L] \eta = - \int F \, dV$$

Si ha:

$$[N]^T \sigma = \int p \, dV \quad \forall p \in S \rightarrow \text{eq statica (condizioni di equilibrio al contorno)}$$

$$\Rightarrow \sigma = [H] \epsilon$$

$$[N]^T [H] \epsilon = \int p \, dV$$

$$\Rightarrow \epsilon = [\sigma] \eta$$

$$[N]^T [H] [\sigma] \eta = \int p \, dV$$

$$([N]^T [H] [\sigma]) \eta = \int p \, dV$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [L] \eta = - \int F \, dV & \forall p \in V \\ ([N]^T [H] [\sigma]) \eta = \int p \, dV & \forall p \in S_p \\ \eta = \eta_0 & \forall p \in S_n \end{cases} \rightarrow \text{esiste ed è unica la soluzione}$$

*spollamento imposto
o se c'è un vincolo*

$$\Rightarrow \int_V \{\Delta \sigma^T\} \{\Delta \varepsilon\} dV = 0$$

$$\Rightarrow \int_V 2\phi(\Delta \varepsilon_x, \dots, \Delta \varepsilon_y) = 0$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \{\sigma^T\} \{\varepsilon\} \Rightarrow \{\sigma^T\} \{\varepsilon\} = 2\phi(\varepsilon_x, \dots, \varepsilon_y)$$

$$\Rightarrow \{\Delta \sigma^T\} \{\Delta \varepsilon\} = 2\phi(\Delta \varepsilon_x, \dots, \Delta \varepsilon_y)$$

$\Rightarrow \phi$ è una forma quadratica definita positiva, per cui l'integrale si annulla solo quando l'integrando è nullo in ogni punto del corpo elastico

\Rightarrow in ogni punto si deve avere $\Delta \varepsilon_x = \Delta \varepsilon_y = \dots = \Delta \varepsilon_z = 0$

$$\Rightarrow a \equiv b \quad (\varepsilon_x^a = \varepsilon_x^b, \dots, \varepsilon_z^a = \varepsilon_z^b)$$

\Rightarrow il sistema di sollecitazioni $\{F\}$, $\{p\}$, $\{q_0\}$ si può generare ind e ind solo campo di spostamenti $\{u\}$

CONDIZIONE DI VALIDITÀ DEL TH!

teorema di Betti

Considero un corpo linearmente sottoposto a forze di volume $\{F\}$ e a forze di superficie $\{p\}$

A questo consegue un campo di spostamenti $\{u\}$

Tale campo si genera nel corpo al termine del percorso ^{di carico} che porta da zero ai valori $\{F\}$ e $\{p\}$ in forte esterna

All'interno invece nasceranno i campi $\{\sigma\}$ e $\{\varepsilon\}$

Applico p.l.v. scegliendo come sistemi (a) e (b) quelli reali

\Rightarrow il lavoro sarà quello reale

$$\int_V \{F^T\} \{u\} dV + \int_S \{p^T\} \{u\} dS = \int_V \{\sigma^T\} \{\varepsilon\} dV \quad (d\varepsilon = \varepsilon_i)$$

$$\frac{1}{2} \int_V + \frac{1}{2} \int_S = \frac{1}{2} \int_V$$

$$\rightarrow \text{corpo elastico} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2} \{\sigma^T\} \{\varepsilon\}$$

$$\Rightarrow \int_V \phi dV = \frac{1}{2} \int_V \{F^T\} \{u\} dV + \frac{1}{2} \int_S \{p^T\} \{u\} dS \rightarrow \text{lavoro di deformazione}$$

\Rightarrow il lavoro di deformazione compiuto dalle forze esterne per portare il corpo dallo stato indeformato iniziale, allo stato deformato finale, è pari alla metà del lavoro che tali forze compirebbero, se presentassero il loro valore finale durante tutto il percorso di carico.

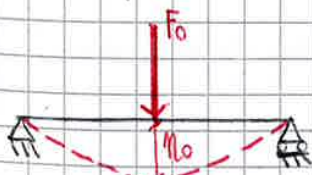
esempio

Considero una trave linearmente elastica a cui è sottoposta l'azione di una forza concentrata in estremità, che cresce lentamente (in modo da non indurre effetti dinamici) da 0 al valore finale F_0 .

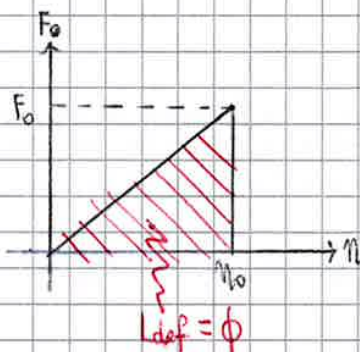
Quindi in estremità, l'allungamento cresce da 0 al valore finale η_0 .

$$F: 0 \rightarrow F_0$$

$$\eta: 0 \rightarrow \eta_0$$



stato deformato finale



$$l_{def} = \int_0^{\eta_0} F(\eta) d\eta = \frac{1}{2} F_0 \eta_0 = \phi$$

per la linearità è come se la forza, che cresce linearmente, avesse il valore della forza finale sin dall'inizio.

$$\Rightarrow \text{def}^{\text{②}} L_{ab} = L_a + L_b + L_{ba}$$

Per sistemi di corpo elastico il lavoro totale di deformazione non deve dipendere dal processo di carico, cioè dall'ordine in cui si applicano le forze esterne

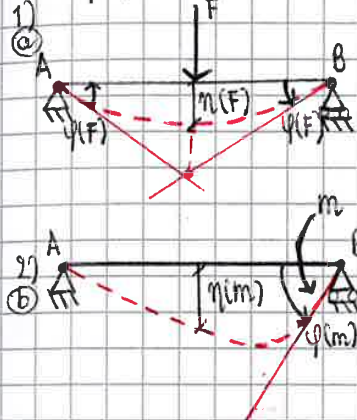
$$\Rightarrow \text{def}^{\text{①}} L_{ab} = \text{def}^{\text{②}} L_{ab} \Rightarrow L_{ab} = L_{ba}$$

⇒ i lavori mutui di due sistemi di forze sono uguali tra loro e differenti tra loro.

Per il th di Betti la matrice di elasticità lineare H è simmetrica!

I sistemi si dicono energeticamente ortogonali $\Leftrightarrow L_{ab} = L_{ba} = 0$ vale per il lavoro di def.

esempio)



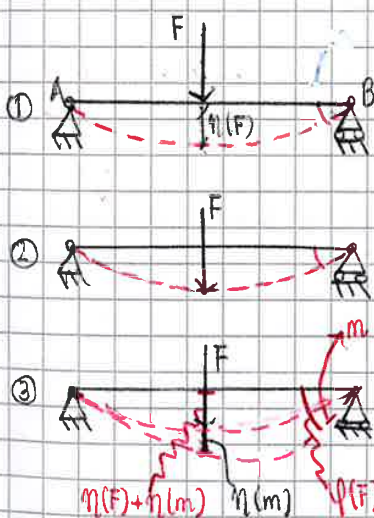
$$L_a = \frac{1}{2} \int_S \{F\}^T \{m\} dS = \frac{1}{2} F \eta(F) \rightarrow \text{th di Clapeyron}$$

forza per relativo spostamento nel punto in cui è applicata la forza

$$L_b = \frac{1}{2} \int_S \{m\}^T \{\varphi\} dS = \frac{1}{2} m \varphi(m) \rightarrow \text{th di Clapeyron}$$

momento per relativo spostamento nel punto in cui è applicato il momento

Ho applicato Clapeyron perché il processo di carico in entrambi i casi è quasi-statico



1) ①+① per il sistema (applico prima F e poi m)

Per il sistema di forze e per il sistema degli spostamenti vale il pse.

$$L_{ab} = \int_S \{F\}^T \{m\} dS = \int_S \{m\}^T \{F\} dS$$

$$L_{ab} = F \cdot \eta(m) + m \varphi(F) \rightarrow \text{il sistema ① è applicato per primo, il sistema ② per secondo}$$

⇒ l'unico lavoro di trascinamento è quello di F dovuto da F perché il suo punto di applicazione è stato spostato di $\eta(m)$

2) ②+② per il sistema (applico prima m e poi F)

$$L_{ba} = m \varphi(F) \rightarrow \text{il sistema ② è applicato per primo, il sistema ① per secondo}$$

⇒ l'unico lavoro di trascinamento è quello dovuto a m perché il suo punto di applicazione è stato spostato di $\varphi(F)$

$$\Rightarrow \text{nel caso 1): } L = L_a + L_b + L_{ab} = \frac{1}{2} F \eta(F) + \frac{1}{2} m \varphi(m) + F \eta(m)$$

$$\text{Nel caso 2): } L = L_a + L_b + L_{ba} = \frac{1}{2} F \eta(F) + \frac{1}{2} m \varphi(m) + m \varphi(F)$$

⇒ per l'ipotesi di corpo elastico (th di Betti) si ha $L_{ba} = L_{ab}$

$$\Rightarrow F \eta(m) = m \varphi(F)$$

RICORDA: F e m sono applicati in modo quasi-statico

⇒ vale il th di Clapeyron: $L = \frac{1}{2} F_0 \eta_0$ (forza finale, spostamento finale)

- isotropia

Un corpo è isotropo se le proprietà meccaniche non dipendono dalle direzioni uscenti dal generico punto P
ovvero le p. meccaniche sono considerate identiche in tutte le direzioni uscenti dal generico punto P.

(ANISOTROPO = contrario di isotropo)

considero un corpo linearmente elastico e isotropo.

$\Rightarrow \Psi$ dipenderà dai valori delle tre tensioni principali e non dall'orientazione del sistema principale di riferimento.

$$\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

$$\Psi = \frac{1}{2E} \left((\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right) \quad \text{prendila per buona!}$$

\Rightarrow da 21 coeff a 2 coeff indipendenti

Usando J_I, J_{II}, J_{III} esprimi in funzione delle tensioni principali:

$$\Rightarrow \Psi = \frac{1}{2E} (J_I^2 + 2J_{II}(1+\nu)) \rightarrow \text{senza gli invarianti in funzione delle tensioni principali}$$

Usando J_I, J_{II}, J_{III} esprimi in funzione delle generiche componenti del vettore tensione

$$\Rightarrow \Psi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

dove $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow$ ho sempre 2 coeff indipendenti

\Rightarrow usando gli invarianti: $\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leftrightarrow \Psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$
 \uparrow
 J_I, J_{II}, J_{III}

$$\Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \frac{1}{2G} (0+0+0)$$

$$\Psi(\sigma_1, \dots, \tau_{ij}) = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

so che

$$\epsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}} \Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

NOTO CHE

\rightarrow gli componenti angolari dipendono linearmente, con una relazione di proporzionalità dalle rispettive tensioni tangenziali

\rightarrow le dilatazioni dipendono da tutte e tre le tensioni tangenziali normali

In forma matriciale:

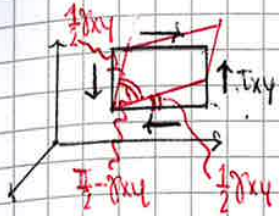
$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [a_{66}] = [H]^{-1} \text{ mendo } \{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\}$$

$$\text{infatti } \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \sigma_x^2} = \frac{1}{E}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau_{xy}^2} = \frac{1}{G}$$

→ Considero un parallelepipedo elementare soggetto solo alla componente di tensione tangenziale:

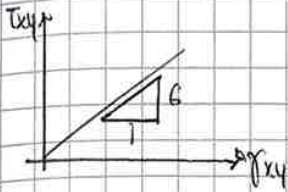


Si ha:

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \rightarrow G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

⇒ G = rigidezza che il solido oppone agli sconvolgimenti angolari sul piano $\tau_{xy} - \gamma_{xy}$ e il coeff angolare positivo dello slla di caricamento



Conclusione:

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x}, \quad G = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$$

Per corpo linearmente elastico ed isotropo, le direzioni principali di deformazione e di tensione coincidono (σ e ϵ sono coincidenti)

In corpo linearmente elastico ed isotropo è caratterizzato dai valori che i due parametri E e ν assumono in ciascun punto.

Se le funzioni E e ν si rivelano costanti, allora il corpo si dice **OMOGENEO**!

(Es. acciaio e cis = linearmente elastici, isotropi ed omogenei)

Ague materiale ha una σ_{max} (kg/cm^2)

Oltre questo valore, il comportamento del materiale diventa non lineare e anelastico.

Continuando a sollecitarlo, si raggiungono condizioni di crisi per cui il corpo non può più essere considerato neppure in continuo deformabile (fratture ⇒ discontinuità nella funzione spostamento)

⇒ σ_{max} = valore della tensione normale di trazione che provoca lo snervamento e la rottura.

$\frac{\sigma_{max}}{E}$ = ordine di grandezza della dilatazione al di sotto del quale ha senso finire l'idealizzazione elastica lineare.
(10^{-3} ÷ 10^{-1})

- resistenza, duttilità, energia di frattura.

Se le tensioni lentamente determinate eccedono anche in un solo punto del corpo, la resistenza del materiale di cui è costituito il corpo stesso, pur essendo la legge $\sigma(\epsilon)$ lineare ed elastica nel tratto iniziale, essa perde tale linearità nel tratto successivo dando luogo a fenomeni di snervamento, plasticizzazione e infine rottura.

• materiali duttili: → duttilità = dipende dalla temperatura e dimensione dell'elemento strutturale

→ mostrano ampi tratti non lineari nel diagramma $\sigma(\epsilon)$, prima di pervenire alla rottura.

→ rapporto tra resistenza a trazione e resistenza a compressione ≈ 1

(resistono o. trazione tanto quanto resistono a compressione).

• materiali fragili

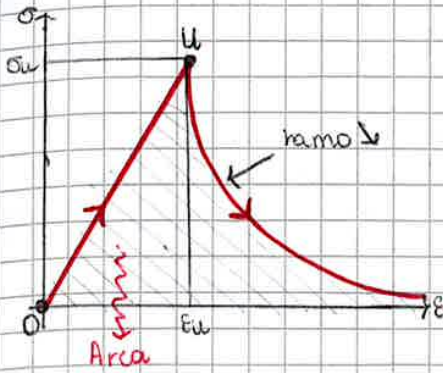
→ si rompono in modo improvviso, quando la risposta è ancora sostanzialmente elastica e lineare.

→ rapporto tra σ a trazione e σ a compressione $\approx 10^{-1}$ ÷ 10^{-2}

(resistono più a compressione che a trazione)

CASO-MATERIALE FRAGILE

→ Ricorda: ϵ è \uparrow duttile in compressione
fragile in trazione



Se in materiale fragile, la fase di trazione permette di concludere che:

→ processo a carico controllato (input σ , output ϵ)
 ⇒ risposta approssimativamente elastica e lineare e poi all'improvviso una repentina brusca caduta del carico stesso, che corrisponde alla formazione di una fessura

→ processo a deformazione controllato (input ϵ , output σ)
 ⇒ più riducente la curva di risposta post-rottura

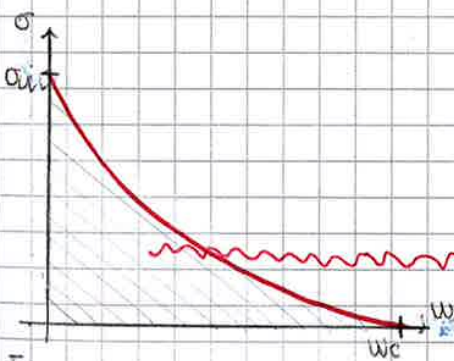
In questo caso si osserva:

→ presenza di un intero ramo di incrudimento negativo (softening)
 → possibilità di dissipare, da parte del materiale, una notevole quantità di energia per unità di volume (Area)

→ tale energia viene dissipata in una banda localizzata, la quale diventa in seguito una fessura ovvero la dilatazione tra i due sensori non è una flessione costante:
 una matita una notevole fessura in corrispondenza della fessura in via di formazione
 ENS di Dzac (dilatazione infinita dove si verifica una discontinuità della flessione spostamento anisole)

⇒ il ramo decrescente dipende dalla lunghezza l_0 non dalla caratteristica del materiale.
 Il diagramma (σ/w) dipende dalla caratteristica del materiale

rappresenta la tensione del materiale trasmessa attraverso la fessura, in funzione dell'apertura della fessura stessa



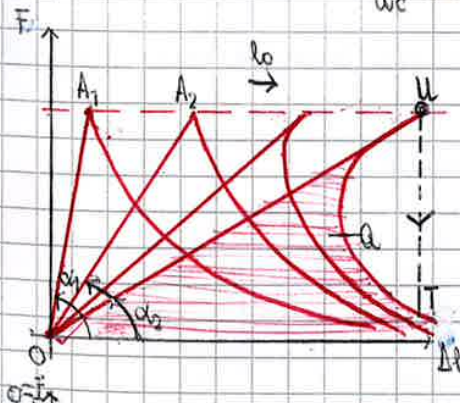
↑ w ⇒ ↓ intensificazione

w_c = valore limite ⇒ l'intensificazione si spinge totalmente e la fessura diventa una separazione completa che divide in due parti distinte il porro

$\sigma(w)$ ⇒ dipende dal materiale ⇒ legge coseno

$$G_{ic} = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw = \text{energia di frattura} \quad [F][L]^2$$

$A_0 \cdot G_{ic}$ = energia dissipata sulla superficie della fessura



← curve di risposta all'aumentare di l_0
 → Area = $A_0 G_{ic}$ = uguale per tutte le curve!

↑ l_0 ⇒ tratti elastici a rigidità costante
 tratti softening a pendenza negativa crescente e, oltre un certo limite a pendenza positiva

tratto $OA_1 \rightarrow l_1 = l_0 \quad l_2 > l_1 \Rightarrow \alpha_2 < \alpha_1$ rigidità costante
 tratto $OA_2 \rightarrow l_2 = l_0$

$l_0 \rightarrow 0$ ← curve di risposta all'↑ di l_0
 → unico tratto elastico lineare
 → ventaglio di rami softening.

$$\rightarrow Area = \frac{F_{ic}}{l_0} = \text{costante} \forall l_0$$

$l_0 \rightarrow 0$ ⇒ ramo softening curvilineo
 $l_0 \rightarrow \infty$ ⇒ risposta strutturale perfettamente elastica
 ⇒ ramo softening ⇒ tratto elastico (tende a →)

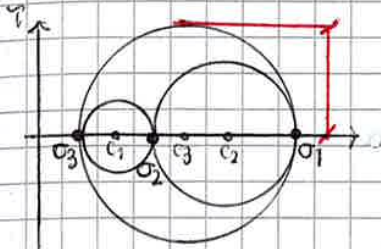


Se il materiale è isotropo:
 $\sigma_{eq} = \sigma_{eq}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_p$

Per quanto riguarda le prove uniaxiali di trazione e compressione su campioni metallici, si può osservare come la pressione idrostatica dell'ambiente non influisca sul valore della tensione di snervamento.

- criterio di Tresca (criterio della massima tensione tangenziale)

Le tensioni tangenziali sono responsabili dello snervamento che subisce il materiale quando è soggetto ad uno stato tensionale triassiale



$$\text{In generale } \tau_{\max} = \frac{1}{2} \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\}$$

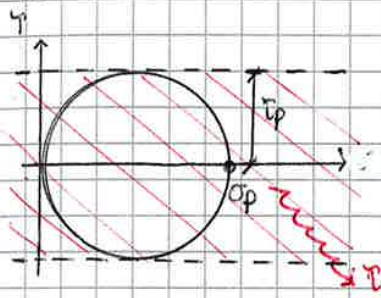
$$\text{Nel disequo } \tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$$

$$\sigma_1 = \sigma_p \Rightarrow \tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} \leq \frac{1}{2} \sigma_p = \tau_p$$

$$\Rightarrow \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} < \sigma_p$$

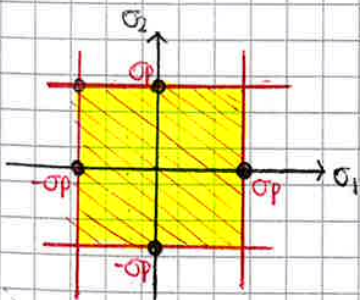
↓
 tensione eq. di Tresca



Nel caso di stato tensionale piano, $\sigma_3 = 0$, la condizione diventa:

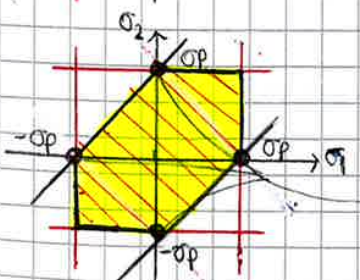
$$\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} < \sigma_p$$

$\Rightarrow |\sigma_1| < \sigma_p$
 $|\sigma_2| < \sigma_p$
 $|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$ → criterio di Rankine o criterio della massima tensione normale



$$|\sigma_1| < \sigma_p$$

$$|\sigma_2| < \sigma_p$$



$$|\sigma_1| < \sigma_p$$

$$|\sigma_2| < \sigma_p$$

$$|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p$$

↓
 esagono di Tresca

• rappresentano le crisi uniaxiali di trazione e compressione, nelle due direzioni principali

- Se esprimiamo la condizione di Von Mises in funzione delle componenti speciali di tensione, invece che delle tensioni principali, ottengo:

$$(\sigma_I^2 + 3\sigma_{II}^2) < \sigma_p^2$$

$$((\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)) < \sigma_p^2$$

- Se esprimiamo la condizione di Von Mises per gli stati tensionali piani, ad esempio $\sigma_z = 0$, ottengo:

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) < \sigma_p^2 \rightarrow \text{eq dell'ellisse con asse maggiore coincidente con la bisettrice del I e III quadrante} \\ \Rightarrow \text{ellisse di Von Mises}$$

L'ellisse di Von Mises è circoscritta all'esagono di Tresca e interseca gli assi σ_1 e σ_2 negli stessi quattro punti notevoli.

Le due frontiere hanno in comune anche i due punti di intersezione con la bisettrice del I e III quadrante.

→ dominio ellittico > dominio esagonale ⇒ $\left(\begin{array}{l} \text{criterio di Von Mises è meno cautelativo (più} \\ \text{permissivo) del criterio di Tresca} \end{array} \right)$

condizione di Von Mises

$$(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) < \sigma_p^2$$

condizioni di Tresca

$$\begin{cases} |\sigma_1| < \sigma_p \\ |\sigma_2| < \sigma_p \\ |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p \end{cases}$$

Nota che sotto le ipotesi fatte, le equazioni di equivalenza al contorno diventano:

→ sulla base

$$[N]^T \{ \sigma \} = \{ P \} \equiv \begin{cases} \sigma_x = P_x \\ \tau_{xy} = P_y \\ \tau_{yx} = P_x \\ \sigma_y = P_y \end{cases} \quad (1)$$

$$\{ m \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

→ sulla superficie laterale

$$[N]^T \{ \sigma \} = \{ P \} \equiv \begin{cases} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = 0 \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y = 0 \\ \tau_{yx} n_x + \tau_{yy} n_y = 0 \end{cases}$$

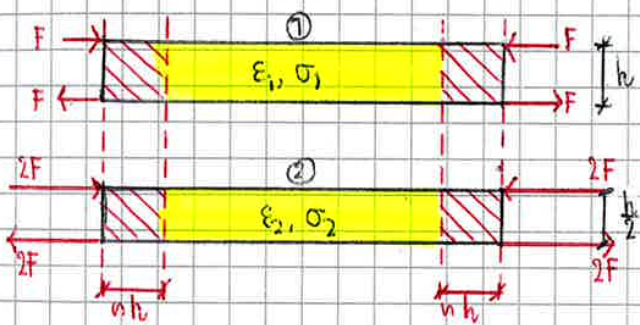
imponendo $n_x = 0 \rightarrow \{ P \} = \{ 0 \} \rightarrow$ il solido è caricato solo sulla base

$$\{ m \} = \{ 0 \}$$

Ipotesi fondamentali di Saint Venant:

« A sufficiente distanza da ciascuna base, lo stato deformativo e tensionale dipende dalla risultante $\{ P \}$ delle forze agenti sulla base medesima, nonché dal momento risultante $\{ H \}$ delle forze risultanti rispetto al baricentro della base considerata »

Se considero quindi due diverse distribuzioni di carichi sulle basi ma tra loro equivalenti, lo stato deformativo e tensionale è identico, tranne in una piccola zona adiacente alla base (III)



i campi deformativo e tensionale sono approssimativamente gli stessi a distanze dalle basi superiori all'altezza h

$$\Rightarrow \text{Ip di S. Venant: } \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 \\ \epsilon_1 = \epsilon_2 \end{cases}$$

→ le condizioni di equivalenza sulle basi possono essere globali, e non puntuali ovvero

$$\left[\begin{aligned} \int_A \{ r \} \{ \sigma \} dA &= \int_A \{ P \} dA = \{ P \} = \begin{Bmatrix} N \\ T_x \\ T_y \end{Bmatrix} \\ \int_A \{ r \} \{ \sigma \} \{ r \} dA &= \int_A \{ r \} \{ P \} dA = \{ H \} = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \right]$$

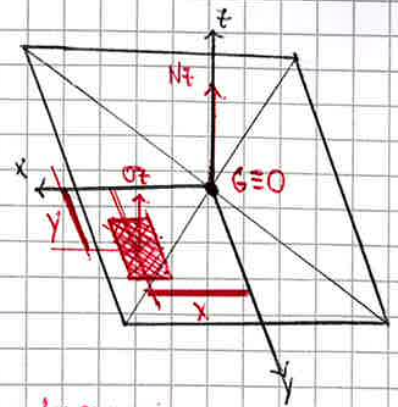
Invocando uno dei due sistemi 1 e 2 di forze e applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ritengono due sistemi autoequilibrati agenti sulle basi, i quali generano un campo deformativo e tensionale approssimativamente nullo, eccettuata la zona limitata.

lo smorzamento del disturbo creato dai sistemi autoequilibrati di forze, avviene a distanza dalle basi, avviene a distanza dalle basi superiori approssimativamente alla dimensione massima della sezione, quando la sezione stessa è compatta e di forma regolare. Quando invece la sezione è sottile, la distanza di smorzamento può risultare di gran lunga più rilevante.

Ricorda: l'assunzione di Saint Venant non vale nei corrispondenti dei punti in cui sono applicate le forze esterne e le reazioni vincolari.

Il campo delle deformazioni sarà ottenuto da $\{\epsilon\} = [H] \{\eta\}$
(eq costitutiva elastica):
Si ottiene pertanto:

$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{Nz}{EA} \\ \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{Nz}{EA} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \end{cases}$$



Se lo sforzo normale N è di trazione, si verifica una dilatazione uniforme in direzione assiale e contrazioni tutte uguali tra loro nelle direzioni trasversali, mentre gli sconvimenti angolari risultano nulli.

Il campo degli spostamenti sarà ottenuto da $\{u\} = [D] \{\eta\}$
(ovvero integrando il campo delle deformazioni)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = -\nu \frac{Nz}{EA} &\Rightarrow u = -\nu \frac{N}{EA} x + u_0(y, z) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = -\nu \frac{Nz}{EA} &\Rightarrow v = -\nu \frac{N}{EA} y + v_0(x, z) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \epsilon_z = \frac{Nz}{EA} &\Rightarrow w = \frac{N}{EA} z + w_0(x, y) \end{aligned}$$

il campo di spostamenti u_0, v_0, w_0 non ha componenti deformative
 $\Rightarrow [D] \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
 \Rightarrow rappresenta una generica rototraslazione rigida

La soluzione ottenuta è costituita dalle tensioni e dagli spostamenti seguenti

TENSIONI $\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = \frac{Nz}{A} \end{cases} \Rightarrow$ unica soluzione possibile per il Teorema di Kirchhoff

SPOSTAMENTI (*)

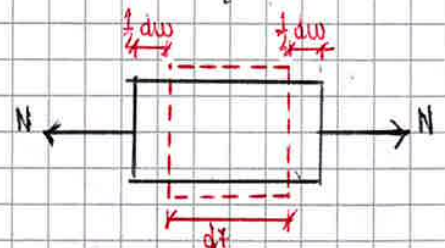
Il loro elemento di deformazione, relativo ad un tratto infinitesimo di lunghezza dz del solido di Saint Venant, si ottiene applicando il th di Clapeyron.

$$dL = \frac{1}{2} N dw = \frac{1}{2} N \epsilon_z dz$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{N}{EA}$$

coefficiente dell'elasticità lineare

(Vedi appunti: approfondimento del prof.)



$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \Rightarrow \dot{q} = [D] \dot{\eta} \rightarrow \text{eq cinematica}$$

\dot{q} = vettore delle caratteristiche deformative
 $\dot{\eta}$ = vettore degli spostamenti generalizzati
 $[D]$ = matrice operatore cinematico

Nota che, nei sistemi di travi, la matrice ^{dinamica} statica e quella cinematica sono legati dalla relazione:

$$[MC] = [MD]^T$$

In questo caso vale la regola seguente:

$$[D]^T = [D^*] \text{ ma MA i termini non differenziabili cambiano di segno.}$$

- principio dei lavori virtuali per sistemi di travi deformabili

Considero il sistema A di forze che sia equilibrato (soddisfa cioè le equazioni di equilibrio)
 Considero il sistema B di spostamenti compatibili e congruenti (\rightarrow oppure \rightarrow vietato!)

$$L_F = \int_0^L \dot{F}_A^T \dot{\eta}_B dt = \begin{matrix} \dot{F}_A = \text{forze che appartengono al sistema A} \\ \dot{\eta}_B = \text{spostamenti che appartengono al sistema B} \end{matrix}$$

$$L_F = \int_0^L -([D^*] \dot{q}_A)^T \dot{\eta}_B dt = \rightarrow \dot{F}_A + [D^*] \dot{q}_A = \dot{F}_B$$

$$= \int_0^L -(\dot{q}_A^T [D]) \dot{\eta}_B dt = \rightarrow \text{Formula di Green: } \int_0^L f(x) g'(x) dx = [f(x)g(x)]_0^L - \int_0^L f'(x)g(x) dx$$

(integrazione per parti)

$$\rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$([D^*] \dot{q}_A)^T = \dot{q}_A^T [D^*]^T = \dot{q}_A^T [D]$$

lavoro alle estremità \rightarrow

$$= \int_0^L \dot{q}_A^T [D] \dot{\eta}_B dt - [\dot{q}_A^T \dot{\eta}_B]_0^L$$

\rightarrow lavoro lungo la trave

$$\Rightarrow \int_0^L \dot{F}_A^T \dot{\eta}_B dt = \int_0^L \dot{q}_A^T [D] \dot{\eta}_B dt - [\dot{q}_A^T \dot{\eta}_B]_0^L$$

\dot{q}_B (eq cinematica)

$$\Rightarrow \int_0^L \dot{q}_A^T \dot{q}_B dt = \int_0^L \dot{F}_A^T \dot{\eta}_B dt + [\dot{q}_A^T \dot{\eta}_B]_0^L$$

$\int_{a,b}^{c,d} = \int_a^c + \int_b^d$

\rightarrow per tre travi: l'int è lineare

il lavoro all'estremità è solo quello del primo e ultimo punto, perché quelli intermedi si elidono



$$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^b + \int_b^c + [\int_a^b + \int_b^c] \Rightarrow \int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

$$\Rightarrow \int_S \dot{q}_A^T \dot{q}_B dt = \int_S \dot{F}_A^T \dot{\eta}_B dt + \sum_i [\dot{q}_{A_i}^T \dot{\eta}_{B_i}]$$

\rightarrow forze concentrate esterne e reazioni vincolari
 (l'effetto di una r.v. è quello di forza concentrata).

Se i vincoli sono perfetti punti, comunque non ci sono, ovvero le reazioni vincolari non cambiano lavoro, o meglio ancora.

NETODO SEMIINVERSO = ipotizza una parte delle ~~sette~~ soluzioni e ne verifica le altre

CENTRO DI TAGLIO = punto in cui se applico il taglio
non ha rotazioni

invece

W

C \ominus
T \oplus

2) flessione retta (sist. di riferimento baricentrico e principale)

$$N = T_x = T_y = M_x = M_y = 0$$

$$M_x \neq 0$$

Si ipotizza a priori il campo tensionale normale σ_z , in questo caso ~~costante~~ variabile linearmente sulla sezione trasversale

$$\text{Suppongo quindi } \begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = T_{xy} = T_{yz} = T_{xz} = 0 \\ \sigma_z = ax + by + c \end{cases}$$

Devo verificare che:

$$\textcircled{1} \int_A \begin{Bmatrix} \sigma_z \\ T_{xz} \\ T_{yz} \end{Bmatrix} dA = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \int_A \sigma_z dA = 0 \\ \int_A T_{xz} dA = 0 \\ \int_A T_{yz} dA = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_z dA &= \int_A (ax + by + c) dA = \\ &= \int_A ax dA + \int_A by dA + \int_A c dA = \\ &= a \int_A x dA + b \int_A y dA + c \int_A dA = \end{aligned}$$

momento statico:

$$S_y = \int_A x dA = 0$$

$$S_x = \int_A y dA = 0$$

perché per ipotesi il sistema di riferimento è baricentrico

$$\Rightarrow \int_A \sigma_z dA = 0 \Leftrightarrow \int_A c dA = 0 \Leftrightarrow cA = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_z = ax + by$$

Devo verificare che:

$$\textcircled{2} \int_A \begin{Bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{Bmatrix} dA = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \int_A T_{xz} dA = 0 \\ \int_A T_{yz} dA = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_A (ax + by) y dA = \int_A axy dA + \int_A by^2 dA =$$

$$I_{yy} = I_y = \int_A x^2 dA$$

$$\int_A axy dA = \int_A (ax + by) x dA = a \int_A x^2 dA + b \int_A xy dA$$

momento d'inerzia/anti-afugo

$$I_y = \int_A x^2 dA \gg 0$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0$$

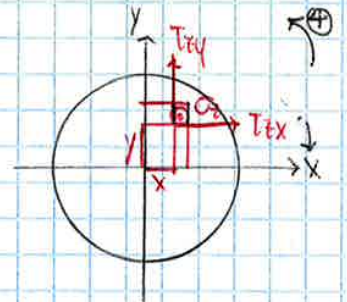
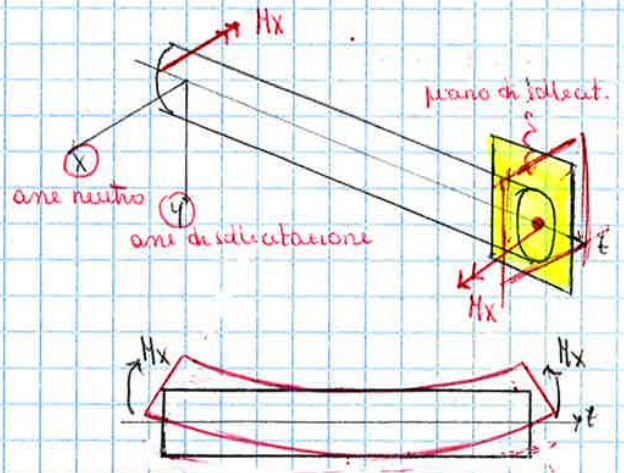
perché per ipotesi il sistema di riferimento è principale

$$\Rightarrow \int_A ax^2 dA = a \int_A x^2 dA$$

$$\Rightarrow \int_A -\sigma_z x dA = 0 \Leftrightarrow \int_A x^2 dA = 0 \Leftrightarrow a I_y = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_z = by$$



→ campo deformativo
→ campo tensionale:

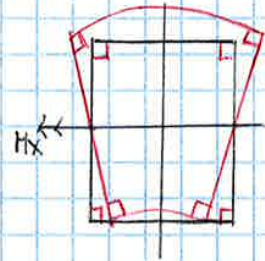
$$\begin{cases} \sigma_t = \frac{M_x}{I_x} y \\ \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0 \end{cases}$$

→ campo deformativo

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$$

$$\begin{cases} \epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \frac{M_x}{E I_x} y \\ \epsilon_t = \frac{M_x}{E I_x} y \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \end{cases}$$

→ gli angoli non cambiano



→ campo degli spostamenti

$$\{\epsilon\} = [\partial] \{\eta\}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x = -\nu \frac{M_x}{E I_x} y \Rightarrow u = -\nu \frac{M_x}{E I_x} xy + u_0(x, y, t)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y = -\nu \frac{M_x}{E I_x} y \Rightarrow v = -\nu \frac{M_x}{E I_x} \frac{y^2}{2} + v_0(x, y, t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon_t = \frac{M_x}{E I_x} y \Rightarrow w = \frac{M_x}{E I_x} yt + w_0(x, y, t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\nu \frac{M_x}{E I_x} x + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} = \nu \frac{M_x}{E I_x} x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = \gamma_{yt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{M_x}{E I_x} t + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial t} = -\frac{M_x}{E I_x} t$$

Quindi si ha:

$$v_0(x, t) = \int \nu \frac{M_x}{E I_x} x dx = \nu \frac{M_x}{E I_x} \frac{x^2}{2} + v_1(x, t)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = -\frac{M_x}{E I_x} t \Rightarrow v_1(x, t) = -\frac{M_x}{E I_x} \frac{t^2}{2} + v_2(x, t)$$

inoltre: $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ il campo degli spostamenti u_0, v_2, w_0 non ha componenti deformative

→ rappresenta una generica trasformazione di rototranslazione rigida

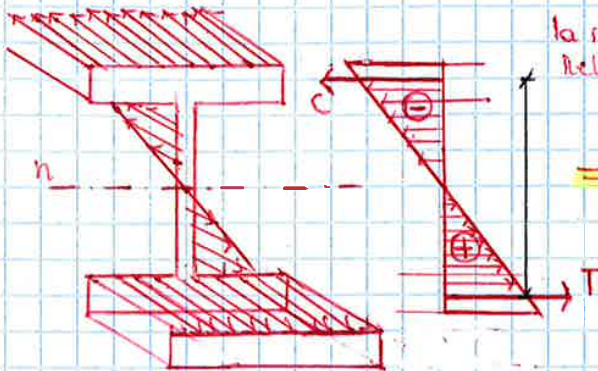
$$\Rightarrow \begin{cases} u = -\nu \frac{M_x}{E I_x} xy + u_0(x, y, t) \\ v = -\frac{M_x}{E I_x} \left[\frac{x^2}{2} + \nu(y^2 - x^2) \right] + v_2(x, t) + \textcircled{1} \\ w = \frac{M_x}{E I_x} yt + w_0(x, y, t) \end{cases}$$

Approfondimento:

Per ottimizzare il comportamento della sezione in campo elastico, è meglio avere il materiale che è lontano dall'asse, perché sono le fibre del materiale saranno più sollecitate e avranno un braccio maggiore.

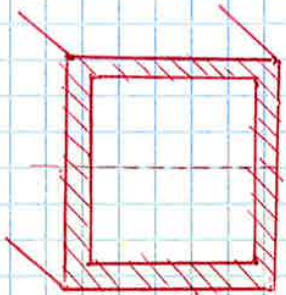
Alcune soluzioni sono: ~~for~~ cerchiare di snellire la sezione ~~for~~ in meno, perché è vero che nella ipotesi di Saint Venant non ci sono le forze di idume, ma nella realtà ci sono.

Allora se ho ~~del~~ materiale che non contribuisce in modo rilevante è meglio toglierlo, ovvero disporre il materiale lutto dove serve.



la sezione a doppio T ottimizza la sezione se l'asse neutro è in alto il materiale dove serve

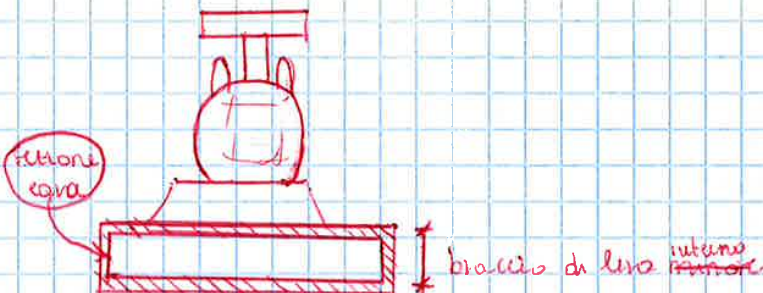
⇒ maggiore è il braccio di leva ⇒ maggiore è il momento a flessione, a parità di σ



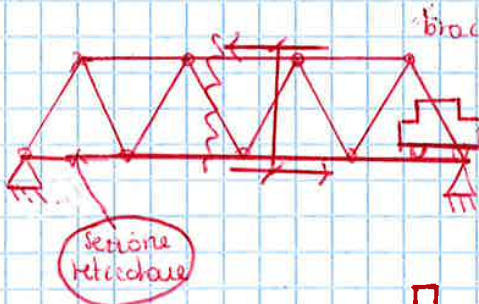
la sezione a cavità ottimizza la sezione se il lato maggiore è \perp all'asse neutro

dispongo il materiale lontano dall'asse neutro.

Questa è una sezione meno ottimale di quella a doppia T ma è preferita perché la cavità può essere usata per farci passare qualcosa



⇒ la seconda struttura è più vantaggiosa

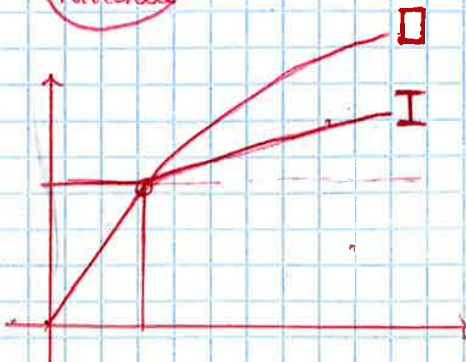


Immaginando rifatto lo stesso trussone massimo, avendo la seconda struttura braccio di leva maggiore il momento sarà maggiore nel secondo caso.

Per una valutazione qualitativa bisogna anche tener conto del materiale.

Il vantaggio della sezione a doppio T è evidente in campo elastico.

In campo plastico, quando ci avviciniamo alla situazione di collasso non è vantaggiosa perché c'è poco materiale.



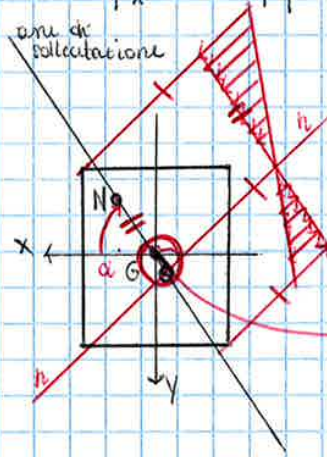
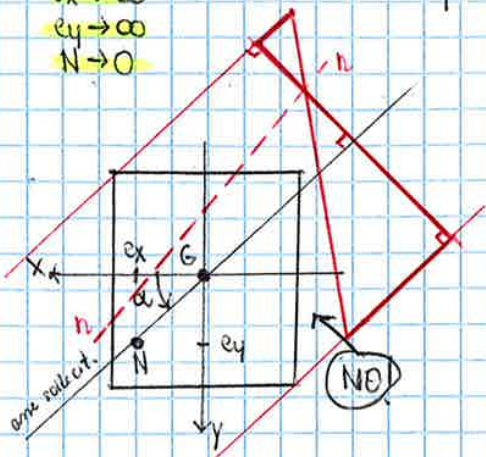
h) $\frac{e_y}{e_x} = \tan \alpha \Rightarrow$ flexione deviata

$$\sigma_z = \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} \Rightarrow \sigma_z = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{\rho_x^2} \tan \alpha + \frac{x}{\rho_y^2} = 0 \Rightarrow \text{retta baricentrica}$$

$e_x \rightarrow \infty$

$e_y \rightarrow \infty$

$N \rightarrow 0$



Attenzione!!
disegno sbagliato perché
l'asse neutro deve passare
dal baricentro

Sono presenti solo le flessioni rette M_x, M_y .

\Rightarrow l'asse neutro è baricentrico ma in generale non è ortogonale all'asse di sollecitazione

\Rightarrow asse di sollecitazione = retta NG
 $y = x \tan \alpha$

Essendo l'asse neutro = $y = -\frac{1}{\tan \alpha} \left(\frac{\rho_x^2}{\rho_y^2} \right) x - \frac{\rho_x^2}{e_y}$

1.15 $m_f = -\frac{1}{m_s}$

m_1 (asse di sollecitazione) = $\tan \alpha$

m_2 (asse neutro) = $-\frac{1}{\tan \alpha} \frac{\rho_x^2}{\rho_y^2}$

$\Rightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha}$

$\Rightarrow \begin{cases} e_x = 0 \\ e_y = 0 \\ \rho_x = \rho_y \Rightarrow I_x = I_y \end{cases}$

sezione a simmetria giroscopica

Nel caso della flessione deviata, il piano in cui ci sono i carichi non è lo stesso piano in cui avvengono le deformazioni (per punto si dice deviato).

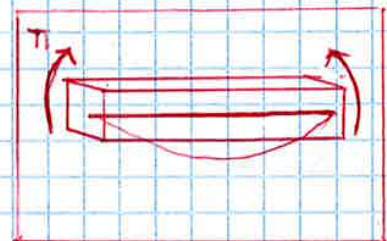
\Rightarrow la linea elastica viene deviata
linea deformata dell'asse

L'asse neutro (retta del luogo dei punti che non sono né tesi né compressi) non è più \perp all'asse di sollecitazione. (nella flessione retta ciò invece accade).

Il piano che contiene i carichi, nella flessione deviata, non è più ortogonale al piano sul quale avviene l'inflexione

L'eq dell'asse neutro può essere scritta come segue:

$$y = \frac{M_x}{I_{yy}} x - \frac{I_{xx}}{A e_y}$$



Ma se so dove sta l'asse neutro, so anche quali sono i punti più distanti dall'asse della sezione e quindi i punti più sollecitati

→ campo deformativo e degli spostamenti

le deflussioni si compongono:

$$\text{rotazione intorno all'asse } x: \varphi_x = \frac{M_x z}{EI_x} = \frac{N y}{EA \rho_x^2} z$$

$$\text{rotazione intorno all'asse } y: \varphi_y = \frac{M_y z}{EI_y} = \frac{N x}{EA \rho_y^2} z$$

Posso sommare le rotazioni φ_x e φ_y in quanto esse sono infinitesime

$$\varphi = \varphi_x \bar{i} + \varphi_y \bar{j} \rightarrow \text{vettore rotazione totale}$$

$$\frac{\varphi_y}{\varphi_x} = -\frac{e_x}{e_y} \left(\frac{e_x}{e_y} \right)^2 = -\frac{1}{\tan \alpha} \left(\frac{e_x}{e_y} \right)^2 \rightarrow \text{coefficiente angolare dell'asse di rotazione}$$

→ lavoro elementare

$$dL = \int_A \psi dA dz$$

potenziale elastico complementare

$$dL = \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA dz$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2E} \int_A \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right)^2 dA$$

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2E} \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M_x^2}{I_x} + \frac{M_y^2}{I_y} \right) + \frac{1}{E} \left(\frac{NM_x}{AI_x} \frac{S_x}{A} - \frac{NM_y}{AI_y} \frac{S_y}{A} + \frac{M_x M_y}{I_x I_y} I_{xy} \right)$$

$$= \left(\frac{dL}{dz} \right)_{\text{sfc}} + \left(\frac{dL}{dz} \right)_{\text{f.r.}(M_x)} + \left(\frac{dL}{dz} \right)_{\text{f.r.}(M_y)}$$

se il sistema di riferimento è centrale

il lavoro elementare associato allo sfec normale eccentrico è pari alla somma dei lavori che competono alle singole caratteristiche
lo posso determinare applicando (ps)

→ i sistemi si dicono energeticamente spaccati ortogonali, ovvero è nullo il lavoro misto
per cui vale il (ps)

$$L_{a+b+c} = L_a + L_b + L_c$$

$$M_y = \int_A -\sigma_z x dA = 0 \text{ perché } \sigma_z = 0 \text{ (1)+(2)+(3) = condizioni di equivalenza sulle barre)}$$

$$T_x = \int_A T_{zx} dA = -G\theta \int_A y dA = -G\theta \cdot S_x = 0 \text{ perché } S_x = 0 \text{ (s.r. centrale)}$$

$$T_y = \int_A T_{zy} dA = G\theta \int_A x dA = G\theta \cdot S_y = 0 \text{ " } S_y = 0 \text{ "}$$

$$M_z = \int_A r^2 \gamma dA = \int_A (x T_{zy} - y T_{zx}) dA = G\theta \int_A (x^2 + y^2) dA = G\theta I_p \rightarrow I_p = I_x + I_y = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{M_z}{G I_p} \rightarrow \text{angolo unitario di torsione} = \text{caratteristica deformativa relativa al momento torcente}$$

IMPORTANTE

Rome nel caso della dilatazione longitudinale prodotta dallo sforzo normale centrato e dalla curvatura prodotta dalle flessioni retta, θ è ugualmente proporzionale alla caratteristica elastica statica M_z e inv. proporzionale alla caratteristica elastica G e geometrica I_p

SFORZO NORMALE	$\epsilon_z = \frac{M_z}{E A}$	M_z	E	A
FLESSIONE RETTA	$\chi_x = \frac{M_x}{E I_x}$	M_x	E	I_x
TORSIONE	$\theta = \frac{M_z}{G I_p}$	M_z statica	G elastica	I_p geom.

$$\Rightarrow \text{poiché } T = G\theta r$$

$$\Rightarrow T_z = \frac{M_z}{I_p} r \rightarrow \text{sforzo tangenziale globale (simile a flessione retta: } \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \text{)}$$

\Rightarrow se il momento torcente è antiorario (positivo), il vettore $\{T_z\}$ darà sempre momento positivo rispetto al centro e seguirà linee di flusso circolari concentriche.

Esso aumenterà linearmente da zero, al centro, fino al suo valore massimo, sul contorno.

$$T_{\max} = \frac{M_z}{I_p} R$$

$$\text{Per una sezione circolare: } I_p = \frac{1}{2} \pi R^4 \Rightarrow T_{\max} = \frac{2 M_z}{\pi R^3}$$

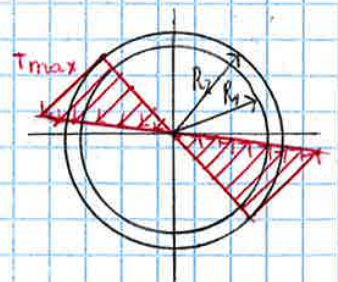
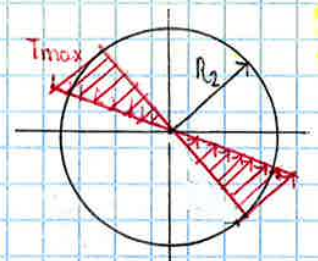
$$\text{Per una sezione a corona circolare: } I_p = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) \Rightarrow T_{\max} = \frac{2 M_z}{\pi (R_2^4 - R_1^4)} \cdot R_2 > T_{\max, \text{ sec. circolare}}$$

\Rightarrow a parità di raggio massimo, la sezione a corona è sottoposta ad una tensione ~~meno~~ superiore. La sezione a corona per le sezioni circolari, è analoga alla sezione a doppia T per le sezioni rettangolari.

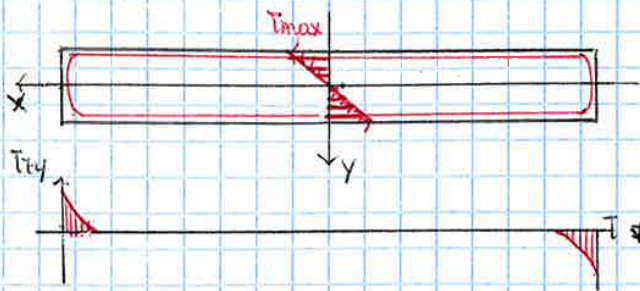
\rightarrow lavoro elementare:

T_h di Clapeyron:

$$dL = \frac{1}{2} M_z \theta dz \Rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G I_p}$$

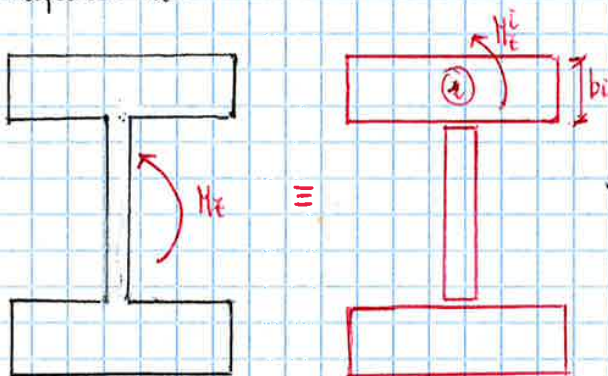


Nel caso di sezioni rettangolari sottili ($\frac{b}{a} \rightarrow \infty$), le linee di flusso del vettore $\{T_z\}$ sono curve chiuse con due volte piego paralleli ai lati maggiori. Tali tratti invertono il loro corso soltanto nelle zone terminali, così che il vettore tensione $\{T_z\}$ presenta la gran parte della sezione.



$T_{xy} \neq 0$ in corrispondenza delle curve

• considero una sezione sottile aperta, costituita da più rettangoli solidi solidati tra loro in modo da non creare nessun percorso chiuso. Si ammette che il momento applicato M_z si ripartisca in modo tale che l'angolo di torsione sia costante θ^i .



Per ragioni di congruenza, tutte le porzioni ruotano del medesimo angolo θ^i

$$\theta^i = \theta \quad \forall i$$

$$\theta^i = \frac{M_z^i}{G I_t^i} = \theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

intesa struttura

$$T_{max}^i = \frac{M_z^i}{I_t^i} b_i$$

$$I_t^i = \frac{1}{3} a_i b_i^3$$

$$T_{max} = \frac{M_z}{I_t} b_{max}$$

Come trovo I_t ?

Si ottiene da considerazioni di equivalenza,

$$\sum_i M_z^i = M_z = G \theta I_t = G \theta \sum_i I_t^i$$

$\Rightarrow I_t = \sum_i I_t^i \Rightarrow$ il fattore di rigidezza torsionale è quindi pari alla somma dei fattori parziali, come accade quando gli el.

$M_z^i : I_t^i = \sum M_z^i : \sum I_t^i$ questa proporzione si verifica dal momento che $\theta^i = \theta$

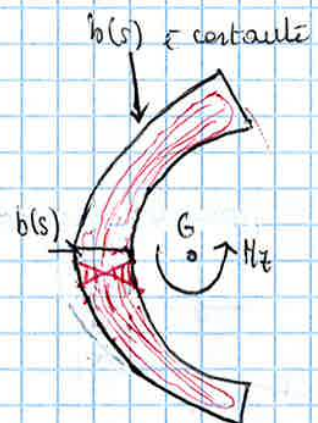
$$M_z^i = \sum M_z^i \cdot \frac{I_t^i}{\sum I_t^i} = M_z \left(\frac{I_t^i}{\sum I_t^i} \right) = \text{coefficiente di ripartizione}$$

$$\Rightarrow I_t = \frac{1}{3} \sum a_i b_i^3$$

Se la sezione sottile aperta ha come linea media una curva regolare le equazioni sono:

$$T_{max} = \frac{M_z}{I_t} b_i \rightarrow T_{zs}(max) = \frac{M_z}{I_t} b(s) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = \text{coordinata curvilinea} \end{array} \right.$$

$$I_t = \frac{1}{3} \sum a_i b_i^3 \rightarrow I_t = \frac{1}{3} \int b^3(s) ds$$



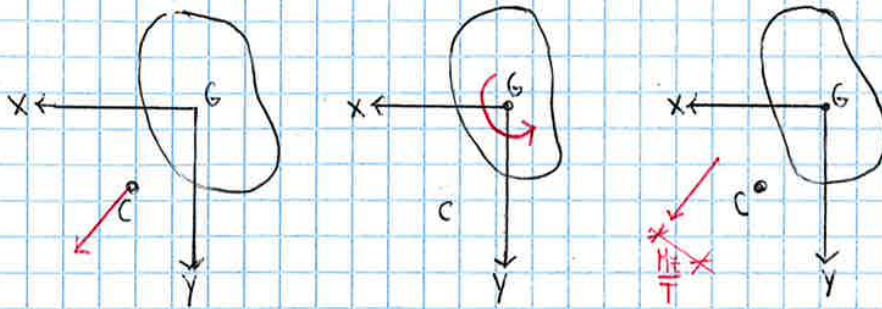
la distribuzione delle tensioni T_{zs} è lineare sullo spessore e si annulla sulla linea media. Il valore assoluto massimo che si registra sul contorno, è a sua volta massimo nei punti in cui è massimo lo spessore $b(s)$. le linee di flusso del vettore $\{T_z\}$ sono quindi parallele alla linea media e invertono il loro corso soltanto nelle zone terminali.

- sollecitazione composta di taglio-torsione

Considero una trave incastrata ad una base e sollecitata sull'altra in due modi diversi:

1) forza T passante per il centro di torsione C

2) momento torcente M_x



Si ha

$\delta \eta_c(M_x)$ lo spostamento nel piano XY del punto C provocato da M_x

$\psi_T(T)$ = rotazione della sezione nel piano XY provocata dal taglio T .

⇒ per il th di Betti:

Il lavoro compiuto da T per lo spostamento dovuto al momento è uguale al lavoro compiuto dal momento per la rotazione causata dal taglio

⇒ $T \delta \eta_c(M_x) = M_x \psi_T(T)$

$$\delta \eta_c(M_x) = 0 \text{ perché il centro di torsione non subisce uno spostamento}$$

⇒ $\psi_T(T) = 0$ perché il centro di torsione non subisce una rotazione

⇒ i lavori mutui sono entrambi nulli

⇒ $\psi_T(T) = 0$ = rotazione causata dal taglio agente nel punto C .

⇒ il centro di torsione è anche detto centro di taglio

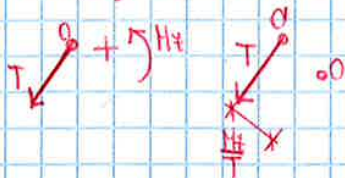
Se il taglio è applicato nel centro di taglio non si ha rotazione.

Quando lo sforzo tagliante è applicato nel o al centro di torsione, esso provoca soltanto traslazioni e non rotazioni della sezione trasversale nel piano XY .

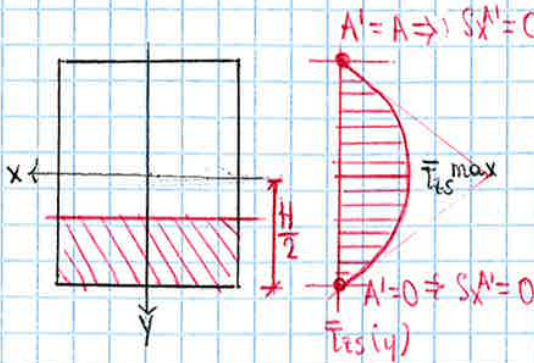
Non avendo deformazioni torsionali, cioè risultando $\theta = 0$, dalle equazioni di τ_{xy} e τ_{yx} si deduce che debbano essere nulle anche le tensioni torsionali.

⇒ il taglio è energeticamente ortogonale al momento torcente solo se applicato nel centro di torsione.

⇒ la sollecitazione composta di taglio-torsione è equivalente ad un'unica forza, parallela al taglio originario che produce il momento M_x rispetto al centro di torsione:



Se considero diverse corde



$A' = A \Rightarrow S_{x'} = 0$ perché istanza di riferimento centrale

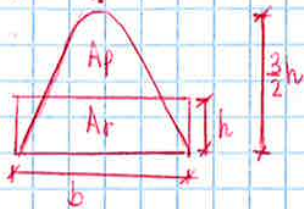
$\bar{\tau}_{ts} \propto y$ perché $y \uparrow \Rightarrow S_x \uparrow \Rightarrow \bar{\tau}_{ts} \uparrow$

Per $h = \frac{H}{2}$

$$S_{x'} = \int_{A'} y dA = b \frac{H}{2}$$

$$\bar{\tau}_{ts}^{max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bH}$$

Ricordo che:



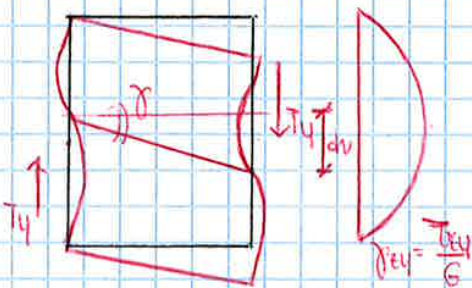
Affinché $A_p = A_r \Rightarrow h_p = \frac{3}{2} h_r = \frac{3}{2} h$

→ campo deformazione

l'unica componente diversa da 0 è γ_{xy}

$\gamma_{xy} = \frac{T_{xy}}{G} \Rightarrow \gamma_{xy}$ è nullo sui piani estremi ($y = \pm \frac{h}{2}$) e massimo nel piano $y=0$

⇒ influenza (o rigobbiamento) delle tensioni fuori dal loro piano ortogonale originale.



$$dv = \gamma_y dt$$

→ lavoro elementare

$$dL = \frac{1}{2} T_y dv$$

$$= \frac{1}{2} T_y \gamma_y dt$$

scorrimento medio

$$dL = \int_V \gamma_y dL = \frac{dt}{2G} \int_A \tau_{xy}^2 dA \quad (\text{ipotizzando } \tau_{xy} \neq 0)$$

$dL = \frac{dt}{2G} \frac{b}{5} \frac{T_y^2}{bh} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} \frac{T_y^2}{GA} \Rightarrow$ il lavoro per unità di lunghezza della trave è una funzione quadratica anche della caratteristica di taglio della.

$$\Rightarrow \gamma_y = \frac{6}{5} \frac{T_y}{Gbh}$$

→ γ_y = fattore di taglio = fattore moltiplicativo sempre > 1 che dipende dalla forma settoria geometrica della sezione.

INSTABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO

Finora si sono considerate le eq. cardinali della statica in relazione alla configurazione indeformata.

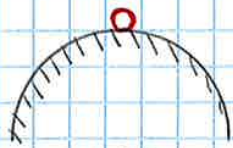
Gli spostamenti elastici sono cioè stati ipotizzati talmente piccoli da poter confondere la configurazione deformata con quella indeformata, nella valutazione delle caratteristiche interne.

- **fenomeni fondamentali del collasso strutturale** = perdita di stabilità dell'eq. elastico

- 1) instabilità o svergolamento
 - 2) flusso plastico o inervamento
 - 3) frattura fragile
- interagiscono tra di loro durante la fase di collasso.

5

tipi di equilibrio



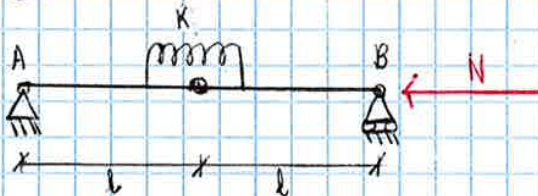
L'equazione di equilibrio è identicamente verificata in ogni caso, ma la qualità è diversa. Nell'eq. stabile basta una piccola perturbazione per compiere l'equilibrio.

Se il sistema è perfettamente simmetrico, solo la perturbazione influisce sull'evoluzione del moto, ovvero se la palla va a dx o a sx.

L'eq. indifferente è in realtà una situazione di transizione da stabile ad instabile.

Per strutture snelle, l'eq. è influenzato dal carico.

- es. 1

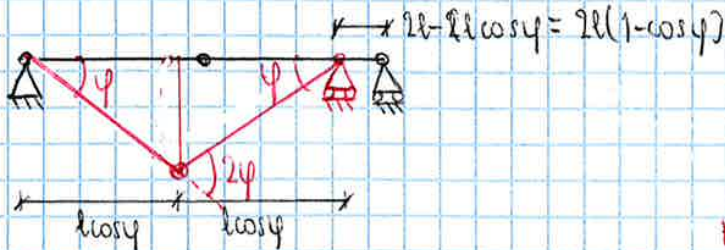


due aste rigide collegate da una cerniera rotazionale elastica di rigidità k .
 → molla rotazionale = si oppone al cambiamento di giuntura tra le aste (come una molla)

Se scuro l'eq. di equilibrio nella forma neutrale, non ho nessuna informazione (ovvero trovo l'info banale $H_A = N$).

Per capire cosa succede devo perturbare il sistema.

Immagino di considerare una configurazione deformata compatibile con i vincoli.



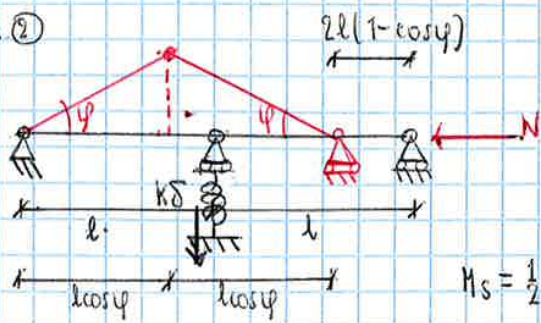
lavoro Clayperon lavoro esterno = forza x spostamento

energia potenziale totale dell'intero sistema: $W(\varphi) = \frac{1}{2} k (2\varphi)^2 - 2Nl(1 - \cos\varphi)$

Impongo stazionarietà dell'en. potenziale: $W'(\varphi) = k\varphi - 2Nl \sin\varphi = 0$

⇒ $N = \frac{k\varphi}{2\sin\varphi}$ → eq. non lineare → il carico non è legato linearmente alla deformata del sistema

-es ②

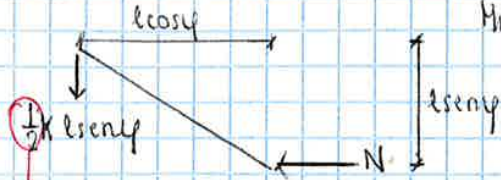


(Due aste rigide collegate tra di loro da una cerniera, e vincolate internamente da una cerniera e una cerniera. Il cernello intermedio è poggato su un suolo elastico di rigidità K .)

$$M_s = \frac{1}{2} K l \sin \phi \cdot l \cos \phi \Rightarrow M_s \approx \frac{1}{2} K l^2 \phi$$

$$M_i = N l \sin \phi$$

$$\Rightarrow M_i \approx N l \phi$$

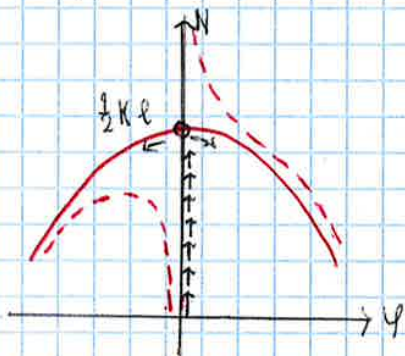
per $\phi \rightarrow 0$ 

metà sull'asta sx
metà sull'asta dx

$$\Rightarrow N = \frac{1}{2} K l \cos \phi \approx \frac{1}{2} K l \rightarrow \text{espressione linearizzata}$$

• energia potenziale totale dell'intero sistema: $W(\phi) = \frac{1}{2} K l^2 \sin^2 \phi - 2 N l (1 - \cos \phi)$ Clayperon lavoro interno

$$W'(\phi) = 0 \Leftrightarrow N = \frac{1}{2} K l \cos \phi \Rightarrow W''(0) = -3 K l^2 < 0$$



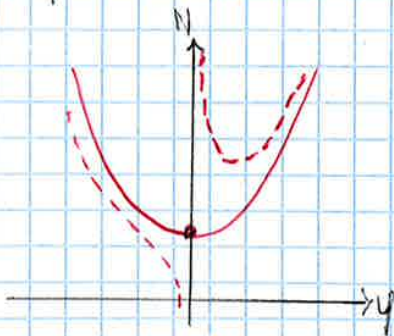
Il comportamento globale del sistema risulta essere di tipo rigido-softening (↑ deformazione richiede ↓ carico esterno)

Il comportamento è stabile per $\phi=0$ e $N \in [0, \frac{1}{2} K l = N_c]$

Se il carico è oltre il limite si perde l'unicità della soluzione

Nessuna chance di plasquiere lungo la verticale oltre N_c

Se la struttura presenta delle imperfettioni, l'instabilità è già prestabilita ma non si riesce a stabilire quale sarà la configurazione iniziale poiché tale instabilità è molto influenzata dalle condizioni iniziali



Se $q=0$
 $\Rightarrow H_1 = Nv \Rightarrow v'' + \omega^2 v = 0$
 $H_2 = -EI \frac{d^2 v}{dx^2}$

$\Rightarrow v(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0 \\ v(l) = 0 \Leftrightarrow B \sin \omega l = 0 \end{cases} \quad \forall B$

$\sin \omega l = 0 \Leftrightarrow \omega_n = \frac{n\pi}{l} \Rightarrow \omega^2 = \frac{N}{EI}$

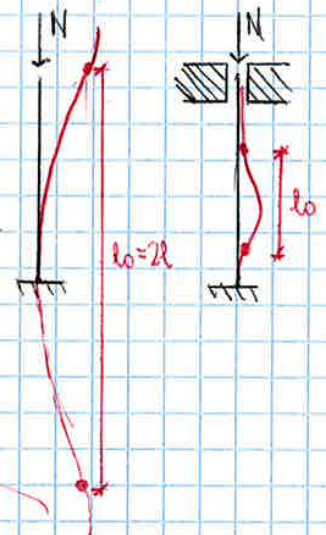
$\Rightarrow N_{cr} = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} \quad (N_{cr} \text{ se } n=1)$



Ad ogni autovettore N_{cr} corrisponde una autofunzione $v_n(x) = B \sin \omega_n x$ che rappresenta il modo critico di deformazione per quella forza.
 la deformata è costituita da n semionde sinusoidali.

(lunghezza libera di flessione = l_0 = distanza tra due punti di flesso)

la formula di Eulero mostra limiti di validità nel caso di travi non sufficientemente snelle, per le quali il comportamento anelastico del materiale può andare ad interagire con il meccanismo di sregolamento.

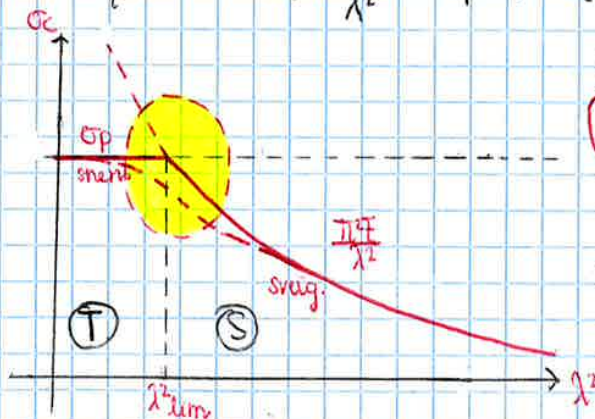


Si indichi con $\sigma_c = \frac{N_{cr}}{A}$ → pressione critica di Eulero

$\sigma_c = \pi^2 E \frac{\rho^2}{l^2}$ (tenendo $\rho^2 = \frac{I}{A} \neq \rho^2_{min}$ usò lo sbandamento anelastico nella direzione secondo cui l'inerzia è minima.
 ρ = raggio d'inerzia.

$\lambda = \frac{l}{\rho}$ → snellezza della trave

Diagramma $\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ sul piano $\sigma_c - \lambda^2$ usò iperbole di Eulero.



- Carichi critici tendenti a zero per snellezze tendenti all'infinito
 - carichi critici tendenti all'infinito, per snellezze tendenti a 0

in realtà per travi tonde la crisi per sregolamento può precedere quella per sregolamento

$\sigma_c = \sigma_p = f_y$

Se non si fa alcuna interazione tra le due crisi si passerebbe dall'una all'altra con discontinuità in corrispondenza di

$\lambda_{lim}^2 = \pi^2 \frac{E}{\sigma_p} = f_y \rightarrow$ per coprire se esto snella o no

$N_{max} = f_y \cdot A = \sigma_p \cdot A$

S = snella
 T = tonda

$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$

Poiché le due crisi interagiscono tra di loro, si passa dall'una all'altra con una transizione graduale al variare della snellezza della trave

la curva di raccordo è fornita in forma tabulata ponendo $\sigma < \frac{\sigma_p}{w}$ dove w è un fattore di sicurezza > 1 , funzione del materiale e della snellezza della trave

IPERSTATICHE

Schema 0 = schema iniziale svincolato

Schema 1 = schema iniziale senza caucchi, con forze unite dove ho svincolato

Applico p.l.v. \Rightarrow (b) = schema reale (0) + X(1)

(a) = schema (1)

$$M^{(a)} = M_1$$

$$M^{(b)} = M_0 + X M_1$$

$$X = - \frac{\int M_0 M_1 \, dz}{\int M_1^2 \, dz} \quad (\text{non vale sempre})$$

$$d_{ab}^i = L_{ba}^2$$

$$1^{(f)} \eta_s^{(r)} + \sum_i R_i^{(f)} \left(\eta_{oi}^{(r)} + \frac{R_i^{(r)}}{KI} \right) =$$

$$= \int_s N^{(f)} \left(\frac{N^{(r)}}{EA} + \alpha T_o^{(r)} \right) ds + \int_s T^{(f)} \left(\frac{t_y T_y^{(r)}}{GA} \right) ds + \int_s M^{(f)} \left(\frac{M_x^{(r)}}{EI} + \frac{2\alpha \Delta T^{(r)}}{h} \right) ds$$

αT_o = dilatazione termica
variazioni uniformi di T

$\frac{2\alpha \Delta T}{h}$ = curvatura termica
variazioni a falda di T

SPOSTAMENTI ELASTICI

b = sistema reale (r)

a = sistema esplorativo (sistema iniziale, tolgo tutti i caucchi, metto la forza dove voglio conoscere lo spostamento).

$$[\eta, \xi] = m \left(\frac{q l^4}{EI} \right)$$

$$[\psi] = - \left(\frac{q l^3}{EI} \right)$$

$$\int_a^b f(x) g(x) \, dx = \frac{b-a}{6} [f(a) \cdot g(a) + 4f(m) g(m) + f(b) g(b)]$$

$$m = \frac{a+b}{2}$$

$$\textcircled{3} H(x) = \frac{1}{2} q l (2l+x) - 2ql(l+x) + 2qlx$$

$$H(0) = ql^2 - 2ql^2 + 0 = -ql^2$$

$$\textcircled{4} H(x) = -\frac{1}{2} qlx$$

$$H(0) = 0$$

$$H(l) = -\frac{1}{2} ql^2$$

$$\textcircled{5} H(x) = -\frac{1}{2} ql^2 + ql^2 - qlx$$

$$H(0) = \frac{1}{2} ql^2$$

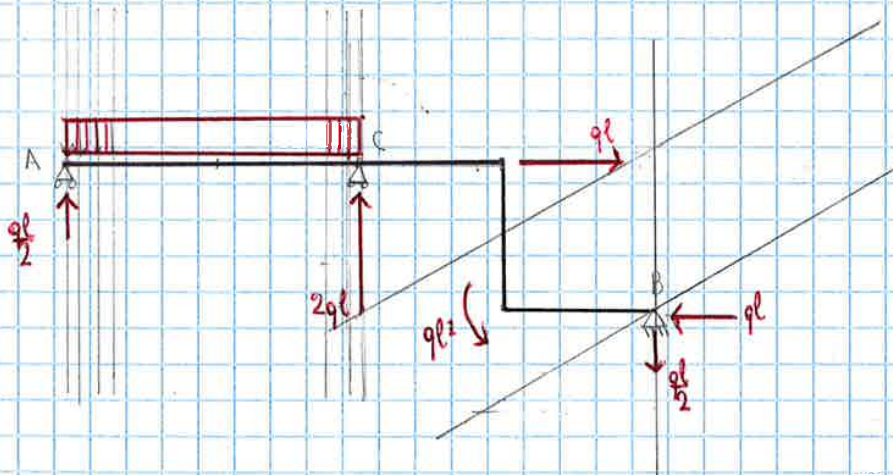
$$H(l) = -\frac{1}{2} ql^2$$

$$\textcircled{6} H(x) = qlx + \frac{1}{2} ql \cdot 3l + 2ql \cdot 2l + 2ql^2$$

$$H(0) = \frac{3}{2} ql^2 - 4ql^2 + 2ql^2$$

$$\frac{3}{2} ql^2 - 2ql^2 = -\frac{1}{2} ql^2$$

$$H(l) = ql^2 + \frac{3}{2} ql^2 - 4ql^2 + 2ql^2 = -ql^2 + \frac{3}{2} ql^2 = \frac{1}{2} ql^2$$



tratto	cpd
AC	forza retta 11