NUMERO: 1742A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Loverre Michele

MATERIA: Fisica II, Appunti + Esercizi - prof. Kaniadakis

CAMPO = grandezza fisica che in una certa regione dello spazio assume valori dipendenti dalla posizione

CONDENSATORI

- serie $\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}$
- parallelo $C = \sum_k C_k$

RESISTORI

- serie $R = \sum_k R_k$
- parallelo $\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 140

- principio di conservazione della carica elettrica

In un sistema elettronicamente isolato la somma algebrica di tutte le cariche rimane costante nel tempo, ovvero si conserva

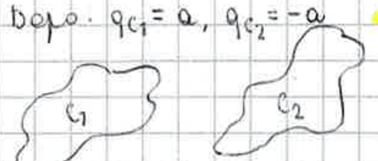
Il principio si osserva durante lo strofinio che è il processo in cui vengono separate, attraverso un agente ~~meta~~ meccanico, delle cariche (e^-) e trasferite da un corpo all'altro.

Prima dello strofinio, la carica dei corpi era neutra (tutti i corpi sono neutri perché ogni atomo costituente della materia è neutro)

Prima: $q_{C_1}=0$, $q_{C_2}=0$, $q_{TOT}=0$

Dopo ~~lo~~ lo strofinio, i corpi acquistano una carica uguale ed opposta, ma nel complesso la carica del sistema rimane nulla

Dopo: $q_{C_1}=a$, $q_{C_2}=-a$ $q_{TOT}=0$



- induzione elettrostatica = processo di separazione della carica

fenomeno statico che avviene quando al corpo ① elettrizzato viene avvicinato il corpo ② non elettrizzato

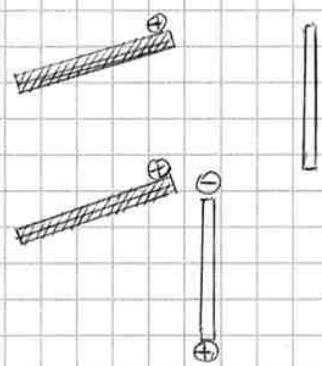
↓

l'eccesso di cariche dello stesso segno blocca la ridistribuzione di altre cariche dello stesso segno, congelando in tal modo ~~A~~ l'induzione elettrostatica.

Con l'induzione elettrostatica, avviene quanto segue:

① se il corpo elettrizzato è carico ⊕ sulla superficie a contatto del corpo ② si determina una distribuzione di cariche ⊖, mentre sulla superficie opposta una distribuzione di cariche ⊖

② viceversa se il corpo ① è carico ⊖



Conclusione: sulla superficie del corpo non elettrizzato si determina una doppia distribuzione di cariche di segno opposto

LEGGE DI COULOMB (1795)

- è un assioma, non dimostrabile, verificato sperimentalmente
- Coulomb cercò di misurare l'entità delle interazioni fra corpi elettrizzati in funzione sia del valore delle cariche responsabili dell'elettrizzazione, sia della distanza fra i corpi.

$F_C \alpha \frac{q_1 q_2}{r^n}$ $n=2$ dimostrato successivamente

↓

$\boxed{F_C(r) = K \frac{q_1 q_2}{r^2}}$ nel vuoto $K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ con ε_0 = costante dielettrica del vuoto $= 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F/m$

$K = 9 \cdot 10^9\ (N \cdot m^2)/C^2$

K = coefficiente di Coulomb che dipende dal sistema di misura usato ovvero dipende dalle caratteristiche del mezzo (dielettrico) nel quale la misura è fatta

- carica unitaria = carica trasportata da una corrente unitaria (Ampere) in un tempo unitario (secondi)

$\Delta q = i \Delta t$

$1A \cdot 1s = 1C$ = coulomb

In unità meccaniche, si definisce carica unitaria quella carica che, posta ad una distanza unitaria da un'altra carica, risulta sottoposta all'azione di una forza unitaria

CAMPO ELETTROSTATICO

Def: rapporto fra la forza coulombiana (esercitata a distanza) sulla carica q e la carica stessa (carica q_0, sorgente del campo)

$$\boxed{\bar{E}_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot \bar{u}_r = \frac{\bar{F}_c}{q_0}} \rightarrow \bar{F}_c = q\bar{E}_0$$

Il campo elettrostatico è una proprietà intrinseca della carica che lo genera, quindi esiste perché esiste la carica sorgente, indipendentemente dalla presenza di una qualche carica, (diversa dalla carica sorgente) che ne subisca l'effetto.

la carica sorgente non può esercitare alcuna azione su se stessa

- linee di campo: Faraday chiamò così quelle particolari linee che, in ogni punto del campo, hanno come tangenti il vettore $\bar{E}_0$

Se le cariche sono puntiformi → infinite rette uscenti dalla carica sorgente con simmetria sferica ed orientate: verso l'esterno q+
verso l'interno q-

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il campo elettrostatico generato da un insieme di cariche è dato dalla somma vettoriale dei campi elettrostatici generati dalle singole cariche

$$\bar{E}_{TOT} = \sum_k \bar{E}_k$$

Quindi: se $q>0 \rightarrow$ repulsiva
$q<0 \rightarrow$ attrattiva

- cariche elettriche distribuite

$\lambda = \frac{dq}{dl}$ → densità lineare (1C/1m)

$\sigma = \frac{dq}{dS}$ → densità superficiale (1C/1m²)

$\rho = \frac{dq}{d\vartheta}$ → densità volumica (1C/1m³)

la densità è funzione di (x,y,z) quindi si parla di distribuzione di carica:

$d\bar{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda(x,y,z)\,dl}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\cdot\bar{u}_r$ → distribuzione lineare

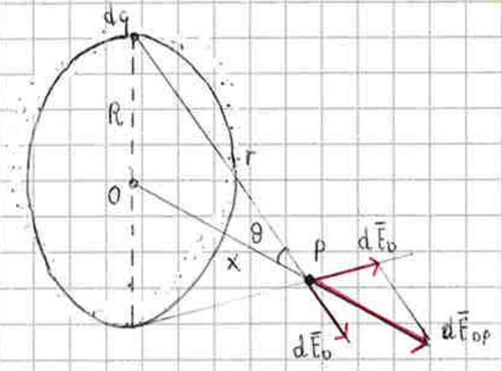
$d\bar{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(x,y,z)\,dS}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\cdot\bar{u}_r$ → distribuzione superficiale

$d\bar{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(x,y,z)\,d\vartheta}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\,\bar{u}_r$ → distribuzione volumica

Se la densità risultante uniforme per tutti i punti, il campo elettrostatico complessivo si determina sommando i contributi di infiniti pezzi infinitesimi (p.s degli effetti)

$$\bar{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\int_l \frac{dl}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\bar{u}_r\,,\quad \bar{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sigma\iint_S \frac{dS}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\bar{u}_r\,,\quad \bar{E}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho\iiint_\vartheta \frac{d\vartheta}{|\bar{r}-\bar{r}'|}\bar{u}_r$$

① anello carico uniformemente



Calcolo il campo elettrostatico nei punti del suo asse, in funzione della distanza x, dal centro della distribuzione.

Considero il generico elemento $dq = \lambda\, dl$
Tale carica genera nel punto P(X) il campo elettrostatico:

$$\boxed{dE_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}}$$

Considero il contributo dell'elemento diametralmente opposto al precedente: questo genera un campo elettrostatico di valore uguale a quello precedente.

Per il principio di sovrapposizione degli effetti, il campo elettrostatico complessivo nel punto P(X) è uguale alla risultante dei due campi e, a causa della simmetria delle due cariche, è orientata lungo l'asse della distribuzione

$$dE_{0P} = 2\, dE_0 \cos\theta$$

Noto che $\cos\theta = \frac{x}{r}$
Quindi:

$$dE_{0P} = 2\, dE_0 \cos\theta =$$

$$= 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^3}x\, dl$$

$$E_{0P} = \int dE_{0P} = \int_0^{\pi R}\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^3}x\, dl =$$

→ la x è costante perché comunque io scelga le coppie di carica, x è la distanza di P dall'anello

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}x\int_0^{\pi R} dl =$$

Gli estremi di integrazione sono $0, \pi R$ ovvero si integra su metà circonferenza perché quando considero un elemento, poi considero immediatamente l'elemento diametralmente opposto e in definitiva, considero mezza circonferenza perché l'altra metà viene automaticamente considerata quando prendo gli elementi diametralmente opposti

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3}\pi R =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\lambda\frac{xR}{r^3} =$$

$$\boxed{E_{0P} = \frac{1}{2\varepsilon_0}\lambda\frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}x}$$

$r^2 = x^2 + R^2$

- il campo al centro dell'anello è nullo perché ogni coppia crea un campo nullo
- per $x \to \infty$, allontanandomi dall'anello, riottengo la legge di Coulomb perché l'anello è visto come una carica puntiforme.

- per $R \to 0$, ovvero quando il corpo perde la sua forma ma non la sua carica, si ottiene la legge di Coulomb

A causa della forza F_c la velocità di caduta delle goccioline, osservata con un oculare, viene rallentata.

Si ha: $v' = v_0 - \frac{1}{6}\frac{E_0}{\pi \eta r} \cdot q < v_0$

Conoscendo ~~i valori della carica q di elettrizzazione distribuita~~ di E_0, v_0, r, η e v' si ricava il valore della carica q di elettrizzazione distribuita sulla superficie della gocciolina.

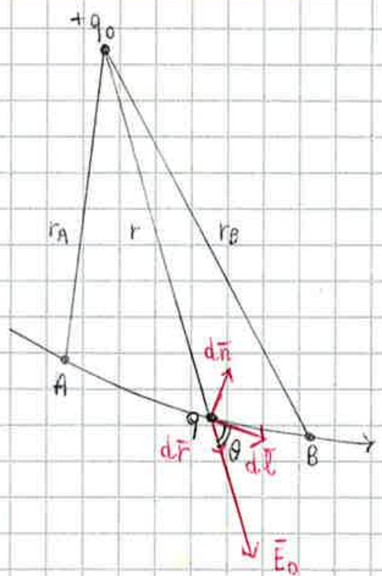
Ionizzando con opportune radiazioni l'aria all'interno del contenitore, la gocciolina acquisisce ulteriori cariche e varia il suo stato di moto.
La variazione di velocità che subisce risulta

$$\boxed{\Delta v = v' - v_0 = \frac{1}{6}\frac{E_0}{\pi \eta r} \cdot \Delta q}$$

da qui si determina il valore della carica acquistata ~~durante~~ dalla gocciolina, indipendentemente dal valore iniziale dovuto al processo di nebulizzazione

Si verifica che $\Delta v'$ assume valori quantizzati $\Rightarrow$ Δq assume valori quantizzati
In assenza di radiazioni, contrari, deve essere multiplo intero di un valore minimo della carica

$\boxed{q = \pm ne}$ $n = (10 \div 100)$
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$



POTENZIALE ELETTROSTATICO

La carica puntiforme $+q_0$ ferma genera un campo a simmetria sferica E_0 che esercita un'azione sulla carica $+q$, in moto all'interno del campo lungo una traiettoria da A a B
Quindi q si muove perché q_0 genera un campo elettrico.

$\bar{F}_c = +q\bar{E}_0$

$dL = \bar{F}_c \cdot d\bar{l}$ → lavoro compiuto dalla f. elettrostatica

$L_{AB} = \int_A^B \bar{F}_c \cdot d\bar{l} = q\int_A^B \bar{E}_0 \cdot d\bar{l}$ → integrale di linea

$= q\int_A^B E_0(r)\, dl \cos\theta =$ → $d\bar{l} = d\bar{r} + d\bar{n}$

~~$\bar{E}_0 \cdot d\bar{l} = \bar{E}_0 \cdot (d\bar{r} + d\bar{n}) = E_0 dr$ perché $\bar{E}_0 \perp d\bar{n}$~~
~~$= E_0\, dr \cos\theta$~~

$= q\int_{r_A}^{r_B} E_0(r)\, dr =$

$dl\cos\theta = dr$ = componente dello spostamento lungo la direzione del campo elettrostatico

$= q\int_{r_A}^{r_B} \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\, dr =$

$= q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_0}{r_A} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_0}{r_B}\right) =$

$= -q\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r_B} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r_A}\right) =$ → $\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0}{r}}$ → potenziale elettrostatico del campo E_0 $[1V/1C = 1\text{ volt}]$ (grandezza scalare)

$= -q\,(V(r_B) - V(r_A)) =$

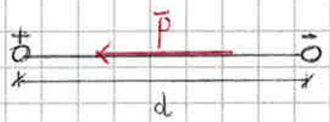
$\boxed{L_{AB} = -q\,\Delta V}$ → lavoro della forza elettrostatica agente sulla carica q

DIPOLO ELETTRICO

È un sistema costituito da due cariche di identico valore, segno opposto, poste a distanza fissa tra loro

- momento di dipolo elettrico $\bar{p}$ = grandezza fisica che descrive le caratteristiche del dipolo elettrico

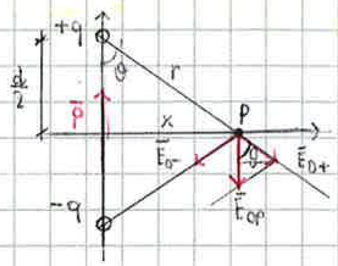
$$\boxed{\bar{p} = q\, \bar{d}_{AB}}$$



modulo = $|\bar{p}| = q\,|\bar{d}_{AB}|$
direzione = congiungente delle cariche
verso = dalla carica negativa a quella positiva

- campo elettrostatico generato da un dipolo elettrico

I campi elettrostatici generati dalle due cariche nel punto $P(x)$ hanno identico modulo



$$E_{0+} = E_{0-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = E_0$$

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti:

$(x \gg d$ ipotesi importante$)$

$\bar{E}_{0P} = \bar{E}_{0+} + \bar{E}_{0-} \parallel \bar{p}$ ma di verso opposto

Allora

$E_{0P} = 2E_{0+}\cos\theta = E_{0+}\cos\theta + E_{0-}\cos\theta$

Quindi

$$E_{0P} = \cancel{2}\,\frac{1}{\cancel{4}_{2}\pi\varepsilon_0 r^2}\, q\cdot\cos\theta =$$

$\rightarrow \cos\theta = \frac{d/2}{r}$

$r^2 = x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{\frac{d}{2}}{r} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qd}{r^3} =$$

$\rightarrow qd = p$

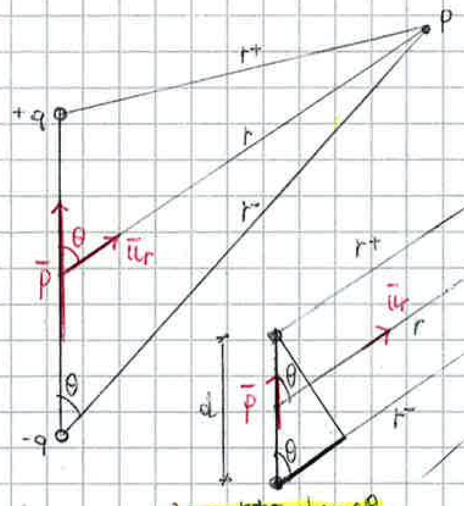
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{p}{\left[x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Assumendo il valore del momento di dipolo elett. si ricava un valore per il quale risulta impossibile distinguere il contributo della carica da quello della distanza. Per questo motivo il

Sperimentalmente $\boxed{\bar{E}_{0P}(x) \simeq -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\bar{p}}{x^3}}$ $\rightarrow$ ~~il~~ calcolo del campo elett. è fatto ad una distanza anolutamente prevalente rispetto alla dimensione del dipolo $(x \gg d)$

- potenziale elettrostatico generato da un dipolo elettrico

Il potenziale elettrostatico totale è dato, per il p.s. eff, dalla somma dei potenziali elettrostatici generati dalle due cariche di segno opposto



$$V_P(r) = V_+ + V_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^+} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r^- - r_+}{r_+ r^-}$$

Il punto P si trova ad una distanza anolutamente prevalente rispetto alla sua dimensione.
In tale situazione le distanze di P dalle due cariche sono circa uguali, ~~e~~
$r_+ \simeq r_- \simeq r$
$r \parallel r_+ \parallel r_-$ e ~~e~~ i tre angoli sono quasi uguali

$r^- - r^+ = d\cos\theta$

LEGGE DI GAUSS

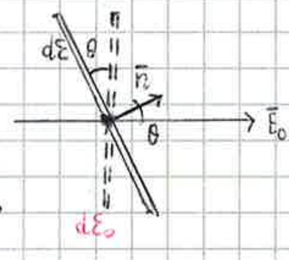
il flusso del campo $\bar{E}$ attraverso una qualsiasi superficie chiusa è uguale alla somma algebrica delle cariche contenute dentro la superficie, comunque siano suddivise, diviso ε_0.

- flusso: si definisce flusso orientato ad $\bar{E}_0$ attraverso la superficie $d\Sigma$ lo pnt scalare

$$\boxed{d\phi(\bar{E}_0) = \bar{E}_0 \cdot \bar{n} \cdot d\Sigma}$$

$\bar{n}$ = versore normale alla superficie $d\Sigma$ nel punto ove considero il campo $\bar{E}_0$

$d\phi(\bar{E}_0) = E_0\, d\Sigma \cos\theta = E_0\, d\Sigma_0$ → sezione normalizzata (proiezione della superficie in direzione normale a quella del campo)



Il flusso attraverso una superficie finita Σ si ottiene sommando i flussi infinitesimali degli infiniti elementi di area

$$\boxed{\phi(\bar{E}_0) = \iint_\Sigma \bar{E}_0 \cdot \bar{n}\, d\Sigma}$$

→ elemento di area orientato
area di una regione piana perché è un'area infinitesima

Osservazioni:

$0 \le \theta < \pi/2 \Rightarrow d\phi(\bar{E}_0) > 0$ flusso uscente

$\pi/2 < \theta \le \pi \Rightarrow d\phi(\bar{E}_0) < 0$ entrante

$\theta = 0 \Rightarrow d\phi(\bar{E}_0) = E_0\, d\Sigma$ uscente massimo

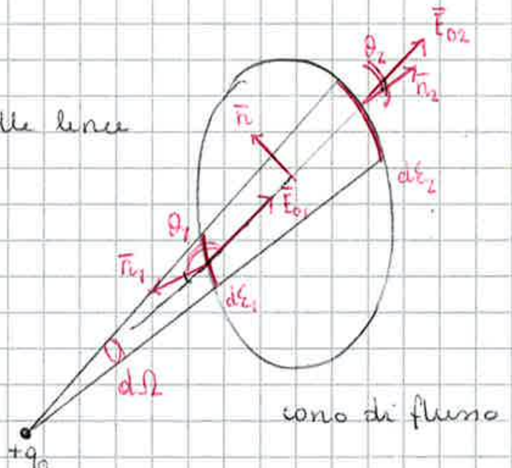
$\theta = \pi \Rightarrow d\phi(\bar{E}_0) = -E_0\, d\Sigma$ entrante massimo

$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow d\phi(\bar{E}_0) = 0$

⇒ il flusso dipende da θ e non dipende dalla distanza

- sorgente di campo esterna ad una superficie chiusa

cono di flusso: superficie conica rigata costituita dalle linee di campo $\bar{E}_0$ uscenti dalla sorgente $+q_0$ con angolo solido $d\Omega$



il flusso complessivo attraverso alla sup. chiusa di volume dW, definita dalle sezioni $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$ (intercettate dal cono di flusso) e dal mantello laterale del cono compreso fra le sezioni vale:

$$d\phi_{tot}(\bar{E}_0) = d\phi_1(\bar{E}_0) + d\phi_2(\bar{E}_0) + d\phi_{lat}(\bar{E}_0)$$

$\bar{E}_{01} \cdot \bar{n}_1\, d\Sigma_1 =$

$\Rightarrow E_{01}\, d\Sigma_1 \cos\theta_1 < 0$ perché $\frac{\pi}{2} \le \theta_1 < \pi \Rightarrow$ flusso uscente

$\bar{E}_{02} \cdot \bar{n}_2\, d\Sigma_2 \Rightarrow E_{02}\, d\Sigma_2 \cos\theta_2 > 0$ perché $0 \le \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ flusso entrante

$\bar{E}_0 \cdot \bar{n}\, d\Sigma_{lat} = 0$ perché $\bar{E}_0 \parallel \bar{n} \Rightarrow \cos\theta = 0$

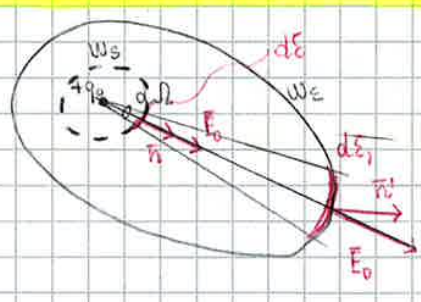
Quindi:

$d\phi_{tot}(\bar{E}_0) = -d\phi_1(\bar{E}_{01}) + d\phi_2(\bar{E}_{02}) = 0$ → all'interno del volume dW non ci sono sorgenti di campo ⇒ il numero di linee di campo entranti dalla sezione $d\Sigma_1$ è uguale a quello delle linee uscenti dalla sezione $d\Sigma_2$

- sorgente interna ad una superficie chiusa

$d\phi = \bar{E}_0\, d\Sigma \Rightarrow E_0\, d\Sigma \cos\theta = d\phi$ → $d\Sigma_0 = d\Sigma \cos\theta$

$= E_0\, d\Sigma_0 = \frac{1}{r^2} k q_0 r^2 d\Omega = k q_0\, d\Omega$ → $d\Sigma_0 = r^2 d\Omega$



Quindi:

$$\boxed{\phi_{tot}(\bar{E}_0)=\begin{cases}0 & \rightarrow \text{se la carica è esterna alla superficie} \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_k q_k \text{ (interne)} & \rightarrow \text{se le cariche sono interne alla superficie e discrete} \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(x,y,z)\,dV & \rightarrow \text{se le cariche sono interne alla superficie e continue}\end{cases}}$$

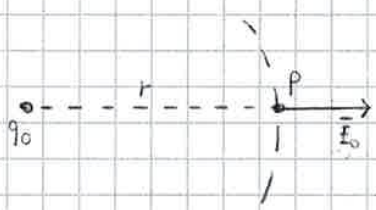
$$\boxed{\oint_\Sigma \bar{E}_0 \cdot d\bar{\Sigma} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$ → forma integrale del teorema di Gauss
I equazione di Maxwell

Come scegliere la superficie di Gauss:
- passante per P
- scelgo superfici in modo che il campo ~~sta~~ elettrico investe normalmente la superficie
- se il sistema presenta simmetria assiale è tutto più facile

- legge di Gauss ⇔ legge di Coulomb

Partendo dalla legge di Gauss si deve giungere alla formula di Coulomb del campo elettrico.

Considero una carica puntiforme
Scelgo come superficie di Gauss una sfera di raggio r pari alla distanza tra q_0 e il punto P in cui si vuol determinare il campo.
Essendo a simmetria sferica, in ogni punto della superficie il campo elettrico è ⊥ ad essa
Quindi



$$d\phi(\bar{E}_0) = \underset{\perp}{\bar{E}_0 \cdot d\bar{\Sigma}} = E_0\, d\Sigma \Rightarrow \phi(\bar{E}_0) = \oint_\Sigma E_0\, d\Sigma = E_0 \oint_\Sigma d\Sigma = E_0\, 4\pi r^2$$ → area della superficie sferica

E_0 → è costante per costruzione

Applico Gauss

$$\phi(\bar{E}_0) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{q}{\varepsilon_0} = E_0\, 4\pi r^2 \Rightarrow E_0 = \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = K \cdot \frac{q}{r^2}$$ → formula del campo elettrico

Quindi si ha:

per $dx>0$: $f(x+dx) \simeq f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$ $\rightarrow$ in 3 variabili: $\begin{cases} f(x+dx,y,z) \simeq f(x,y,z) + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dx \\ f(x-dx,y,z) \simeq f(x,y,z) - \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} dx \end{cases}$

per $dx<0$: $f(x-dx) \simeq f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} dx$

Quindi per $d\phi$ si ha:

$$\begin{cases} d\phi_x = \left(E_x(x,y,z) + \frac{1}{2}\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}dx\right) dy\,dz - \left(E_x(x,y,z) - \frac{1}{2}\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x}dx\right) dy\,dz \\ d\phi_y = \left(E_y(x,y,z) + \frac{1}{2}\frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y}dy\right) dx\,dz - \left(E_y(x,y,z) - \frac{1}{2}\frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y}dy\right) dx\,dz \\ d\phi_z = \left(E_z(x,y,z) + \frac{1}{2}\frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}dz\right) dx\,dy - \left(E_z(x,y,z) - \frac{1}{2}\frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}dz\right) dx\,dy \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} d\phi_x = \frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} dx\,dy\,dz \\ d\phi_y = \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} dx\,dy\,dz \\ d\phi_z = \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z} dx\,dy\,dz \end{cases}} \Rightarrow d\phi = \left(\frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

Noto che $dx\,dy\,dz = d\vartheta$, inoltre per il th di Gauss: $d\phi = \frac{dq}{\varepsilon_0}$ dove $dq = \rho(x,y,z)\,d\vartheta$

Quindi si ha:

$$d\phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \cancel{d\vartheta} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho\,\cancel{d\vartheta}$$

Nota: si è omessa la dipendenza di ρ, E_x, E_y, E_z da (x,y,z)

$$\boxed{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho}$$ $\rightarrow$ ~~forma differenziale del th di Gauss~~

~~Sia~~ $\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}$ $\rightarrow$ divergenza del campo $\bar{E}$ = prodotto scalare dell'operatore nabla per il campo

$\downarrow$ grandezza scalare

Quindi:

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$ $\rightarrow$ legge di Gauss in forma differenziale (1° eq. di Maxwell)

Osservazioni:

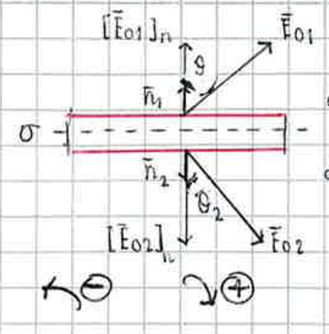
- è una relazione locale che lega le derivate del campo in un determinato punto con la densità di carica ρ in quel punto
- il campo $\bar{E}$ ha divergenza diversa da zero solo nei punti in cui esiste una densità di carica, nello spazio vuoto, la divergenza di $\bar{E}$ è nulla
- anche se abbiamo utilizzato le coordinate cartesiane nella def. della divergenza, essa è indipendente dal sistema di coordinate prescelto, per la sua natura di grandezza scalare
- dalla legge di Gauss:

$$d\phi = \frac{dq}{\varepsilon_0} = \rho(x,y,z)\frac{d\vartheta}{\varepsilon_0} \Rightarrow d\phi = \bar{\nabla}\cdot\bar{E}\cdot d\vartheta \rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{d\phi}{d\vartheta}}$$

$\downarrow$

la divergenza del campo nel punto P è data dal rapporto tra il flusso attraverso la superficie di un parallelepipedo infinitesimo centrato su P e il suo volume

- la divergenza è diversa da 0 solo dove ci sono cariche



$d\phi(\bar{E}_0) = d\phi(\bar{E}_{01}) + d\phi(\bar{E}_{02}) + d\phi_{lat}(\bar{E}_0) = \frac{1}{\varepsilon_0} dq$ → Gauss

$\bar{n} \perp \bar{E}_0$

$d\phi(\bar{E}_0) = \bar{E}_{01} \cdot \bar{n}_1 \cancel{d\Sigma} + \bar{E}_{02} \cdot \bar{n}_2 \cancel{d\Sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \cancel{d\Sigma}$ → si semplifica (non mi interessa che $d\Sigma \neq 0$)

$E_{01} \cos\theta_1 + E_{02} \cos\theta_2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$

$\begin{cases} E_{01} \cos\theta_1 = [E_{01}]_n \\ E_{02} \cos\theta_2 = -[E_{02}]_n \end{cases}$ → la componente del campo elettrico va verso il basso

$[E_{01}]_n - [E_{02}] = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$ → quando si attraversa una distribuzione piana di cariche, la componente normale del campo $\bar{E}$ subisce una discontinuità pari a $\frac{1}{\varepsilon_0} \sigma$

↓

vale a livello locale: in ogni punto della superficie, non è necessario che σ sia costante né che la superficie sia piana

~~Vettorialmente si esprime: $\bar{E}_{02} - \bar{E}_{01}$~~

ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

Considero un condensatore piano e suppongo non esista alcuna carica.
Carico il condensatore spostando una carica negativa infinitesimale

Inizialmente:

Ad un generico istante t si forma una carica negativa e una carica positiva perché ho esportato una qnt infinitesimale di carica

Per fare questa operazione devo fornire lavoro (lavoro negativo perché fornito dal sistema) in quanto devo vincere le forze attrattive

Il lavoro infinitesimo da compiere sarà

$dL = -dq \Delta V$ → il lavoro è infinitesimo perché la carica che sto considerando è infinitesima (MA LO SPOSTAMENTO È FINITO)
→ il lavoro è stato fornito dal sistema

Ricordo: $L_{AB} = -q \Delta V$ = lavoro della forza elettrostatica agente sulla carica q.

$\Delta V = \frac{q}{C}$ essendo $C = \frac{q}{\Delta V}$ per def. di capacità

→ non è dq ma è la carica presente sulle armature
→ ΔV = ddp fra le armature

Quindi:

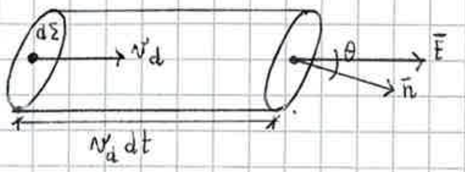
$dL = -dq \frac{q}{C}$

$L = \int_0^Q dL$ → sommo gli infiniti lavori infinitesimi che ho fornito ogni qualvolta sposto una carica infinitesimale, dalla situazione iniziale $q = 0$ a quella finale $q = Q$

~~$= -\int_0^Q \frac{1}{\Delta V} dq\, q\, dq =$~~

$= -\int_0^Q \frac{1}{C} q\, dq = -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{2} q^2 \right)_0^Q = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C} Q^2$

CONDUZIONE ELETTRICA



il cilindro non è circolare retto $\bar{n} \not\parallel \bar{E}$

$d\vartheta = \bar{v}\, dt \cdot d\bar{\Sigma}$

$\rho = N e$ → densità di carica; N → densità di particelle; e → elettroni (carica)

v_d = velocità di deriva = è uguale per tutte le cariche libere ed è orientata lungo la direzione del campo

le particelle dunque viaggiano tutte nella direzione del campo

Definisco: $\bar{v}$ → cambia in ogni punto dello spazio ⇒ campo di velocità

$\boxed{\bar{j} = \rho \bar{v}}$ → vettore densità di ~~carica~~ corrente

$\bar{j} \cdot d\bar{\Sigma}\, dt = dQ$

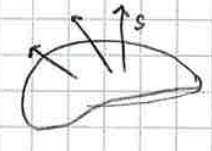
$\frac{dQ}{dt} = \bar{j} \cdot d\bar{\Sigma}$ ① → n° di cariche che attraversano la sezione nell'unità di tempo

$\boxed{i = \frac{dq}{dt}}$ → intensità della corrente elettrica $\{ \text{Ampere} = \frac{1C}{1s} \}$

Quindi: gli elettroni di un conduttore carico, se sottoposti ad un campo elettrico esterno cominciano a mettersi in movimento.

Si ha corrente elettrica = flusso di elettroni in movimento

In una sezione qualsiasi:



$di = \bar{j} \cdot d\bar{s}$

$i = \phi_s(\bar{j})$ = flusso della densità di corrente = intensità di corrente

Ho $\phi_s(\bar{j}) = \int_S \bar{j} \cdot d\bar{\Sigma} \Rightarrow di = \bar{j} \cdot d\bar{\Sigma} \xRightarrow{①} dQ = di \cdot dt$

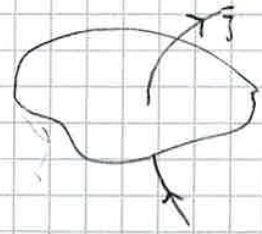
di → differenziale del secondo ordine; dQ → III ordine

Quindi: (pag 46)

$\bar{j}$ = densità di corrente

i = intensità di corrente = flusso del vettore densità di corrente attraverso ad una qualunque sezione del conduttore

Attraverso una sezione chiusa



$\bar{j}$ è positivo se entrante
negativo se uscente

Si ha: ~~Essendo~~ $i = -\frac{\partial q}{\partial t}$ → convenzione perché: se $\partial q < 0 \Rightarrow$ si ha una diminuzione di cariche
$\Downarrow$
$\bar{j} > 0 \Rightarrow i > 0$

- Se l'intensità aumentasse, diminuirebbe il numero di cariche libere interne al conduttore ($i > 0 \Rightarrow \partial q < 0$)
- Se l'intensità diminuisse, aumenterebbe il numero di cariche libere interne al conduttore

Ma $\bar{J} = \rho \cdot \bar{v} =$

$= \ominus N e \bar{v}$ → carica dell'elettrone → $\bar{v} = -\frac{\bar{J}}{Ne}$

Quindi

$\bar{a} = -\frac{e\bar{E}}{m} = \frac{\bar{v}}{\tau} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\bar{J}}{Ne\tau} = -\frac{e\bar{E}}{m} \Rightarrow \boxed{\bar{J} = \frac{Ne^2\tau}{m} \cdot \bar{E}} \rightarrow \begin{matrix} \bar{J} = \sigma \cdot \bar{E} \\ \bar{E} = \rho \cdot \bar{J} \end{matrix} \Rightarrow \sigma = \frac{Ne^2\tau}{m} \; ; \; \rho = \frac{1}{\sigma}$

Quindi: σ = conducibilità

ρ = resistività

Osservo che la densità di corrente è proporzionale al campo elettrico le particelle si mettono in moto e quindi ho corrente.

- legge di Ohm

Per mezzo di questa legge ci è nota la relazione tra resistenza, potenziale e intensità di corrente.

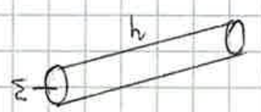
La velocità tra le particelle è sempre uguale.

L'intensità di corrente attraverso la superficie finita Σ è data da: $i = \int_\Sigma \bar{J}\, d\Sigma$

↓

Se la superficie Σ è ortogonale a $\bar{J}$ e $\bar{J}$ ha stesso valore in tutti i punti di Σ, la densità di corrente $\bar{J}$ è la corrente che attraversa l'unità di superficie perpendicolare alla direzione del moto delle cariche

$i = \bar{J} \cdot \bar{\Sigma}$



Ma $\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E} = \frac{1}{\rho}\bar{E}$

$\Rightarrow$ ~~$i = \frac{1}{\rho}\bar{J} \cdot \bar{E} \rightarrow \bar{E} =$~~

$\Rightarrow i = \frac{1}{\rho}\bar{E} \cdot \bar{\Sigma} \Rightarrow$ ~~$\bar{E} = \frac{\rho \cdot i}{\bar{\Sigma}}$~~

$\Rightarrow \bar{E} = \frac{\rho i}{\Sigma}$

Essendo $E = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow V = -E \cdot h \rightarrow$ Prendo il modulo: $V = E \cdot h \Rightarrow V = \frac{\rho h}{\Sigma} \cdot i$

$R = \frac{\rho h}{\Sigma} \Rightarrow \boxed{V = R \cdot i} \rightarrow$ legge di Ohm

↓

resistenza

$G = \frac{1}{R}$ = conduttanza

- legge di Joule

→ per ricavare la potenza che bisogna fornire per far circolare la corrente elettrica i in un tratto di conduttore di sezione Σ e lungo h

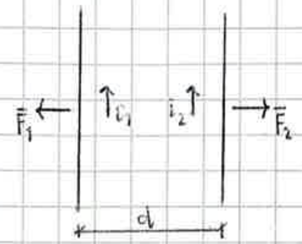
Immagino la corrente come flusso di elettroni: su ~~ese~~ ogni carica agisce la forza elettrica F data da

$\bar{F} = e\bar{E}$ → positiva perché presa come vettore

Questa forza produce un lavoro dato da: $d\bar{W} = \bar{F} \cdot d\bar{l} \Rightarrow dW = -F \cdot dl$ → lavoro negativo quindi da fornire

→

FORZA MAGNETICA

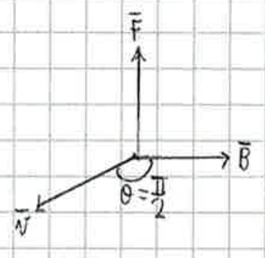


i_1 crea $\bar{B}_1$ nello spazio circostante
i_2 è immersa nel campo $\bar{B}_1 \Rightarrow$ sente la forza $\bar{F}_2$

viceversa i_2 : crea $B_2 \Rightarrow i_1$ sente la forza $\bar{F}_1$

Solo se le cariche sono in movimento si ha la forza magnetica
(la ~~carica~~ forza elettrica si ha anche se le cariche non sono in movimento)

$\bar{F} = q\bar{v} \wedge \bar{B}$ → forza magnetica di Lorentz → $F = qvB\sin\theta$



pag 58
Si assume $\theta = \frac{\pi}{2}$
Dimostro che la forza magnetica non compie lavoro

$dW = \bar{F} \cdot d\bar{l}$

$\bar{F} = q\bar{v} \wedge \bar{B}$

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{l} = (q\bar{v} \wedge \bar{B}) \cdot d\bar{l} =$$
$$= (q\bar{v} \wedge \bar{B}) \cdot \frac{d\bar{l}}{dt} \cdot dt =$$
$$= (q\bar{v} \wedge \bar{B}) \cdot \bar{v} \cdot dt$$
$$= \bar{F} \cdot \bar{v} \cdot dt = 0$$

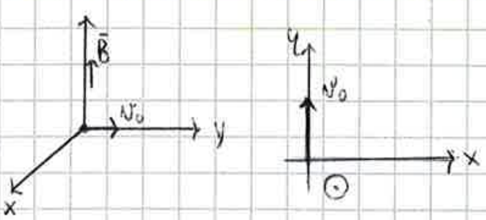
→ $\bar{v} \wedge \bar{B}$ = un certo vettore che è contemporaneamente perpendicolare a $\bar{v}$ e $\bar{B}$ ovvero $\bar{F}$ è sempre normale a $\bar{v}$

prodotto scalare tra 2 vettori perpendicolari è nullo

Quindi:
$W = \int dW = 0$ → il lavoro fatto dalla forza magnetica è identicamente nullo

Per il teorema dell'energia cinetica
$$\Delta E_K = W_{AB} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = 0$$
$$E_{K_B} - E_{K,A} = 0 \Rightarrow v_A = v_B$$
→ la velocità resta costante in modulo ma non in direzione

- moto di una carica in un campo magnetico



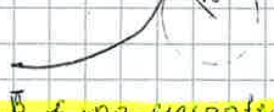
⊙ campo magnetico uscente
⊗ " " entrante

$F = qvB$ (in modulo), $\theta = \frac{\pi}{2}$

$F = ma = m(a_T + a_N)$ → legge di Newton: $a_T = \frac{dv}{dt}$, $a_N = \frac{v^2}{R}$

R → raggio di curvatura = raggio della circonferenza osculatrice: È UNICA !!

Quindi:
$$\begin{cases} qvB = m\frac{v^2}{R} \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$
essendo $v = cost$ (dimostrato prima)



Quindi: $\boxed{R = \frac{vm}{qB}}$ → essendo tutte quantità costanti $\Rightarrow R = cost$
Conclusione: la traiettoria di una carica in $\bar{B}$ è una circonferenza

~~pag 59~~ pag 59

$$\frac{1}{C} q(t) + R \frac{dq}{dt} = \varepsilon \; ; \quad \varepsilon - \frac{q(t)}{C} = R \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{C\varepsilon - q(t)}{C} = R \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{C\varepsilon - q(t)}{CR} = \frac{dq}{dt} \rightarrow \frac{C\varepsilon - q(t)}{dq} = \frac{CR}{dt} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon C - q(t)} dq = \frac{1}{CR} dt$$

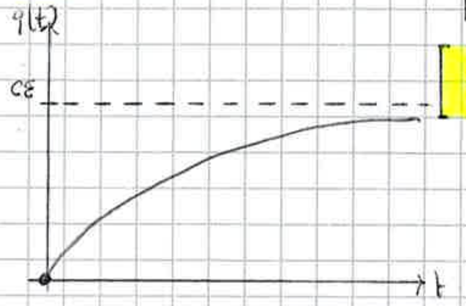
$$\int_0^q \frac{1}{C\varepsilon - q(t)} dq = \int_0^t \frac{1}{CR} dt \qquad -(q - \varepsilon C) \Rightarrow \int_0^q \frac{1}{q(t) - \varepsilon C} dq = -\int_0^t \frac{1}{RC} dt$$

$$\log (q(t) - C\varepsilon) \Big|_0^q = -\frac{1}{CR} t$$

$$\log \frac{q - \varepsilon C}{-\varepsilon C} = -\frac{1}{CR} t$$

$$q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t}\right) \rightarrow \tau = RC = \text{costante capacitiva di tempo}$$

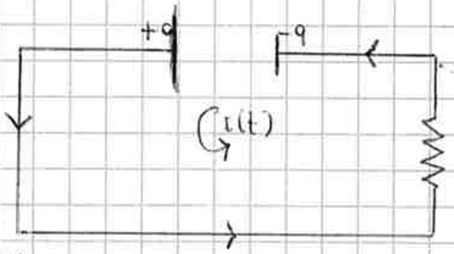
$$\boxed{q(t) = C\varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t}\right)}$$



per $t \rightarrow \infty \Rightarrow q(t) = q_\infty = C\varepsilon$ → VALORE SOGLIA

oltre questa carica non posso andare, anche se continuo a fornire corrente.
Se necessito di maggior carica, devo cambiare condensatore visto che $q_\infty \propto C$ e C dipende solo dalla geometria del condensatore.

- scarica di un condensatore



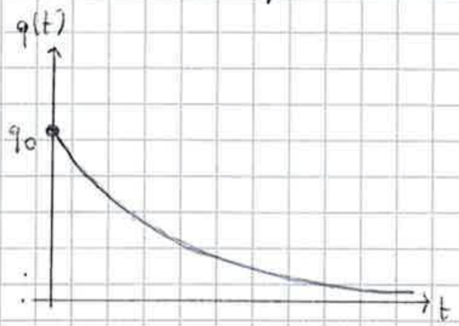
All'istante iniziale: $q(0) = q_0$ → condensatore carico
condizione di Cauchy!

$$\sum_k V_k = 0 \Rightarrow -\frac{q(t)}{C} - Ri = 0$$

$$-\frac{q(t)}{C} - \frac{dq}{dt} \cdot R = 0 \Rightarrow \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = \int_0^t -\frac{1}{RC} dt$$

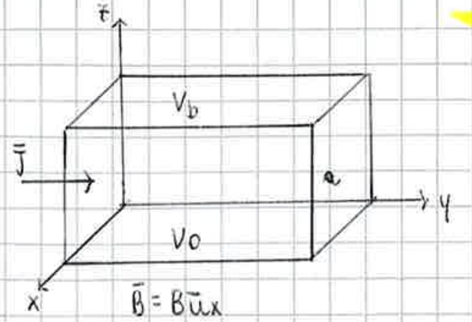
$$\Downarrow$$

$$\boxed{q(t) = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}} \rightarrow \tau = RC$$



per $t \rightarrow \infty \Rightarrow q_\infty \rightarrow 0$

per scaricare completamente un condensatore bisogna aspettare tempi infiniti



$\bar{J}$ = vettore densità di corrente

$= \frac{i}{ab}\bar{u}_y = Ne\bar{v}$ per definizione

$i = \bar{j} \cdot d\bar{\Sigma} = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \bar{j}$

$\boxed{\bar{v} = \frac{i}{ab \cdot N \cdot e}\bar{u}_y}$ → velocità con cui fluisce un elettrone

$\bar{F} = e\bar{v} \wedge \bar{B} = \cancel{e}\frac{i}{abN\cancel{e}}\bar{u}_y \wedge B\bar{u}_x = -\frac{iB}{abN}\bar{u}_z$

la forza F genera una tensione, come se fosse un campo elettrico indotto

$\boxed{\bar{E}_B = \frac{\bar{F}}{e}}$ → campo elettromotore magnetico = campo elettrico che si crea tra le due facce perché

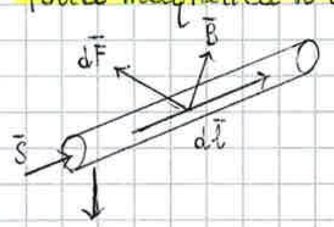
$\bar{E}_B = \bar{v} \wedge \bar{B}$

la forza è diretta verso il basso $(-\bar{u}_z)$ e quindi si ha lo spostamento ~~del~~ degli elettroni (cariche negative) verso l'alto ~~che si carica parzialmente~~. la faccia superiore quindi si carica negativamente e di conseguenza quella inferiore ~~nega~~ positivamente.

Si crea quindi anche una ddp tra le due facce, detta tensione di Hall:

$V_H = \mathcal{E}_H = \int_a^b \bar{E}_B\, d\bar{z} = \bar{E}_B \cdot \int_0^b d\bar{z} = -\frac{ibB}{abNe} = -\frac{iB}{aNe}\cancel{\bar{u}_z}$ $\Rightarrow \cancel{E_H} = -\cancel{\frac{dV}{dy}} \Rightarrow \cancel{E_H} =$

- forza magnetica su un conduttore



Un conduttore percorso da corrente elettrica (elettroni in movimento con velocità $\bar{v}$), immerso in un campo magnetico risente di una forza magnetica

conduttore di lunghezza dl e sezione S $\Rightarrow d\mathcal{V} = S \cdot dl$

① forza su un elettrone: $\bar{F}_1 = -e\bar{v} \wedge \bar{B}$
② forza su tutti gli elettroni nel volume $d\mathcal{V}$ = $d\bar{F} = \bar{F}_1 N \cdot d\mathcal{V}$ → n° particelle presenti nel volume $d\mathcal{V}$

$d\bar{F} = \bar{F}_1 \cdot N \cdot d\mathcal{V} =$ → $\bar{j} = \rho \cdot \bar{v} = -N|e|\bar{v}$ → $e = -|e|$

$= -e\bar{v} \wedge \bar{B} \cdot N \cdot d\mathcal{V} =$ → $d\bar{l}$ ha la stessa direzione di $\bar{v}$: $d\bar{l} = dl \cdot \frac{\bar{v}}{v}$

$= (-Ne\bar{v}) \wedge \bar{B}\, S\, dl =$

$= \bar{j} \wedge \bar{B} \cdot S\, dl =$

$= S\bar{j} \wedge \bar{B}\, dl =$

$= \bar{i} \wedge \bar{B}\, dl$ → $\bar{j}\, dl = j\, d\bar{l}$ → identità che vale quando j e dl hanno la stessa direzione

$= i\, d\bar{l} \wedge \bar{B}$

$\boxed{d\bar{F} = i\, d\bar{l} \wedge \bar{B}}$ → 2° legge elementare di Laplace in forma differenziale
forza su tratto infinitesimo di filo
~~non ha segno~~

- campi magnetici generati da correnti

$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \wedge \bar{r}}{r^3}$ per analogia con $\bar{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\bar{r}}{r^3}$

$\bar{B} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \wedge \bar{r}}{r^3} =$

$= \mu_0 \varepsilon_0 \bar{v} \wedge \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \frac{\bar{r}}{r^3}$

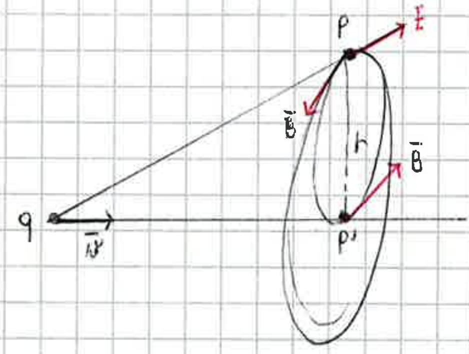
$= \mu_0 \varepsilon_0 \bar{v} \wedge \bar{E} \rightarrow \mu_0 \cdot \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ c velocità della luce nel vuoto $= 3 \cdot 10^8 \, m/s^2$

$\boxed{\bar{B} = \frac{1}{c^2} \bar{v} \wedge \bar{E}}$ → una carica elettrica nel vuoto in moto, genera contemporaneamente un campo elettrico ed un campo magnetico legati tra loro dalla formula

$\bar{B} \perp \bar{v}, \bar{E}, \bar{r}$

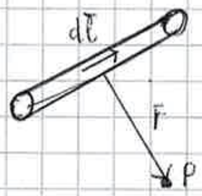
$\bar{B}$ è tg alla circonferenza di centro P' e raggio $\overline{PP'}$

Sulla circonferenza il modulo del campo magnetico è costante, ma cambia direzione istante per istante.



Sull'asse di moto di q, $\bar{B} = \bar{0}$

In termini macroscopici:



$\bar{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \wedge \bar{r}}{r^3}$

$d\bar{B} = N \, dV \, \bar{B}_1 =$ numero di cariche presenti nel volume dV: ogni carica crea lo stesso campo

$= N S \cdot dl \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\bar{v} \wedge \bar{r}}{r^3} =$

$= dl \, S \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot N q \bar{v} \wedge \frac{\bar{r}}{r^3} =$

$= dl \, S \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \bar{J} \wedge \frac{\bar{r}}{r^3} =$ $\quad dl \bar{J} = J \, d\bar{l}$ perché paralleli

$= \cancel{S \frac{\mu_0}{4\pi} J dl}$

$= S \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot J \, d\bar{l} \wedge \frac{\bar{r}}{r^3} =$

$= S \cdot J \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot d\bar{l} \wedge \frac{\bar{r}}{r^3} =$

$= i \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot d\bar{l} \wedge \frac{\bar{r}}{r^3}$

$\boxed{d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \cdot \frac{d\bar{l} \wedge \bar{r}}{r^3}}$ → legge di Ampere-Laplace

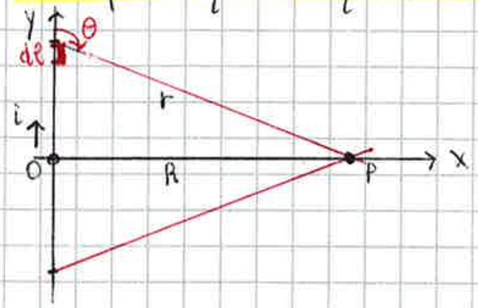
Considerando un conduttore filiforme C erea un campo magnetico inf pari a:

$\boxed{\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_C \frac{d\bar{l} \wedge \bar{r}}{r^3}}$

Quindi
$\bar{M} = iS\bar{n} \wedge \bar{B} = m \wedge \bar{B}$ → ottengo la formula del momento meccanico delle forze magnetiche

- ~~campo magnetico generato da una carica in moto~~

- campo magnetico generato da un conduttore lineare finito percorso da una corrente i



Scelgo come riferimento il punto medio O del conduttore. ~~l'elemento~~

Calcolo prima il contributo sul tratto superiore
a) prendo un elemento $d\bar{l}$

$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot i \cdot \frac{d\bar{l} \wedge \bar{r}}{r^3}$ → legge di Ampere-Laplace

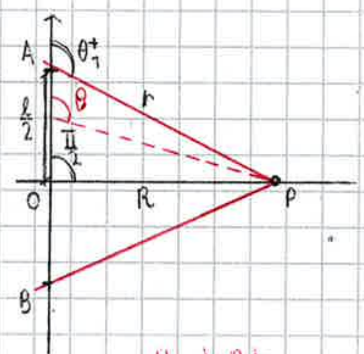
perché $\bar{r} = r'\bar{u}_x + r''\bar{u}_y$
$\bar{u}_y \wedge \bar{u}_x = -\bar{u}_z$
perché $r''\bar{u}_y \wedge \bar{u}_y = 0$

→ $d\bar{l} \wedge \bar{r} = dl \cdot r \cdot \sin\theta \, (-\bar{u}_z) = -dl \, r \sin\theta \, \bar{u}_z = dl \, r \sin\theta \, \bar{u}_\varphi$ (Ponendo $\bar{u}_\varphi = -\bar{u}_z$)
~~Infatti $dl\bar{u}_y \wedge R\bar{u}_{xy} = -dl R \sin\theta$~~

C'è il segno ⊖ perché la rotazione da $d\bar{l}$ verso $\bar{r}$ avviene in senso orario

Quindi:

$$\boxed{d\bar{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin\theta \, \bar{u}_\varphi}$$



Devo ora sommare tutti gli infinitesimi elementi $d\bar{l}$

$\bar{B} = \int_O^A d\bar{B} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta'} d\bar{B}$ infatti ~~$0 \leq \theta \leq \theta'$~~ $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta_1^+$

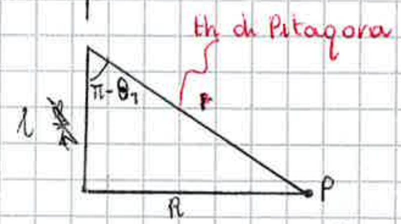
~~Per la geometria del problema~~:
~~→ Per la o~~
~~sen~~

→ Per la geometria del problema

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta) = \frac{R}{r}$
→ $\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$

$\tan\theta = -\tan(\pi - \theta) = -\frac{R}{l}$
→ $l = -\frac{R}{\tan\theta}$ → $dl = \frac{R \, d\theta}{\sin^2\theta}$

per esprimere la funzione integranda con una sola variabile



$\frac{1}{\tan\theta} \rightarrow -\frac{1}{\sin^2\theta}$

Quindi:

$d\bar{B} = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi} \frac{dl}{r^2} \sin\theta \, \bar{u}_\varphi = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin^2\theta}{R^2} \frac{R \, d\theta}{\sin^2\theta} \sin\theta \, \bar{u}_\varphi = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \sin\theta \, d\theta \, \bar{u}_\varphi$

Quindi

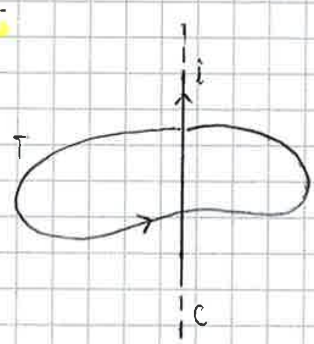
$\bar{B}_{\frac{l}{2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_1} d\bar{B} = -\bar{u}_\varphi \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \cos\theta_1$

- legge di Ampere - Maxwell = correlazione tra campo magnetico e le sue sorgenti

Dimostrazione:

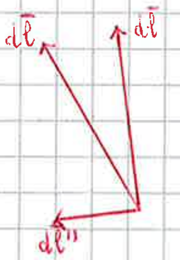
Considero un filo indefinito rettilineo percorso da una corrente i e considero una ~~superficie~~ qualsiasi curva chiusa percorsa in senso antiorario

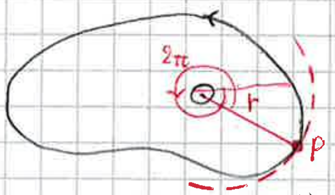
Calcolo la circuitazione del campo magnetico lungo la curva Γ



$\cancel{\bar{B} = \oint_\Gamma}$

$\oint_\Gamma \bar{B}\, d\bar{l} = \rightarrow$ il campo magnetico B è tangente alla linea di campo magnetico
la linea di campo magnetico creata dal conduttore è la circonferenza che passa per P e ha centro nel conduttore





$\bar{B} \perp d\bar{l}''$
$\bar{B} \parallel d\bar{l}'$ $\leftarrow d\bar{l} = d\bar{l}' + d\bar{l}''$ $\quad dl' = r\, d\varphi$

Vista dall'alto

$= \oint_\Gamma \bar{B}\,(d\bar{l}' + d\bar{l}'') =$

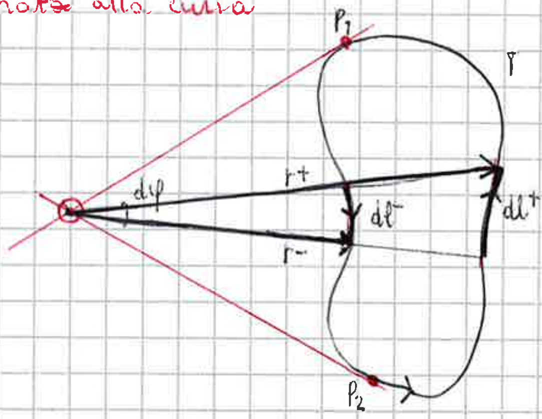
$= \oint_\Gamma B\, dl' = \rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ = legge di B-S, ovvero campo generato da un filo indefinito

$= \oint_\Gamma \frac{\mu_0 i}{2\pi \cancel{r}} \cdot \cancel{r}\, d\varphi =$

$= \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint_\Gamma d\varphi \rightarrow \oint_\Gamma d\varphi = 2\pi$ perché la curva è chiusa

$\Rightarrow \boxed{\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \mu_0 i}$ → legge di Ampere se Γ è chiusa ~~e~~ e il conduttore è all'interno
i = corrente concatenata alla curva

→ Se i è esterno alla curva considerata



$\oint_\Gamma \bar{B} \cdot d\bar{l} = \cancel{\oint}\int_{\Gamma'} \bar{B}\,(d\bar{l}^+ + d\bar{l}^-)$ → devo integrare solo sulla curva $\Gamma' = P_1 P_2$

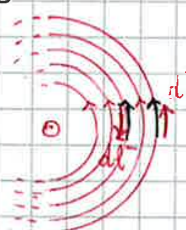
$= \int_{\Gamma'} \bar{B}\,(d\bar{l}^+_\parallel + d\bar{l}^+_\perp + d\bar{l}^-_\parallel + d\bar{l}^+_\perp)$ → decompongo dl^+ e dl^-

$= \int_{\Gamma'} (B^+ dl^+_\parallel - B^- dl^-_\parallel)$ → $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ (legge di B-S)

$dl = r\, d\varphi$

Vista dall'alto

$= \int_{\Gamma'} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi \cancel{r^+}} \cancel{r^+}\, d\varphi - \frac{\mu_0 i}{2\pi \cancel{r^-}} \cancel{r^-}\, d\varphi \right) = \int_{\Gamma'} 0\, d\varphi = 0$



Quindi se i è esterno alla curva considerata, il valore dell'integrale è 0

N.B: visto che la curva è arbitraria, conviene scegliere quella per cui il campo $\bar{B}$ ha modulo costante e sempre con lo stesso verso

$\bar{B}, d\bar{l}^+_\perp \perp$ $\quad \bar{B}, d\bar{l}^+_\parallel \uparrow\uparrow$
$\bar{B}, d\bar{l}^-_\perp \perp$ $\quad \bar{B}, d\bar{l}^-_\parallel \uparrow\downarrow$

Quindi
$\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\wedge\bar{B})=0 \not\Rightarrow \bar{\nabla}\mu_0\bar{J}=0 \Rightarrow \bar{\nabla}\bar{J}=0$ → condizione per cui vale A-M

In condizioni stazionarie, poichè $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ ($\rho=cost$), si ha $\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=0$

In condizioni dinamiche:
→ eq di continuità: $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=0$
→ legge di Gauss: $\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$

$\varepsilon_0\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=\rho$ → derivo ambo i membri rispetto al tempo $\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\bar{\nabla}\cdot\bar{E})=\frac{\partial\rho}{\partial t}$

$\varepsilon_0\bar{\nabla}\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}$

commutano perchè variabili temporali e variabili spaziali ($\bar{\nabla}$) sono indipendenti

→ combino ① e ②

$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=0$

$\bar{\nabla}\bar{J}+\varepsilon_0\bar{\nabla}\cdot\frac{\partial E}{\partial t}=0$

$\bar{\nabla}(\bar{J}+\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t})=0$ → ma $0=\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\wedge\bar{A})$

$\cancel{\bar{\nabla}}(\bar{J}+\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t})=\cancel{\bar{\nabla}}(\bar{\nabla}\wedge\cancel{\bar{B}})\,A$ A = funzione vettoriale generica

$\bar{J}+\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}=\bar{\nabla}\wedge\bar{A}$ → moltiplico per μ_0 ambo i membri

$\mu_0\bar{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}=\bar{\nabla}\wedge\mu_0\bar{A}$

In condizioni stazionarie $\frac{\partial E}{\partial t}=0$, quindi $\mu_0\bar{J}=\bar{\nabla}\wedge\mu_0\bar{A}$.

Ma abbiamo dimostrato che in c. stat.: $\bar{\nabla}\wedge\bar{B}=\mu_0\bar{J} \Rightarrow$ necessariamente $\bar{\nabla}\wedge\mu_0\bar{A}=\bar{\nabla}\wedge\bar{B}$

Quindi

$\boxed{\bar{\nabla}\wedge\bar{B}=\mu_0\bar{J}+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}}$ → th. di A-M in condizioni dinamiche

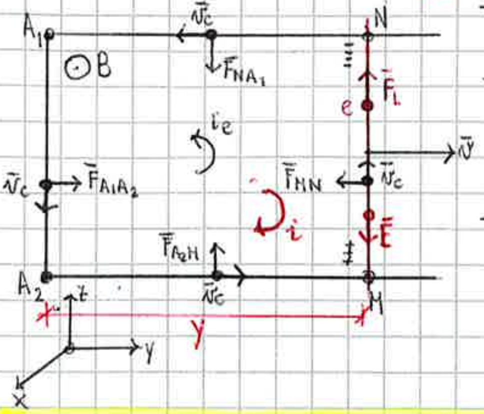
~~Ovvero: $\bar{\nabla}\wedge\bar{B}=\mu_0\bar{J}+\mu_0$~~

Conclusione: le sorgenti del campo magnetico non sono solo le correnti ma anche i campi elettrici variabili nel tempo

infatti se $\bar{J}=0$ (non ci sono particelle di correnti):

$\boxed{\bar{\nabla}\wedge\bar{B}=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}}$ → eq di A-M in condizioni dinamiche e in assenza di sorgenti

- legge di Faraday (sulla legge di Faraday è basata la conversione di energia meccanica in elett.)



- Considero un circuito con lato mobile MN, con velocità $\bar{v}$ verso dx
- Fisso un sistema di riferimento cartesiano
- Noto la presenza del campo magnetico $\bar{B} = B\bar{u}_x$ costante

Mentre il lato mobile MN si sposta verso destra, gli elettroni liberi di conduzione sono soggette a forze di Lorentz perché sono cariche in movimento in presenza di campo magnetico.
Calcolo la forza di Lorentz per una generica carica presente su MN, dovuta alla presenza di $\bar{v}$

$\bar{F}_L = -e\bar{v} \wedge \bar{B} = -evB(\bar{u}_y \wedge \bar{u}_x) = +evB\bar{u}_z$ → la forza magnetica che sente un elettrone presente sul tratto MN è una forza positiva, ovvero è una forza che spinge verso su le cariche

Quindi dato che ogni carica (elettrone) viene spinta verso su, vicino a M si genera una mancanza di elettroni
Vicino a N, l'eccesso di elettroni si mette in movimento sul circuito percorrendo il tratto NA_1, A_1A_2 e A_2M e quindi si compensa la mancanza di cariche.
Poi rinizia il percorso delle cariche.

Il lato mobile quindi funge da pompa di ~~ecto~~ elettroni ed è quindi l'unico elemento attivo del circuito: posso dunque immaginarlo come generatore di tensione

- $\bar{v}_c$ è la velocità di corrente che possiede ciascun elettrone mentre compie il percorso all'interno del ciclo NA_1A_2M
Su ogni tratto del circuito vengono quindi a crearsi delle forze (di Lorentz) dovute alla presenza di $\bar{v}_c$
Calcolo la forza di Lorentz per una generica carica presente su ogni lato del circuito, dovuta alla presenza di $\bar{v}_c$

NA_1: $\bar{F}_{NA_1} = -e\bar{v}_c \wedge \bar{B} = -ev_cB(-\bar{u}_y \wedge \bar{u}_x) = -ev_cB\bar{u}_z$

A_1A_2: $\bar{F}_{A_1A_2} = -e\bar{v}_c \wedge \bar{B} = -ev_cB(-\bar{u}_z \wedge \bar{u}_x) = +ev_cB\bar{u}_y$

A_2M: $\bar{F}_{A_2M} = -e\bar{v}_c \wedge \bar{B} = -ev_cB(\bar{u}_y \wedge \bar{u}_x) = +ev_cB\bar{u}_z$

MN: $\bar{F}_{MN} = -e\bar{v}_c \wedge \bar{B} = -ev_cB(\bar{u}_z \wedge \bar{u}_x) = -ev_cB\bar{u}_y$

in ogni caso, le forze che si vengono a creare sono ⊥ al conduttore, ~~ecf~~
Per questo, la velocità $\bar{v}_c$ non crea ulteriore fem intatti su ogni tratto
fem $= \mathcal{E} = \oint_{v_c} \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int_{MN} (-\cancel{e}v_cB)\bar{u}_y \cdot dl\bar{u}_z = 0$ $\quad \bar{u}_y \perp \bar{u}_z$
esempio fatto su MN vale su ogni tratto

- quantifico il campo elettrico indotto:

$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{-e} = -vB\bar{u}_z$ ~~$= +vB(\bar{u}_y \wedge \bar{u}_x) = v\bar{u}_y \wedge B\bar{u}_x = \bar{v} \wedge \bar{B}$~~ → campo elettrico indotto solo nel tratto MN è negativo infatti la corrente è pensata come flusso di cariche positive ma poiché si ha un flusso di cariche negative (in senso antiorario) quello delle cariche positive sarà in senso orario, quindi $\bar{E}$ negativo.

$= \cancel{-vB(\bar{u}_y \wedge \bar{u}_x)}$

Riscrivo E nel modo seguente:

$\bar{E} = -vB\bar{u}_z = vB(\bar{u}_y \wedge \bar{u}_x) = v\bar{u}_y \wedge B\bar{u}_x = \bar{v} \wedge \bar{B}$

- **autoinduzione**

Immagino un circuito (indefinito solenoidale) percorso da una corrente
Si hanno i seguenti fatti:

R=resistenza

1) $i(t)$ circola nel C (circuito) e crea una $\bar{B}$
2) $\bar{B}$ investe C e crea una fem indotta ε
3) la fem indotta ε, secondo la legge di Faraday è responsabile di una corrente autoindotta $i_L(t)$

Infatti:
1) posso determinare B

$$\bar{B}(t)=\mu_0 n\, i(t)$$ → campo B al centro di un solenoide indefinito (nel vuoto)
infatti per un solenoide ~~infi~~ finito $B=\mu_0 n i \frac{d}{\sqrt{d^2+4R^2}}$ (per $d\to\infty$ ottengo $\mu_0 n i$)
n → n° di spire per unità di lunghezza

2) $\phi(\bar{B})= N\cdot S\cdot B(t)$ → N= numero di spire, S=superficie

$$\phi(\bar{B})= N\pi r^2\cdot B(t)=$$
$$=N\pi r^2\cdot \mu_0 n\, i(t)= N\pi r^2\cdot \mu_0 \frac{N}{l} i(t)=$$
$$=\frac{N^2 r^2 \pi \mu_0}{l}\cdot i(t)$$ → flusso

$$\to \varepsilon(t)=-\frac{\partial\phi(\bar{B})}{\partial t}=-\mu_0\frac{N^2r^2\pi}{l}\frac{d}{dt}i(t)$$ → ε=fem $\neq 0 \Leftrightarrow i$ non varia nel tempo

3) dalla legge di Ohm: $V=\varepsilon=fem=Ri$

$$\boxed{i_L(t)=\frac{\varepsilon(t)}{R}}=-\left(\frac{\mu_0}{R}\frac{\pi r^2 N^2}{l}\frac{d}{dt}(i(t))\right)$$

$$L=\mu_0\frac{\pi r^2}{l}N^2=\mu_0\pi r^2 n^2 l=\mu_0 l\cdot S\, n^2$$

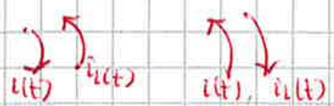
definisco l'induttanza $=L$
Per il caso in esame (solenoide) ⇒ $L=\frac{\mu_0\pi r^2N^2}{l}=\mu_0 k$

se $L=cost$
$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon=-\frac{d}{dt}(Li)=L\frac{di(t)}{dt}}$$ → fem per autoinduzione

In generale L è composto sempre dai due fattori: { μ_0 ; k → dipende solo dalla geometria del circuito

$$\Rightarrow \boxed{\cancel{i_L(t)=-L\frac{di(t)}{dt}}}$$ → corrente autoindotta

Noto che:
$\frac{di(t)}{dt}>0 \Rightarrow i(t)$ cresce $\Rightarrow i_L(t)<0$
$\frac{di(t)}{dt}<0 \Rightarrow i(t)$ decresce $\Rightarrow i_L(t)>0$
⇒ la corrente autoindotta si oppone alla variazione di $i(t)$

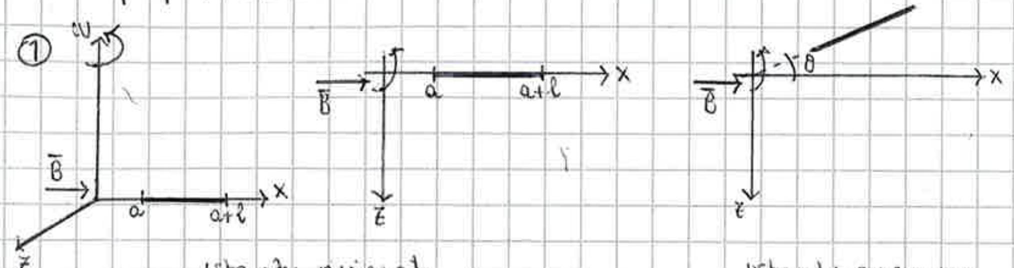


PER ESERCIZI: $B\to\phi\to\begin{cases}L\\ i_L\end{cases}$

→ conversione di energia meccanica in elettrica

Esempi preliminari

①

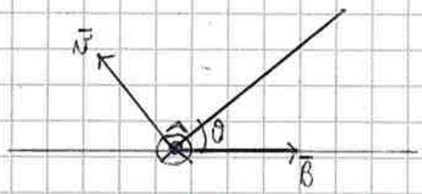


istante iniziale   istante generico

$\bar{F} = q\bar{v} \wedge \bar{B}$

$\bar{v} \wedge \bar{B} = \cancel{v \cdot B \,sen(\frac{\pi}{2}+\theta)} =$

$= vB\cos(\theta)$

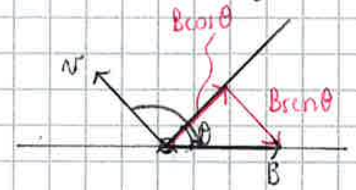


$\bar{v} \wedge \bar{B} = v\bar{u}_{xz} \wedge B\bar{u}_x =$

$= vB\,sen(\frac{\pi}{2}+\theta)(\bar{u}_y) = -vB\cos\theta\,\bar{u}_y \Rightarrow \bar{F} = -qvB\cos\theta\,\bar{u}_y$

$\bar{v}$ è perpendicolare alla velocità angolare $\bar{\omega}$

oppure decompongo B in componenti ∥ e ⊥ all'asta



$\Rightarrow \bar{v} \wedge \bar{B} = -vB\cos\theta\,\bar{u}_y$

da v verso B faccio una rotazione in senso orario quindi negativa

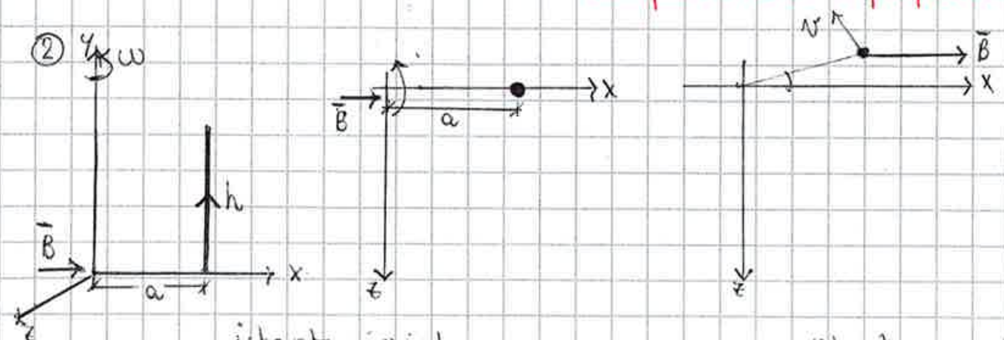
$\bar{E} = \frac{q\bar{v} \wedge \bar{B}}{q} = \bar{v} \wedge \bar{B} = -vB\cos\theta\,\bar{u}_y$

$= -\omega r B\cos\theta\,\bar{u}_y$

$v = \omega r$
$\omega = \frac{v}{r}$

$\mathcal{E} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int \cancel{\bar{E}\,dy} \cdot E\bar{u}_x \cdot dl\,\bar{u}_y = 0$ → non si genera tensione elettrica, dato che il campo elettrico è perpendicolare al conduttore

②



istante iniziale   istante generico

$\omega = \frac{d\theta}{dt}$ $\int d\theta = \int \omega dt \Rightarrow \theta = \int \omega dt$

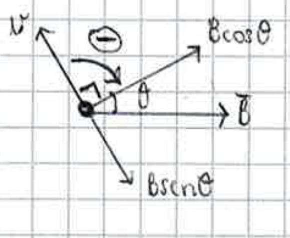
$v = \omega a$

$\bar{F} = q\bar{v} \wedge B =$

$E = \bar{v} \wedge \bar{B} = v u_{xz} \wedge B u_x =$

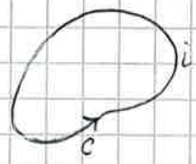
$= -vB\cos\theta\,\bar{u}_y$

rotazione oraria da v verso B



- coefficiente di autoinduzione o induttanza

Ricordo:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$ → 1° legge di Laplace in forma differenziale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$ → 1° legge di Laplace in forma integrale

$$\phi = \int_s \vec{B}\, d\vec{\sigma}$$ → flusso del campo magnetico

Se il flusso del campo magnetico è variabile, allora vale la formula seguente:

$$\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$ → dalla legge di Faraday

$$\Rightarrow \varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \vec{B}\, d\vec{\sigma} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_s \left(\frac{\mu_0 i}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) d\vec{\sigma}$$ → l'unica variabile tempo-dipendente è la corrente

?

non dipende dalla geometria del problema

$$\Rightarrow \varepsilon = -\int_s \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_c \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \frac{di}{dt} \right) d\vec{\sigma} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_s \left(\oint_c \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \frac{di}{dt} \right) d\vec{\sigma} = -\frac{di}{dt}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_s \left(\oint_c \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) d\vec{\sigma}$$

Definisco $\boxed{L = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_s \left(\oint_c \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) \cancel{\frac{di}{dt}}\, d\vec{\sigma}}$ → coeff di induzione o induttanza

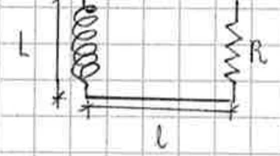
$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = -L \cdot \frac{di}{dt}}$$ → relazione tra ε e induttanza

Essendo $\varepsilon = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \Rightarrow -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow \int \frac{\partial \phi}{\partial t} dt = +L\int \frac{di}{dt} dt \Rightarrow \phi = L \cdot i$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{\phi}{i}}$$ → relazione tra flusso e induttanza

- esempi:

• calcolo dell'induttanza per un solenoide



Il campo magnetico è diverso da 0 solo all'interno del solenoide dove vale:

$B = \mu_0 n i$ → campo B al centro di un solenoide rettilineo indefinito
$n = n°\ spire/m$

$\phi = S \cdot B$ → def di flusso (trascurando gli effetti al bordo dovuti alla lunghezza finita)

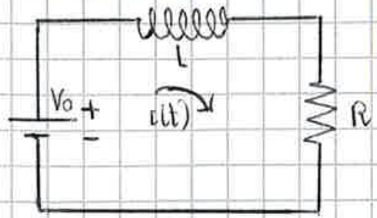
$\phi = N \cdot S_1 B$ → considero il contributo di una sola spira S_1 e lo moltiplico per il n° di spire totali
$N = n l$

$$= n l S_1 \overbrace{(\mu_0 n i)}^{B} = \mu_0 n^2 \underbrace{(l S_1)}_{\mathcal{V}} \cdot i = \mu_0 n^2 \mathcal{V} \cdot i$$

Ma essendo $\phi = L i$

$$\Rightarrow \boxed{L = \mu_0 n^2 \mathcal{V}}$$ → induttanza di un solenoide

- circuito RL



la corrente circola in senso orario perché le cariche positive "soffiano", ovvero la corrente è un flusso di cariche positive

Applico la 2° legge di Kirchoff al circuito : $\sum_K V_K = 0$

$V_0 + \varepsilon - Ri = 0$ → i condensatori e i resistori sono elementi passivi, ovvero elementi che dissipano energia ovvero $\Delta V < 0$

Ricordo:
RESISTORE ⇒ $V = -Ri$
CONDENSATORE ⇒ $V = -\frac{q}{C}$

ε del solenoide ⇒ $\varepsilon = -L \frac{di}{dt}$

$\Rightarrow V_0 - L\frac{di}{dt} - Ri = 0$ → eq differenziale del primo ordine

$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(V_0 - Ri)$

$\frac{di}{V_0 - Ri} = \frac{1}{L}dt \rightarrow -\frac{1}{R}\log(V_0 - Ri) = \frac{1}{L}t + cost$

$\Rightarrow \log(V_0 - Ri) = -\frac{R}{L}t + \cancel{R}cost$ → pongo $\tau = \frac{L}{R}$

$\Rightarrow \log(V_0 - Ri) = -\frac{t}{\tau} + Rcost$ → $e^{-\frac{t}{\tau} + Rcost} = e^{Rcost} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

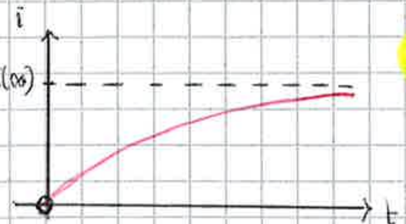
~~$\Rightarrow V_0 - Ri = e^{-\frac{t}{\tau}}$~~

~~$\Rightarrow i =$~~

$\Rightarrow V_0 - Ri = c\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}(V_0 - ce^{-\frac{t}{\tau}})$ → impongo la condizione al contorno: $t=0 \Rightarrow i(0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$ → $V_0 - c = 0 \Rightarrow c = V_0$



$i(\infty) = \frac{V_0}{R}$ → all'infinito gli effetti dell'induttore non sono risentiti
↓
stazionarietà

ONDE ELETTROMAGNETICHE pag 119

(A)

Ricordo:

1) $\int_\Sigma \bar{E}\cdot d\bar{\sigma} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ → eq di Gauss

2) $\int_\Sigma \bar{B}\cdot d\bar{\sigma} = 0$

3) $\oint_\Gamma \bar{E}\cdot d\bar{l} = -\frac{\partial \phi(\bar{B})}{\partial t}$ → legge di Faraday

4) $\oint_\Gamma \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 i + \mu\varepsilon \frac{\partial \phi(\bar{E})}{\partial t}$ → legge di Ampere-Maxwell

1) $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

2) $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

3) $\bar{\nabla}\wedge\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ → eq di Maxwell (condizioni non stazionarie)

4) $\bar{\nabla}\wedge\bar{B} = \mu\bar{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

1) $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$

2) $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

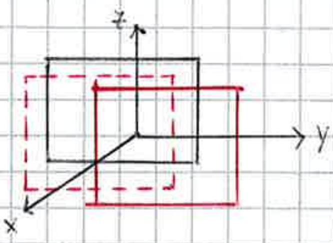
3) $\bar{\nabla}\wedge\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ → eq di Maxwell (condizioni stazionarie)
eq di Maxwell libere (assenza di sorgenti)

4) $\bar{\nabla}\wedge\bar{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

(B) Esplicito la natura vettoriale delle 4 eq di Maxwell sotto le seguenti ipotesi:
1) considero il campo libero (senza sorgenti)
2) Immagino la sorgente che crea il campo magnetico, molto lontana.
la sorgente emette delle onde in una regione di spazio dove non ci sono sorgenti.

Il campo elettrico e magnetico dipendono solo dalla posizione particolare sull'asse x.
⇒ si parla di onde piane
Se un piano è ⊥ all'asse x ⇒ il campo elettrico e magnetico dipendono solo dalle variabili x e dalla variabile t (tempo)

Un'onda piana è un'onda descritta da una funzione di perturbazione invariata nello spazio



⇒ nelle 4 eq. di Maxwell, "sopravvivono" solo i termini che dipendono da x, ~~ovvero i termini visti come variaz~~ e da t.
Quindi:

1) $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial z}}_{=0}\right) = 0$ non c'è variazione lungo y e z

$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$

2) $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0$

① mischio le eq. differenziali, aumentandone l'ordine
* Ricordo che per il th di Schwartz: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (sotto alcune ipotesi)

→ Ez compare in 1) e 3)
Derivo 1) rispetto a t e 3) rispetto ad x

$$1)\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$3)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

(II)*

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

→ Ey compare in 2) e 4)
Derivo 2) rispetto a t e 4) rispetto ad x

$$2)\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial t \partial x} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

$$4)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

(II)*

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

→ By compare in 1) e 3)
Derivo 1) rispetto a x e 3) rispetto a t

$$1)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_y}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}$$

$$\parallel$$

$$3)\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_z}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial B_y}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

→ Bz compare in 2) e 4)
Derivo 2) rispetto a x e 4) rispetto a t

$$2)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$$

$$\parallel$$

$$4)\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial E_y}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = -\mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Quindi:

$$\boxed{\begin{aligned} &1)\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \\ &2)\ \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \\ &3)\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \\ &4)\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

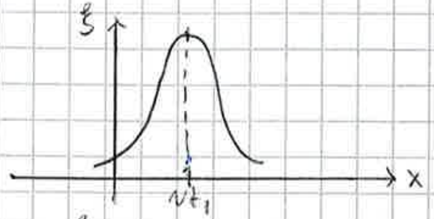
→ hanno la stessa forma: $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ con $\xi = E_y, E_z, B_y, B_z$

→ sig. fisico della soluzione $\xi(x \pm vt)$

~~Faccio~~

Suppongo che all'istante iniziale $(t=0)$, $\xi(x) = e^{-x^2}$

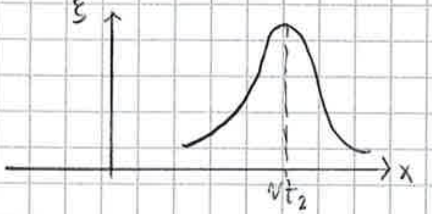
$\rightarrow t=0 \Rightarrow \xi(w) = \xi(x) = e^{-x^2}$



$\rightarrow t>0, t_1$

$\Rightarrow \xi(w) = \xi(x - vt) = e^{-(x-vt_1)^2}$

punto di massimo: ~~vt_1~~ $x = vt_1$



$\rightarrow t>0, \ t_2 > t_1$

$\Rightarrow \xi(w) = \xi(x - vt_2) = e^{-(x-vt_2)^2}$

punto di massimo: $x = vt_2$

Quindi, ricordando che l'onda si propaga lungo l'asse x, al tempo $t = t_0$ e nel punto $x = x_0$ la funzione vale $\xi(x_0 - vt_0)$ e tale valore vale per ogni $t > t_0$

$\Rightarrow \xi(x - vt)$ rappresenta un'onda piana progressiva perché mi sposto verso le $x>0$ $\forall t > t_0$.

$\Rightarrow \xi(x+vt)$ rappresenta un'onda piana regressiva perché mi sposto verso le $x<0$

In entrambi i casi la traslazione è rigida, ovvero la forma della funzione si mantiene inalterata durante il moto di propagazione.

(F) le eq. 1), 2), 3), 4) del punto (D) hanno la forma dell'eq. delle onde, quindi il campo elettrico e magnetico hanno una natura ondosa

~~e la mis~~

la misura dei campi all'istante iniziale è sufficiente per conoscere il valore dei campi a tutti gli istanti successivi (data la natura ondosa)

$$\bar{E} = E_y(x - vt)\,\bar{u}_y + E_z(x - vt)\,\bar{u}_z$$

$$\bar{B} = B_y(x - vt)\,\bar{u}_y + B_z(x - vt)\,\bar{u}_z$$

Nel disaccoppiare le eq con l'algoritmo del punto D, perdo delle informazioni: cerco di recuperarle ricordandomi che: $w = x - vt$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1 \Rightarrow \partial w = \partial x \quad \Rightarrow dw = dx$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -v \Rightarrow \partial w = -v\partial t \quad \Rightarrow dw = -v\,dt$$

$$dt = -\frac{1}{v}dw$$

$$\rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial E_z}{\partial w} = \frac{\partial E_z}{\partial w}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial w}$$

$$\cancel{B_y = \int \frac{\partial B_y}{\partial t}dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial w}\partial w t = \int -v\,dt}$$

Quindi:

$$\boxed{\begin{aligned} &E = v \cdot B \\ &\bar{E} \cdot \bar{B} = 0 \Rightarrow \bar{E} \perp \bar{B} \\ &\bar{E} \wedge \bar{B} = \frac{E^2}{v} \bar{u}_x = v B^2 \bar{u}_x = E B \bar{u}_x \end{aligned}}$$

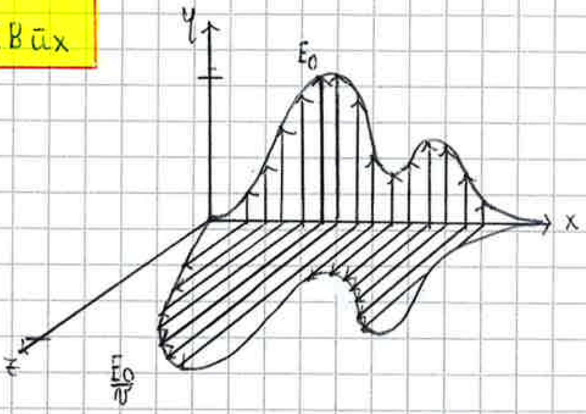
→ proprietà del campo elettrico e magnetico delle onde piane

Ad esempio:

~~$\bar{E} = E_x \bar{u}_y$~~

per $t=0$: $\bar{E} = E(x)\, \bar{u}_y$

$\bar{B} = \frac{1}{v} E(x)\, \bar{u}_z$



- onde armoniche

per $t=0$:

$\bar{E} = E_{0y} \,\text{sen}(Kx)\, \bar{u}_y + E_{0z} \,\text{sen}(Kx + \delta)\, \bar{u}_z$ → K serve per rendere adimensionale x

$K\,[m^{-1}]$

vettore d'onda

per $t>0$:

$\bar{E} = E_{0y} \,\text{sen}(K(x - vt))\, \bar{u}_y +$

$+ E_{0z} \,\text{sen}(K(x - vt) + \delta)\, \bar{u}_z$

δ è una costante arbitraria che consente lo sfasamento rispetto $\text{sen}\,Kx$

$\Rightarrow$ pongo $Kv = \omega$

$$\boxed{\bar{E} = E_{0y} \,\text{sen}(Kx - \omega t)\, \bar{u}_y + E_{0z} \,\text{sen}(Kx - \omega t + \delta)\, \bar{u}_z}$$

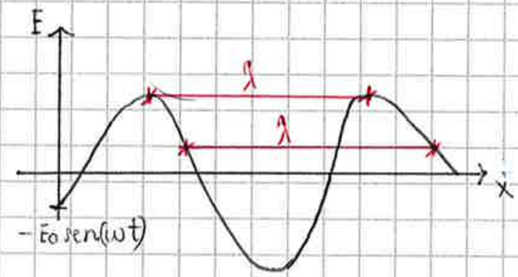
$\omega = Kv$ = pulsazione

K = numero d'onda o vettore d'onda

$\lambda = \frac{2\pi}{K}$ lunghezza d'onda

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodo

$\nu = \frac{1}{T}$ frequenza



λ = distanza tra 2 punti di ugual fase adiacente

Quindi:

$$\begin{cases} \bar{E} = (0, E_y, E_z) \\ \bar{B} = (0, -\frac{1}{v} E_z, \frac{1}{v} E_y) \end{cases}$$

$\bar{E}_y = E_{0y} \,\text{sen}(Kx - \omega t)\, \bar{u}_y$

$\bar{E}_z = E_{0z} \,\text{sen}(Kx - \omega t + \delta)\, \bar{u}_z$

$\bar{B} = -\frac{1}{v} E_{0z} \,\text{sen}(Kx - \omega t + \delta)\, \bar{u}_y + \frac{1}{v} E_{0y} \,\text{sen}(Kx - \omega t)\, \bar{u}_z$

$\bar{B} \perp \bar{E}$

- onda piana armonica polarizzata linearmente

$$\cancel{E = E_0 \, sen(Kx - \omega t)}$$

$$\cancel{S = \varepsilon E^2 v = \varepsilon v E_0^2 sen^2(Kx - \omega t)}$$

$$\cancel{S_m = \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} S(t)\,dt =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} \varepsilon v E_0^2 sen^2(Kx-\omega t) = \frac{1}{T}\lim_{T\to+\infty}\int_0^T \varepsilon v E_0^2 sen^2(Kx-\omega t)\,dt =}$$

$$\cancel{= \frac{1}{T}\varepsilon v E_0^2 \lim_{T\to+\infty}\int_0^T sen^2(Kx-\omega t)\,dt \to z = \omega t - Kx \Rightarrow dz = \omega dt}$$

$$\cancel{t \to 0 \Rightarrow z = -Kx}$$

$$\cancel{t \to T \Rightarrow z =}$$

K

$$\cancel{\Rightarrow S_m = \frac{K}{\omega}\lim_{T\to+\infty}\int_{-Kx}^{-Kx+\omega T} sen^2 z\,dz}$$

$E = E_0 \, sen(Kx - \omega t)$

→ calcolo il vettore di Poynting

$$\bar{S} = \varepsilon E^2 \bar{v} = \varepsilon \bar{v} E_0^2 sen^2(Kx - \omega t)$$
$$S = \varepsilon E_0^2 v \, sen^2(Kx - \omega t)$$

→ calcolo il vettore di Poynting medio

$$S_m = \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} S(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^{+\infty} \varepsilon v E_0^2 sen^2(Kx - \omega t)\,dt =$$

$$= \varepsilon v E_0^2 \cdot \frac{1}{T}\lim_{T\to+\infty}\int_0^T sen^2(Kx - \omega t)\,dt$$ → Pongo $z = -Kx + \omega t$, $dz = \omega\,dt \to dt = \frac{1}{\omega}dz$; per $T \to \infty$, $z \to \infty$

$$= \varepsilon v E_0^2 \,\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\omega}\lim_{z\to+\infty}\int_{-Kx}^{-Kx+\omega T} sen^2 z\,dz =$$ per $t = 0 \Rightarrow z = -Kx$; per $t = T \Rightarrow z = -Kx + \omega T$

$$= \varepsilon v E_0^2 \,\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\omega}\lim_{z\to+\infty}\int_0^{\omega T} sen^2 z\,dz =$$ $\to \int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{T+a} f(x)\,dx$ se f è periodica con periodo T

$$= \varepsilon v E_0^2 \,\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{\omega}\lim_{z\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(z - sen z \cos z)\right]_0^{\omega T} =$$

$$= \varepsilon v E_0^2 \frac{1}{T\omega}\lim_{z\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\omega T - sen\,\omega T\cos(\omega T)\right) =$$

$$= \varepsilon v E_0^2 \frac{1}{\cancel{\omega T}}\cdot\frac{1}{2}\cancel{\omega T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} S_m = \dfrac{\varepsilon v E_0^2}{2} \\ E_m^2 = \dfrac{1}{2}E_0^2 \\ S_m = \varepsilon v E_m^2 \end{array}}$$

CONDENSATORI

- in serie $\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}$ $\quad q = cost$
- in parallelo $C = \sum_k C_k$ $\quad \Delta V = cost$

$\oplus \rightarrow \odot$ uscente

$\ominus \rightarrow \otimes$ entrante

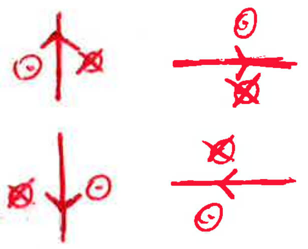
RESISTORI

- in serie $R = \sum_k R_k$ $\quad \cancel{\Delta V}\ \dot{q} = cost$
- in parallelo $\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$ $\quad \Delta V = cost$

$V(r) = -\int E(r)\,dr$

$\phi(\bar{E}) = \int_\Sigma \bar{E}\, d\bar{\sigma}$ Gauss $\rightarrow \phi(\bar{E}) = \int_\Sigma \bar{E}\, d\bar{\sigma} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ → carica racchiusa dalla superficie di Gauss

$\phi(\bar{E}) = \bar{E} \cdot \bar{\Sigma}$ def di flusso



Induzione dielettrica

$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$

$\phi(\bar{D}) = \int_\Sigma \bar{D}\, d\sigma = q$

$\phi(\bar{D}) = \bar{D} \cdot \bar{\Sigma}$

In definitiva:

$$\bar{E} = 2K\sigma \log \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} \cdot \bar{i} + 2K\sigma(\theta_2-\theta_1)\bar{j} = 2K\sigma\left(\log \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} \cdot \bar{i} + (\theta_2-\theta_1)\bar{j}\right)$$

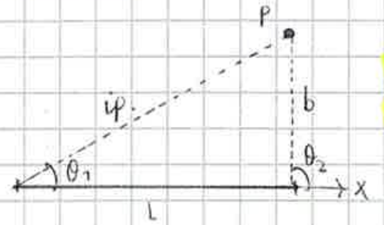
Osservazione: $\bar{i}$ e $\bar{j}$ sono concordi con gli assi, quindi positivi
se mi trovo nel II quadrante $\bar{i}$ ha verso discorde ad x quindi è il termine con $\bar{i}$ è negativo (e così negli altri quadranti)

I q: $+\bar{i}$, $+\bar{j}$
II q: $-\bar{i}$, $+\bar{j}$
III q: $-\bar{i}$, $-\bar{j}$
IV q: $+\bar{i}$, $-\bar{j}$

esempio:
II quadrante $\Rightarrow \bar{E} = 2K\sigma\left(-\log \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}\,\bar{i} + (\theta_2-\theta_1)\bar{j}\right)$

CASI SPECIALI

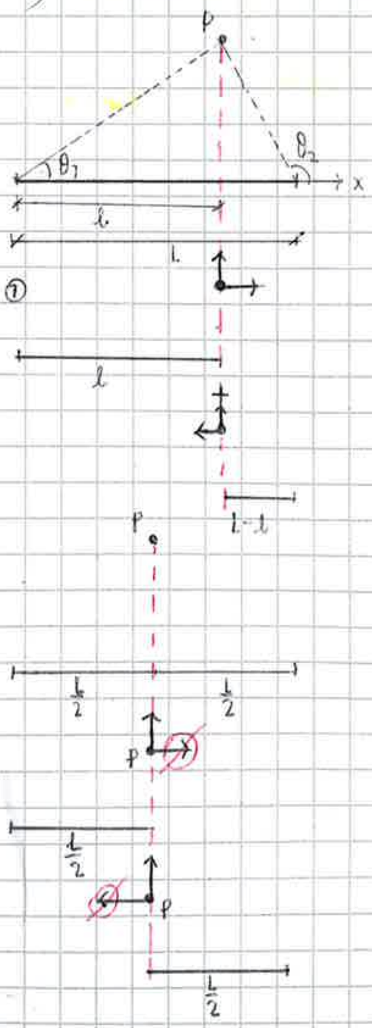
a) $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$



$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{b}{ip} = \frac{b}{\sqrt{L^2+b^2}} \rightarrow \theta_1 = \arcsin \frac{b}{\sqrt{L^2+b^2}}$$

$$\bar{E} = 2K\sigma\left(\log \frac{\sqrt{L^2+b^2}}{b} \cdot \bar{i} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{L^2+b^2}}\right)\bar{j}\right)$$

b) $\theta_2 > \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ la proiezione di P cade sul nastro



Divido il problema in 2 parti e applico la formula di prima
① tratto l

$$\bar{E}_1 = 2K\sigma\left(\log \frac{\sqrt{l^2+b^2}}{b} \cdot \bar{i} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{l^2+b^2}}\right)\bar{j}\right)$$

② tratto L-l

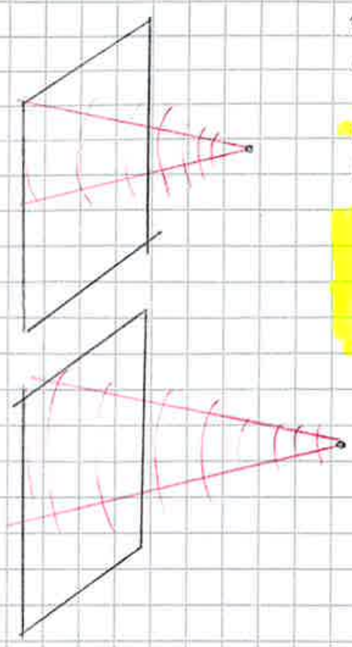
$$\bar{E}_2 = 2K\sigma\left(-\log \frac{\sqrt{(L-l)^2+b^2}}{b} \cdot \bar{i} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{(L-l)^2+b^2}}\right)\bar{j}\right)$$

Adesso applico p.s. effetti e sommo i due contributi
$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$

→ caso particolare $l = \frac{L}{2}$

In questo caso: le componenti lungo x si elidono essendo uguali in modulo e aventi verso opposto.
Le componenti lungo y si sommano, ovvero si raddoppia perché sono uguali in modulo e verso
Quindi:

$$\bar{E} = \bar{E}_x + \bar{E}_y = 2\bar{E}_{y_1} = 4K\sigma\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{L^2}{4}}}\right)\bar{j}$$

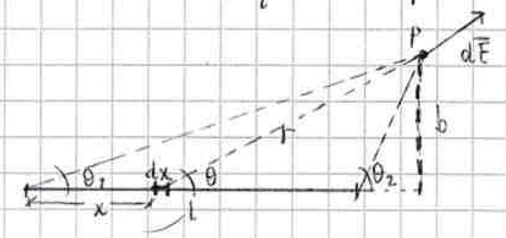


Sostanzialmente, allontanandomi dal piano vedo delle cariche che prima non riuscivo a vedere

La dipendenza del campo elettrico dalla ~~distanza~~ corpo è r^{D-2} dove D è la dimensione del corpo

punto → dimensione 0 ⇒ r^{-2}
filo → dimensione 1 ⇒ r^{-1}
piano → dimensione 2 ⇒ r^{0}

- sbarretta di lunghezza L portante una carica Q distribuita uniformemente



$\lambda = \frac{dq}{dx} \rightarrow \boxed{dq = \lambda\, dx = \frac{Q}{L}\, dx}$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{k\,dq}{r^2} = \frac{kQ\,dx}{L r^2}$$

dE_x, dE_y calcolati come l'es precedente

$$\tan\theta = \frac{b}{L+a-x} \rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{b}{\sin^2\theta}\ \cancel{d\theta} \rightarrow dx = \frac{b}{\sin^2\theta}\, d\theta$$

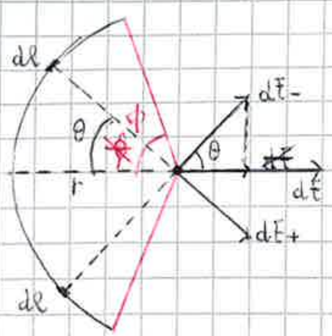
$$\sin\theta = \frac{b}{r} \rightarrow r = \frac{b}{\sin\theta}$$

$$dE = \frac{kQ\,\cancel{b}\,d\theta\,\cancel{\sin^2\theta}}{L\,\cancel{\sin^2\theta}\cdot b^2} = \frac{kQ}{Lb}\, d\theta$$

?

2) teorema di Gauss e PSE

- arco di circonferenza → calcolo del campo nel centro

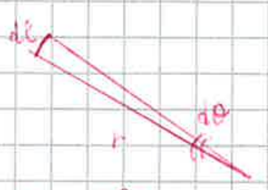


Attenzione! non necessariamente l'arco è una semicirconferenza. Sia φ l'angolo che individua il semiarco

Considero due elementi diametralmente opposti

$\lambda = \frac{dq}{dl} \rightarrow dq = \lambda\, dl$

$\lambda = \frac{dq}{dl} \rightarrow dq = \lambda\, dl = \frac{q}{l}\, dl$



$dl = r\, d\theta$

$dE^- = dE^+ = \frac{k\, dq}{r^2} = \frac{kq}{lr^2}\, dl$

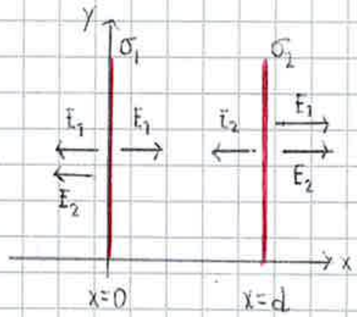
$dE = dE^- \cos\theta + dE^+ \cos\theta = 2 dE^+ \cos\theta = \frac{2kq}{lr^2}\, dl = \frac{2kq}{lr^2}\, r \cos\theta\, d\theta$

$dE = \frac{2kq}{lr} \cos\theta\, d\theta$

Applico PSE: devo integrare tra 0 e φ perché l'altra parte di arco è tenuta già conto visto che considero elementi diametralmente opposti

$E = \int_0^{\varphi} dE = \int_0^{\varphi} \frac{2kq}{lr} \cos\theta\, d\theta \rightarrow E = \frac{2kq}{lr} \sin\varphi$

- piani paralleli indefiniti con cariche distribuite diverse $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ $(\sigma_1 > \sigma_2)$



Ricordo: campo elettrico di un piano indefinito $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
Il campo è normale ed uscente dal piano

Applico PSE nei tre tratti diversi per calcolare E: faccio la somma algebrica dei campi elettrici.
Per calcolare V(x) ricordo che

$E(x) = -\nabla V \rightarrow$ in una variabile $E(x) = -\frac{dV}{dx} \rightarrow V = \int -E\, dx + c$

$$E(x) = \begin{cases} x<0: & -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \\ 0<x<d: & +\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \\ x>d: & +\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} \end{cases} \Rightarrow V(x) = \begin{cases} x<0: & +\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\, x + c_1 \\ 0<x<d: & \frac{\sigma_2-\sigma_1}{2\varepsilon_0}\, x + c_2 \\ x>d: & -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\, x + c_3 \end{cases}$$

→ per determinare le costanti:
① V(x) è una funzione continua
② $V(\infty) = 0$
↓
regola fisica
convenzione matematica

$V(0^-) = V(0^+)$ → continuità in 0
$c_1 = c_2$

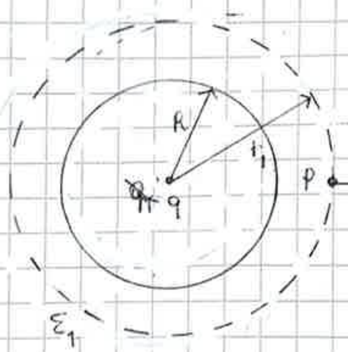
$V(d^-) = V(d^+)$ → continuità in d

$\frac{\sigma_2-\sigma_1}{2\varepsilon_0}\, d + c_2 = -\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}\, d + c_3$

$\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\, d - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\, d = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\, d - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\, d + c_3 - c_2 \rightarrow c_3 - c_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\, d \rightarrow c_3 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\, d + c_2$

Per semplicità ipotizzo $c_2 = 0$ ~~V(x)=~~
$c_1 = 0$

~~- sfera con carica q distribuita uniformemente al suo interno.~~



~~① r>R (fuori dalla sfera)~~

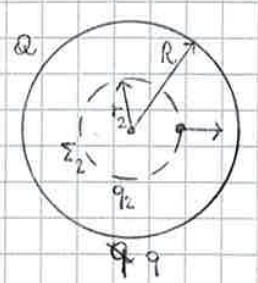
~~Prendo una superficie di Gauss passante per P e centro uguale a quello della sfera~~

$\phi = E \cdot \Sigma$ → def di flusso   area della sfera $= 4\pi r^2$

$\phi = 4\pi r_1^2 E$

$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ → th di Gauss

quindi $E \cdot \Sigma = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1^2}$



~~② r<R (dentro la sfera)~~

~~$\phi \neq q$ perchè devo considerare solo la carica racchiusa dalla sup di Gauss Σ~~

$\phi = 4\pi r^2 E$

$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi r^3} \rightarrow \rho = \frac{3q}{4\pi R^3} \rightarrow q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$

~~Quindi~~

$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \rightarrow E = \frac{1}{3\varepsilon_0} \rho r$

$\phi = 4\pi r_2^2 E$

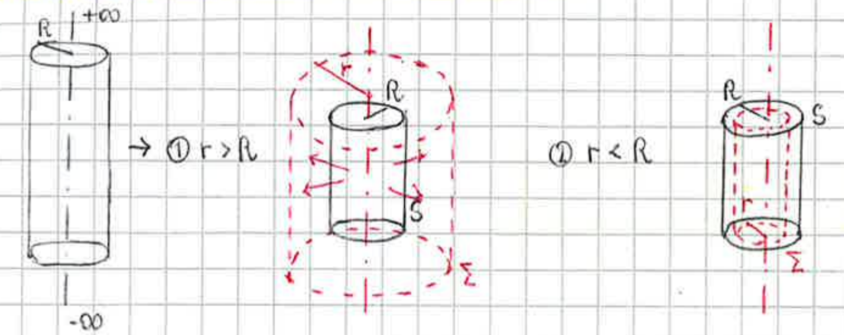
$\phi = \frac{q_2}{\varepsilon_0} \rightarrow \phi = \frac{q_2}{\varepsilon_0} \rightarrow q_2 = \rho V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \rho \rightarrow \phi = \frac{4\pi r_2^3}{3\varepsilon_0}$

~~Quindi~~

$4\pi r_2^2 E = \frac{4\pi r_2^3}{3\varepsilon_0} \rho \rightarrow E = \frac{r_2}{3\varepsilon_0} \rho$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 140

- campo elettrico di una carica distribuita uniformemente su una superficie cilindrica indefinita di densità di carica lineare λ



① $r>R$: scelgo come superficie di Gauss una sup cilindrica coassiale con il cilindro S fisico (entrambe sono indefinite)

$\phi_{basi}=0$ per def di flusso $\phi=\vec{E}\cdot\vec{\Sigma}$ $\quad \vec{\Sigma}\perp\vec{E}$ quindi $\phi_{basi}=0$

$\phi_{lat}=\phi$ — area laterale di un cilindro di raggio r e altezza L

$\phi = E\cdot\Sigma = E\cdot \cancel{2\pi R L}\ \cancel{2\pi r L E}\ 2\pi r L\cdot E$

$q = \sigma = \frac{dq}{dS} \to \sigma=\frac{q}{S} \to q=\sigma\cdot S = \sigma\cdot 2\pi R L = \lambda L$ → ~~dove la carica è racchiusa~~ la carica racchiusa dalla sup di Gauss è uguale a quella posta sulla superficie cilindrica di raggio R $\quad \lambda=\frac{q}{L} \quad q=\lambda L$

$\lambda=\frac{dq}{dL}$ $\quad q=\lambda L$

Th di Gauss: $\phi=\frac{q}{\varepsilon_0}$

$\frac{q}{\varepsilon_0}=2\pi r L\cdot E$

$\cancel{\lambda L}\quad \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0} = 2\pi r\cancel{L}\cdot E \to \boxed{E=\frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}}$ → il campo creato da un filo indefinito è uguale a quello generato dal cilindro solo se ~~r<R~~ $r>R$

② $r<R$:

def di flusso: $\phi = E\cdot\Sigma = E\cdot 2\pi r L$

Th di Gauss: $\phi=\frac{q}{\varepsilon_0}$

$q=0$ perché la carica è posta sulla superficie cilindrica di raggio R e, essendo $r<R$, non vi è nessuna carica racchiusa dalla sup di Gauss

Quindi:

$$E(r)=\begin{cases}0 & \text{se } r<R\\ \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} & \text{se } r>R\end{cases}$$

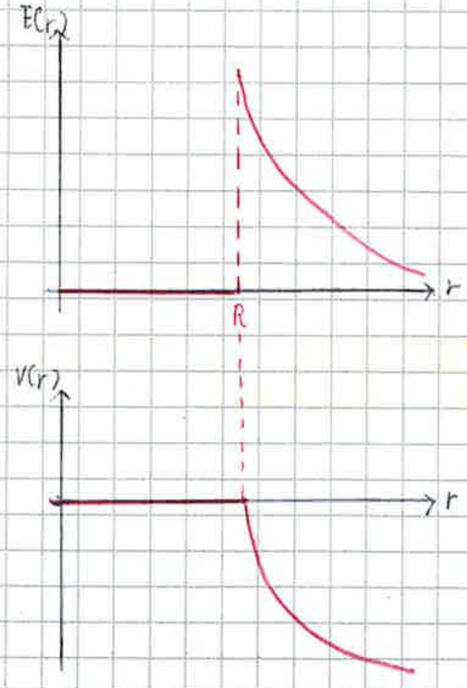
$$V(r)=\begin{cases}c_1 & \text{se } r<R\\ -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + c_2, & \text{se } r>R\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}0 & \text{per } r<R\\ +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{R}{r} & \text{per } r>R\end{cases}$$

Per continuità: $V(R^-)=V(R^+) \Rightarrow c_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log R + c_2$

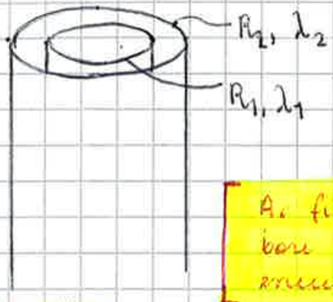
~~per $V(\infty)=0 \Leftrightarrow c_2=0$~~

Per trovare c_2: $V(R)=0 \Rightarrow c_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log R$

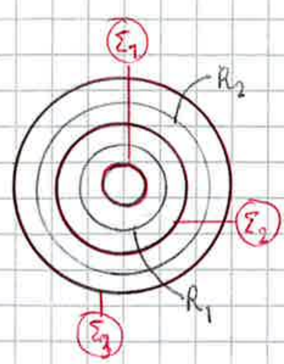
$V(r)=-\int E\,dr$



③ ESERCITAZIONE
- superfici cilindriche indefinite



considero 3 sup. di Gauss
① Σ_1 : $r < R_1$
② Σ_2 : $R_1 < r < R_2$
③ Σ_3 : $r > R_2$



Ai fini del calcolo del flusso non considero le basi perché il campo elettrico non le investe essendo radiale in ogni punto

① $r < R_1$
def. di flusso: $\phi = E \cdot \Sigma_1 = E \cdot 2\pi r \cdot L$

th di Gauss: $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ carica interna racchiusa dalla sup di Gauss $q = 0$

~~q-λ~~
Quindi $E = 0$ ($r < R_1$) → il campo elettrico è identicamente nullo all'interno di R_1

② $R_1 < r < R_2$
def di flusso: $\phi = E \cdot \Sigma_2 = 2\pi r L \cdot E$

th di Gauss: $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ → carica interna racchiusa dalla sup di Gauss

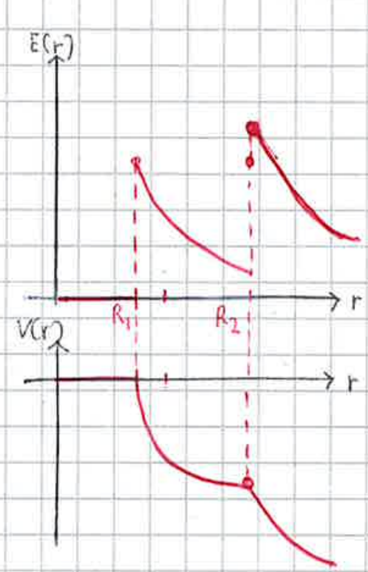
$q = \lambda_1 \cdot L$
quindi
$$\frac{\lambda_1 \cancel{L}}{\varepsilon_0} = 2\pi r \cancel{L} \cdot E \rightarrow E = \frac{\lambda_1}{2\pi r \varepsilon_0}$$

③ $r > R_2$
def di flusso: $\phi = 2\pi r \cdot L \cdot E$

th di Gauss: $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ → carica interna racchiusa dalla sup di Gauss

$q = \lambda_1 L + \lambda_2 L = L(\lambda_1 + \lambda_2)$

Quindi $E = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi r \varepsilon_0}$



— o —

Quindi
$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r < R_1 \\ \frac{\lambda_1}{2\pi r \varepsilon_0} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi r \varepsilon_0} & \text{per } r > R_3 \end{cases}$$

$$V(r) = -\int E(r)\, dr$$

$$V(r) = \begin{cases} c_1 & \text{per } r < R_1 \\ -\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \log r + c_2 & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ -\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \log r + c_3 & \text{per } r > R_3 \end{cases}$$

~~$V(R_1^-) = V(R_1^+)$~~
~~$c_1 = -\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \log R_1 + c_2$~~

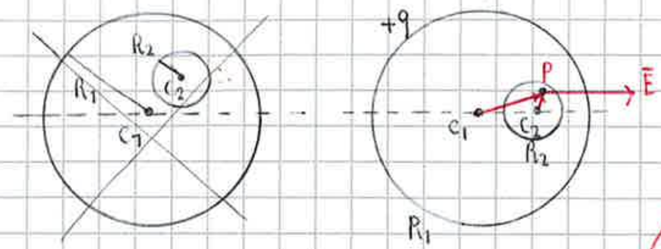
- condizioni per trovare le costanti:
① $V(R_1^-) = V(R_1^+)$

② $V(R_2^-) = V(R_2^+)$

③ $c_1 = 0$ → all'interno il potenziale è costante e quindi $\Delta V = 0$

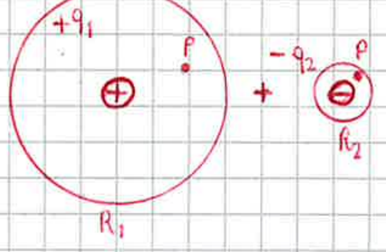
$$c_2 = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \log R_1$$
$$c_3 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} \log R_2 + \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \log \frac{R_1}{R_2}$$

- sfera R_1 con q, avente all'interno una cavità sferica con centro diverso da quello della sfera. Calcolare il campo nel punto P interno



P è individuato univocamente da $\overline{C_1P}$ e $\overline{C_2P}$

l'assenza di simmetria implica che non è possibile applicare il th di Gauss (non è facile applicarlo)



Penso il problema nel seguente modo:

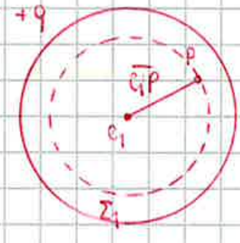
$$\rho = \frac{q}{\mathcal{V}} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi (R_1^3 - R_2^3)}$$

$$q_1 = \rho \mathcal{V}_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \cdot \rho$$

$$q_2 = -\rho \mathcal{V}_2 = \cancel{\frac{4}{3}\pi R_2^3 \rho} - \frac{4}{3}\pi R_2^3 \cdot \rho$$

~~q :=~~

① sfera ①: R_1, q_1, distanza ~~dal~~ punto P-centro = $\overline{C_1P}$



$E(r)$

~~def flusso: $\phi = E \cdot \Sigma_1 = E \cdot 4\pi R_1^2$~~

~~th di Gauss $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho$~~ ~~$\rightarrow E \, 4\pi R_1^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho$~~

Considero come superficie di Gauss una sfera di centro C_1 e raggio uguale alla distanza di P da C_1

def. di flusso: $\phi = E \cdot \Sigma_1 = 4\pi \, C_1P^2 \, E$

th di Gauss: $\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ → carica interna racchiusa dalla sup di Gauss

$$q = \rho \cdot \mathcal{V}_{\Sigma_1} = \cancel{\rho}\, \frac{4}{3}\pi \, C_1P^3 \rho$$

Quindi:

$$\phi \quad E \cdot 4\pi C_1P^2 \cancel{E} = \frac{\frac{4}{3}\pi C_1P^3}{\varepsilon_0} \rho \rightarrow E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} C_1P \rightarrow \bar{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overline{C_1P}$$

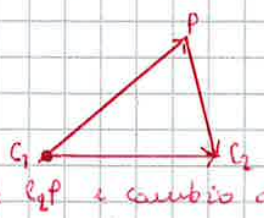
② sfera ②: R_2, q_2, distanza ~~dal~~ punto P-origine = $\overline{C_2P}$

Analogamente al caso 1, si considera come superficie di Gauss, ~~quella~~ la sfera di centro C_1 e raggio uguale alla distanza di P da C_1

$$E = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} C_2P \rightarrow \bar{E} = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0} \overline{C_2P}$$

carica negativa

Per il principio di sovrapposizione degli effetti: $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$



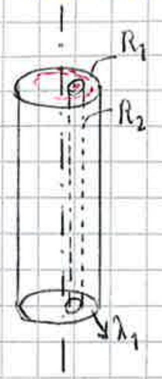
$$\bar{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\left(\overline{C_1P} - \overline{C_2P}\right) = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\left(\overline{C_1P} + \overline{PC_2}\right)$$ invertito il verso al vettore C_2P e cambio di segno

$\bar{E} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho \, \overline{C_1C_2}$ → il campo è orientato lungo $\overline{C_1C_2}$

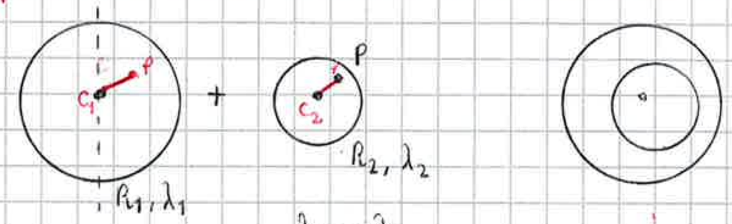
① ESERCITAZIONE

- cilindro indefinito con cavità cilindrica al suo interno:

Determinare il campo elettrico al suo interno



Non avendo simmetria cilindrica immagino il sistema come sovrapposizione di due cilindri: uno carico ⊕ e l'altro ⊖



$\lambda_1 = -\lambda_2$

$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = -\lambda$

$\lambda = \frac{q}{L} \rightarrow q = \lambda L$

$\rho = \frac{q}{V} \rightarrow q = \rho V$ $\Rightarrow \lambda L = \rho V \rightarrow \lambda = \frac{\rho V}{L} = \rho A = \rho \pi R^2$ Volume cilindro $= \pi R^2 \cdot L$

~~① def. di flusso~~ $\cancel{\phi(\bar{E}) = \Sigma \cdot E = \pi R_1^2 E}$

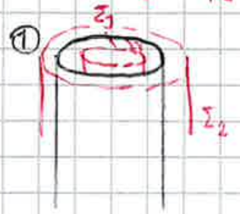
⊕

$\cancel{\lambda_1 = \rho \pi R_1^2}$

$\lambda_2 = -\rho \pi R_2^2 \qquad \lambda_2 = -\frac{q}{L} = -\lambda_1 = -\frac{q}{L} \qquad \cancel{\rho = \frac{q}{V} \rightarrow q = \rho V}$ / $\cancel{q_1 = \rho V_1}$ \ $\cancel{q_2 = \rho V_2}$

$\cancel{\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = (R_1^2 - R_2^2)\rho\pi}$ ~~→ densità di carica lineare di cavità~~

①



① $\Sigma_1 : r < R_1$

def di flusso: $\cancel{\phi(\bar{E}) = E \cdot \Sigma} = E \cdot \pi r^2$ $\quad \cancel{\Rightarrow E \pi r^2 = \frac{\rho \pi r^2 L}{\varepsilon_0}}$

~~th di Gauss:~~ $\cancel{\phi(\bar{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0}}$

~~def di flusso:~~ $\cancel{\phi(\bar{E}) = E\, \Sigma}$

~~th di Gauss~~

→ Ricomincio da qua /+

$\cancel{\lambda = \frac{q}{L} \rightarrow q = \lambda L = q_1 + q_2 = q_1 - |q_2|}$

$\cancel{\lambda_1 = \frac{q_1}{L} \rightarrow q_1 = \lambda_1 L =}$

$\cancel{\lambda_2 = \frac{q_2}{L} \rightarrow q_2 = \lambda_2 L =}$

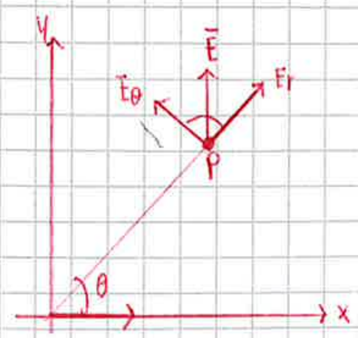
$\cancel{\rho_1 =}$

$\cancel{\rho = \frac{q}{V} \rightarrow q = \rho V}$

$\cancel{\rho V = \lambda L}$

$\cancel{\rho A L = \lambda L} \Rightarrow \lambda = \rho \cdot A = \rho \pi R^2$

- interazione tra dipoli



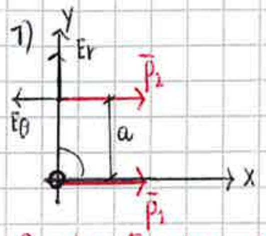
$E_r \perp E_\theta$

$E_r = \dfrac{2 p \cos\theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3}$ $\quad E_\theta = \dfrac{p \operatorname{sen}\theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3}$

$U = -\bar{p}\cdot\bar{E}$ $\quad$ ~~$U_1 = -\bar{p}_1 \cdot \bar{E}_2$~~ ~~$U_2 = -\bar{p}_2 \cdot \bar{E}_1$~~

$\bar{M} = \bar{p} \wedge \bar{E}$

① 

1) 

fisso il polo in $\bar{p}_1$ e vedo cosa succede in $\bar{p}_2$

a = distanza tra dipoli
$\theta = \frac{\pi}{2}$

So che E_r sta sul raggio congiungente p_1 a p_2 e ha verso da p_1 a p_2 (applicato a p_2)
E_θ è ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario rispetto E_r

$\bar{E}_1 = \bar{E}_r + \bar{E}_\theta = E_r \bar{u}_r + E_\theta \bar{u}_\theta$

$E_r = \dfrac{2 p_1 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 0$ perchè $\theta = \frac{\pi}{2}$

campo elettrico generato da 1 su 2

$\Rightarrow \bar{E}_1 = -E_\theta \bar{u}_\theta = -E_\theta \bar{u}_x = -\dfrac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\bar{u}_x$

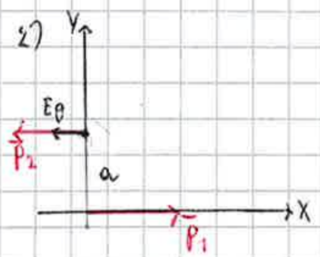
$E_\theta = \dfrac{p_1 \operatorname{sen}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \dfrac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

$U = -\bar{p}\cdot\bar{E} \begin{cases} U_1 = -\bar{p}_1 \cdot \bar{E}_2 \\ U_2 = -\bar{p}_2 \cdot \bar{E}_1 \end{cases}$ $\qquad \bar{M} = \bar{p}\wedge\bar{E} \begin{cases} \bar{M}_1 = \bar{p}_1 \wedge \bar{E}_2 \\ \bar{M}_2 = \bar{p}_2 \wedge \bar{E}_1 \end{cases}$

$U_2 = -\bar{p}_2 \cdot \bar{E}_1 = \dfrac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$ → non si riesce a distinguere se è energia potenziale del primo dipolo o del secondo

$\bar{M}_2 = \bar{p}_2 \wedge \bar{E}_1 = p_2 \bar{u}_x \wedge \left(-\dfrac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\right)\bar{u}_x = 0$ perchè $\bar{u}_x \wedge \bar{u}_x = \bar{0}$

② 

2) 

$r = a$
$\theta = \frac{\pi}{2}$
$\bar{E}_1 = \bar{E}_r + \bar{E}_\theta$

$E_r = \dfrac{2 p_1 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 0$, $E_\theta = \dfrac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

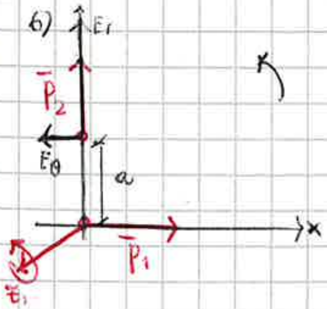
$\bar{E}_1 = -E_\theta \bar{u}_\theta = -\dfrac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\bar{u}_x$

$U_2 = -\bar{p}_2 \cdot \bar{E}_1 =$

$= -p_2(-\bar{u}_x)\cdot \cancel{E_1 \bar{u}_x} \cdot E_1(-\bar{u}_x) = -\dfrac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

$\bar{M}_2 = \bar{p}_2 \wedge \bar{E}_1 = \bar{0}$

6)



$r = a$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

$$E_r = \frac{p_1 \cos\theta}{2\pi \varepsilon_0 r^3} = 0$$

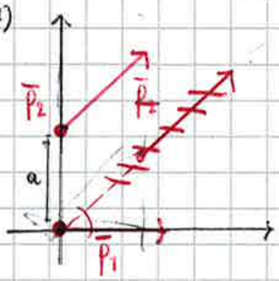
$$E_\theta = \frac{p_1 \operatorname{sen}\theta}{4\pi \varepsilon_0 r^3} = \frac{p_1}{4\pi \varepsilon_0 r^3}$$

$$\overline{E}_1 = E_r \overline{u}_r + E_\theta \overline{u}_\theta = -\frac{p_1}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \overline{u}_x$$

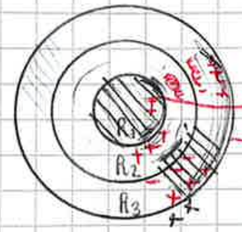
$$U_2 = -\overline{p}_2 \cdot \overline{E}_1 = -p_2 \overline{u}_y \cdot \left(-\frac{p_1}{4\pi \varepsilon_0 r^3}\right) \overline{u}_x = 0 \text{ perché } \overline{u}_x \cdot \overline{u}_y = 0$$

$$\overline{M}_2 = \overline{p}_2 \wedge \overline{E}_1 = p_2 \overline{u}_y \wedge \left(-\frac{p_1}{4\pi \varepsilon_0 r^3}\right) \overline{u}_x = \frac{p_1 p_2}{4\pi \varepsilon_0 r^3} \overline{u}_z \rightarrow$$ infatti ruota in senso antiorario rotazione attorno all'asse z

7)



- condensatore sferico



→ sfera di carica +q
→ guscio sferico che inizialmente non porta ~~con~~ carica

Cosa succede nel guscio sferico?
gli elettroni liberi del guscio verranno attratti dalla sfera e quindi una parte libera di elettroni del guscio vanno a sistemarsi internamente.
Si creano tante cariche positive quante sono quelle negative
~~ta~~ le cariche del guscio sono uguali a quelle della sfera perché il campo elettrico tra R_1 e R_2 è 0 e anche all'interno della sfera vale 0

La sfera è dunque il 1° conduttore mentre il guscio è il 2° conduttore.

Calcolo E(r) nei vari tratti ricordando che, all'interno del condensatore, il campo è nullo.
Negli altri tratti applico il th di Gauss

① $r < R_1 \rightarrow E(r) = 0$ (interno della sfera = 1° conduttore)

② $R_1 < r < R_2$
considero la sup. di Gauss ~~tra~~ sferica tra R_1 e R_2

def di flusso: $\phi(\bar{E}) = \bar{E} \cdot \bar{\Sigma} = E \cdot 4\pi r^2$ → area della sfera

th di Gauss: $\phi(\bar{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ → carica racchiusa dalla ~~sf~~ sup di Gauss

$\phi(\bar{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$ → carica della sfera

Quindi: $\frac{q}{\varepsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \rightarrow K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot K}$

$q \cdot \cancel{4\pi} K = E \cancel{4\pi} r^2$

$E = \frac{Kq}{r^2}$ per $r \in (R_1, R_2)$

③ $R_2 < r < R_3 \rightarrow E(r) = 0$ ~~to~~ perché la carica racchiusa dalla sup di Gauss è 0 infatti la carica del guscio sferico è uguale a quella della sfera

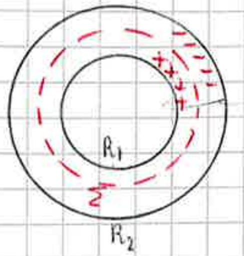
④ $r > R_3$
def di flusso: $\phi(\bar{E}) = \bar{E} \cdot \bar{\Sigma} = E \cdot 4\pi r^2$

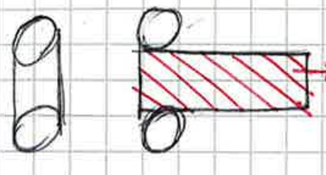
th di Gauss: $\phi(\bar{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0} = 4\pi K \cdot q$ → la carica racchiusa è q (si annullano quella + della sfera e − del guscio, ma rimane la carica esterna del guscio

Quindi
$E(r) = \frac{Kq}{r^2}$

- superfici cilindriche e concentriche = cilindro ~~pieno~~ + guscio cilindrico (ESAME)

Stesse considerazioni fatte prima





→ area della superficie di Gauss $2\pi r \cdot L$

① $r < R_1 \to E(r) = 0$ perché all'interno del condensatore il campo elettrico è nullo

② $R_1 < r < R_2$: per la simmetria del problema considero una sup di Gauss cilindrica e concentrica alle precedenti

def di flusso $\phi(E) = E \cdot \Sigma = E \cdot 2\pi r \cdot L$

th di Gauss $\phi(E) = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow E \cdot 2\pi r \cancel{L} = \frac{\lambda \cancel{L}}{\varepsilon_0} \to E \cdot \cancel{2\pi} \cdot r = \cancel{4\pi}^{2} k \cdot \lambda \to E = \frac{2k\lambda}{r}$

$q = \frac{\lambda}{L} \to$ ~~$\Rightarrow$~~ $\lambda = \frac{q}{L} \to q = \lambda L$

③ $r > R_2 \to E_r(r) = 0$? perché?

Quindi

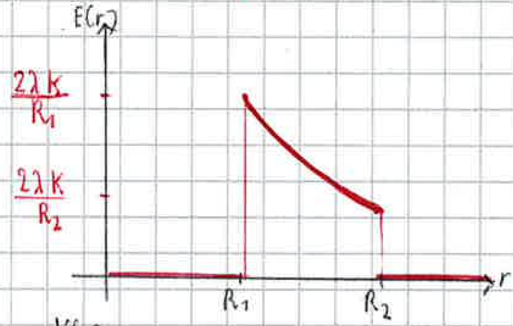
$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{per } r < R_1 \\ \frac{2\lambda k}{r} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{per } r > R_2 \end{cases} \Rightarrow V(r) = -\int E(r)\,dr + C \Rightarrow V(r) = \begin{cases} c_1 & \text{per } r < R_1 \\ -2k\lambda \log(r) + c_2 & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ c_3 & \text{per } r > R_2 \end{cases}$$

$V(R_1^-) = V(R_1^+) \to c_1 = -2\lambda k \log R_1 + c_2 \to c_1 = +2k\lambda(\log R_2 - \log R_1) = 2k\lambda \log\frac{R_2}{R_1}$

$V(R_2^-) = V(R_2^+) \to -2\lambda k \log R_2 + c_2 = c_3 \to c_2 = 2k\lambda \log R_2$

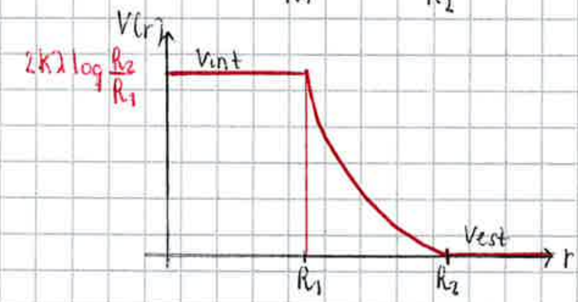
$V(\infty) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$

$$V(r) = \begin{cases} 2k\lambda \log\frac{R_2}{R_1} & \text{per } r < R_1 \\ 2k\lambda \log\frac{R_2}{r} & \text{per } R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{per } r > R_3 \end{cases} \to$$



ΔV = ddp tra le due armature = $V_{int} - V_{est}$ =

$= V_{int} = 2k\lambda \log\frac{R_2}{R_1}$ → prendo dal grafico i tratti più interni e più esterni dove V è costante



$C = \frac{q}{\Delta V} =$

$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to \Delta V = 2k\lambda \log\frac{R_2}{R_1} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_2\pi\varepsilon_0} \lambda \log\frac{R_2}{R_1} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \log\frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L} \log\frac{R_2}{R_1}$

$q = \lambda L \to \lambda = \frac{q}{L}$

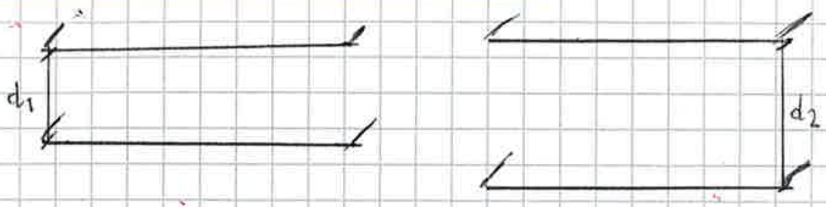
Quindi $C = \frac{q}{\Delta V} = 2\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{L}{\log\frac{R_2}{R_1}}$ → capacità di un condensatore cilindrico nel vuoto. Vale solo per un tratto di lunghezza L perché se $L \to \infty \Rightarrow C \to \infty$

⑤ ESERCITAZIONE

- un condensatore piano a distanza iniziale d_1
successivamente distanza $d_2 > d_1$

$U = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$

$Q_1 = C_1 V_1$



① BATTERIA ⇒ V = cost

energia potenziale: $\Delta U_A = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 - \frac{1}{2} C_1 V_1^2$ $\quad V_1 = V_2$

$$\Delta U_A = \frac{1}{2} V^2 (C_2 - C_1)$$

$U = \frac{1}{2} C V^2$
energia elettrostatica

$C = \frac{Q}{\Delta V}$

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$

$C = \frac{Q}{\Delta V}$

$\cancel{\Delta U_A = \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{Q_2}{\Delta V} - \frac{Q_1}{\Delta V}\right) =}$

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ → condensatore piano! $\quad A_2 = A_1$

$C_1 = \varepsilon_0 \frac{A}{d_1} \to C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{d_2}$

$\boxed{\Delta U_A = \frac{1}{2} V^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right)}$ → RFC perché allontanando le armature devo ottenere $\Delta U < 0$ infatti $d_2 > d_1 \Rightarrow \frac{1}{d_2} < \frac{1}{d_1}$

$\Delta Q_A = Q_2 - Q_1 = C_2 V_2 - C_1 V_1 = V (C_2 - C_1) =$
$= \varepsilon_0 A \cdot V \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = \frac{2 \Delta U_A}{V} < 0$ → RFC perché allontanando le armature la ~~diff~~ il campo elettrico si indebolisce

② NO BATTERIA ⇒ Q = cost

$\cancel{\Delta U_B = \frac{Q_2^2}{2C_2} - \frac{Q_1^2}{2C_1} = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_1}\right.}$

$\Delta U_B = \frac{Q_2^2}{2C_2} - \frac{Q_1^2}{2C_1} = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) =$ infatti: $L = \int_0^Q dL$ dove $dL = -dq \, \Delta V = -dq \frac{q}{C}$

$L = \int_0^Q -dq \cdot \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \left(-\frac{1}{2} q^2 \Big|_0^Q\right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2$

$L = -\Delta U = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1)$

$U_2 - U_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2$

$= \frac{Q^2}{2 \varepsilon_0 A} (d_2 - d_1) > 0$ → RFC

~~Quindi: BATTERIA ⇒ V = cost ⇒~~ $\cancel{\Delta U = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2}$

~~NO BATTERIA ⇒ Q = cost ⇒~~ $\cancel{\Delta U = \frac{1}{2} \frac{1}{C_2} Q_2^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{C_1} Q}$

BATTERIA ⇒ $V = \text{cost} \Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 - \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} V^2 (C_2 - C_1)$

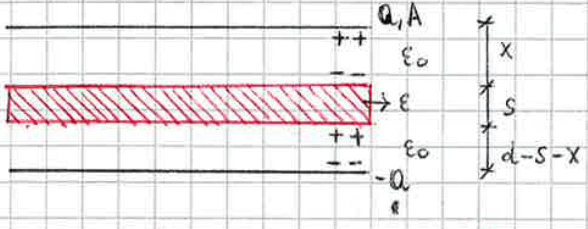
NO BATTERIA ⇒ $Q = \text{cost} \Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C_2} Q_2^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C_1} Q_1^2 = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right)$

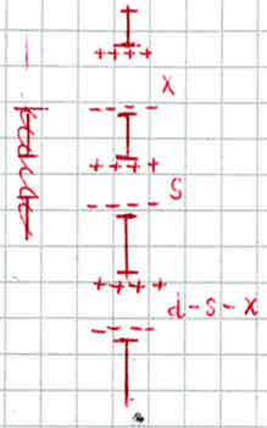
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 140

B) ~~BATTERIA → V = cost~~

$$\cancel{\Delta U_B = \frac{1}{2}\Delta V^2 (C_2 - C_1) = \frac{1}{2}V^2(C_2 - C_1) = \frac{1}{2}V^2\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d-s} - \frac{\varepsilon_0 A}{d}\right) = \frac{1}{2}V^2 \varepsilon_0 A \left(\frac{1}{d-s} - \frac{1}{d}\right) > 0}$$

- inserimento di un dielettrico tra le armature di un condensatore di costante dielettrica ε (senza batteria $Q = cost$)





Immagino il condensatore come 3 condensatori in serie

Per i condensatori in serie $\frac{1}{C} = \Sigma_k \frac{1}{C_k}$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C(x)} + \frac{1}{C(s)} + \frac{1}{C(d-s-x)} = \frac{x}{\varepsilon_0 A} + \frac{s}{\varepsilon A} + \frac{d-s-x}{\varepsilon_0 A} =$$

$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$ → f. generale

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{A}\left(\frac{d-s}{\varepsilon_0} + \frac{s}{\varepsilon}\right)$$

Quindi

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right) = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{A}\left(\frac{d-s}{\varepsilon_0} + \frac{s}{\varepsilon}\right) - \frac{d}{\varepsilon_0 A}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{A}\left(\frac{s}{\varepsilon} - \frac{s}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{A} s\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 s}{A}\left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}\right) = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon}\left(\frac{Q^2 s}{2\varepsilon_0 A}\right)$$

$\Delta U < 0$ perchè $\boxed{\varepsilon_0 < \varepsilon}$

è diminuita quindi l'energia dopo l'inserimento del dielettrico

Se tenevo costante la ddp allora aumentando la capacità, aumentava l'energia.

Si perde energia per polarizzare il dielettrico.

La polarizzazione dei dielettrici non avviene gratis

Quando $\Delta V = 0$, $V = cost$ ⇒ presenza di batteria che fornisce energia per polarizzare il dielettrico

$\forall \varepsilon$, $\varepsilon_0 < \varepsilon$

$\varepsilon = K_e \varepsilon_0$ dove K_e = costante dielettrica relativa $K_e = \frac{V_0}{V_k} = \frac{E_0}{E_k} > 1$

$\cancel{U(x) = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} C(x) V_2^2 - \frac{1}{2}}$

$\cancel{U(x) = \frac{1}{2} V^2 C(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}}$ $U(x) = \frac{1}{2} V^2 C(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)}$

$C(x) = \frac{Q}{V(x)}$

$V(x) = E \cdot h = \frac{\sigma_1(x)}{\varepsilon} \cdot h = \frac{\sigma_2(x)}{\varepsilon_0} h$

Quindi

$V(x) = \frac{Q}{L}\left(\frac{\cancel{\varepsilon}}{x(\varepsilon - \varepsilon_0) + l\varepsilon_0}\right) \cdot h \cdot \frac{1}{\cancel{\varepsilon}} = \frac{Qh}{L(x(\varepsilon - \varepsilon_0) + l\varepsilon_0)} \rightarrow V(x)$

~~Quindi~~

$\cancel{C(x) = \frac{h}{L(x(\varepsilon - \varepsilon_0) + l\varepsilon_0)}}$

Quindi

$\cancel{U(x) = \frac{1}{2} Q^2 \cdot \frac{L(x(\varepsilon - \varepsilon_0) + l\varepsilon_0)}{h}}$

$C(x) = \frac{L(x(\varepsilon - \varepsilon_0) + l\varepsilon_0)}{h} \rightarrow C(x)$

Quindi

$\cancel{U(x) =}$

$U(x) = \frac{1}{2} Q^2 \frac{h}{L(x(\varepsilon - \varepsilon_0) + l\varepsilon_0)} \rightarrow U(x) \rightarrow \varepsilon_0$ perché se il dielettrico non c'è $\Rightarrow x = 0$

$U = \frac{1}{2} Q^2 \frac{h}{L \cdot l \cdot \varepsilon_0} = \frac{1}{2} Q^2 \frac{h}{A \cdot \varepsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

$\downarrow$

formula dell'energia ~~di~~ elettrostatica per condensatori piani

Per def di lavoro

$W = F \cdot x$

In termini infinitesimali

$\downarrow$

$dW = F\,dx$

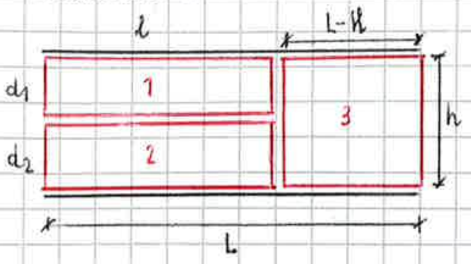
$F = \frac{dW}{dx}$ ricordo che $dW = -dU$

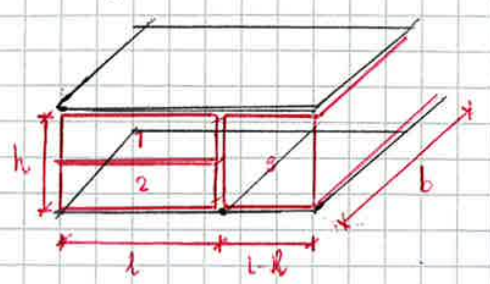
$F = -\frac{dU}{dx} = \cancel{-\frac{1}{2} \frac{Q^2}{+} d}$

$F = -\frac{1}{2} \frac{Q^2 h}{L} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\varepsilon - x\varepsilon_0 + l\varepsilon_0}\right) = +\frac{1}{2} \frac{Q^2 h}{L} \frac{\varepsilon}{(x\varepsilon - x\varepsilon_0 + l\varepsilon_0)} =$

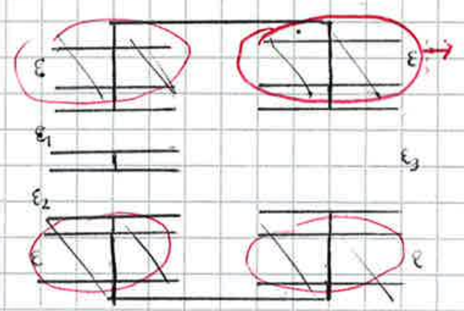
$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{L} \cdot h \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{[x(\varepsilon - \varepsilon_0) + l\varepsilon_0]^2} = \frac{Q^2 h}{2L} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{(x(\varepsilon - \varepsilon_0) + l\varepsilon_0)^2}$

* Sono note $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ dei mezzi che occupano lo spazio tra le armature del condensatore
calcolare C



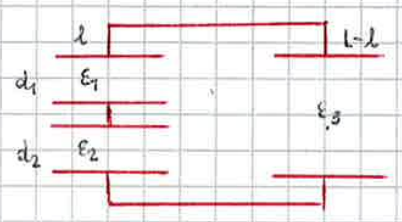


Immagino il sistema come una combinazione di condensatori in serie e in parallelo



→ queste zone non ci sono perché il dielettrico occupa tutta la distanza h tra le armature

$A_1 = bl = A_2$



Calcolare la capacità del sistema equivale a calcolare la capacità del condensatore ho due condensatori in serie e uno in parallelo

Calcolo prima la capacità dei due condensatori in serie

→ condensatori in serie ⇒ $\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}$

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 \cdot A_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A_2} = \frac{1}{b\,l}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right) \Rightarrow C_s = C_{12} = bl\left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\cancel{\varepsilon_2 d_1 +}\ \varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}\right)$$

$C = \frac{\varepsilon A}{d}$ in generale

→ condensatori in parallelo ⇒ $C = \sum_k C_k$

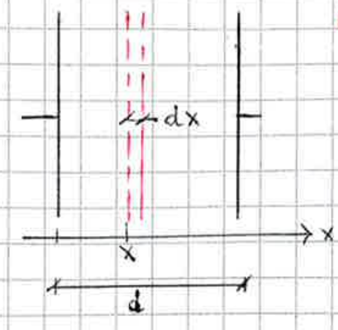
$$C_p = C_{TOT} = C_{12} + C_3 = bl\left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}\right) + \frac{\varepsilon_3}{h} \cdot A_3 = bl\left(\frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}\right) + \frac{b(L-l)}{h} \cdot \varepsilon_3 =$$

$$= bl\left(\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}\right) - \frac{bl\varepsilon_3}{d_1 + d_2} + \frac{bL}{d_1 + d_2}\varepsilon_3 =$$

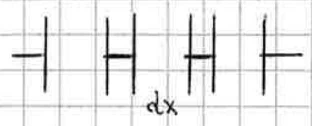
$$= b\left(\frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}\, l - \frac{\varepsilon_3}{d_1 + d_3} \cdot l + \frac{\varepsilon_3}{d_1 + d_2} L\right)$$

- tra le armature c'è un mezzo dielettrico con ε che dipende da x

Calcolare la capacità del condensatore



Immagino il sistema come condensatori in serie



$$C(x) = \frac{\varepsilon(x) \cdot A}{dx} \rightarrow \text{capacità infinitesimale}$$

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k} = \frac{1}{C(x)} \Rightarrow \frac{1}{C} = \int_0^d \frac{1}{C(x)} = \int_0^d \frac{1}{A(\varepsilon(x))} dx = \frac{1}{A} \int_0^d \frac{1}{\varepsilon(x)} dx$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{A}{\int_0^d \frac{1}{\varepsilon(x)} dx}$$

Se ad esempio $\varepsilon(x) = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} x \Rightarrow C(x) = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d \log \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} A$

Ricordo - Regola CEO -

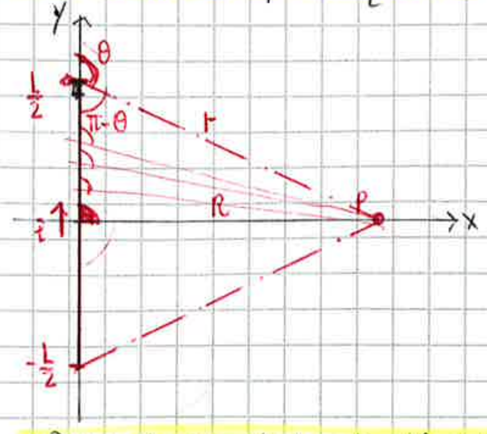
$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \text{sen}\, \alpha$

$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\, \alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

- calcolo del campo magnetico di un conduttore i, L ad una distanza R dal centro



il filo è finito!

a) prendo un elemento dl sul tratto superiore

$$\boxed{d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\bar{l} \wedge \bar{r}}{r^3}}$$ legge di Ampere-Laplace

$d\bar{l} \wedge \bar{r} = \cancel{dl\,r} - dl\, r \,\text{sen}\,\theta\, \bar{u}_z$

⊖ rotazione in senso orario
inoltre scomponendo r ho solo la componente attiva $r\bar{u}_x$ e quindi $\bar{u}_y \wedge \bar{u}_x = -\bar{u}_z$

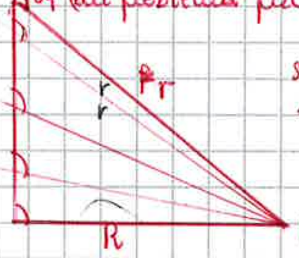
$\text{Sia } -\bar{u}_z = \bar{u}_\varphi$

$d\bar{l} \wedge \bar{r} = dl\, r\, \text{sen}\,\theta\, \bar{u}_\varphi$

$\Rightarrow d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dl}{r^2} \text{sen}\,\theta\, \bar{u}_\varphi$

$\bar{B} = \int d\bar{B}$

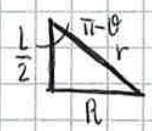
devo trovare degli ~~otte~~ estremi di integrazione "intelligenti"
Sto considerando solo il tratto superiore
Noto che
θ_1 (del problema perché ~~calcolo~~ conosco P)



Scelgo come estremi di integrazione gli angoli che fanno il tratto infinitesimo dl scelto di volta in volta con il punto P.
Noto che questo angolo varia da $\frac{\pi}{2}$ a θ_1
Il valore $\frac{\pi}{2}$ è ottenuto dall'elemento infinitesimo che si trova sulla stessa direzione di P.

Devo esprimere tutte le grandezze dipendenti da θ, in funzione di θ

i non dipende da θ
r^2 dipende da θ



$\text{sen}(\pi-\theta) = \frac{R}{r} \Rightarrow \text{sen}(\pi-\theta) = \text{sen}\,\theta = \frac{R}{r}$

$r = \frac{R}{\text{sen}\,\theta} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\text{sen}^2\theta}{R^2}$

~~$\Rightarrow \bar{B} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_1} \frac{\mu_0}{4\pi} i\, dl\, \text{sen}$~~

dl dipende da θ → ~~CONTINUA SUL QUADERNO~~