NUMERO: 1741A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Loverre Michele

MATERIA: Metodi matematici per l'ingegneria, Appunti - prof. Fagnani, Pellerey

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - 10 CFU — 03-03-2015

prof. Fabio Fagnani - Umberto Battisti — AC Analisi

prof. Franco Pellerey — P Probabilità — Ricevimento GIO 15:00 - 17:00

MAR - Fagnani 14:30 - 16:00

MER - Pellerey 10:00 - 11:30 11:30 - 13:00

VEN - Fagnani

Analisi { ~~....~~ analisi complessa (calcolo integrali; distribuzioni, trasformate (segnale)

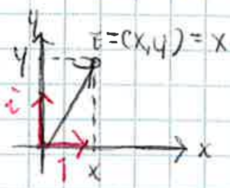
ANALISI COMPLESSA

- Introduzione: numeri complessi

- Richiami sui numeri complessi e complementi (1)

• punti nel piano $\mathbb{C}$ oppure come vettori con origine in $(0,0)$?
Ora si usa la rappresentazione con le coordinate cartesiane

piano di Gauss



$i = (0,1)$ unità imm.
$1 = (1,0)$ unità reale
$x = \mathrm{Re}\, z$
$y = \mathrm{Im}\, z$

$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \\ z = (x,y) \to \text{num. complesso} \\ \text{se } x = 0 \Rightarrow z = (0,y) \text{ immaginari puri} \\ \text{se } y = 0 \Rightarrow z = (x,0) \text{ numero reale} \end{array}}$

• somma e prodotto

$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

$z_2 = x_2 + iy_2$

per prodotto $\Rightarrow$ impongo $i^2 = -1$

$$\underbrace{z_1 \cdot z_2}_{z} = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2y_1y_2 = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{\mathrm{Re}\, z} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\mathrm{Im}\, z}$$

$(\mathbb{C}, \cdot, +)$ è un campo: campo dei numeri complessi

• coniugato

$z = x + iy \to \bar{z} := x - iy$ ($\bar{z}$ è il simmetrico z, rispetto l'asse x)

• modulo

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ lunghezza vettore

Osservo:

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad \to z \cdot \bar{z} = |z|^2 \leftarrow \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 \to z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$

Quindi se $z \neq 0 \Leftrightarrow z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \Leftrightarrow$ per def di reciproco $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \to \boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$

esempio: $\frac{1+i}{1-i} = (1+i)\frac{1}{1-i} \to$ reciproco di $1-i$

$(1-i)^{-1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\text{Ricorda:} \\ \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})\end{array}}$

$= (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = i$

Proprietà: $\boxed{\begin{array}{l} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\ |z_1 z_2| \leq |z_1|\,|z_2| \end{array}}$ dis. triangolare

$\rightsquigarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{Quindi:} \\ \text{somma: } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) \\ \text{prodotto: } z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2)\end{array}}$

$\Rightarrow (x,0) + (0,y) = (x,y) \Rightarrow (x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0)$

$(0,1)(y,0) = (0,y)$

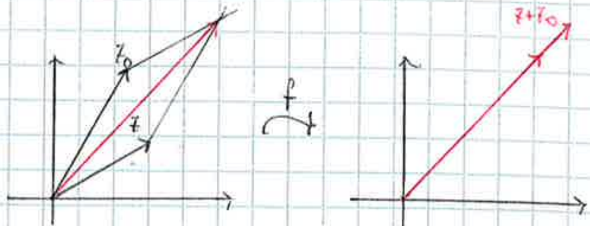
- Forma cartesiana o algebrica: $\boxed{z = x + iy}$

- funzioni definite su ~~$\mathbb{R}$~~ $\mathbb{C}$ = introduzione con un esempio

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o definite su un sottoinsieme

~~$f(z) = \gamma z + z_0$ dove γ e z_0 sono elementi di $\mathbb{C}$ fissati.~~

il grafico di f vive in $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \neq \mathbb{R}^4$



esempio: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f(z) = \gamma z + z_0$

dove γ e z_0 sono elementi di $\mathbb{C}$ fissati

CASI PARTICOLARI:

$\to \gamma = 1 \Rightarrow f(z) = z + z_0$ sommo $z + z_0$ con la regola del parallelogramma

$\Rightarrow$ traslazione nel piano

$\to z_0 = 0 \Rightarrow f(z) = \gamma z$

$z = \rho e^{i\theta}$, $\gamma = r e^{i\varphi}$

$f(z) = \rho r e^{i(\theta+\varphi)} \Rightarrow$

~~se $\gamma = 1$ cioè $|\gamma| = 1$~~

$r = 1 \Rightarrow |\gamma| = 1 \Rightarrow$ moltiplicazione per $\gamma \Rightarrow$ rotazione di z di un angolo φ in senso antiorario $\Rightarrow f$ è una rotazione pura

$r \neq 1 \Rightarrow$ rotazione + amplificazione ($r > 1$) o contrazione ($r < 1$)

$\Rightarrow f$ è una ROTOOMOTETIA $\to$ OMOTOPIE

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

06.03.2015

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

il dominio e il codominio sono bidimensionali $\rightsquigarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

il grafico di f vive in $\mathbb{R}^4$

Riprendo l'esempio precedente:

$f(z) = \gamma z + z_0$

$z \mapsto \gamma z \mapsto \gamma z + z_0$ rotoomotetia + traslazione

Se $|\gamma| = 1$ sto combinando una rotazione con una traslazione

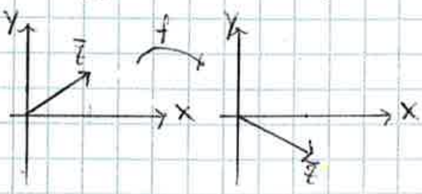
le trasformazioni così ottenute sono isometrie (trasf rigide) in quanto non cambiano le distanze tra punti di $\mathbb{C}$.

problema: mostrare che una qualunque rotazione in $\mathbb{C}$ attorno ad un centro qualunque w si può sempre scrivere come $f(z) = \gamma z + z_0$ per opportuni $|\gamma| = 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$

ci sono ~~isom~~ altre isometrie in $\mathbb{C}$ che invece non possono essere rappresentate in questa forma? NO

es: $f(z) = \bar{z} \Rightarrow$ riflessione rispetto l'asse x

Questa trasformazione non si può scrivere nella forma $f(z) = \gamma z + z_0$



- notazioni sulle funzioni

Data una funzione $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in generale si può rappresentare introducendo le coordinate cartesiane nel dominio e nel codominio: $z = x + iy$

$f(z) = u + iv$ u, v dipendono da z

z dipende da x, y

$\Rightarrow$ u, v dipendono dalla coppia (x, y)

$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \to$ tipiche funzioni di An II

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(Studiare una funzione di variabili complesse è come studiare due funzioni di variabili reali)

- scrivo $f(z)=z^2$ in coordinate cartesiane
  $z = x+iy$
  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 + (iy)^2 + 2xiy = x^2 - y^2 + i\,2xy \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$

- $f(z) = \frac{1}{z}$
  → non è definita su tutto il piano complesso
  $z \neq 0$

se do in pasto una retta o una circonferenza queste vengono trasf in rette o circonferenze (non necessariamente retta → retta e circonferenza → circonferenza)

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$

Tutte le funzioni razionali del tipo $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ hanno le seg proprietà:

① trasformano rette e cerchi in rette e cerchi (in senso generale)
① mantengono gli angoli tra vettori
Si dicono trasformazioni CONFORMI
(si può dimostrare: prova !?)

- funzione esponenziale (esponenziale complesso)
  $f(z) = e^z = u(x,y) + i\,v(x,y)$
  $z = x+iy$

$f(z) = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ → definizione !
$= e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) =$
$= e^x \cos y + i\,e^x \mathrm{sen}\,y \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x\cos y \\ v(x,y) = e^x\,\mathrm{sen}\,y \end{cases}$

l'esponenziale complesso gode delle seguenti proprietà
1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2) $e^0 = 1$
3) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

*vale anche $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$?

Tutte le formule trigonometriche derivano da queste proprietà dell'esponenziale complesso

ELEMENTI DI TOPOLOGIA SUL PIANO COMPLESSO

Esempi:
$f_1(z) = \frac{1}{z}$ $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$
$f_2(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ $f_2 : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$

→ togliere un punto al piano complesso è più complicato che togliere un punto ad $\mathbb{R}$

I domini naturali di def. delle funzioni di variabile complessa sono molto vari e non facilmente riconducibili ad un oggetto base come lo è invece l'intervallo su $\mathbb{R}$.

→ $z_0 \in \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$
Insiemistico: $z_0 \in A$
$z_0 \notin A$

Topologico: 1)
2)
3)

Def: Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$
$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ = cerchio aperto di centro z_0 e raggio r = palla aperta = intorno aperto centrato in z_0 e raggio r

→ Definizioni:
- $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice aperto se $A = \mathring{A}$
- $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice chiuso se $\partial A \subseteq A$

esempi: $\mathbb{C}, \emptyset, B_r(z_0), \mathbb{C}\setminus\{z_0\}$ sono aperti → $\mathbb{C}, \emptyset$ sono sia aperti che chiusi +
$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ sono chiusi

$A^* = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} x > 0\}$

$\mathring{A} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\partial A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$
$\mathring{A}^c =$

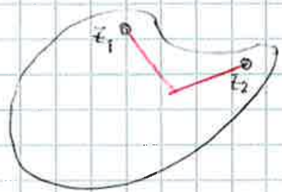
A non è né chiuso, né aperto

- chiusura di A: $\cancel{\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A}$ $\bar{A} = A \cup \partial A$

Quindi A è chiuso ⟺ $A = \bar{A}$

→ Proprietà:
1) A aperto ⟺ A^c chiuso
2) A, B aperti ⇒ $A \cap B$ e $A \cup B$ sono aperti
3) A, B chiusi ⇒ $A \cap B$ e $A \cup B$ sono chiusi
4) $\mathring{A}$ è sempre aperta → l'operazione di parte interna è INDEPOTENTE: $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$
5) $\bar{A}$ è sempre chiusa → l'operazione di chiusura è INDEPOTENTE $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

→ dominio
$A \subseteq \mathbb{C}$ si dice DOMINIO se è aperto e connesso (presi z_1 e $z_2 \in A$ esiste sempre una spezzata linea che collega z_1 e z_2 interamente contenuta in A)



→ regione
$A \subseteq \mathbb{C}$ si dice REGIONE se si può ottenere da un dominio, eventualmente aggiungendo una parte della frontiera

(le regioni saranno per noi gli equivalenti degli intervalli)
→ I domini sono regioni
→ Il semipiano chiuso è una regione
→ A (dell'esempio) è una regione *

Il cuore di una regione deve essere una parte interna quindi se $\mathring{A} = \emptyset$ ⇒ A non è regione

esercizio: $A = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$ A è una regione?
$\mathring{A} =$
$\partial A =$
$\mathring{A}^c =$

- Teorema di Jordan

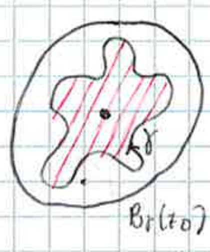
Enunciato: data una curva di Jordan γ, l'insieme $\mathbb{C} \setminus$ supporto(γ) è aperto e sconnesso.
Più precisamente esistono due domini D_1 e D_2 uno limitato e uno no, tali che $\mathbb{C} \setminus \text{supporto}(\gamma) = D_1 \cup D_2$
Il dominio limitato si dice la parte interna di γ e indicato con $\text{Int}(\gamma)$

- semplicemente connesso

una regione $R \subseteq \mathbb{C}$ si dice semplicemente connessa se $\forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ di Jordan, con supporto$(\gamma) \subseteq R$, si ha $\text{Int}(\gamma) \subseteq R$

esempi:
- $\mathbb{C}$, $B_r(z_0)$ sono semplicemente connessi
- $R = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ non è semplicemente connesso (piano bucato)

Infatti $\text{Int}\,\gamma = B_r(z_0)$
$z_0 \in \text{Int}\,\gamma$ ma $z_0 \notin R$

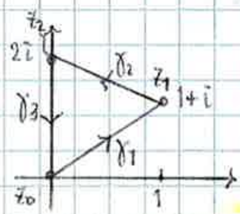


Operativamente, una regione è semplicemente connessa se ogni cappio può essere sciolto senza uscire da R

* parametrizzazione di una curva e della sua inversa
Supponiamo di conoscere $\gamma(t)$, $t \in [a,b] \Rightarrow$ la sua inversa sarà $\underbrace{\gamma(a+b-t)}_{-\gamma(t)}$, $t \in [a,b]$

Esercizio

- parametrizzare la curva che ha come supporto il triangolo in figura:



$$\gamma_1(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = 0 + t(1+i-0) = t(1+i), \quad t \in [0,1]$$
$$\gamma_2(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = 1+i + t(2i-1-i) = 1+i+t(i-1), \quad t \in [0,1]$$
$\gamma_3'(t) = ti$, $t \in [0,2]$ è la curva γ_3 percorsa in senso inverso
$$\Rightarrow \gamma_3(t) = \gamma_3'(a+b-t) = \gamma_3'(2-t) = (2-t)i, \quad t \in [0,2]$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = t(1+i) & t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) = 1+i+t(i-1) & t \in [0,1] \\ \gamma_3(t) = (2-t)i & t \in [0,2] \end{cases}$$

CONTINUITÀ

– Definizione:

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ regione, $z_0 \in \Omega$ e sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$

f si dice continua in z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ovvero $\begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases}$

$\Rightarrow$ u e v sono continue in (x_0,y_0)

$\Rightarrow$ la continuità di f in z_0 è equivalente alla continuità di u e v in (x_0,y_0)

Osservazione: polinomi, funzioni razionali, esponenziale, trigonometriche, ..., somme e loro composizioni sono continue, ove definite

DERIVABILITÀ

– Definizione:

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $f: D \to \mathbb{C}$

Si dice che f è derivabile in z_0 se esiste $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

Tale limite se esiste si indica con $f'(z_0)$ e si chiama derivata di f in z_0

(come nel caso reale, valgono le usuali regole di derivazione)

Osservazione: polinomi, esponenziali, ..., sono derivabili dove definite

? Si può leggere la derivabilità di f sulle componenti di u e v ?

– Richiami

• differenziabilità:

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, $(x_0,y_0) \in D$, $u: D \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ si dice che u è differenziabile nel punto (x_0,y_0) se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{u(x,y) = u(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)}$$

Inoltre se ciò accade, necessariamente si ha:

$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$

$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

Osservazione: u, v di classe C^1 su D $\Rightarrow$ u, v differenziabili ~~su D~~ su D

Quindi, ritornando a f di variabili complessa

– f derivabile in $z_0 \overset{?}{\Leftrightarrow}$ u, v differenziabili in (x_0,y_0) $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{la risposta sarà NO}}$

Si osservi che:

$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}\right) = 0$

$\Leftrightarrow f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0) = o(z-z_0)$ per $z \to z_0$

$\Rightarrow$ la derivabilità è equivalente alla scrittura $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)$ per $z \to z_0$

(ovvero lo sviluppo del primo ordine con il resto di Peano)

$\Rightarrow$ condizioni di Cauchy-Riemann (CR) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$

Teorema

Sia $f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Sono fatti equivalenti

1) f è derivabile in z_0

2) u,v differenziabili in (x_0,y_0) e valgono le condizioni di CR

(vale in un punto)

Inoltre

$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ $\rightarrow$ equivalente a $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

Infatti $\operatorname{Re} f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\operatorname{Im} f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \Rightarrow f'(z_0) = \operatorname{Re} f'(z_0) + i \operatorname{Im} f'(z_0)$

Osservazione: abbiamo dimostrato ① ⇒ ②
Per mostrare ② ⇒ ① basta ripercorrere indietro la sequenza di equivalenze che avevamo derivato.

Noto che:

$$\begin{cases} u(x,y) = u(x_0,y_0) + \operatorname{Re} f'(z_0)(x-x_0) - \operatorname{Im} f'(z_0)(y-y_0) + \underbrace{o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)}_{\omega_1(x,y)} \\ v(x,y) = v(x_0,y_0) + \operatorname{Re} f'(z_0)(y-y_0) + \operatorname{Im} f'(z_0)(x-x_0) + \underbrace{o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)}_{\omega_2(x,y)} \end{cases}$$

In termini matriciali

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1(x,y) \\ \omega_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = J_f(x_0,y_0)$$ $\rightarrow$ Jacobiano

$\Rightarrow \det J(x_0,y_0) = \operatorname{Re} f'(z_0)^2 + \operatorname{Im} f'(z_0)^2 = |f'(z_0)|^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ Se f è derivabile $\Rightarrow \det Jf \geq 0$

$\Rightarrow$ tutte le trasformazioni caratterizzate da uno Jacobiano con det ≥ 0 sono derivabili.
Per questo il coniugato non è derivabile
In generale, le riflessioni hanno determinante negativo e dunque non sono derivabili

• ~~$f(z) = e^z \rightarrow$ esercizio~~

Osservazione: i polinomi, esponenziali, ... e tutte le loro composizioni sono olomorfe dove definite

FUNZIONI ARMONICHE

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ = laplaciano o operatore di laplace

- Definizione

Sia D un dominio. e $f: D \to \mathbb{R}$

f è armonica se è di classe C^2 su D e tale che $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \forall (x,y) \in D}$ → eq di laplace

esempio:

• $u(x,y) = a + bx + cy$ è armonica su tutto $\mathbb{R}^2$ (le funzioni lineari sono armoniche.

infatti: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

• $u(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -b$

⇒ ogni polinomio di grado 2 omogeneo del tipo $u(x,y) = a(x^2 - y^2) + cxy$ è armonico.

Osservazione: $\boxed{\text{se } u_1, u_2 \ D \to \mathbb{R} \text{ sono armoniche allora anche la loro combinazioni lineari lo è } (u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}$

Verifica:

$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0$

$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right)$

$= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0$

$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}}$

- relazione tra funzioni armoniche e olomorfe

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa (dunque valgono le condizioni di CR)

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x + iy$

vedremo che:

Ipotizzo che u e v siano di classe C^2 (segue direttamente dal fatto che f è olomorfa)

Scrivo le condizioni di CR:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$

↳ vale il th di Schwartz perchè $v \in C^2$

⇒ u è armonica su D

Similmente si dimostra che anche v è armonica su D

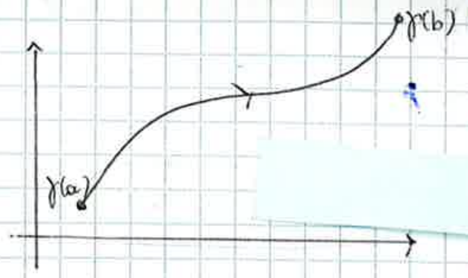
⇒ u, v armoniche su D

⇒ $\boxed{f: D \to \mathbb{C} \text{ è olomorfa} \Rightarrow \text{le sue componenti cartesiane sono armoniche su D}}$ → Teorema

esempio:

• e^z olomorfa $\Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y \\ e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$ sono armoniche

INTEGRALI SU CURVE



Curve su cui integriamo: = curve regolari
$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$, C^1 a tratti

in ~~componenti~~ coordinate cartesiane:
$\gamma(t) = x(t) + i y(t) = (x(t), y(t))$

$\gamma'(t) = x'(t) + i y'(t)$
$\downarrow$
- interpretazione geometrica = vettore tangente
- interpretazione fisica = vettore velocità (che è sempre tangente alla sua traiettoria)

esempio:
- $\gamma(t) = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t$
  $\gamma'(t) = -R\sin t + iR\cos t = i\gamma(t)$

$\rightsquigarrow$ circonferenza di raggio R: Re^{it} $t \in [0, 2\pi)$

$\to$ il prodotto per i ruota di $\frac{\pi}{2}$ e quindi si ha un vettore tangente

- integrale
se $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$

$$\Rightarrow \int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt$$

valgono le usuali proprietà degli integrali

1) $\int_a^b (\lambda_1\gamma_1(t) + \lambda_2\gamma_2(t))\,dt = \lambda_1\int_a^b \gamma_1(t)\,dt + \lambda_2\int_a^b \gamma_2(t)\,dt$

2) $\int_a^b \gamma'(t)\,dt = \gamma(b) - \gamma(a)$ $\to$ th fondamentale del calcolo integrale

3) $\left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| \le \int_a^b |\gamma(t)|\,dt$

esempio:
- $\gamma(t) = e^{i\alpha t}$ ~~$\alpha \in \mathbb{R}$~~
  $= \cos(\alpha t) + i\,\mathrm{sen}(\alpha t)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

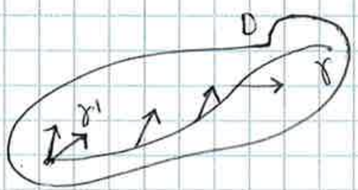
$\to \gamma'(t) = i\alpha e^{i\alpha t}$
$= \cancel{\alpha \cos}$

$$\to \int_a^b e^{i\alpha t}\,dt = \frac{1}{i\alpha}\int_a^b i\alpha e^{i\alpha t}\,dt = \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha t}\Big|_a^b = \frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}\right)$$

- richiamo: integrale di linea di $\bar{F}$ lungo γ
$D \subseteq \mathbb{R}^2$ dominio, $\gamma: [a,b] \to D$ curva regolare, $\bar{F}: D \to \mathbb{R}^2$ campo continuo
$\gamma(t) = x(t) + i y(t)$
$F(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y))$ $\to$ un campo è una funzione che ad ogni punto del dominio, associa un vettore
α, β continue

$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma \bar{F}(x,y)\,d\bar{l} := \int_a^b \left(\alpha(x(t), y(t))\, x'(t) + \beta(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right) dt}$$

$\to$ integrale del campo lungo la curva
= lavoro del campo F su un corpo che si sposta seguendo γ. (con eq. oraria data γ)



- Proprietà dell'integrale.

1) linearità rispetto a $f(z)$ (segue immed. dalla corrispondente proprietà dell'integrale di R.)

$f_1, f_2: D \to \mathbb{C}$ continue e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \int_\gamma (\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))\, dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1(z)\, dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2(z)\, dz$

2) additività rispetto alla concatenazione dei cammini ($\gamma_1 \vee \gamma_2$) (segue dall'additività dell'int di Riemann)

$f: D \to \mathbb{C}$ continua

$\gamma_1: [a,b] \to D$ e $\gamma_2: [b,c] \to D$ curve regolari tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

$\Rightarrow \int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$

3) invarianza rispetto alla riparametrizzazione.

$f: D \to \mathbb{C}$ continua

$\gamma: [a,b] \to D$ regolare e $\alpha: [c,d] \to [a,b]$ C^1 e strettamente crescente

$\Rightarrow \int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$

es. riparametrizzazione:

~~$\gamma(t) = e^{it}$~~

$\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ $t \in [0,1]$ $\to$ curva di Jordan

$\alpha: [0,1] \to [0,1]$

$\alpha(s) = s^2 \to$ parabola

$\Rightarrow (\gamma \circ \alpha)(s) = \gamma(\alpha(s)) = e^{2\pi i s^2}$

$\Rightarrow$ stesso supporto di $\gamma(t)$

è cambiata la velocità di percorrenza dello stesso supporto

$\Rightarrow$ riparametrizzare significa cambiare la velocità di percorrenza e ciò non influisce nel calcolo dell'integrale

α è strettamente crescente per far sì che il verso di percorrenza sia lo stesso

- Dimostrazione (prop. 3)

$$\int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot (\gamma \circ \alpha)'(s)\, ds =$$

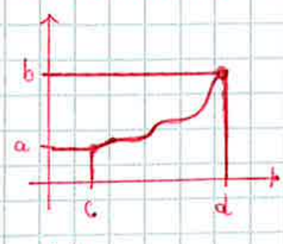
$$= \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \gamma'(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)\, ds =$$

$\gamma: [a,b] \to D$

$\alpha: [c,d] \to [a,b]$

$\gamma \circ \alpha: [c,d] \to D$

α è s. crescente



$\alpha(c) = a$

$\alpha(d) = b$

$\to$ opero la sostituzione $\alpha(s) = t$, $dt = \alpha'(s)\, ds$ $\to$ inoltre - se $t = c \Rightarrow \alpha(s) = \alpha(c) = a$; $t = d \Rightarrow \alpha(s) = \alpha(d) = b$

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f(z)\, dz$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

Osservazione:

- se $\alpha(t)$ è st. crescente $\Rightarrow \alpha'(t) > 0 \Rightarrow \int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$

- se $\alpha(t)$ è st. decrescente $\Rightarrow \alpha'(t) < 0 \Rightarrow \int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$

$\Rightarrow \int_{\gamma \vee \tilde{\gamma}} f(t)\,dt = 0$ per il th precedente

D'altra parte: $\int_{\gamma \vee \tilde{\gamma}} f(t)\,dt = \int_{\gamma} f(t)\,dt + \int_{\tilde{\gamma}_1} f(t)\,dt$

$\Rightarrow \int_{\gamma} f(t)\,dt = -\int_{\tilde{\gamma}} f(t)\,dt = -\int_{\tilde{\gamma}} f(t)\,dt$ ← la parametrizzazione non cambia l'integrale

$\Rightarrow \int_{\gamma} f(t)\,dt = -\int_{\tilde{\gamma}} f(t)\,dt = -\int_0^1 \left(-\frac{1}{1+\pi} + t\left(1+\frac{1}{1+\pi}\right)\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{1+\pi}\right) dt = \dots$ calcoli

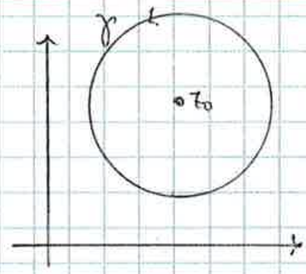
Conclusione: ogni volta che devo integrare una funzione olomorfa, posso sostituire un cammino con un altro più facile seguendo la procedura vista nell'esempio precedente, ovvero chiudendo la curva "difficile" con una curva più facile, e applicando il th di Cauchy-Goursat, concludo che l'integrale lungo la curva più difficile è uguale all'opposto dell'integrale sulla curva più facile.

esempio:

$\gamma(t) = Re^{it} + z_0,\ t \in [0, 2\pi)$

$f(t) = (z - z_0)^k$

$k \geq 0$



$\Rightarrow \int_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz = 0$ per th di Cauchy-Goursat.

E se $k<0$? ($k<0 \Rightarrow (z-z_0)^k$ non è olomorfa in z_0) $\Rightarrow$ non applico C-G!

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^k\, Ri e^{it} = R^{k+1} \cdot i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,dt = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } k=-1 \\ R^{k+1} \cdot i \frac{1}{i(k+1)} e^{i(k+1)}\Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{se } k \neq -1 \end{cases}$$

quindi, generalizzando $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\int_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } k = -1 \end{cases}}$$

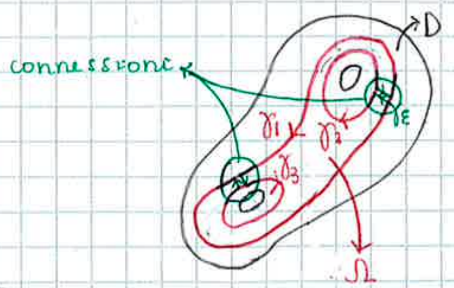
① la sua estensione è la formula di Cauchy [...]

se $\gamma(t) = Re^{it} + z_0,\ t \in [0, 2\pi]$ ovvero circonferenza centrata in $z_0 \in \mathbb{C}$, di raggio $R>0$ e percorsa in senso antiorario.

- **Teorema (estensione di Cauchy-Goursat)**

Sia $f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa
Sia $\Omega \subseteq D$ dominio con bordo tale che $\bar{\Omega} \subseteq D$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0}$$



Dimostrazione (idea):

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0$$

Per la dimostrazione, ci si riconduce al vecchio th di C-G dove ho ~~un~~ ~~so~~ una sola curva di Jordan.
Si fanno dei tagli sulle γ_i e si uniscono le varie curve.
La parte interna della nuova curva di Jordan è ancora contenuta in D.
Dunque riapplico il th di C-G

I tagli sono di misura esile (ε)
γ_ε è la nuova curva di Jordan con tagli di ampiezza $\varepsilon > 0$ e collegamenti tra le γ_i

$\Rightarrow \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$ per il teorema di Cauchy-Goursat

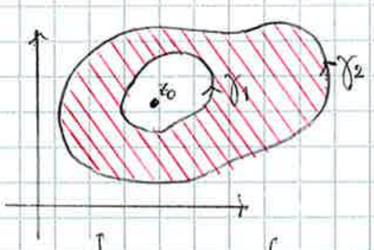
Per $\varepsilon \to 0$, $\gamma_\varepsilon \to \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee$ curve di connessione
(non contribuiscono all'integrale perché sono percorse in sensi opposti)

- **Conseguenza del teorema di Cauchy-Goursat - corollario**

1) $f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa
Considero due curve di Jordan che circondano z_0 e non si intersecano ovvero:
→ $z_0 \in Int(\gamma_i)$ $i = 1, 2$
→ supporto$(\gamma_1) \cap$ supporto$(\gamma_2) = \emptyset$ ⇝ da convenzione quando non dico niente, le curve di Jordan sono percorse in senso antiorario

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Dimostrazione:

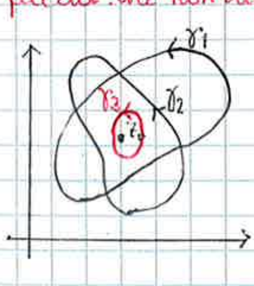


$\Omega = Int(\gamma_2) \cap Int(\gamma_1)^c = Int(\gamma_2) \setminus Int(\gamma_1)$

$\partial\Omega$ è parametrizzato con orientamento positivo dalle curve γ_2 e $-\gamma_1$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$$

È importante il fatto che le curve non si intersechino per la dimostrazione fatta in questo modo.
Per dimostrare questo corollario per curve che si intersecano si considera una curva γ_3 più piccola che non interseca γ_1 e γ_2



~~Per dimostrare nel caso~~
Sia γ_3 curva più piccola.
Per il corollario precedente: $\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ se considero γ_1
$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ se considero γ_2

⇒ per la proprietà transitiva dell'uguaglianza

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

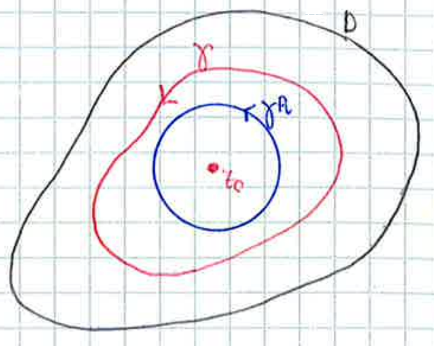
⇒ Se ho una f. olomorfa tranne in un punto, allora qualsiasi curva di Jordan che non contiene questo punto ha int nullo (C-G), se giro intorno a questa singolarità l'int. ha sempre lo stesso valore

Posso quindi dimostrare la formula di Cauchy

10.04.2015

Enunciato:

> D dominio semplicemente connesso
> $f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa
> γ curva di Jordan in D (percorsa nel senso antiorario)
> $z_0 \in \text{Int}(\gamma)$
>
> $$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$



Dimostrazione:

Non so come è γ $\Rightarrow$ prendo una particolare curva di Jordan γ^R

$\gamma^R(t) = z_0 + Re^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$

$\text{supp}\,\gamma^R \subseteq \text{Int}\,\gamma$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$ (conseguenza del th di C-G)

Lavoro dunque con γ^R

$$\int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma^R} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \underbrace{\int_{\gamma^R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz}_{= I} \rightarrow \int_{\gamma^R} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_{\gamma^R}(z-z_0)^{-1}\,dz = f(z_0)\cdot 2\pi i$$

$$= f(z_0)\cdot 2\pi i + I$$

Si tratta ora di far vedere che $I=0$

I è un rapporto incrementale su una curva di Jordan

→ intuitivamente

$I=0$ perché se passiamo al limite per $z \to z_0$, la funzione integranda è una derivata.
Ma per il teorema del calcolo fondamentale del calcolo integrale, integrare una derivata significa fare $g(b)-g(a)$, ma essendo la curva chiusa, $g(b)-g(a)=0$ perché $g(b)=g(a)$

$$I = \int_{\gamma^R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$|I| \overset{\text{proposizione ①}}{\leq} \sup_{z\in\text{supp}(\gamma^R)} \left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| L(\gamma^R) = \sup_{z\in\text{supp}(\gamma^R)} |f(z)-f(z_0)| \cdot \frac{1}{R}\cdot 2\pi R$$

→ prendo $M = \sup\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$

$2\pi R$ → $L(\gamma^R)$

$\frac{1}{R}$ → $\sup_{z\in\text{supp}(\gamma^R)}\left|\frac{1}{z-z_0}\right| = \frac{1}{R}$

$$= 2\pi \sup_{z\in\text{supp}(\gamma^R)} |f(z)-f(z_0)|$$

Poiché f è sicuramente continua in z_0, fissato $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che ~~$|z-z_0|<\delta$~~

$|z-z_0|<\delta,\ z\in D \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ → def di continuità

Prendo $R<\delta$, allora $\forall z \in \text{supp}(\gamma^R) \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

→ tanto scelgo io γ^R $\quad \Rightarrow \sup_{z\in\text{supp}(\gamma^R)} |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$

$\Rightarrow |I| \leq 2\pi\varepsilon$

$\Rightarrow$ data l'arbitrarietà di ε, $|I|=0$ necessariamente

$\Rightarrow I=0$.

⇝ Oss: la f. continua a valere se D non è semplicemente connesso. Basta che $\text{Int}\,\gamma \subseteq D$.

$\Rightarrow$ la formula di Cauchy è dimostrata

Poichè $\frac{1}{t-w}$ è derivabile infinite volte, si può dimostrare che l'integrale a destra della formula di Cauchy è in realtà C^∞ in w e quindi lo è anche $f(w)$

Inoltre

$$\frac{d^n}{dw^n}(t-w)^{-1} = (-1)(-2)\dots(-n)(t-w)^{-n-1}(-1)^n \ast = \frac{n!}{(t-w)^{n+1}}$$

→ derivando n volte $(-w)$ ~~vengono~~ viene n volte (-1)

$$\Rightarrow \boxed{f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{(t-w)^{n+1}}\,dt}$$ → formule di Cauchy generalizzate per le derivate

Allora poichè ~~f(t)~~ = per definizione f è analitica se $f(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$

⇒ le funzioni olomorfe sono analitiche

$\ast$ $(-1)(-2)\dots(-n)(-1)^n = n!$ infatti:

→ n pari $\Rightarrow (-1)(-2)\dots(-n)(-1)^n = n!(-1)^n = n!$

→ n dispari $\Rightarrow (-1)(-2)\dots(-n)(-1)^n = -n!(-1) = n!$

- esempio:
- $z \in \mathbb{C}, |z|<1$. Studiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ (serie geometrica)

$|z^n| = |z|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (ciò non implica che $\sum z^n$ converge ~~converga~~. Infatti, il criterio necessario di convergenza afferma che: $\sum z_n$ converge $\Rightarrow z_n \to 0, n\to+\infty$
Non vale sempre il viceversa.
Vale invece che: $z_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \sum z_n$ NON converge)

p.prec.

Si nota ora che

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \longrightarrow \frac{1}{1-z}$$

$\Rightarrow$ la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ è convergente se $|z|<1$ e vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z|<1$$

Ricorda che: vale la formula triangolare generalizzata: $\boxed{\left|\sum z_n\right| \le \sum |z_n|}$

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k z^{2k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{iz^2}{2}\right)^k$. Pongo $w = \frac{iz^2}{2}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} w^k$. Tale serie converge $\Leftrightarrow |w| = \left|\frac{iz^2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{2}$ (Ricorda: $|i|=1$)
converge nella palla di centro 0 e raggio $\sqrt{2}$

Quindi se $|z|<\sqrt{2}$ posso calcolarne la somma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k z^{2k}}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{iz^2}{2}} - (1)$$

$\rightarrow$ tolgo 1 perché la serie parte da 1, anziché da 0.

- serie di potenze

Sono serie del tipo: $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ dove } \{a_n\} \text{ è una successione in } \mathbb{C} \text{ e } z_0 \in \mathbb{C}}$

Le serie degli esempi precedenti sono serie di potenze:

$\rightarrow \sum z^n \Rightarrow z_0 = 0, \{a_n\} = 1$

$\rightarrow \sum \frac{i^k z^{2k}}{2^k} = \sum \frac{i^k}{2^k} z^k \cdot z^k \Rightarrow$ ~~...~~ $, z_0 = 0 \left(\begin{array}{l} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{i^n}{2^n} \end{array} \right)$

- Teorema

Considero una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$
Allora $\exists R \in [0,+\infty)$ tale che:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge assolutamente $\forall z \in (B_R(z_0))$ $\rightarrow$ il fatto che la convergenza si ha in una palla, anziché ~~...~~ in un intervallo è la sostanziale differenza con il caso ~~re~~ reale
- non converge se $|z-z_0| \geq R$

Inoltre se $\exists \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$ (se $a_n \neq 0, \forall n$) $\rightarrow$ criterio del rapporto per il calcolo del raggio di convergenza

R è detto raggio di convergenza
$B_R(z_0)$ è detto cerchio di convergenza

$\rightarrow R = +\infty \Rightarrow B_R(z_0) = \mathbb{C}$

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge} \right\}$$

$\Rightarrow f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\cdots 1\cdot a_k$ → si annullano tutti i termini della serie perché $(z-z_0)^{n-k} = (z_0-z_0)^{n-k} = 0$ (perché sto calcolando in z_0).

L'unico termine però che resta è $(z-z_0)^{n-k} = 0^0 = 1$

$\Rightarrow$ se calcolo $f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{k} (n)(n-1)\cdots(n-k+1)(z_0-z_0)^{n-k} a_k = \sum_{n=k}^{k} k(k-1)\cdots 1\cdot a_k$

$\Rightarrow f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}$$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$ → serie di Taylor di $f(z)$ centrata in z_0.

→ faccio vedere che le funzioni olomorfe sono somme di serie di potenza (che quindi sarà la sua serie di Taylor)

- Teorema

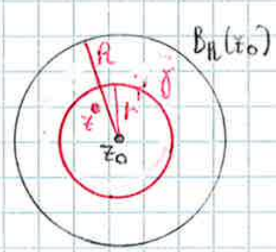
Sia $f: B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, olomorfa

Allora vale

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \quad \forall z \in B_R(z_0)}$$

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$

$|z-z_0| < r < R$



Dimostrazione:

Fisso $z \in B_R(z_0)$ e considero γ curva di Jordan che gira attorno a z e z_0: prendo la circonferenza di centro z_0 e raggio r

Considero la formula di Cauchy:

$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw$ → formula di Cauchy generalizzata per le derivate

Quindi: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw\right)\cdot(z-z_0)^k$ → è costante rispetto w posso metterlo nell'integrale!

$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw =$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw =$ → serie geometrica, ponendo $s = \frac{z-z_0}{w-z_0}$ che converge se $|s|<1$

$|s| = \frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{\cancel{w-z_0}}\cdot\frac{\cancel{w-z_0}}{w-z}\,dw =$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{w-z_0}{w-z}$

$= f(z)$

→ $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ (z fissato) (F. di Cauchy)

z è fissato ma arbitrario, dunque il risultato vale $\forall z \in B_R(z_0)$.

$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0) \quad \forall z \in B_R(z_0)$

$= (z-z_0)^{n_0} \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-n_0} = \to \sum_{k=n_0} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=n_0} a_k (z-z_0)^{k+n_0-n_0} = \sum_{k=n_0} (z-z_0)^{n_0} a_k (z-z_0)^{k-n_0}$

$= (z-z_0)^{n_0} \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h+n_0} (z-z_0)^h =$ Pongo $h = k-n_0$

$= (z-z_0)^{n_0} \cdot g(z) =$ $\quad g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$

g è olomorfa che non si annulla in z_0

$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)^{n_0} \cdot g(z)$

$\Rightarrow$ gli zeri di f sono z_0 e gli zeri di $g(z)$ (per la legge di ~~annullamento~~ annullamento del prodotto)
Con un ragionamento di continuità (th di permanenza del segno) si ha che $\exists r>0 : |g(z)|>0$, $\forall z \in B_r(z_0)$
Quindi in $B_r(z_0)$ l'unico zero di f è z_0.

$\Rightarrow n_0$ è detta molteplicità di 0.
$n_0 = 1 \Rightarrow$ lo zero si dice semplice

Se una funzione non è analitica in qualche punto o in qualche sottoinsieme del piano complesso, non ammette sviluppi in serie di Taylor nell'intorno di tali punti. Ciononostante è possibile costruire rappresentazioni in serie di potenze, centrate in un punto di non analiticità z_0, contenenti potenze sia positive sia negative di $(z-z_0)$. (continua *)

~~singolarità e serie di Laurent~~

- singolarità e serie di Laurent

Siano f, g due funzioni olomorfe $f, g: D \to \mathbb{C}$ e g non nulla a tappeto
Sia

$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \Rightarrow h$ è definita su $D \setminus \{z \in D : g(z) = 0\}$
Tali z sono zeri ~~isolati~~ isolati

Sia $z_0 \in D : g(z_0) = 0$
Sappiamo che $g(z) = (z-z_0)^{n_0} \cdot \tilde{g}(z)$ dove ~~n_0~~ $\tilde{g}(z) \neq 0 \ \forall z \in B_r(z_0)$

Sostituendo si ha:

$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{-n_0} \frac{f(z)}{\tilde{g}(z)} = (z-z_0)^{-n_0} \cdot \tilde{h}(z) \Rightarrow \tilde{h}$ è olomorfa su ~~D~~ $B_r(z_0)$ perché ho tirato ~~da~~ fuori da h tutto quello che faceva annullare $h(z)$

$\Rightarrow \tilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$ $\quad \to b_n = \frac{\tilde{h}^{(n)}(z_0)}{n!}$

$\Rightarrow h(z) = (z-z_0)^{-n_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^{n-n_0} =$ $\quad \to n-n_0 = k$

$= \sum_{k=-n_0}^{+\infty} b_{k+n_0} (z-z_0)^k$

$\Rightarrow \boxed{h(z) = \sum_{k=-n_0}^{+\infty} b_{k+n_0} (z-z_0)^k, \ \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}}$ → serie di Laurent di h centrata in z_0.

Pongo $a_k = b_{k+n_0}$

→ collegamento tra a_k e $h(z)$.

$a_k = b_{k+n_0} = \frac{\tilde{h}^{(k+n_0)}(z_0)}{(k+n_0)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^{k+n_0+1}} dz =$ → Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

γ curva che ruota attorno a z_0

$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)(z-z_0)^{n_0}}{(z-z_0)^{k+n_0+1}} dz$

$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz}$

(* continua) In effetti la decomposizione in serie di Laurent permette di rappresentare una funzione analitica in un anello $\{r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ $(r_1 < r_2)$ come la somma di una funzione analitica all'anello e di una analitica all'interno.

• esempio

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow e^{w} = \sum \frac{w^k}{k!} \quad \forall w \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum \frac{z^{-k}}{k!} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \dots$

$\Rightarrow \int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \, a_{-1} = 2\pi i$

- singolarità

- sia $f: B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ è olomorfa e $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$

1) $a_k = 0 \ \forall k < 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \right.$ è una serie di potenze che è olomorfa su tutto $B_R(z_0)$ $\left. \right)$

$\Rightarrow f(z)$ è estendibile ad una funzione olomorfa su ~~$B_R(z_0)$~~ $B_R(z_0)$

$\Rightarrow z_0 =$ singolarità eliminabile

2) $\exists n_0 : a_k = 0 \ \forall k < -n_0$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-n_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$ → è quoziente di funzione olomorfa

$\Rightarrow z_0 =$ polo ($n_0 =$ molteplicità del polo) ordine di z_0 $\rightsquigarrow g(z) := (z-z_0)^{n_0} f(z)$ è olomorfa $\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}$

3) ci sono infiniti termini a potenza negativa nello sviluppo di Laurent

$\Rightarrow z_0 =$ singolarità essenziale

In ogni caso: $\boxed{\begin{array}{l} a_{-1} = \mathrm{Res}_{(z_0)} f \\ \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi \, a_{-1} \end{array}}$

a_{-1} è il coeff del primo termine solo quando z_0 è polo semplice ($n_0 = 1$)

Tutta questa nomenclatura non ha senso se D è una corona circolare

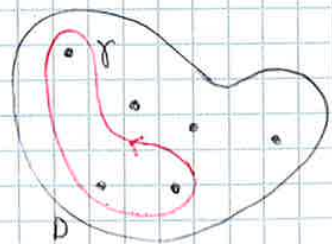
→ TEOREMA DEI RESIDUI

D = dominio bd con tanti buchi ∤

$f: D \to \mathbb{C}$

γ curva di Jordan su D t.c. $\mathrm{Int}(\gamma)$ è contenuta in D a meno di un numero finito di punti

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma) \setminus D} \mathrm{Res}_z(f)$



• esempio

sia $f(z)=z^k$ in $\gamma(t)=e^{it}$ → $f(z)$ ha uno zero (o polo) di ordine k in 0 ($k<0$ polo)

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{kz^{k-1}}{z^k}dz = \frac{k}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}dz = \frac{k}{2\pi i}\cdot 2\pi i = k$$

$k<0 \Rightarrow k = \#$poli
$k>0 \Rightarrow k=\#$zeri

Osservazione: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$, $\gamma:[a,b]\to D$
f olomorfa definita in D, $f: D\to\mathbb{C}$

$\gamma:[a,b]\to D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

Posso pensare alla curva $f\circ\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ (non è detto che $f\circ\gamma$ sia di Jordan ma è chiusa)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \quad \leadsto \left(\int_\gamma g(z)dz = \int_a^b g(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\right)$$

invece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\cdot\gamma'(t)\,dt$$

ho quindi:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}dz = Z-P$$

So che ~~se prendo γ e applico f,~~ $\frac{1}{z}$ girando intorno a z in senso antiorario una volta verrà 1, se giro 2 volte, verrà 2, se giro in senso antiorario viene -1.

Interpretazione: il numero di volte che $f\circ\gamma$ gira intorno a z in senso antiorario meno il numero di volte che gira in senso orario è sempre uguale al numero di zeri meno il numero di ~~volte~~ poli di f in $\mathrm{Int}\,\gamma$

⇝ teoria dei controlli)

Dimostrazione:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z} \mathrm{Res}_z\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \to z = \text{poli o zeri di } f \text{ in } \mathrm{Int}\,\gamma$$

→ se z_0 è uno zero di f con molteplicità n_0, si ha: $f(z)=(z-z_0)^{n_0}\tilde{f}(z)$, $\tilde{f}(z_0)\neq 0$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_0(z-z_0)^{n_0-1}\tilde{f}(z)+(z-z_0)^{n_0}\tilde{f}'(z)}{(z-z_0)^{n_0}\tilde{f}(z)} = \frac{n_0\tilde{f}(z)+(z-z_0)\tilde{f}'(z)}{(z-z_0)\tilde{f}(z)} =$$

$$= n_0\frac{1}{z-z_0}+\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} = n_0(z-z_0)^{-1}+\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}$$

$\tilde{f}(z)$ → non si annulla in z_0

olomorfo vicino a z_0 ⇒ la serie di Laurent è una serie di potenze (non c'è il coeff di grado -1)

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right)=n_0$$

→ se z_0 è un polo di f con molteplicità m_0, si ha: $f(z)=(z-z_0)^{-m_0}\cdot\hat{f}(z)$, $\hat{f}(z_0)$ olomorfa e non si annulla in un int. di z_0.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -m_0(z-z_0)^{-1}+\frac{\hat{f}'(z)}{\hat{f}(z)}$$

$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right)=-m_0$ e quindi si ottiene la tesi!

es 2) Abbiamo una ~~carica~~ densità volumetrica di cariche distribuite secondo la densità di carica $\rho(x,y,t)$

$$\Rightarrow Q = \iiint_V \rho(x,y,t)\,dx\,dy\,dt \rightarrow \text{carica totale contenuta in } V$$

Se invece abbiamo ~~tra~~ cariche uniformi $q_1, \dots, q_n$ nel volume V:

$$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \rightarrow \text{carica totale contenuta in } V$$

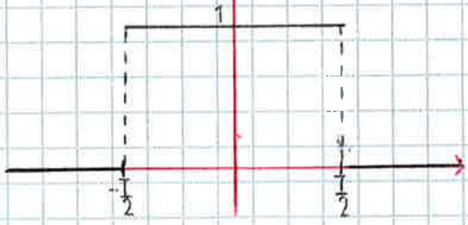
Le due formule sono chiaramente di tipo diverso: ci piacerebbe averne una unica che possa trattare densità e cariche puntiformi alla stessa stregua.
Il problema chiaramente è che le cariche puntiformi non possono essere descritte da densità se queste devono essere delle normali funzioni

le cariche puntiformi possono in effetti essere approssimate da densità di cariche.
Facciamo vedere lavorando per semplicità sulla retta ~~invece~~ invece che nello spazio.

Considero la successione di densità lineari di carica: $\rho_n(x) = \bar{q} \cdot n \cdot p_{\frac{1}{n}}(x)$

→ $p_{\frac{1}{n}}$ è la funzione porta
si definisce funzione porta di ampiezza T

$$\boxed{p_T(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}} \rightarrow \text{funzione porta di ampiezza } T$$

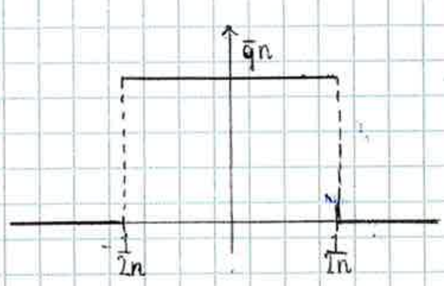


Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{q}\, n\, p_{\frac{1}{n}}(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \bar{q}\, n\,dx = \bar{q}\, n\, x \Big|_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} = \bar{q}\, n \frac{1}{n} = \bar{q}$$

→ tanto oltre questo intervallo è sempre nulla

$$\Rightarrow Q_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = \bar{q}$$



All'aumentare di ~~A~~ n quindi queste distribuzioni di cariche tendono a concentrarsi sempre di più intorno allo 0, ma sempre mantenendo costante la quantità di cariche totale $\bar{q}$.
L'idea dovrebbe essere che al tendere di $n \to +\infty$ tali densità dovrebbero convergere alla carica puntiforme $\bar{q}$ concentrata in 0.
Tuttavia se ne guardiamo il limite dal punto di vista delle funzioni si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \rho_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale funzione limite, se integrata sulla retta dà come risultato 0 e non $\bar{q}$.
Anzi l'informazione che la carica totale è $\bar{q}$ sembra essersi completamente persa nel passaggio al limite

⇒ I fenomeni puntuali o impulsivi non possono essere efficacemente modellati attraverso funzioni, che eventualmente abbiano valore in essi uguale a $+\infty$

È necessario un approccio diverso ⇝ teoria delle distribuzioni.

L'idea fondamentale della teoria delle distribuzioni è che una misura di una qnt fisica, di un segnale temporale, non fornisce mai il valore in un preciso istante o in uno preciso punto dello spazio. ~~A~~ La qnt fisica, il segnale non è necessario pensarlo come qualcosa di definito nello ~~spazio~~ punto per punto o istante per istante, quanto invece come un qualcosa che associa ad ogni possibile misura un numero che è il valore della misura su quel segnale.

- distribuzione

Si definisce distribuzione T una qualunque applicazione (che associa ad ogni strumento di misura $\in \mathcal{D}$, una misura $\in \mathbb{R}$)

$T: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

tale che:

equivale a $\langle T, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$

1) T è lineare: $T(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2)$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2) T è continua: se $\varphi_n \to \varphi$, per $n \to +\infty$ su $\mathcal{D}$ allora $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ per $n \to +\infty$

NB: una distribuzione rappresenta un possibile segnale la cui natura è quella di essere "qualcosa" che associa ad ogni possibile misura, un determinato valore (da interpretarsi come il valore del segnale sotto quella misura)

la richiesta di continuità è quello che rende difficile la teoria delle distribuzioni!

- richiami: concetto di convergenza di funzioni

- convergenza puntuale

Sia $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ successione di funzione

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si dice che f_n converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$ per $n \to +\infty$, se: $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ovvero:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0. \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

- convergenza uniforme

Sia $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ successione di funzione

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si dice che f_n converge uniformemente a f, su $\mathbb{R}$ per $n \to +\infty$, se $\bar{n}$ non dipende da x, ovvero:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}$$

• Teorema:

$f_n \to f$ uniformemente su $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0 = \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty$

NB: in tutte le definizioni si è vista la convergenza su $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

Analogamente si può studiare la convergenza su un intervallo I: in tal caso $x \in I$

• Teorema:

Sia f_n una successione di funzioni continue

Sia $f_n \to f$ uniformemente

$\Rightarrow$ f è continua

Ciò significa che:

Se f_n è una successione di funzione continua e f non è continua

$\Rightarrow f_n \not\to f$ uniformemente

- convergenza in $\mathcal{D}$

Sia φ_n una successione di funzioni test

Sia φ una funzione test

Si dice che φ_n converge a φ in $\mathcal{D}$ (e si scrive $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$) se accade:

1) equilimitatezza dei supporti

$\exists r > 0 : \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x : |x| > r, \forall n$. (le φ_n vivono solo su una zona fissata della retta, fuori sono 0)

2) $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ uniformemente su $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. (conv. uniforme di tutte le derivate)

- funzione integrabile su un intervallo I ($f \in R^1(I)$)
Sia $f: I \to \mathbb{R}$
f si dice integrabile se

→ f è continua a tratti
→ f è assolutamente integrabile su I, ovvero $\int_I |f(x)|\,dx < +\infty$

- funzioni localmente integrabili su I ($f \in R^1_{loc}(I)$)
Sia $f: I \to \mathbb{R}$
f si dice localmente integrabile su I se è integrabile su ogni sottointervallo limitato di I

Osservo che: $C(I) \subseteq R^1_{loc}(I)$
$C(I) \not\subseteq R^1(I)$ in generale (ad esempio $\operatorname{sen} x \in C(\mathbb{R})$ ma $\operatorname{sen} x \notin R^1(I)$)

• esempi
- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \in R^1(\mathbb{R})$

- $f(x) = 1 \notin R^1(\mathbb{R})$
$\in R^1_{loc}(\mathbb{R})$
$\in C^1(\mathbb{R})$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1]}(x) \in R^1(\mathbb{R})$ (è integrabile in 0^+)

• funzione indicatrice: (per focalizzare l'attenzione su una finestra A)

$$\boxed{\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in A^c \end{cases}}$$ → funzione indicatrice

In particolare $H(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$
$\notin R^1(\mathbb{R})$ (non è integrabile in $+\infty$)

- distribuzioni regolari
Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$
Ad f associamo la seguente distribuzione $T_f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx}$$

verifico che sia una distribuzione.
Innanzitutto devo verificare che l'integrale abbia senso (restituisce un numero reale)
1) linearità
2) continuità

Si osserva che $\forall \varphi\ \exists r > 0: \varphi(x) = 0$ se $|x| \geq r$ poiché il supp delle funzioni test è compatto per definizione
In realtà dunque:
$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \varphi(x)\,dx$ perché al di fuori dell'intervallo $[-r,r]$ è nulla φ.

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-r}^{r} f(x)\varphi(x)\,dx \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle T_{f(x-x_0)}, \varphi(x)\rangle = \langle T_{f(x)}, \varphi(x+x_0)\rangle$ → traslare verso dx

⇒ generalizzando:
Se T è una generica distribuzione ~~poniamo~~ spesso utilizzeremo la scrittura $T(x)$ anche se T non è formalmente una funzione della variabile x, semplicemente per ricordare che x è la variabile nella funzione test, di accoppiamento con la distribuzione di T.

Data T e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce la distribuzione traslata di T di x_0 e si indica con $T(x-x_0)$ quella che sulle funzioni test agisce come segue

$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle$

$$\boxed{\langle T(x-x_0), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle} \; (*)$$

→ è la mia versione della traslazione sulle distribuzioni
la definisco io!

Verifico che è una distribuzione:

→ linearità

$$\langle T(x-x_0), \lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)\rangle \overset{\text{def di Traslazione}}{=} \langle T(x), \lambda_1\varphi_1(x+x_0)+\lambda_2\varphi(x+x_0)\rangle = $$ → T è una distribuzione

$$= \lambda_1\langle T(x), \varphi_1(x+x_0)\rangle + \lambda_2\langle T(x), \varphi_2(x+x_0)\rangle =$$

$$= \lambda_1\langle T(x-x_0), \varphi_1(x)\rangle + \lambda_2\langle T(x-x_0), \varphi_2(x)\rangle$$ → def. di traslazione

→ continuità

$\varphi_n \to 0$ su $\mathcal{D}$

$\langle T(x-x_0), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle$, $\varphi(x+x_0) \to 0$ su $\mathcal{D}$ (ho solo traslato)
T è continua

$\Rightarrow \langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle \to 0$

−esempio:

non è funzione di x

• δ_{x_0}, $y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \delta_{x_0}(x-y_0) = \langle \delta_{x_0}(x-y_0), \varphi(x)\rangle = \langle \delta_{x_0}(x), \varphi(x+y_0)\rangle =$

$= \varphi(x_0+y_0)$

$\Rightarrow \delta_{x_0}(x-y_0) = \delta_{x_0+y_0}(x)$

*OSSERVAZIONE

~~$\langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle$ ha senso in quanto $\varphi(x+x_0)$ è una funzione test.~~
~~Questa è una buona definizione~~
$\langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle$ ha senso in quanto $\varphi(x+x_0)$ è una funzione test.
Questa è una buona definizione in quanto effettivamente definisce una distribuzione.

→ Ricorda: per dare una distribuzione si deve dire quanto essa vale su ogni funzione test e poi verificare linearità e continuità

L'espressione (*) definisce $T(x-x_0)$ contro ogni funzione test ~~φ~~ $\varphi(x)$ in quanto, linearità e continuità seguono facilmente dal fatto che la $T(x)$ aveva le due proprietà.

Si noti inoltre che per le distribuzioni regolari, la traslazione così definita coincide con la traslazione usuale delle funzioni, ovvero si ha:

$$T_{f(x)}(x-x_0) = T_{f(x-x_0)}(x)$$

→ RICORDA: se un'operazione si vuole fare sulle distribuzioni, si cerca di scaricarla sulle funzioni test.
Ad esempio: traslare la distribuzione in avanti di x_0 vuol dire traslare la funzione test in dietro di x_0.

- Se f è derivabile con $f' \in \mathcal{R}^1_{loc}$: considero la distribuzione regolare

$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = \langle T_{f'}, \varphi \rangle \Rightarrow T'_{f(x)}(x) = T_{f'(x)}(x)$ → estensione del concetto di derivata di una funzione

Cosa succede se però f non è derivabile?

So che
$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$

Le distribuzioni sono sempre derivabili, ma non è sempre ovvio calcolare la derivata, cioè nei casi in cui il simbolo f non è lei stessa derivabile, non è chiaro come questa derivata si calcoli.

Ad esempio:
→ considero f che ha punti in cui ha salti: considero ad esempio la funzione di Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}, \quad H \in \mathcal{R}^1_{loc}$$

Non posso derivare H, cioè $T_H' \neq T_{H'}$ perché non posso derivare il simbolo.
Applico la def:

$$\langle T_H', \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle =$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty} 1 \cdot \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \cancel{\varphi(0)} - (\underbrace{\varphi(+\infty)}_{=0} - \varphi(0)) = \varphi(0)$$

$-\infty$ → (vale 0)

φ è una funzione test (si annulla a $\pm\infty$)

$\Rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

$\Rightarrow \langle T_H', \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle \Rightarrow T_H' = \delta_0$ → la derivata dell'Heaviside pensata come distribuzione regolare è la delta di Dirac calcolata in 0.
Non vale quindi $T_H' = T_{H'}$!

→ caso più generale
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f \in \mathcal{C}^1$ tranne in un punto x_0 dove presenta un eventuale salto
Ipotizzo che $f' \in \mathcal{R}^1_{loc}$ (esiste ovunque tranne nel punto x_0, è definita su $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$)

$$\Rightarrow \langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$

→ non posso applicare l'integrazione per parti perché in x_0 non è derivabile
⇒ spezzo l'integrale in x_0 tanto l'integrale non vede cosa succede in un punto!!

$$= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -\left(f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx \right) +$$
$$-\left(f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \right) =$$

→ avendo applicato l'integrazione per parti (al contrario)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx - f(x_0^-)\varphi(x_0) + f(x_0^+)\varphi(x_0) =$$

→ la funzione test si annulla a $\pm\infty$
→ $f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} = f(x_0^-)\varphi(x_0) - 0 = f(x_0^-)\varphi(x_0)$

$f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} = 0 - f(x_0^+)\varphi(x_0) = -f(x_0^+)\varphi(x_0)$

$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\varphi(x_0) =$$
$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

⇒ la φ non ha nessun problema perché è $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$
⇒ dovendo lavorare all'interno degli intervalli $(-\infty, x_0)$ e $(x_0, +\infty)$, io non arrivo a x_0 subito, ma arrivo a $x_0 -$ qualcosa(ε), valuto f in questo punto e successivamente faccio il limite per $\varepsilon \to 0$.

$$\Rightarrow \boxed{T_f' = T_{f'} + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\,\delta_{x_0}}$$

dove $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

⇒ ottengo $f(x_0^-)$
Analogamente ottengo $f(x_0^+)$
Quindi si lavora sugli intervalli aperti, poi si recupera facendo il limite.

4) moltiplicazione

OSSERVAZIONE:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1)} \in \mathcal{R}^1_{loc}$

$f(x) \cdot f(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{(0,1)} \notin \mathcal{R}^1_{loc} \Rightarrow$ il prodotto di due funzioni $\mathcal{R}^1_{loc}$ non è necessariamente $\mathcal{R}^1_{loc}$

Quindi $T_f \cdot T_f$ non ha senso

In generale, non si può definire il concetto di moltiplicazione di due distribuzioni

Quello che si può fare è definire il prodotto di una distribuzione per una funzione C^∞

Sia T una distribuzione e, sia $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $\varphi \in \mathcal{D}$

Definiamo $\psi \cdot T$ come la distribuzione data da

$$\boxed{\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle}$$

Infatti:

- Caso regolare

$$\langle T_{\psi f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (\psi(x) \varphi(x))\, dx = \langle T_f, \psi\varphi \rangle = \langle \psi T_f, \varphi \rangle \Rightarrow \boxed{T_{\psi f} = \psi T_f \quad \forall \psi \in C^\infty}$$

Verifico che è una distribuzione:

- ha senso la scrittura, ovvero $\psi\varphi$ è una funzione test (perché allora va bene darla in pasto a T).
- φ è C^∞ e a supporto compatto, perché $\varphi \in \mathcal{D}$
- ψ è C^∞

$\Rightarrow \varphi \cdot \psi$ è C^∞ ed è ha supporto compatto* $\Rightarrow \psi\varphi \in \mathcal{D}$ (è una funzione test)

- linearità:

$$\langle \psi T, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \langle T, \psi(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) \rangle = \langle T, \psi \lambda_1 \varphi_1 + \psi \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \langle T, \psi \lambda_1 \varphi_1 \rangle + \langle T, \psi \lambda_2 \varphi_2 \rangle =$$

$$= \langle \psi T, \lambda_1 \varphi_1 \rangle + \langle \psi T, \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \psi T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi T, \varphi_2 \rangle \quad \text{(verificato!)}$$

- continuità

Per dimostrare la continuità, faccio vedere che se $\varphi_n \to 0$ anche $\psi\varphi_n \to 0$. È vero!
Infatti i supporti restano equilimitati ma dimostrare la convergenza uniforme di tutte le derivate non è tanto facile.

5) riscalamento

Sia $f \in \mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$ e sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

Considero $f(\alpha x)$

- Caso regolare

$$\langle T_{f(\alpha x)}, \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x) \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{|\alpha|} \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx$$

$$= \langle T_{f(x)}, \frac{1}{|\alpha|} \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \rangle$$

$\alpha x = t \Rightarrow x = \frac{t}{\alpha}$, $dt = |\alpha| dx$

(metto $\frac{1}{|\alpha|}$ perché se $\alpha > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$ altrimenti $\int_{+\infty}^{-\infty} = -\int_{-\infty}^{+\infty}$
$\Rightarrow$ mettendo $\frac{1}{|\alpha|}$ considero ~~solo~~ entrambi i casi $\int_{-\infty}^{+\infty}$)

$\Rightarrow$ generalizzando:

$$\boxed{\langle T(\alpha x), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \rangle}$$

$\rightarrow$ ha senso perché lo spazio delle funzioni test è chiuso rispetto ai riscalamenti

Per $\alpha = -1$, si ha:

$$\boxed{\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(-x) \rangle}$$

$\rightarrow$ inversione temporale di una distribuzione

*Nota: φ supp(φ) compatto $\Rightarrow$ supp($\psi\varphi$) è sicuramente compatto. ~~e l'unione sarà supp(φ) chi~~
supp(ψ) qualunque

Infatti se supp(φ) $\subseteq$ supp(ψ) $\Rightarrow \psi\varphi = 0 \;\; \forall x \in (\text{supp}(\varphi))^c$; altrimenti supp($\psi\varphi$) sarà compatto perché contenuto in un compatto

6) convergenza di distribuzione

Sia (T_n) una successione di distribuzione e sia T una distribuzione.
Si dice che T_n converge a T in $\mathcal{D}'$ se $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ si ha che $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$ per $n \to +\infty$

$$\boxed{T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ per } n \to +\infty} \longleftarrow \text{deve valere } \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

- Proprietà

① $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,\ S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} S \Rightarrow \lambda T_n + \mu S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \lambda T + \mu S$

② $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow T_n(x - x_0) \xrightarrow{\mathcal{D}'} T(x - x_0)$

③ $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow T_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'$

Dimostrazione di ①

$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ significa che $\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{C}} \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$ } ipotesi
$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} S$ significa che $\langle S_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{C}} \langle S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Dimostrare che $\lambda T_n + \mu S_n \to \lambda T + \mu S$ significa far vedere che } tesi
$\langle \lambda T_n + \mu S_n, \varphi \rangle \to \langle \lambda T + \mu S, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Ma ciò è vero infatti
$\langle \lambda T_n + \mu S_n, \varphi \rangle = \lambda \langle T_n, \varphi \rangle + \mu \langle S_n, \varphi \rangle \to$ (è lineare di distribuzione)
$\to \lambda \langle T, \varphi \rangle + \mu \langle S, \varphi \rangle = \langle \lambda T + \mu S, \varphi \rangle$ per l'algebra sui limiti
$\Rightarrow$ si ha la tesi

Dimostrazione di ②

$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ significa che $\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{C}} \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$ → ipotesi

Dimostrare che $T_n(x - x_0) \xrightarrow{\mathcal{D}'} T(x - x_0)$ significa far vedere che } tesi
$\langle T_n(x - x_0), \varphi \rangle \to \langle T(x - x_0), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Ma ciò è vero perché
$\langle T_n(x - x_0), \varphi \rangle = \langle T_n(x), \varphi(x + x_0) \rangle \xrightarrow{\text{per ip}} \langle T(x), \varphi(x + x_0) \rangle =$
$= \langle T(x - x_0), \varphi(x) \rangle$
$\Rightarrow$ si ha la tesi

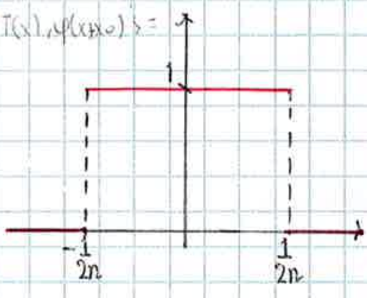
- Dimostrazione della ③

$\langle T_n', \varphi \rangle = - \langle T_n, \varphi' \rangle \to - \langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle$

$\Rightarrow \langle T_n', \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{C}} \langle T', \varphi \rangle \Rightarrow T_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'$

- esempio

- $P_{\frac{1}{n}}(x)$



Considero $f_n(x) = n P_{\frac{1}{n}}(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x)\, dx = n \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\frac{1}{n}}(x) \varphi(x)\, dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\, dx = \varphi(y_n) \text{ con } y_n \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \varphi(y_n) = \varphi(0) \rightarrow \text{perché } \varphi \text{ è continua, } y_n \to 0$$
$$= \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

$\Rightarrow T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$

- Sia (x_n) una successione di numeri reali tali che $x_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$
considero $T_n = \delta_{x_n}$

$\langle T_n, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_n}, \varphi \rangle = \varphi(x_n)$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n) = 0 \rightarrow$ perché φ è una funzione test

$\Rightarrow \delta_{x_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$ (similmente $T_n = e^n \delta_{x_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$)

⇝ segnali che mantengono energia costante, tendono a 0

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 422

- passaggi al limite sotto segno di integrale

Sia:
$f: I \times J \to \mathbb{R}$

$I \times J$ = può essere anche una regione di $\mathbb{R}$

1) $f(t,x) \in \mathcal{R}^1(J)$ in x $\forall t \in I$

2) $\lim_{t \to t_0} f(t,x) = f_0(x)$ $\forall x \in J$

3) $|f(t,x)| \leq g(x)$ $\forall t$, $g \in \mathcal{R}^1(J)$ Condizione più forte della 1) → dominazione della funzione g

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{t \to t_0} \int_J f(t,x)\,dx = \int_J \lim_{t \to t_0} f(t,x)\,dx = \int_J f_0(x)\,dx}$$

caso particolare:
$f(t,x)$ continua integrabile e assolutamente integrabile in x. e $|f(t,x)| \leq g(x) \in \mathcal{R}^1, \forall t$

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} \int_J f(t,x)\,dx = \int_J \lim_{t \to t_0} f(t,x)\,dx = \int_J f(t,x)\,dx$$

cioè $t \to \int_J f(t,x)\,dx$ è continua (la continuità si preserva)

Oss: $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega,x)\,dx$

- $f(\omega,x)$ è continua in ω
- $|f(x)e^{-2\pi i \omega x}| = |f(x)| \in \mathcal{R}^1$ $\forall \omega$

$\Rightarrow \omega \mapsto \hat{f}(\omega)$ è continua ($\Rightarrow$ la trasformata di Fourier è sempre continua)

- passaggio della derivata sotto il segno di integrale

Sia
$f(t,x)$, $t \in I$, $x \in J$ (I, J intervalli)

1) $f(t,x)$ integrabile in x, $\forall t$

2) derivabile in t, $\forall x$

3) $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ integrabile in x e valga $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| \leq g(x)$ (integrabile assolutamente) ↳ dominazione della funzione g

$\Rightarrow t \mapsto \int_J f(t,x)\,dx$ è derivabile in t e vale:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\int_J f(t,x)\,dx\right) = \int_J \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\,dx}$$

dipende solo da $t \Rightarrow \frac{d}{dt}$

NOTAZIONE: $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ = trasformata di Fourier di f

OSSERVAZIONI:

1) $f \in R^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}| = |f(x)|$
$\Rightarrow x \mapsto f(x) e^{-2\pi i \omega x} \in R^1(\mathbb{R}),\ \forall \omega \in \mathbb{R}$ e quindi ha senso definire:

$\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (noto che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx$$

2) $|\hat{f}(\omega)| :=$ energia di f nella frequenza (meglio dire pulsazione) ω.

Noto che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\cos(-2\pi \omega x) + i \operatorname{sen}(-2\pi \omega x)\right) dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi \omega x) - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen}(2\pi \omega x)\, dx$$

$\rightarrow e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta \rightarrow$ f. pari
$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \rightarrow$ f. dispari

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi \omega x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen}(2\pi \omega x)\, dx}$$

Si ha che:

$$\rightarrow |\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(2\pi \omega x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \operatorname{sen}(2\pi \omega x)\, dx \right| \le$$
$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}|\, dx \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx =: \|f\|_1$$

$\overset{*}{\Rightarrow} |e^{-2\pi i \omega x}| = |\cos(2\pi\omega x) - i \operatorname{sen}(2\pi \omega x)| =$
$= \sqrt{\cos^2(2\pi \omega x) + \operatorname{sen}^2(2\pi\omega x)} = 1$

$\rightarrow |e^{-2\pi i \omega x}| \overset{*}{=} 1$ perché $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x + iy$

infatti $e^{-2\pi i \omega x} = \cos(-2\pi\omega x) + i \operatorname{sen}(-2\pi \omega x) =$
$= \cos(2\pi\omega x) - i \operatorname{sen}(2\pi \omega x)$ *

$$\boxed{\text{norma-1 di } f = \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx}$$

$\Rightarrow |\hat{f}(\omega)| \le \|f\|_1 \Rightarrow$ l'energia del segnale, per qualunque frequenza non supera mai $\|f\|_1$ della sua funzione

$\rightarrow \|\hat{f}\|_\infty := \sup\{|\hat{f}(\omega)| : \omega \in \mathbb{R}\}$

$$\boxed{\text{norma-}\infty \text{ di } f = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}}$$

$\Rightarrow \|\hat{f}\|_\infty$ rappresenta la massima componente possibile del segnale, in modulo, ovvero la massima energia possibile su tutti i valori ammissibili dell'energia

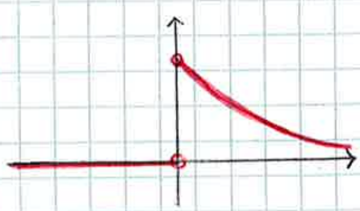
Dunque, essendo $\|\hat{f}\|_\infty$ uno dei valori di $|\hat{f}(\omega)|$ (il massimo), si ha che:

$\boxed{\|\hat{f}\|_\infty = \|\mathcal{F}(f)\|_\infty \le \|f\|_1}$ $\rightarrow$ la trasformata di Fourier di f è sempre limitata dalla sua norma-1.

- esempi:

- $f(x) = H(x)\, e^{-\alpha x} = \begin{cases} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$\alpha \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Re}\alpha > 0$



$$\Rightarrow |f(x)| = |H(x)\, e^{-\alpha x}| = H(x)\, |e^{-\alpha x}| = H(x)\, |e^{-(\operatorname{Re}\alpha + i \operatorname{Im}\alpha)x}| =$$
$$= H(x)\, e^{-\operatorname{Re}\alpha\, x}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-\operatorname{Re}\alpha\, x}\, e^{-2\pi \omega i x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re}\alpha + 2\pi i \omega)x}\, dx = -\frac{1}{\alpha + 2\pi i \omega} \left[e^{-(\alpha + 2\pi i\omega)x} \right]_0^{+\infty} =$$
$$= \frac{1}{\alpha + 2\pi i \omega}$$

19.05.2015

- proprietà della trasformata di Fourier

Ricordo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx$

- $|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1$ è sempre limitata
- $\hat{f}$ è sempre continua

$\Rightarrow \hat{f}$ è sempre limitata e continua

- lemma (Riemann-Lebesgue)

$$\boxed{\lim_{|\omega| \to +\infty} \hat{f}(\omega) = 0}$$

→ le trasformate di Fourier decadono a 0 all'infinito non può avere asintoti, quindi limitata

l'energia che emette un segnale ...

- derivata e moltiplicazione nella trasformata di Fourier

Proposizione 1

Sia $f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ derivabile con $f' \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(f')(\omega) = 2\pi i \omega\, \mathcal{F}(f)(\omega)}$$

Lemma tecnico (serve per la dimostrazione)

Sia $f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ derivabile con $f' \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$

→ le funzioni assolutamente integrabili decadono a 0 ~~se tal~~, all'∞ se valgono le ipotesi del lemma

Posso quindi dimostrare la proposizione.

Dimostrazione.

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx =$$

$$= \underbrace{f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(-2\pi i \omega)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx =$$

$$= 2\pi i \omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx =$$

$$= 2\pi i \omega\, \mathcal{F}(f)(\omega)$$

→ integro per parti

→ $|e^{-2\pi i \omega x}| = 1$ perché è un esponenziale complesso dunque per il lemma quel termine fa 0

Osservo che: il lemma di Riemann-Lebesgue è un caso particolare del lemma tecnico.

infatti

$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega}\, \mathcal{F}(f')(\omega)$ → ma $\mathcal{F}(f')(\omega)$ è limitata

$\Rightarrow \lim_{|\omega| \to +\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) = 0 = \lim_{|\omega| \to +\infty} \frac{\mathcal{F}(f')(\omega)}{2\pi i \omega}$ (sotto l'ipotesi f derivabile e $f' \in \mathcal{R}^1$ va a 0 come $\frac{1}{\omega}$)

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(f)(\omega) = o\left(\frac{1}{\omega}\right),\ |\omega| \to +\infty}$$

(come decade l'energia ~~di un~~ sulle armoniche di alta frequenza) va a 0 almeno come $\frac{1}{\omega}$

informazione sulla velocità di decadimento delle armoniche di alta frequenza.

Se f non è derivabile non è vero! ~~decad~~

Visto che la trasformata di Fourier scambia regolarità con andamento a 0, all'infinito, più la funzione è ~~molto~~ regolare, più la trasformata di Fourier va a 0 all'∞.
Più la trasformata di Fourier è regolare, più il segnale iniziale va a 0 all'∞

Ritorno agli esempi fatti all'inizio
- $f(x) = H(x)e^{-\alpha x}$

$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\alpha + 2\pi i \omega}$

- $f(x) = p_1(x)$

$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega}$

$\rightarrow$ entrambe vanno a 0 come $\frac{1}{\omega}$ (ma niente di più)
Questo perché $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
$\Rightarrow \hat{f}(\omega) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ ma non assolutamente integrabili

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ ha ottimo decadimento a 0 all'}\infty \Rightarrow \hat{f} \text{ è ovunque derivabile } \in \mathcal{C}^{\infty} \\ f \text{ non è regolare} \Rightarrow \hat{f} \text{ non decade a 0 molto velocemente} \end{array}}$

- $f(x) = \varphi(x) \in \mathcal{D}$ $\rightarrow \varphi$ ha ottimo decadimento a 0 (ha supp compatto)

$\Rightarrow \hat{f}(\omega) \in \mathcal{C}^{\infty}$ e decade a 0 all'∞ più velocemente di qualunque polinomio $\frac{1}{\omega^k}$ (per il corollario ①,②)

le funzioni test sono molto regolari ($\mathcal{C}^{\infty}$) e decadono velocemente a 0

- **Risultato negativo**

Proposizione:
se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\varphi \neq 0 \Rightarrow \hat{\varphi}$ non è mai a supporto compatto $\rightsquigarrow$ Non esiste un segnale che abbia energia limitata nello spazio e limitata in frequenza (o uno o l'altro)

Questa proposizione è un caso particolare del principio di Heisenberg (non si può localizzare un segnale in tutte le variabili di stato contemporaneamente, ma se si vuole misurare precisamente una, rimane un'incertezza sull'altra).
Nell'ambito della trasformata di Fourier questo principio equivale all'impossibilità localizzare un segnale nello spazio e nella frequenza simultaneamente

Introduciamo lo spazio S per ~~risolv~~ ovviare a questo problema

- S = spazio delle funzioni rapidamente ~~cresc~~ decrescenti

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è rapidamente decrescente se:

$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ f \in \mathcal{C}^{\infty} \\ 2)\ \forall h, k,\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^h f^{(k)}(x) = 0 \end{array}}$ $\rightarrow$ decade a 0 più velocemente di ogni polinomio, lei e tutte le sue derivate

OSSERVO:
1) $\mathcal{D} \subseteq S$

2) $e^{-x} \notin S$ perché a $-\infty$ non va a 0 !

3) $H(x)e^{-x} \notin S$ perché non è regolare

4) $\dfrac{1}{1+x^{452}} \notin S$ perché se scelgo $h = 452$ non va a 0

5) $e^{-\alpha x^2} \in S$
Gaussiana

20.05.2015

- trasformata di Fourier su S

Sia $\varphi \in S$. Cosa possiamo dire della sua trasformata di Fourier $\hat{\varphi}$?

- Teorema:

$\boxed{\text{Sia } \varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S}$

Dimostrazione:

- $\hat{\varphi} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ in quanto $x^h \varphi(x) \in S \; \forall h$. Essendo le funzioni di S automaticamente integrabili ne segue che $x^h \varphi(x) \in R^1(\mathbb{R}) \; \forall h$.

$\Rightarrow$ per il corollario ②, $\hat{\varphi}$ è derivabile un qualunque numero di volte.

- Devo far vedere che: $\omega^h \mathcal{F}(\varphi)^{(k)}(\omega) \to 0$ per $|\omega| \to +\infty$

la regolarità di φ darebbe dare il decadimento di $\hat{\varphi}$ a 0

$$\mathcal{F}(\varphi)^{(k)}(\omega) = (-2\pi i)^k \mathcal{F}(\omega^k \varphi(\omega))(\cancel{\omega})$$ → corollario ② = $\mathcal{F}(x^k f(x)) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \mathcal{F}(f)^{(k)}(\omega)$

$$\omega^h \mathcal{F}(\varphi)^{(k)}(\omega) = \frac{(-2\pi i)^k}{(2\pi i)^h} \cdot (2\pi i \omega)^h \mathcal{F}(\omega^k (\varphi(\omega))(\cancel{\omega})$$ → moltiplico per ω^h

$$= (-1)^k (2\pi i)^{k-h} \mathcal{F}((\omega^k \varphi(\omega))^{(h)})(\cancel{\omega})$$ → corollario ① = $\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (2\pi i \omega)^k \mathcal{F}(f)(\omega)$

Poiché

$$\Rightarrow \lim_{|\omega| \to +\infty} \omega^h \mathcal{F}(\varphi)^{(k)}(\omega) = (-1)^k (2\pi i)^{k-h} \lim_{|\omega| \to +\infty} \underbrace{\mathcal{F}((\omega^k \varphi)^{(h)})(\cancel{\omega})}_{\text{trasformata di Fourier di una funzione } R^1} = 0$$ per il lemma di Riemann-Lebesgue

$\Rightarrow$ S è chiuso rispetto la trasformata di Fourier

- Teorema (di inversione)

$$\boxed{\forall \varphi \in S \text{ si ha che } \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{2\pi i \omega x} d\omega} = \mathcal{F}(\hat{\varphi}(\omega))(-x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$$

- esempio

- trasformata delle gaussiane. $f(x) = e^{-\alpha x^2}$

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2}) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx$$

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -2\pi i \, \mathcal{F}(x f(x))(\omega) = -2\pi i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx =$$

$$= -\frac{2\pi i}{-2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\alpha x) e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx =$$

$$= \frac{\pi i}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\alpha x^2})' e^{-2\pi i \omega x} dx = \frac{\pi i}{\alpha} \mathcal{F}((e^{-\alpha x^2})') =$$

$$= \frac{\pi i}{\alpha} 2\pi i \omega \, \mathcal{F}(e^{-\alpha x^2})(\omega) =$$

$$= -\frac{2\pi^2 \omega}{\alpha} \hat{f}(\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -\frac{2\pi^2 \omega}{\alpha} \hat{f}(\omega)$$ → eq differenziale ordinaria (lineare) che coinvolge $\hat{\varphi}(\omega)$ che è la funzione che voglio determinare

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\omega^2} \cdot c$$

$$c = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

- trasformata di Fourier di distribuzioni

Caso regolare

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{R}^1$

$\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx$

$T_{\hat{f}}$ ha senso perché $\hat{f}$ è continua

$$\langle T_{\hat{f}},\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx\right)\varphi(\omega)\,d\omega=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)e^{-2\pi i\omega x}\,d\omega\right)dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx=\langle T_f,\hat{\varphi}\rangle$$

Scambio ordine integrazione:
Posso cambiare l'ordine di integrazione perché le due funzioni f e φ sono: $f\in\mathcal{R}^1$ in x, φ è a supporto compatto in ω. ~~Io~~ L'armonica non dà nessun problema. Quindi è una funzione in due variabili assolutamente integrabile su tutto il piano
⇝ teorema di Fubini

$\to f(x)\to \mathcal{F}(f(x))(\omega)=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots dx$

$f(\omega)\to\mathcal{F}(f(\omega))(x)=\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots d\omega$

$$\Rightarrow \boxed{\langle T_{\hat{f}},\varphi\rangle=\langle T_f,\hat{\varphi}\rangle}$$

Questo sembrerebbe suggerire che se T è una qualunque distribuzione, si può definire la sua trasformata $\hat{T}$ come la distribuzione tale che:

$$\cancel{\langle \hat{T},\varphi\rangle=\langle T,\hat{\varphi}\rangle}$$

Ha senso?
$\hat{T}$ lineare, è continua?

NON HA SENSO perché $\hat{\varphi}$ non è una funzione test (risultato negativo)
se $\varphi\neq 0\Rightarrow\hat{\varphi}$ NON È MAI ~~ha~~ supporto compatto, quindi non è una funzione test
$\Rightarrow\langle T,\hat{\varphi}\rangle$ non ha senso

Per la distribuzione regolare funziona perché $f\in\mathcal{R}^1$ ~~è moltiplicato per una funzione~~

- distribuzioni temperate

Dobbiamo ridimensionare lo spazio delle distribuzioni
Per definire la trasformata di Fourier dovremo restringere opportunamente la classe delle distribuzioni da trasformare

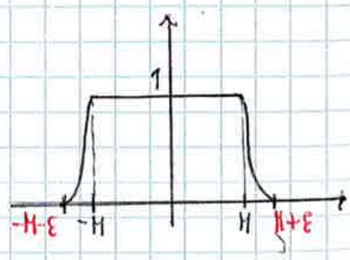
→ considero le distribuzioni a supporto compatto
Sia $T\in\mathcal{D}'$
$\mathrm{supp}(T)\subseteq[-M,M]$

⇝ una distribuzione che ha come simbolo una funzione test e ~~ha~~ supporto compatto.

Per tali distribuzioni è possibile estendere la loro azione ad ogni funzione C^∞ nel modo seguente:

1) considero una speciale funzione test, che chiamo $\gamma_{M,\varepsilon}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\gamma_{M,\varepsilon}=\begin{cases}1 & \text{se } x\in[-M,M]\\ 0 & \text{se } x<-M-\varepsilon \text{ o } x>M+\varepsilon\end{cases}$$
→ porta smussata



2) Se $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$ e T è a supporto compatto $\subseteq[-M,M]$ definiamo
$\langle T,\psi\rangle:=\langle T,\gamma_{M,\varepsilon}\psi\rangle$

L'espressione ha senso perché $\gamma_{M,\varepsilon}\psi\in\mathcal{D}$
È una buona definizione nel senso che non dipende dalla particolare M,ε scelta

Equivalentemente

$$\boxed{\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^h \varphi_n^{(k)} - x^h \varphi^{(k)}(x)| \to 0 \text{ per } n\to+\infty}$$

Lemma:
Se (φ_n) è una successione in $\mathcal{D}$ e se $\varphi\in\mathcal{D}$ è tale che φ_n converge a φ in $\mathcal{D}$ $\Rightarrow (\varphi_n)$ converge a φ anche in S (converge in $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ converge in S)

NOTAZIONE: $\varphi_n \xrightarrow{S} \varphi$ (convergenza in S)

- Def: distribuzione temperata
È una qualunque funzione $T: S \to \mathbb{R}$ tale che

- T è lineare
- T è continua, cioè: $\varphi_n \xrightarrow{S} \varphi \Rightarrow T(\varphi_n) \to T(\varphi)$

Indichiamo con S' l'insieme delle distribuzioni temperate.

Si nota che se $T\in S'$, poiché $\mathcal{D}\subseteq S$ si può considerare la restrizione di T a $\mathcal{D}$ avendo $T_{|\mathcal{D}}: \mathcal{D}\to\mathbb{R}$
(T è definita in uno spazio più grande, ma io la guardo in uno spazio più piccolo)

- $T_{|\mathcal{D}}$ è lineare
- $T_{|\mathcal{D}}$ è continua su $\mathcal{D}$ in quanto se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{S} \varphi \Rightarrow T_{|\mathcal{D}}(\varphi_n) = T(\varphi_n) \to T(\varphi)$

$\Rightarrow$ le distribuzioni temperate sono un'estensione delle normali distribuzioni.
Se T è temperata $\Rightarrow T_{|\mathcal{D}}$ è una normale distribuzione (che in generale indicheremo con lo stesso simbolo)

Si può far vedere che se partiamo da una T in $\mathcal{D}'$, se questa è possibile estenderla ad una distribuzione temperata, tale estensione è unica.
Possiamo quindi pensare le distribuzioni temperate come una sotto famiglia di $\mathcal{D}'$

$\Rightarrow S'\subseteq\mathcal{D}'$ (Attenzione: $\mathcal{D}\subseteq S$)

- esempi
- le distribuzioni a supporto compatto sono tutte distribuzioni temperate

$$\boxed{\begin{gathered}\mathcal{D}\subseteq S\subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})\\ \mathcal{D}'\supseteq S'\supseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})'\end{gathered}}$$

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})' \to$ distribuzioni a supporto compatto
$S' \to$ dist temperate
$\mathcal{D}' \to$ distribuzioni classiche

$\leadsto$ più allargo ~~l'insieme di~~ dominio, più restringo l'insieme delle ~~distribu~~ distribuzioni

S' è il luogo per fare le trasformate di Fourier

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ si dice funzione a crescita lenta se:

1) $f\in \mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$
2) $\exists A,B\geq 0,\ m\in\mathbb{N} : |f(x)|\leq A|x|^m + B,\ \forall x$ $\to$ può scoppiare all'infinito ma non più veloce di un polinomio

- ogni funzione $\mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$ limitata è a crescita lenta

Osservo che:
poiché $\mathcal{F}^{-1}(\varphi(x)) = \mathcal{F}(\varphi)(-x)$

$\Rightarrow \langle \mathcal{F}^{-1}(T)(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(\omega), \mathcal{F}(\varphi)(\omega) \rangle =$

$= \langle T(\omega), \mathcal{F}(\varphi)(-\omega) \rangle = \rightarrow$ riscalamento con $a=-1$
$\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(-x) \rangle$

$= \langle T(-\omega), \mathcal{F}(\varphi)(\omega) \rangle =$

$= \langle \mathcal{F}(T(-\omega))(x), \varphi(x) \rangle =$

$= \langle \mathcal{F}(T(-x)), \varphi(x) \rangle$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}^{-1}(T)(x) = \mathcal{F}(T)(-x)}$ → formula di inversione

Ricorda: Se T è a supporto compatto: Th di Fubini

$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle T(\omega), \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \rangle \overset{\downarrow}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T(\omega), \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} \rangle dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \langle T(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle dx$

Se T non fosse a supporto compatto, non avrebbe senso!!
$\langle T(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle$ ha senso solo se T è a supporto compatto perché quindi può agire su tutte le funzioni C^{∞} (l'armonica).

rimane una funzione ~~in x~~ del parametro x, una volta che T ci agisce contro
$\hat{T}$ agisce contro φ, prendendo φ e integrandoci contro quella funzione di x ~~(l'armonica)~~

$\Rightarrow \hat{T}$ è una distribuzione regolare che ha per simbolo ~~l'armonica~~ $\langle T(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle$

Se chiamiamo $f(x) = \langle T(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle$, si ha $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle$ → caso generale
$f(x) \in C^{\infty}$ (si dimostra...)

- esempio

$T = \delta_{x_0}$

$\langle \hat{\delta}_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) e^{-2\pi i \omega x_0} d\omega = \langle T_{e^{-2\pi i \omega x_0}}, \varphi \rangle$

$\Rightarrow \hat{\delta}_{x_0}(\omega) = T_{e^{-2\pi i \omega x_0}}$

NOTAZIONE: tipico abuso di notazione: $\hat{\delta}_{x_0}(\omega) = e^{-2\pi i \omega x_0}$ anziché $\hat{\delta}_{x_0}(\omega) = T_{e^{-2\pi i \omega x_0}}$
cioè $T_f = f$

$\hat{\delta}_0(\omega) = 1$ ovvero $\hat{\delta}_0(\omega) = T_1$
↳ ciò significa che la δ_0 ha come frequenza all'interno tutto lo spettro reale e tutte dotate con la stessa ampiezza 1.

Si noti inoltre che:

$\hat{\delta}_{x_0}(\omega) = T_{e^{-2\pi i \omega x_0}} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(T_{e^{-2\pi i \omega x_0}})(x) = \delta_{x_0}(x) \Rightarrow \mathcal{F}(T_{e^{-2\pi i \omega x_0}})(-x) = \delta_{x_0}(x)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(T_{e^{2\pi i \omega x_0}})(x) = \delta_{x_0}(x)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(T_{e^{2\pi i \omega_0 x}})(\omega) = \delta_{\omega_0}(\omega)$ } stessa scrittura: basta essere coerenti con le variabili

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(T_{e^{2\pi i \omega_0 x}})(\omega) = \delta_{\omega_0}(\omega)}$

$\Rightarrow$ La trasformata di Fourier di un'armonica è la δ nella frequenza corrispondente.
Infatti l'armonica ha dentro un'unica frequenza (segnale puro, oscillatorio) di frequenza ω_0.
Se guardo il suo spettro devo trovare solo quella frequenza

~~La~~ la formula non poteva essere ~~trovata~~ ottenuta usando l'integrale perché l'armonica non è R^1

- Trasformata di Fourier della funzione di Heaviside

• $T_H \to \mathcal{F}(T_H) = ?$

H non è integrabile $\Rightarrow$ non posso usare la formula
H è a crescita lenta (è limitata) $\Rightarrow T_H$ è temperata $\Rightarrow \mathcal{F}(T_H)$ esiste

$\langle \mathcal{F}(T_H), \varphi \rangle = \langle T_H, \hat{\varphi} \rangle =$

$$= \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)\, d\omega = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx \right) d\omega$$

$\Rightarrow$ Ricorda: $\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx$
$\check{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)\, e^{-2\pi i x \omega}\, d\omega$

A questo punto non so come andare avanti dato che non posso invertire l'ordine di integrazione dato che non posso applicare il th di Fubini visto che la funzione integranda non è integrabile in ω.

$\leadsto$ Th di Fubini: se $f(x,y)$ è integrabile su $A \times B$ allora $\int_{A\times B} f(x,y)\, dx\, dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\, dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\, dx \right) dy$

- Strategia:

Ricordo che: $T_H' = \delta_0 \Rightarrow \mathcal{F}(T_H') = \mathcal{F}(\delta_0) = T_1 = 1 \quad (\Rightarrow \mathcal{F}(T_1) = \delta_0)$

Ma
$\mathcal{F}(T_H') = 2\pi i \omega\, \mathcal{F}(T_H)$ $\qquad \Rightarrow T_H \in S' \Rightarrow$ proprietà ha) $\mathcal{F}(T')(\omega) = 2\pi i \omega\, \mathcal{F}(T)(\omega)$

Si ha dunque che: ① $2\pi i \omega\, \mathcal{F}(T_H) = T_1$
Posso però anche pensare T_1 nel modo seguente:
② $\frac{2\pi i \omega}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) = T_1$ $\qquad \to$ Ricorda: $\boxed{x\, vp\left(\frac{1}{x}\right) = T_1 = 1} \Rightarrow \frac{2\pi i}{2\pi i}\, x\, vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \cdot T_1 = 1$

$\Rightarrow$ sottraggo ① e ② $\Rightarrow 2\pi i \omega \left(\mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) \right) = T_1 - T_1 = 0$

A questo punto, se valesse la legge di annullamento del prodotto, avrei potuto concludere che
$2\pi i \omega \left(\mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) \right) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{F}(T_H) = \frac{1}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0.$

Sbagliato perché non vale la legge di annullamento del prodotto. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione: $\boxed{\text{le uniche distribuzioni } T \text{ tali che } xT(x) = 0 \text{ sono } T(x) = c\,\delta_0(x),\ \forall c \in \mathbb{R}}$

Dimostrazione (faccio solo vedere che $c\delta_0(x)$ soddisfa $xT(x) = 0$)
Ricordo che: $\psi(x)\,\delta_0(x) = \psi(0)\,\delta_0(x)$

$x c \delta_0(x) = 0\, c\, \delta_0(x) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (basta porre $\psi(x) = x \Rightarrow \psi(0) = 0$)

Dunque:
$2\pi i \omega \left(\mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) \right) = 0$

$\omega \underbrace{\left(\mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) \right)}_{T(\omega)} = 0 \Leftrightarrow T(\omega) := \mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) = c\,\delta_0(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}(T_H) = \frac{1}{2\pi i}\, vp\left(\frac{1}{\omega}\right) + c\,\delta_0(\omega)$

Chi è c?

Ricorda: $\boxed{T_H(x) + T_H(-x) = T_1}$ $\qquad H(-x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$\langle T_H(x) + T_H(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T_H(x), \varphi(x) \rangle + \langle T_H(-x), \varphi(x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \langle T_1(x), \varphi(x) \rangle$

Segue quindi dal fatto che $\boxed{H(x) + H(-x) = 1}$

- trasformata del treno di impulsi

29.05.2015

$\boxed{T_n = \sum_{k=-n}^{n} \delta_k}$ → distribuzione a supporto compatto $\in S'$

$\boxed{T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k}$ → treno di impulsi

T è una distribuzione temperata che agisce nel modo seguente

$\varphi \in S \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle := \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$ → come agisce sulle funzioni test

Ha senso questa scrittura?
Si osserva che, poiché $\varphi \in S \Rightarrow |\varphi(x)| \le c_1 \ \forall x$ (è limitata)
$|x^2 \varphi(x)| \le c_1$

$\Rightarrow |(1+x^2)\varphi(x)| \le |\varphi(x)| + |x^2\varphi(x)| \le 2c_1$

$\Rightarrow |\varphi(x)| \le \frac{2c_1}{1+x^2}$

$\Rightarrow |\varphi(k)| \le \frac{2c_1}{1+k^2} \Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$ è assolutamente convergente

→ così va bene anche per $k=0$

$\Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$ ha senso

linearità e continuità sono verificate

$\Rightarrow T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k \in S'$

→ Verifico convergenza in S'

$T_n = \sum_{k=-n}^{+n} \delta_k$

$\forall \varphi \in S \Rightarrow \langle T_n, \varphi \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \delta_k \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) = \langle T, \varphi \rangle$

le somme parziali convergono alla somma della serie

→ trasformata

Ricorda:

$T_n \xrightarrow{S'} T \Rightarrow \mathcal{F}(T_n) \xrightarrow{S'} \mathcal{F}(T)$

$\sum_{k=-n}^{n} \delta_k \to \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k \Rightarrow \mathcal{F}\left(\sum_{-n}^{n} \delta_k\right) \to \mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right)$

$\sum_{-n}^{n} \mathcal{F}(\delta_k) = \sum_{-n}^{n} e^{-2\pi i \omega k}$ ma in realtà è $\sum_{-n}^{n} T_{e^{-2\pi i \omega k}}$ ma $T_{e^{-2\pi i \omega k}} = e^{-2\pi i \omega k}$ (per convenzione)

Quindi

$\sum_{-n}^{n} e^{-2\pi i \omega k} \xrightarrow{S'} \mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right)$

Viene così spontaneo scrivere $\mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega k}$ → questa serie non converge nel senso usuale
la convergenza va pensata in S'

Riscriviamo così

$\sum_{-n}^{n} T_{e^{-2\pi i \omega k}} \xrightarrow{S'} \mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right)$

$\langle \sum_{k=-n}^{n} T_{e^{-2\pi i \omega x}}, \varphi \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \int \varphi(\omega) e^{-2\pi i \omega k} \, d\omega = \sum_{k=-n}^{n} \hat{\varphi}(k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dots$

Quindi:

$$\boxed{\mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_k\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k}$$ → la trasformata del treno di impulsi è il treno di impulsi stesso

Passaggi tecnici da ricordare:

1) dimostro che la ~~trasf~~ distribuzione ha supporto negli interi (trucco della modulazione)

2) dimostro che è invariante per traslazioni (perché lo era la sua approssimante limite)

3) trovo c, sapendo quanto vale la ~~dimost~~ distribuzione sugli interi e quanto valgono sugli interi le trasformate

- Proposizione:

Ω_f ha una delle seguenti possibili forme:

1) $\emptyset$
2) $\mathbb{C}$
3) semipiano dx aperto $= \{s : \operatorname{Re} s > \alpha\}$
4) semipiano dx chiuso $= \{s : \operatorname{Re} s \geq \alpha\}$

~~Tutt~~

- esempi:

- $f(x) = e^{x^2}$ (oppure x^x)

$|e^{x^2} e^{-sx}| = e^{x^2 - \operatorname{Re} s\, x} \to +\infty \Rightarrow$ non è mai andutamente integrabile

$\Rightarrow \Omega_f = \emptyset$

Se $\Omega_f \neq \emptyset$ si dice che f è $\mathcal{L}$-trasformabile

- f ha supporto limitato

$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ con supporto limitato $(f(x) = 0 \ \ \forall |x| > M)$

$\int_0^{+\infty} |f(x)\, e^{-sx}|\, dx = \int_0^M |f(x) e^{-sx}|\, dx < +\infty$ (è convergente) $\Rightarrow$ è an. convergente $\forall s \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \Omega_f = \mathbb{C}$

Altre funzioni f per le quali $\Omega_f = \mathbb{C}$ sono ad esempio $f(x) = e^{-x^2}$ (funzioni che vanno a 0 in maniera iperesponenziale, in modo da mangiarsi e^{-sx})

- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$|f(x) e^{-sx}| = \left|\frac{1}{1+x^2}\, e^{-\operatorname{Re} s x}\right| \in R^1([0,+\infty)) \Leftrightarrow \operatorname{Re} s \geq 0$

$\Rightarrow \Omega_f =$ è un semipiano chiuso $= \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq 0\}$

NOTAZIONE:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-sx}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H(x)\, e^{-sx}\, dx$

la trasformata di laplace serve per trasformare derivate nei prodotti per s.
viene usata per risolvere equazioni differenziali.
la derivata diventa un operatore algebrico moltiplicato per s.

da eq differenziali a eq algebriche (e passare indietro)

-esempi

• $f(x) = H(x)\, x^K$

Ricorda: $\boxed{\mathcal{L}(H)(s) = \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad \forall s: Re(s) > 0.}$

$\mathcal{L}(xH)(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \quad \forall s: Re(s) > 0$

⋮

$\mathcal{L}(x^k H)(s) = (-1)^K (-1)^K\, 2\cdot 3 \cdots K \frac{1}{s^{K+1}}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(x^K H)(s) = K! \frac{1}{s^{K+1}}$

• $f(x) = x^K e^{s_0 x} \cdot H(x)$

$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{K!}{(s-s_0)^{K+1}} \quad \forall s: Re\, s > Re\, s_0$

06.06.2014

-Teorema (regge tutta la trasformata di laplace)

Siano $f, g \in R^1_{loc}([0,+\infty))$ laplace-trasformabili e tali che $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ $\forall s: Re(s) = a$ fissato

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = g(x) \quad \forall x \geq 0 \text{ dove entrambe sono continue}}$

È un teorema di inversione molto forte
Se conosco la trasf di laplace su una retta verticale, la funzione è praticamente ricostruita, cioè posso ricostruirla dove è continua

Ricorda: la trasf di laplace non vede le discontinuità, essendo un integrale

il teorema garantisce l'invertibilità a meno dei punti di non continuità

NON dice però come si fa l'inverso, ma dice che si può fare.

Data una funzione $F(s)$ definita su un certo semipiano dx di $\mathbb{C}$ e olomorfa, ci chiediamo se

1) $\exists f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}: \mathcal{L}(f) = F$?

2) se sì come si calcola $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$ ⟨ metodo pragmatico (a vista) ovvero si riconosce che F è $\mathcal{L}(f)$ / metodo analitico basato su $\mathcal{F}^{-1}$

-es)

metodo pragmatico:

So che $\mathcal{L}(x^K e^{s_0 x} H(x))(s) = \frac{K!}{(s-s_0)^{K+1}} \Rightarrow x^K e^{s_0 x} H(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{K!}{(s-s_0)^{K+1}}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-s_0)^K}\right) = \frac{1}{(K-1)!} x^{K-1} e^{s_0 x} H(x)}$

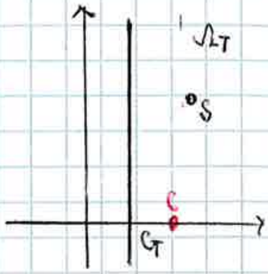
Posso quindi definire la trasformata di Laplace:

$\boxed{\mathcal{L}(T)(s) = \langle T(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \rangle}$ perché $\psi_\varepsilon(x)e^{-sx} \in S$
non dipende dalla particolare ψ_ε ~~perché dove vado a cambiare~~

In generale se $T \in \mathcal{D}'$ si definisce $\sigma_T = \inf\{c \in \mathbb{R} : e^{-cx}T(x) \in S'\}$ (con $\operatorname{supp} T \subseteq [0,+\infty)$)
σ_T è detta ascissa di convergenza

T si dice $\mathcal{L}$-trasformabile se $\sigma_T \neq \emptyset$

$\Omega_T = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_T\}$ = insieme di convergenza
non è mai chiuso (come lo era con le funzioni)



$\Rightarrow \mathcal{L} : \Omega_T \to \mathbb{C}$
Si definisce nel modo seguente
Sia $s \in \Omega_T$
Sia $\sigma_T < c < \operatorname{Re}(s)$ arbitrario (per questo $\Omega_T \in \overset{\text{aperto}}{\downarrow}\mathcal{T}$) così sono sicuro di trovare qualcosa in mezzo!!

$$\mathcal{L}(T)(s) = \langle \underbrace{e^{-cx}T(x)}_{c \in \Omega_T \Rightarrow e^{-cx}T(x) \in S'}, \psi_\varepsilon(x)\underbrace{e^{-(s-c)x}}_{s-c>0} \rangle = \langle T(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-(s-c)x} e^{-cx} \rangle = \langle T(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \cdot 1 \rangle$$

$c \in \Omega_T \Rightarrow e^{-cx}T(x) \in S'$ (σ_T è infatti l'inf dei c per cui $e^{-cx}T(x) \in S'$)

$s-c > 0$ perché $\operatorname{Re}(s) > c$
quindi $e^{-(s-c)x}$ è convergente a $+\infty \Rightarrow \psi_\varepsilon e^{-(s-c)x} \in S$

- Proprietà di $\mathcal{L}$ sulle distribuzioni
T, S $\mathcal{L}$-trasformabili

1) $\mathcal{L}(\lambda T + \mu S)(s) = \lambda \mathcal{L}(T)(s) + \mu \mathcal{L}(S)(s) \quad \forall s \in \Omega_T \cap \Omega_S$

2) $\mathcal{L}(e^{s_0 x} T(x))(s) = \mathcal{L}(T)(s - s_0) \quad \forall s \in \Omega_T + s_0$

3) $\mathcal{L}(T'(x))(s) = s\,\mathcal{L}(T(x))(s) \quad \forall s \in \Omega_T \cap \Omega_{T'}$

4) $\mathcal{L}(T)(s)$ è olomorfa su Ω_T
$\mathcal{L}(T)'(s) = -\mathcal{L}(x\,T(x))(s) \quad \forall s \in \Omega_T$

Dimostrazione:
3) nel caso speciale quando $T \in S'$, $T \in \operatorname{Supp}(T) \subseteq [0,+\infty)$

$\mathcal{L}(T')(s) = \langle T'(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \rangle =$ $\quad \rightarrow \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$

$= -\langle T(x), \frac{d}{dx} \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \rangle =$

$= -\langle T(x), \psi_\varepsilon'(x) e^{-sx} \rangle - \langle T(x), \psi_\varepsilon(x)(-s)e^{-sx} \rangle =$

$= 0 + s\langle T(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \rangle = s\,\mathcal{L}(T)(s)$

Perché $\psi_\varepsilon'(x)$ ha supporto in $[-\infty, 0]$
Poiché T ha supporto in $[0,+\infty)$ allora $\langle T(x), \psi_\varepsilon'(x) e^{-sx} \rangle = 0$

CONVOLUZIONE

È un'operazione che si può fare tra due funzioni o distribuzioni

$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f * g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy}$$

se l'integrale ha senso

Ipotesi possibili su f e g:

- $f \in R^1_{loc}$ limitata, g a supporto compatto: $g(x) = 0 \ \forall x \notin [a,b]$
  $g \in R^1_{loc}$ limitata

  l'integrale ha dunque senso:

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_a^b f(x-y)\, g(y)\, dy$$

- $f, g \in R^1_{loc}$ limitata e $\mathrm{supp} f, \mathrm{supp} g \subseteq [0, +\infty)$
  Allora

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y) dy \quad \left(\text{si può scrivere } \begin{matrix} x-y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \quad y \leq x \right)$$
  $$= \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, dy$$

OSSERVAZIONE: la convoluzione è commutativa

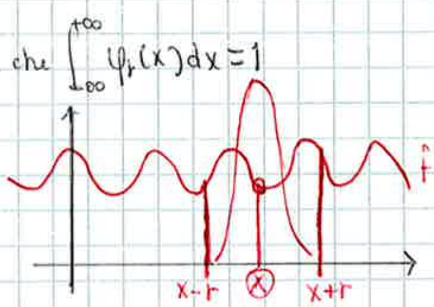
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$ (si passa dall'uno all'altro con un cambiamento di variabile)

$\Rightarrow f * g = g * f$

- esempi

- Consideriamo $\varphi_r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione test con $\mathrm{supp}\varphi_r \subseteq [-r, r]$ tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x) dx = 1$
  Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, R^1_{loc}

$$(f * \varphi_r)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, \varphi_r(y)\, dy = \int_{-r}^{r} f(x-y)\, \varphi_r(y)\, dy$$

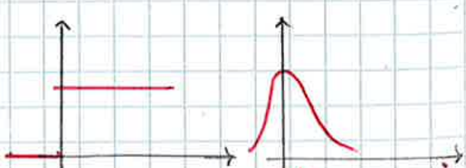


~~complesse contro la funzione test~~

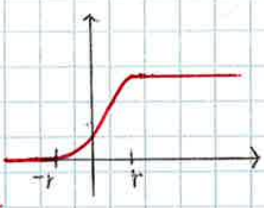
Si può dimostrare che in tal caso $f * \varphi_r$ è sempre C^∞ anche se f presenta delle discontinuità

es) $f(x) = H(x)$

$$(H * \varphi_r)(y) = \int_{-r}^{r} H(y-x)\, \varphi_r(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -r \\ 1 & \text{se } x > r \end{cases}$$



nucleo della convoluzione



~~la φ_r è uno smu~~
la φ_r è uno smussatore, e più piccolo è r, più piccolo sarà lo spazio in cui avverrà il raccordo
la φ_r serve per regolarizzare i segnali; sono dei filtri: eliminano le oscillazioni e discontinuità che avvengono in bande ristrette

$\langle T(x), \langle S(t), \varphi(x+t)\rangle\rangle$ ha senso se $x \mapsto \langle S(t), \varphi(x+t)\rangle \in \mathcal{D}$ | è una funzione test ?

$\langle S(t), \varphi(x+t)\rangle$ è una funzione test se
- è C^∞
- è a supporto compatto.

Per la teoria (difficile da dimostrare), è sempre C^∞
è a supporto compatto se S è a supporto compatto

T qualunque, S a supporto compatto, allora ha senso $T*S$

$$\boxed{T*S = \langle T(x), \langle S(t), \varphi(x+t)\rangle\rangle}$$

Vale chiaramente ~~che~~ anche se S è qualunque, T è a supporto compatto

~~vale anche la proprietà~~:

- Proprietà

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ (S*T)*V = S*(T*V) \\ 2)\ (S*T)' = S'*T = S*T' \end{array}}$$

- esempio:

$$\delta_{x_0}*T \Rightarrow \langle \delta_{x_0}*T, \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0}, \langle T(t), \varphi(x+t)\rangle\rangle = \langle T(t), \varphi(x_0+t)\rangle =$$
$$= \langle T(t-x_0), \varphi(t)\rangle$$

$\Rightarrow$ fare la convoluzione con la δ_{x_0} è come traslare di x_0 la distribuzione T.

$$\delta_{x_0}*T = T*\delta_{x_0} = T(x-x_0)$$

$\delta_0*T = T*\delta_0 = T$ (δ_0 è l'unità algebrica della convoluzione, così come la sua trasformata di Fourier (1) è l'unità algebrica della moltiplicazione)

$\Downarrow$

le due strutture algebriche sono isomorfe tramite la trasformata di Fourier

TEOREMI, FORMULE E PROPOSIZIONI DIMOSTRATE:

1) condizioni di C-R
2) f olomorfa ⇒ u, v armoniche
3) u e v sono l'una il completamento armonico dell'altra ⇒ u e v sono funzioni costanti
4) th di C-G
5) conseguenze del th di C-G (estensione + osservazione)
6) th di Cauchy
7) maggiorazione dell'integrale ($ML(\gamma)$)
8) formula della media
9) formula di Cauchy generalizzata per le derivate
10) $\sum |f_n|$ converge ⇒ $\sum f_n$ converge
11) f olomorfa ⇒ $f(t) = \sum_n \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n$
12) th dei residui
13) principio degli argomenti
14) derivata distribuzionale
15) $\mathcal{F}(f')(\omega) = 2\pi i\omega \mathcal{F}(f)(\omega)$
16) $\mathcal{F}(f)'(\omega) = -2\pi i \mathcal{F}(f)(\omega)$
17) $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$
18) $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+)$
19) $\mathcal{L}(f)'(s) = -\mathcal{L}(xf(x))(s)$

P* 04-03-15

- Statistica | descrittiva = metodi di sintesi su dati relativi ad una popolazione (tutti)
  | inferenziale = metodi utilizzati per dedurre informazioni su una popolazione facendo uso di un campione (sottoinsieme ristretto di individui)

calcolo delle probabilità = disciplina matematica per descrivere il comportamento di fenomeni esperimenti il cui esito non è noto a priori (casuali, stocastici)
es: lancio del dado.

- ~~COMBINATORIA~~

- COMBINATORIA (1)

- $n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, $n \in \mathbb{N}$
  Per def $0! = 1$

- es: esperimento con k passi → grafo:
  
  $n_1 = \#$ di possibili scelte del 1° passo
  ⋮
  $n_k = \#$ di possibili scelte del $k°$ passo

Sia $x =$ n° totale di possibili esiti
$x = n_1 n_2 \cdot \ldots \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$ → principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio
↓
- es. 4 camicie, 2 cravatte, 3 pantaloni, 3 scarpe
  $x =$ n° di possibili abbigliamenti
  $x = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

Generalizzando:
Suppongo n diversi oggetti e ne voglio estrarre k, tenendo anche conto dell'ordine in cui sono stati estratti. $(k \leq n)$
Sia $x =$ n° di possibili estrazioni in sequenza
$x = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$, estraggo il primo ⇒ n possibili scelte
estraggo il secondo ⇒ $n-1$ possibili scelte
estraggo il k-esimo ⇒ $n-k+1$ possibili scelte
↓
disposizioni di k su n $= D_{n,k}$
↓
$x = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1) \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!} = D_{n,k}}$ → disposizioni di k su n

→ caso particolare $n = k$
$D_{n,n} = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ → in questo caso si parla di permutazioni $D_{n,n} = P_n$
$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

- es: 10 partecipanti ad una gara
  $x_1 =$ n° di possibili ordini di arrivo
  $x_2 =$ n° di possibili podi

$x_1 = 10!$
$x_2 = D_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \cancel{720}\ 720$

Se non sono interessato all'ordine. $x_3 =$ n° di possibili podi, ma senza tener conto dell'ordine *

$x_3 = \binom{10}{3} = \frac{D_{10,3}}{3!}$

- combinazioni $= C_{n,k} =$ n° di sottoinsiemi di cardinalità k a partire da un insieme di cardinalità n

$\boxed{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$ = coeff binomiale → combinazioni

$\# = \binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} =$ $\left(\binom{n}{n} = 1 \rightarrow \text{scelta obbligata}\right)$

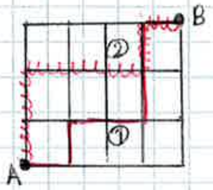
1° uff ... 5° ufficio

$= \frac{20!}{4!\,16!}\cdot\frac{16!}{4!\,12!}\cdot\frac{12!}{4!\,8!}\cdot\frac{8!}{4!\,4!}\cdot\frac{4!}{4!\,0!} = \frac{20!}{(4!)^5} = \binom{20}{4,4,4,4,4}$

Se non interessa l'ordine degli uffici, occorre dividere per 5! *

- 10 maschi, 7 femmine — vs comitato $\begin{cases} 3 \text{ maschi} \\ 2 \text{ femmine} \end{cases}$

~~tot possibili comitati~~ tot possibili comitati $= \binom{10}{3}\binom{7}{2}$

- 

possibili movimenti: dx, alto

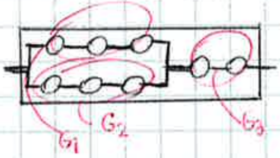
NECESSARIAMENTE devo fare 4 spostamenti vs dx = D
3 spostamenti vs alto = A

① DADDAAD
② AADDDAD

parola AAADDDD
(3) (4)

anagrammi = n° possibili traiettorie $= \frac{7!}{3!\,4!} = 35$

- sistema elettrico



8 componenti distinguibili

$\#$ possibili disposizioni $= \binom{8}{3,3,2} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 280$

$n_1 = 3$
$n_2 = 3$
$n_3 = 2$

I gruppi sono distinti quindi non faccio nessuna divisione
se G_1 e G_2 sono indistinguibili allora divido per 2!

- th multinomiale

Dati $(a+b)$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ → th. del binomio

$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b) = (a^2+ab+ba+b^2)(a+b)\cdots(a+b) = \cdots = a^n + \cdots + b^n$ → 2^n addendi

$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ → spiega perché

Osservazione: $a=1$, $b=1$ ⇒ $\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}$ = totale dei possibili sottoinsiemi che posso estrarre da un insieme di n elementi

Generalizzando:
$$(x_1+x_2+\dots+x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{N}^r \\ n_1+n_2+\dots+n_r=n}} \binom{n}{n_1,\dots,n_r} x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r} \qquad (n_1+\dots+n_r=n)$$
→ th. multinomiale

- numero di soluzioni intere di eq: $x_1+\dots+x_r=n$ $\quad r\le n$ *

vincolo $x_i>0$

es: $x_1+x_2=4$

x_1	x_2
1	3
2	2
3	1

$x_i>0$

Considero n individui: $A_1 / \dots A_n$

- concezione soggettivista (De Finetti, 1930)

$P(A)$ = misura del grado di fiducia che un individuo COERENTE attribuisce al verificarsi di A

→ grado di fiducia = cifra che è disposto a scommettere per ricevere 1 se A si verifica

→ individuo coerente = disposto ad essere sia lo scommettitore che bookmaker

- concezione assiomatica (

11.03.2015

la probabilità è una particolare funzione che gode di par. proprietà

Ho un esperimento e uno spazio campione Ω

Sia $A \subseteq \Omega$, chiamo A = evento (es nel lancio del dado $A = \{$esce un numero pari$\}$)

→ evento elementare = contiene un solo oggetto

→ eventi composti = più oggetti

→ eventi incompatibili = dati due eventi A e B, A e B sono incompatibili $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$A \cap B \neq \emptyset$ significa che ~~può~~ possono verificarsi contemporaneamente A e B

~~- algebra di Boole~~

ALGEBRA DI BOOLE

Sia dato Ω.

Sia $\mathcal{Q}_i = \{A_i, i \in I, A_i \subseteq \Omega\}$. $\mathcal{Q}$ è un'algebra di Boole se gode delle seg. proprietà:

1) $\Omega \in \mathcal{Q}$
2) $A \in \mathcal{Q} \Rightarrow A^c \in \mathcal{Q}$ $\quad (A^c = \bar{A})$
3) $A, B \in \mathcal{Q} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q}$

in questo caso non si ~~chiama~~ parla più di ~~e~~ sottoinsieme ma di EVENTI

esempio: $\Omega = \{A, B, C, D\}$

$\mathcal{Q} = \{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}, \Omega, \emptyset\}$

$\mathcal{Q}$ non è un'algebra, infatti:

1) $\Omega \in \mathcal{Q}$ verificata
2) non è verificato infatti $\overline{\{A, B\}} = \{C, D\} \notin \mathcal{Q}$ $\quad A = \{a, b\}, \bar{A} = \{c, d\} \notin \mathcal{Q}$

esempio: $\Omega = \{a, b, c, d\}$

$\Omega = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \Omega\}$

$\mathcal{Q}$ non è un'algebra, infatti:

1) verificato
2) non è verificato infatti $A = \Omega$, $\bar{A} = \emptyset \notin \mathcal{Q}$

esempio: $\Omega = \{a, b, c, d\}$

$\mathcal{Q} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \Omega, \emptyset\}$

$\mathcal{Q}$ è un algebra infatti:

1) verificato
2) verificato
3) verificato

NOTA: dato Ω con cardinalità finita, $\mathcal{Q} = \{\Omega, \emptyset\}$ ~~è un'algebra di Boole~~.

$\mathcal{Q} = P(\Omega) = 2^{\Omega}$ = insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di Ω = insieme delle parti

$\mathcal{Q}$ è sicuramente un'algebra di Boole.

le algebre possono essere definite in maniera alternativa come segue:

$\mathcal{Q}$ è un algebra se:

1) $\Omega \in \mathcal{Q}$
2) $A \in \mathcal{Q} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{Q}$
3) $A, B \in \mathcal{Q} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Q}$ (equivalente a $A, B \in \mathcal{Q} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q}$)

Posso ora definire la probabilità

Dato un esperimento, con spazio campione Ω, su cui è definita un'algebra (o σ-algebra) $\mathcal{Q}$ è detta probabilità un'applicazione $P: \mathcal{Q} \to \mathbb{R}$

$A \in \mathcal{Q} \mapsto P(A) \in \mathbb{R}$

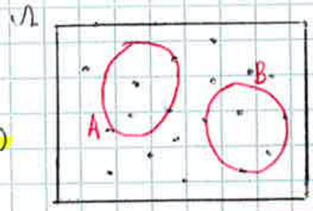
che gode delle seguenti proprietà:

1) $\forall A,\ P(A) \in \mathbb{R}^+,\ P(A) \geq 0$
2) $P(\Omega) = 1$ (definita su Ω perché $\Omega \in \mathcal{Q}$ per def di algebra)
3) $\forall A, B \in \mathcal{Q}$ tale che $A \cap B = \emptyset$ (incompatibili) $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\rightarrow$ def di probabilità

assicurato da def di algebra

Penso la probabilità come QUANTITÀ DI MASSA DISPERSA SU Ω



Sia dato Ω:
- considero una massa unitaria
- disperdo questa massa su Ω.

$\Rightarrow$ definisco probabilità $P(A)$ la quantità di massa presente (raccolta) su A.

Formalismo matematico (approccio matematico)

$P: \mathcal{Q} \to \mathbb{R}^+$ è detta misura

se vale la proprietà 3 si parla di MISURE ADDITIVE

se vale la proprietà 2 e 3 si parla di PROBABILITÀ

$\Rightarrow$ la probabilità è una misura additiva tale che $P(\Omega) = 1$

- spazio di probabilità (terna di probabilità) = $(\Omega, \mathcal{Q}, P)$

Talvolta, la proprietà 3 viene sostituita dalla proprietà 3' seguente

3') data la famiglia di eventi $\{A_n, n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{Q}\}$ incompatibili, allora $P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

$\Rightarrow$ si parla di σ-additività

la prop. 3' viene presa in considerazione se si ha a che fare con una σ-algebra perché l'unione infinita deve appartenere all'algebra.

esempi:

1) urna con una palla rossa, una blu, una verde

$\Omega = \{R, B, V\}$

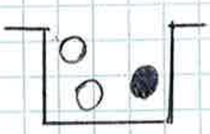
$\mathcal{Q} = 2^\Omega = \{\emptyset, \{R\}, \{B\}, \{V\}, \dots, \Omega\}$ $\rightarrow$ ogni volta che $\#\Omega < \infty$ ha senso considerare $\mathcal{Q} = 2^\Omega$

A	$P(A)$
$\{R\}$	$1/2$ $\rightarrow$ non necessariamente deve essere uguale alle altre. Ad esempio se la palla rossa è più grande delle altre è giusto associare una probabilità maggiore a $P(\{R\})$
$\{B\}$	$1/4$
$\{V\}$	$1/4$
$\{R, V\}$	$3/4$
$\vdots$	$\vdots$
Ω	1
$\emptyset$	0 $\rightarrow$ per la validità della prop. 2, infatti: $P(\{R\}) = P(\{R\} \cup \emptyset) = P(\{R\}) + P(\emptyset) = 1/2 + 0$

P soddisfa dunque le tre proprietà della probabilità

2) urna con componenti indistinguibili esteriormente con un elemento guasto e 2 funzionanti g_1, f_1, f_2

esperimento = estrarre un componente a caso e verificarne il funzionamento



* A differenza tra le funzioni viste in analisi I e la probabilità è che la probabilità ha come argomento non un numero reale, ma un sottoinsieme di possibili esiti

esempi:

1) esperimento = lancio del dado
$\Omega = \{1, \dots, 6\}$
$\mathcal{Q} = 2^{\Omega}$

$P(\{1\}) = \dots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ (dado equilibrato = ogni faccia ha un numero da 1 a 6 diverso)

pag 35

- $A = \{1, 2\}$
$\Rightarrow P(A) = P(\{1, 2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{3}$

- $B = \{$esce un multiplo di 3$\} = \{3, 6\}$
$\Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$

- $C = \{$esce un numero non multiplo di 3$\} = \{1, 2, 4, 5\}$
$\Rightarrow P(C) = \frac{2}{3} = 1 - P(B) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{2}{3}$

- $D = \{$esce un numero pari$\}$
$\Rightarrow P(D) = \frac{1}{2}$

- $E = \{$esce un numero $\leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
$\Rightarrow P(E) = \frac{1}{2}$

- $F = D \cup E$
$\Rightarrow P(F) = P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ essendo $P(D \cap E) = P(\{2\})$

Questo è un esempio di spazio campionario con esiti equiprobabili:
Ω deve essere un insieme finito $\#\Omega = N$
$\Rightarrow P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{N\})$
Ciò implica che $P(\{i\}) = \frac{1}{N}$, $i = 1, \dots N$
Infatti $P(\Omega) = 1$ (assioma 2) e inoltre deve valere $P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{N} \{i\}) = \sum_{i=1}^{N} P(\{i\}) = N \cdot P(\{i\})$

$\Rightarrow P(\{i\}) = \frac{1}{N} \Rightarrow$ esiti equiprobabili

Per l'assioma 3 avremo perciò che $\forall A \subseteq \Omega$

$P(A) = \frac{\text{numero di elementi di } A}{\text{numero di elementi di } \Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega}$

2) esperimento = urna con 5 componenti indistinguibili con 3 funzionanti e 2 guasti
estrazione senza reimbussolamento di 2 componenti

$\Omega = \{(g, g), (g, f), (f, g), (f, f)\}$
$\rightarrow$ NON È UNA SCELTA OPPORTUNA perché in questo caso $P(\{g, g\}) = P(\{f, f\})$ ma deve essere $P(\{f, f\}) > P(\{g, g\})$

Definisco Ω così:
$\Omega = \{(g_1, g_2), (g_1, f_1), (g_1, f_2), (g_1, f_3), (g_2, g_1), (g_2, f_1), (g_2, f_2), (g_2, f_3), \dots\}$

$\#\Omega = D_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ perché ho 5 diversi oggetti e ne voglio estrarre 2, tenendo anche conto dell'ordine in cui sono stati estratti

Definisco P assegnando valore $\frac{1}{20}$ ad ogni evento elementare, contenente una sola coppia.

- $A = \{$estraggo due guasti$\}$
$\Rightarrow P(A) = P(\{g_1, g_2\}, \{g_2, g_1\}) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

- $B = \{$estraggo almeno 1 funzionante$\} = \overline{A}$
$\Rightarrow P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{9}{10}$

- $C = \{$estraggo esattamente 1 funzionante$\}$
$\Rightarrow P(C) =$

$\rightarrow$ Considero il reimbussolamento
$\Omega = \{(g_1, g_2) \dots\}$
$\#\Omega = D^{(R)}_{n,k} = 5^2 = 25$ perché calcolo delle disposizioni di 2 su 5 con ripetizioni

Definisco in questo caso P assegnando valore $\frac{1}{25}$ ad ogni evento elementare

Attenzione: INCOMPATIBILITÀ ≠ INDIPENDENZA $\begin{cases} A,B \text{ incompatibili} \Rightarrow P(A\cap B)=0 \\ A,B \text{ indipendenti} \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \end{cases}$

- estensione dell'indipendenza a più ~~tanti~~ eventi:

3 eventi, A_1, A_2, A_3 sono indipendenti se

$$\boxed{\begin{aligned} &a)\ P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) \\ &b)\begin{cases} P(A_1\cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2) \\ P(A_2\cap A_3) = P(A_2)\,P(A_3) \\ P(A_1\cap A_3) = P(A_1)\,P(A_3) \end{cases}\end{aligned}}$$

pag 87
$\rightsquigarrow$ A_1, A_2, A_3 indipendenti $\Rightarrow$ A_1 è indipendente da ogni evento si formi a partire da A_2 e A_3

es: A_1 indipendente da $A_2 \cup A_3$

a e b non sono equivalenti

Quindi devono valere a e b contemporaneamente

Dimostro con un esempio che $a \not\Rightarrow b$ e $b \not\Rightarrow a$

esempio: $\Omega = \{1,2,3,4\}$

1) $A_1 = \{1,2\}$
$A_2 = \{2,3\}$
$A_3 = \{1,3\}$

$P(A_1\cap A_2) = P(\{2\}) = \frac{1}{4} = P(A_1)\,P(A_2) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ vale b

$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow$ non vale a

$\Rightarrow b \not\Rightarrow a$

2) $A_1 = \{1,2\}$
$A_2 = \{1,2\}$
$A_3 = \emptyset$

$P(A_1\cap A_2\cap A_3) = P(\emptyset) = 0 = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$ essendo $P(A_3)=0$

$\Rightarrow$ vale a

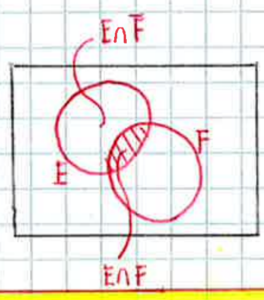
$P(A_1\cap A_2) = P(A_1) = \frac{1}{2} \neq P(A_1)\,P(A_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ non vale b

$\Rightarrow a \not\Rightarrow b$

- Proposizione

E, F indipendenti $\Rightarrow$ $E, \bar{F}$ indipendenti



Dimostrazione:

E, F indipendenti $\Rightarrow P(E\cap F) = P(E)\,P(F)$

osservo che: $E = (E\cap F)\cup(E\cap \bar{F})$ → vale ∀ insieme

$\Rightarrow P(E) = P(E\cap F) + P(E\cap \bar{F}) =$
$= P(E)\cdot P(F) + P(E\cap \bar{F})$ → ~~dato~~ per ipotesi

$\rightsquigarrow$ questa proposizione dimostra che se E ed F sono indipendenti, la probabilità che E si realizzi non è modificata dalla realizzazione o meno di F

$\Rightarrow P(E)(1-P(F)) = P(E\cap \bar{F})$ → osservo che $P(\bar{F}) = 1 - P(F)$
$P(E)\,P(\bar{F}) = P(E\cap \bar{F})$
$\Rightarrow E, \bar{F}$ sono indipendenti per definizione

- formula del prodotto

Data la famiglia $\{A_1, \dots, A_n\}$, $A_i \in \mathcal{Q}$, vale la seguente formula

$$\boxed{P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}$$

Dimostrazione per induzione:

~~Per induzione~~

$n=2$) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1)$ verificata per definizione di $P(A_2 | A_1)$

Sia vera per $n-1$ (ipotesi induttiva)

$\Rightarrow P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdots P(A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1} | \dots)$

Sia $B = A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$

$\Rightarrow P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \cancel{P(B)}\, P(B \cap A_n) = P(B) \cdot P(A_n | B)$

$= P(A_1) P(A_2 | A_1) \cdots P(A_{n-1} | \dots) \cdot P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

$\rightarrow P(A_n | B) = \dfrac{P(B \cap A_n)}{P(B)} = \dfrac{P(A_n \cap B)}{P(B)}$

esempi

1) Urna con rossa, rossa, bianca

Estraggo due palle, senza reimbussolamento

esp: osservo le due palle estratte

$\Omega = \{(r,r), (r,b), (b,r), (b,b)\}$ → non va bene

→ questo esito non si verificherà mai

$\Rightarrow$ se $A = \{(b,b)\} \Rightarrow P(A) = 0$

$B = \{(r,r)\}$

$P(\{(r,r)\}) = P(B)$

A_1 = la prima estratta è rossa $\Rightarrow B = A_1 \cap A_2$

A_2 = la seconda estratta è rossa

$P(B) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$\rightarrow C = \{(r,b)\}$

$P(C) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2 | A_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

$\rightarrow D = \{(b,r)\}$

$P(D) = \frac{1}{3} = P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2 | \bar{A}_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{3}$

Osservazione:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 101 di 422

- formula di Bayes

Siano $\{A_1, \dots, A_n\}$ e B come prima, ~~con P(~~ con $P(B) \neq 0$ → mi chiedo cosa succede a metà

Partizione

Allora

$$\boxed{P(A_i | B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P(B|A_j)}}$$

→ Utilizzo questa formula per determinare quale degli A_i si sia realizzato, sapendo che B si sia realizzato

Dimostrazione:

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B|A_j)}$$

→ $P(A_i \cap B) = P(B \cap A_i) = P(A_i) \cdot P(B|A_i)$ ~~essendo~~

→ $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) P(B|A_j)$ (f. delle probabilità totali)

esempio:

1) monete di prima

Abbiamo osservato l'uscita T. Qual'è la probabilità di aver estratto la moneta equilibrata?

A_1 = esce moneta equilibrata

B = esce testa

$$\Rightarrow P(A_1 | B) = \frac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5} \rightarrow \text{noto} > \frac{1}{2}$$

→ $\boxed{\text{Ricorda: } + = \text{OPPURE}}$

• = E ~~(intersezione~~ (intersezione)

Esercizi:

1) $U_1 = \{r, r, r, b, b\}$ $\quad U_1, U_2$ indistinguibili

$U_2 = \{r, r, v, v, b\}$

Prendo un'urna a caso ed estraggo due palle senza rimbussolare

a. B = "escono due rosse"

b. C = "esce almeno una rossa"

c. probabilità di aver preso l'urna 1 avendo osservato due rosse

d. probabilità che la seconda sia rossa, avendo osservato che la prima è rossa

a. Introduco due partizioni:

A_1 = "prendo l'urna 1"

A_2 = "prendo l'urna 2"

pesco 1 rossa da 5 su 3

pesco 1 rossa da 4 su 2

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

b. $P(C) = P(\{(r, x)\}) + P(\{(x, r)\}) + P(\{r, r\})$ con x = diverso da rosso

= → lungo

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\{x, x\}) = 1 - P(E) \quad \text{con E = escono due non rosse}$$

$$= 1 - (P(A_1) P(E|A_1) + P(A_2) P(E|A_2)) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{3}{5} \frac{2}{4}\right) = \frac{4}{5}$$

c. $P(A_1 | B) = \dfrac{P(A_1) \cdot P(B|A_1)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{3}{4} \rightarrow > \dfrac{1}{2}$ perché se prendo due rosse è più sensato pensare che ho preso l'urna 1 dato che ne contiene di più

d. Introduco due partizioni:

R_1 = 1° rossa

R_2 = 2° rossa

$$P(R_2 | R_1) = \frac{P(R_2 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$$

~~→ la formula di Bayes si può interpretare come il modo in cui le valutazioni iniziali~~

~~Se pensiamo agli eventi Ai come a delle possibili ipotesi relative a un fatto specifico,~~

~~→ la formula di Bayes si può interpretare come il modo in cui le valutazioni iniziali su queste ip. fatte prima dell'esperimento si debbano modificare una volta che~~

3) Ho bisogno di un componente funzionante
Ho 3€

Negoziante: ha una certa cat 3 OK + 3 KO 1€/componente
Proposte: 1) prendi 3 componenti a 3€
2) prendi a caso un numero da 1 a 5, paghi 3€ e porti a casa il numero estratto di componenti

Per il negoziante è lo stesso.
Cosa conviene?

1) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{19}{20}$ $\quad P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_3|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$

A = almeno 1 ok $\quad A_i$ = l'i-enmo componente è ok

2) Introduco la partizione
B_1 = prendo 1 f
⋮
B_5 = prendo 5

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2) + \ldots =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{5}$$

...

più veloce
$$P(\bar{A}) = P(B_1)\cdot P(\bar{A}|B_1) + \ldots = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 0 = \frac{15}{100}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \cancel{\frac{85}{100}}\ \cancel{\frac{95}{100}}\ \frac{85}{100}$$

$\Rightarrow$ meglio ①

4) Test HIV
Ipotesi: 2% pop mondiale è portatrice della malattia
vado a fare il test $\Rightarrow$ Risposta SI!!

HIV

		SI	NO
TEST	SI	1	0,1
	NO	0	0,9

falsi positivi

H = "ho l'HIV"
R = "risposta sì al test"

$$P(H|R) = \frac{P(R \cap H)}{P(R)} = \frac{P(H)\cdot P(R|H)}{P(R)} = \frac{0{,}02\cdot 1}{11{,}8\cdot 10^{-3}} \cong 0{,}16$$
$$P(R) = P(H)\,P(R|H) + P(\bar{H})\,P(R|\bar{H}) = 0{,}02\cdot 1 + 0{,}98\cdot 0{,}1$$

5) Test simile AN I
5 risposte di cui 1 giusta
solo 5 domande
Test superato se almeno 3 sono corrette. Rispondo a caso!

$$P(\text{sup. test}) = P(\text{almeno 3 corrette}) = P(\{3\text{ ok}\} \cup \{4\text{ ok}\} \cup \{5\text{ ok}\})$$ sono incompatibili
$$= P(\{3\text{ ok}\}) + P(\{4\text{ ok}\}) + P(\{5\text{ ok}\}) =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\binom{5}{3} + \left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\binom{5}{4} + \left(\frac{1}{5}\right)^5 =$$

→ $P(S) = ?$

Il sistema funziona se il primo blocco funziona e il secondo blocco funziona

$P(S) = P(\text{"1° blocco OK"} \cap \text{"2° blocco OK"})$

$P(\text{"1° blocco OK"}) = P(A \cup B)$ ovvero funziona a, oppure funziona b, oppure funzionano entrambi
$P(\text{"2° blocco OK"}) = P(C \cup D)$

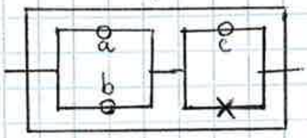
$P(S) = P(A \cup B) \cap P(C \cup D) = P(A \cup B) \cdot P(C \cup D) =$ perché indipendenti
$= (P(A) + P(B) - P(A \cap B))(P(C) + P(D) - P(C \cap D)) =$
$= (P_a + P_b - P_a \cdot P_b)(P_c + P_d - P_c \cdot P_d)$ perché indipendenti

Nota: se $P_a = P_b = P_c = P_d = P \Rightarrow P(S) = (2P - P^2)^2$
→ funzione crescente

→ $P(S|\bar{D}) = \dfrac{P(S \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \dfrac{\cancel{P(\bar{D})} \cdot P(S|\bar{D})}{\cancel{P(\bar{D})}} = P(S|\bar{D}) = ?$ → S e $\bar{D}$ non sono indipendenti!
$= \dfrac{P(S) \cdot P(\bar{D}|S)}{P(\bar{D})} = ?$ Uso la formula del prodotto

$\bar{D} \Rightarrow$ ~~blocco 2 non funziona~~ rifaccio il sistema togliendo d

S'



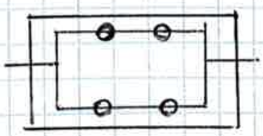
S' = "il sistema funziona"

$P(S|\bar{D}) = P(S') = P((A \cup B) \cap C) = P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$
$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) =$ perché indipendenti
$= P_a \cdot P_c + P_b \cdot P_c - P_a P_b \cdot P_c$

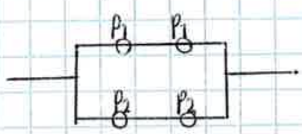
→ $P(\bar{D}|S) = \dfrac{P(S \cap \bar{D})}{P(S)} = \dfrac{\cancel{P(S)} \cdot P(\bar{D}|S)}{\cancel{P(S)}} = ?$
$= \dfrac{P(\bar{D}) \cdot P(S|\bar{D})}{P(S)}$

$P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - P_d$
le altre calcolate negli altri punti

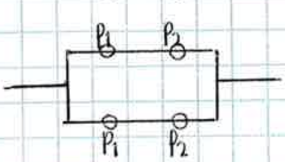
- Dispongo di 4 componenti: 2 TO, funzionano con probabilità P_1 $P_1 > P_2$
  2 CN, funzionano con probabilità P_2



①



migliore disposizione dei componenti: ②



Quale massimizza?
Sicuramente sarà maggiore $P(S_1)$

$P(S_1) = P_1^2 + P_2^2 - P_1^2 P_2^2$
$\Rightarrow P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2 \geq 0 \Rightarrow P(S_1) > P(S_2)$
$P(S_2) = P_1P_2 + P_1P_2 - P_1^2P_2^2$ $(P_1 - P_2)^2 \geq 0$

conviene quindi la scelta 1.

- $\underset{T}{O} \longrightarrow \underset{R}{O}$ non simmetrico $\Rightarrow p_{01} \neq p_{10}$

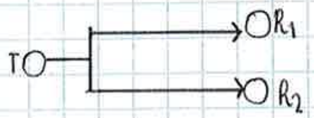
Qual'è la probabilità ~~di~~ che fosse stato correttamente ~~spedito~~ letto 1, avendo spedito 1.
$\neq$ probabilità di aver spedito 1, avendo letto 1.

T_0 = trasmetto 0
T_1 = trasmetto 1
R_0 = ricevo 0
R_1 = ricevo 1

$P(R_1|T_0) = p_{01}$
$P(T_0|R_1) \neq P(R_1|T_0)$

Suppongo che $P(T_0) = P(T_1) = \frac{1}{2}$

$$P(T_0|R_1) = \frac{P(T_0 \cap R_1)}{P(R_1)} = \cancel{\frac{P(T_0)\,P(R_1|T_0)}{P(R_1)}}$$
$$= \frac{P(T_0)\,P(R_1|T_0)}{P(T_0)\,P(R_1|T_0) + P(T_1)\,P(R_1|T_1)} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}p_{01}}{\cancel{\tfrac{1}{2}}p_{01} + \cancel{\tfrac{1}{2}}(1-p_{10})} = \frac{p_{01}}{1-p_{10}+p_{01}}$$

- 

2 ricevuti → segnale (0/1) ~~accett~~ accettato se entrambe leggono lo stesso (0,0), (1,1)
Se (0,1) o (1,0) richiedo trasmissione su entrambi e ripeto fin ad una lettura corretta

probabilità di transizione?
$p_{01} = p_{10}$

L_1 = leggo 1
$P(L_1|T_0)$ = probabilità di transizione = probabilità di aver letto 1 avendo trasmesso 0

R^n_{ab} = alla lettura n-esima leggo (a,b) con a,b = 0,1.

$$P(L_1|T_0) = P(R^1_{11}|T_0) + P(\underbrace{(R^1_{10} \cup R^1_{01})}_{\text{chiedo trasmissione}} \cap R^2_{11}|T_0) + \dots =$$
$$= p \cdot p + ((p(1-p) + (1-p)p)\cdot p^2) + \dots =$$
$$= p^2 + p^2(2p(1-p)) + p^2(2p(1-p))^2 + \dots =$$

per analogia con 1 ritrasmissione

probabilità di richiedere la trasmissione

$$= p^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2p(1-p))^n = p^2 \frac{1}{1-2p(1-p)}$$

$1-p<1 \Rightarrow$ ~~serie~~ serie geometrica di argomento <1

- ovetti kinder
10% contiene sorpresa bella
Quanti ovetti prendere per avere sicurezza al 95% di almeno una sorpresa bella?

A = almeno 1 OK
$\bar{A}$ = nessuna sorpresa OK
$n=1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}1$
$n=2 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}19$

il primo ovetto non contiene la sorpresa bella
il secondo ovetto non contiene la sorpresa bella

per induzione (generalizzando
n generico
$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}9^n \geq 0{,}95 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}9)} \approx 29$

VARIABILI CASUALI O ALEATORIE (1) e (5)

Preliminari

- continuità della misura di probabilità ($\mathcal{A} \to \mathbb{R}$)

la probabilità è una funzione che va da un insieme in $\mathbb{R}$ ($\mathcal{A} \to \mathbb{R}$) ovvero è una misura

Per funzioni 'misura', definisco la continuità nel modo seguente:

$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$

P è continua se $\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to+\infty} A_n)}$

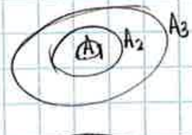
limite di una successione di eventi?

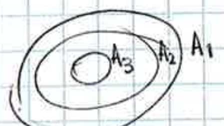
Se $\{A_n, \dots\}$ è monotona

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n & \text{se monotona crescente} \\ \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n & \text{se monotona decrescente} \end{cases}$$

(insiemone che contiene tutto)

(insiememino che è contenuto in tutti)





- Proprietà:

• le misure di probabilità sono continue

Dimostrazione:

(Solo per $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, monotona crescente)

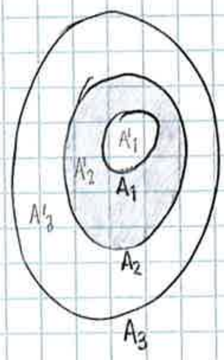
Definisco $A'_1 = A_1$

$A'_2 = A_2 \setminus A_1$ (A'_2 è un evento perché intersezione di eventi)

$A'_3 = A_3 \setminus A_2$ (A'_3 è un evento ")

$\vdots$

$A'_1, A'_2, A'_3, \dots$ sono incompatibili per costruzione ($A_i \cap A_j = \emptyset$)



$\Rightarrow P(\lim_{n\to+\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)$ → per definizione di $\lim_{n\to+\infty} A_n$

$= P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n) =$ → $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A'_n)$ per incompatibilità di A'_i

$= \sum_{n=1}^{\infty} P(A'_n) =$ → per definizione di somma di una serie (è convergente perché la somma della probabilità di eventi incompatibili non può superare 1.)

$= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} P(A'_n) =$

$= \lim_{m\to\infty} P(A_m)$ → unione di corone circolari

$\Rightarrow P(\lim_{n\to+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

- Spazio campionario standard:

Si parte da $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Voglio una terna di probabilità unica

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \dots)$ → dipende da esperimento ad esperimento

$\mathcal{B}$ = σ-algebra di Borel

• Prendiamo tutti gli intervalli del tipo $(a,b]$ $a,b \in \mathbb{R}$

• Consideriamo tutte le loro possibili unioni, intersezioni e relativi complementi (anche infiniti)

$\Rightarrow \mathcal{B}$ = la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli oggetti di cui sopra

(Se prendo un qualunque intervallo, questo appartiene a $\mathcal{B}$)

27.03.2015

Ricordo:
$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$
$X: \Omega \to \mathbb{R}$
$X: \omega \in \Omega \mapsto x(\omega) \in \mathbb{R}$
tale che sia misurabile, cioè $\forall B \in \mathcal{B},\ X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$
Questo perché: $P_X: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$
$P_X: B \in \mathcal{B} \mapsto P(B) \in \mathbb{R}$
$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] = P[\{\omega \in \Omega : x(\omega) \in B\}]$

P_X è detta distribuzione o legge della variabile casuale X
è quella funzione che ci permette di dire come si comporta la variabile casuale

- esempio:
- $\Omega = \{A, B, C, D, E\}$ insieme di 5 persone
Per ognuna: { età
{ comune di residenza

individuo	età	comune
A	20	TO
B	21	TO
C	20	TO
D	21	MI
E	20	MI

esp: estrazione individuo e osservo età
$A_1 = $ "età $= 21$"
$\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

$P(A_1) = \frac{2}{5}$

$A_2 = $ "età $= 19$" $\Rightarrow P(A_2) = 0$

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{X} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$
$X: \omega \in \Omega \to \mathbb{R}$
Definisco $X: x(\omega) = $ età di ω → è una variabile casuale perché è una grandezza numerica associata al risultato di ogni evento in esperimento

X è misurabile perché $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

Sia $B = (19{,}5;\ 20{,}5)$
$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] = P[\{A, C, E\}] = \frac{3}{5}$

In maniera formale $P_X(B) = P[X \in B]$

- come prima ma non conosco l'età
esp: estrazione individuo e osservo età

individuo	età	comune
A		TO
B		TO
C		TO
D		MI
E		MI

$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{A, B, C\}, \{D, E\}\}$ → forma eff un' algebra
Posso lavorare solo su comune di residenza

$P[\{A, B, C\}] = \frac{3}{5}$

Definisco: $X: x(\omega) = $ età di ω
Sia $B = (19{,}5;\ 20{,}5)$
$P_X(B) = P[X^{-1}(B)] = P[\{A, C, E\}] = $ non posso definire un valore perché $\{A, C, E\} \notin \mathcal{A}$

b) $\lim_{t \to t_0^+} F_X(t) = \lim_{t \to t_0^+} P_X[(-\infty, t]] = P_X(\lim_{t \to t_0^+} (-\infty, t]) = P_X[(-\infty, t_0]] = F_X(t_0)$

non c'è la continuità da sx perché

• funzione di sopravvivenza

Data la variabile casuale X, è detta funzione di sopravvivenza di X, la funzione così definita

$$\boxed{\begin{array}{l} \bar{F}_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ \bar{F}_X(t) = P[X > t] = 1 - F_X(t) \end{array}} \rightsquigarrow P[X > t] = \int_t^{+\infty} f_X(t)\,dt = \bar{F}_X(t) \Rightarrow \boxed{\bar{F}_X(t) = \int_t^{+\infty} f_X(t)\,dt}$$

• funzioni densità e tassi di rischio ⤳ dopo.

– suddivisione delle variabili casuali
- discrete
- continue
- assolutamente continue
- miste

– variabili casuali discrete

Sia S l'insieme dei valori effettivamente assumibili da una variabile casuale X.
(S si chiama supporto di X = supp(X))

X è discreta se S ha cardinalità finita o al più numerabile

⤳ un insieme è detto misurabile se i suoi elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali

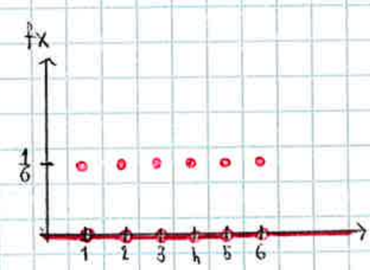
In tal caso possiamo definire la densità discreta, nel modo seguente

$$\boxed{f_X(t) = \begin{cases} P[X = t] & t \in Supp(X) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}} \rightarrow \text{funzione di densità (v.c. discrete)}$$

– esempio:

• es: lancio dado

$f_X(t) = \frac{1}{6}$ se $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (altrimenti $f_X(t) = 0$)



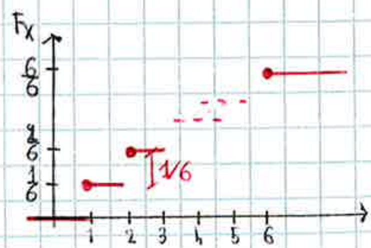
Data f_X possiamo definire F_X

$$F_X(t) = P[X = t] = \sum_{\substack{t_i \in Supp(X) \\ t_i \le t}} P[X = t] = \sum_{\vdots} f_X(t)$$

esempio:

• es: lancio dado

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{6} & 1 \le t < 2 \\ \frac{2}{6} & 2 \le t < 3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t \ge 6 \end{cases}$$



funzione ripartizione a gradini

In generale vale che se
Se X è una variabile casuale discreta che assume valori $t_1, t_2, \ldots$ dove $t_1 < t_2 < \ldots$ allora la sua funzione di distribuzione F è costante a tratti
Ciò significa che il valore di F è costante negli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$ e poi ha un salto di ampiezza pari a $f_X(t_i)$ in t_i

→ Proprietà della funzione densità

1) $F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds$ (raccolgo la massa tra $-\infty$ e t)

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s)\,ds = 1$

3) $f_X(s)\ge 0$ (altrimenti troverei una probabilità negativa)

In questo caso $f_X(s)>1$ perchè non sono delle probabilità ma densità di probabilità
Se infatti considero l'intervallo $[1,\frac{1}{2}]$ allora $f_X(t)=2$ per $t\in[1,\frac{1}{2}]$ affinchè l'area sia unitaria

OSSERVAZIONE: Sia X v.c assolutamente continua

$$\begin{aligned} P[X=t] &= P[X\le t]-P[X<t] = \\ &= F_X(t)-\lim_{s\to t^-}F_X(s) = \\ &= F_X(t)-F_X(t)=0 \end{aligned}$$

→ la funzione di ripartizione è derivabile, quindi continua per def. di v.c. ass. continua

⇒ la probabilità di cascare in esattamente un valore è nulla! ⇝ questo perchè il supporto, ovvero, l'insieme dei valori effettivamente assumibili è così grande, che la probabilità di cascare in esattamente un valore è nullo

Siamo ora in grado di calcolare probabilità del tipo $P[X\in[a,b]]$

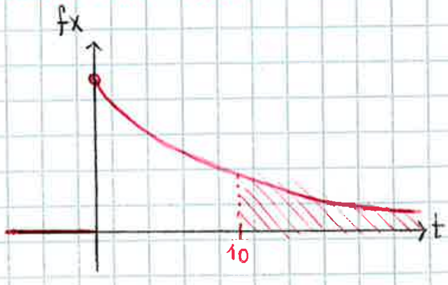
$$\begin{aligned} P[X\in[a,b]] &= P[X\in(a,b]]+P(X=a) = \\ &= F_X(b)-F_X(a)+\underbrace{P(X=a)}_{=0} = \\ &= F_X(b)-F_X(a) \end{aligned}$$

$(a,b]=(-\infty,b]\setminus(-\infty,a]$
$\Rightarrow P[X\in(a,b]] = P(X\in(-\infty,b])-P(X\in(-\infty,a]) = F_X(b)-F_X(a)$

$\Rightarrow \boxed{P[X\in[a,b]] = P[X\in(a,b)]}$ → vale per una variabile casuale assolutamente continua
non cambia niente se ci sono o meno gli estremi

- esempio
• compro vespa
Sia X = tempo vita vespa

Piaggio: X con densità $f_X(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t} & t\ge 0\end{cases}$

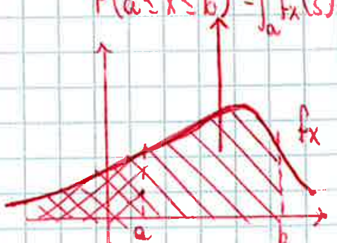


Verifico se f_X è una densità:
1) $f_X(t)\ge 0$ ok!
2) $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = \int_0^{\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t}\,dt = \frac{1}{5}\left[-5e^{-\frac{1}{5}t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{5}(-0+5)=1$ ok!

⇒ è una densità

$P[X>10]=1-\underbrace{P[X\le 10]}_{F_X(10)} = 1-\int_{-\infty}^{10} f_X(t)\,dt = \int_{10}^{\infty} f_X(t)\,dt = e^{-2}$

$P(a\le X\le b)=\int_a^b f_X(s)\,ds$



Quindi (cfr libro):

Diciamo che X è una variabile casuale assolutamente continua se esiste una funzione non negativa f definita per ogni numero reale $x\in(-\infty,+\infty)$, tale che per ogni sottoinsieme B di numeri reali

$P[X\in B]=\int_B f_X(s)\,ds$ ‡

Ovvero, se $B=(a,b)$, $P[X\in B] = P[X\in(a,b)] = F_X(b)-F_X(a) = \int_{-\infty}^{b} f_X(s)\,ds-\int_{-\infty}^{a} f_X(s)\,ds = \int_a^b f_X(s)\,ds$
Quindi se $a=b \Rightarrow P[X\in(a,a)] = P[X=a] = \int_a^a f_X(s)\,ds = 0$

01.04.2015

- Ricapitolando:

Data una v.c. X, essa viene descritta da

$F_X(t) = P[X \le t] \to$ f. di ripartizione

$\bar{F}_X(t) = 1 - F_X(t) = P[X > t] \to$ f. di sopravvivenza

$f_X(t) = \begin{cases} P[X = t] & \text{(discrete)} \\ F'_X(t) & \text{(con andamento continuo)} \end{cases}$

Basta solo una di queste per ricavare le altre, infatti:

$F_X(t) = \begin{cases} \sum_{t_i \le t} f_X(t_i) & \text{(discrete)} \\ \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds & \text{(andamento continuo)} \end{cases}$ $\to$ da f. di ripartizione a f. di densità

Per i vettori casuali o doppie, la densità congiunta è così definita.

$f_{(X,Y)}(t,s) = \begin{cases} P[X = t, Y = s] & \text{(discrete)} \\ \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} F_{(X,Y)}(t,s) & \text{(andamento continuo)} \end{cases}$ $\to$ da f. di densità a f. di ripartizione

dove quindi: $F_{(X,Y)}(t,s) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \to$ f. di ripartizione congiunta

---

- funzioni di ripartizione marginali

Data una coppia di v.c. (X,Y) e data $F_{(X,Y)}$ si possono risalire alla funzione di ripartizione riferita alla sola X o alla sola Y:

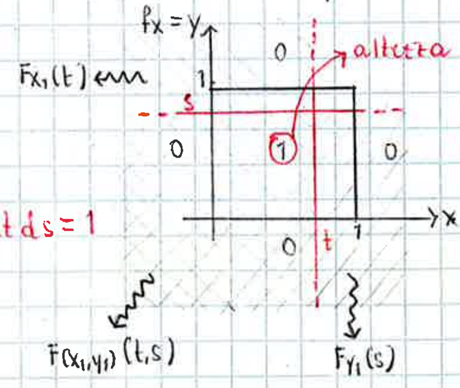
$F_X(t) = P[X \le t] = P[X \le t, Y \le +\infty] = F_{(X,Y)}(t, +\infty)$ $\to$ f. di ripartizione marginale di X (la Y fa quello che vuole)

$F_Y(s) = P[Y \le s] = P[X \le +\infty, Y \le s] = F_{(X,Y)}(+\infty, s)$ $\to$ f. di ripartizione marginale di Y (la X fa quello che vuole)

NOTA:

Date però le funzioni di ripartizione marginali, non sempre si possono risalire alla funzione di ripartizione congiunta.

- esempio



• (X_1, Y_1)

$f_{(X_1,Y_1)}(t,s)$ definita come in figura

$\to$ è effettivamente una funzione di densità perché $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X_1,Y_1)}(t,s)\,dt\,ds = 1$

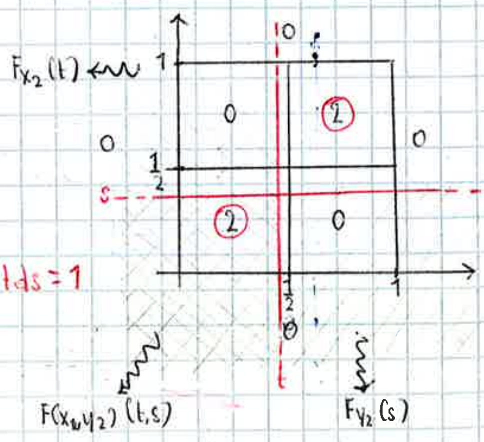
Sia $(t,s) \in [0,1]^2$

$\Rightarrow F_{(X_1,Y_1)}(t,s) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f_{(X_1,Y_1)}(x,y)\,dx\,dy = t \cdot s$ (l'altezza è 1)

$F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X_1,Y_1)}(x,y)\,dx\,dy = t \cdot 1 = t$ (l'altezza è 1)

$F_{Y_1}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{s} f_{(X_1,Y_1)}(x,y)\,dx\,dy = s \cdot 1 = s$

è un caso che esce il prodotto!



• (X_2, Y_2)

$f_{(X_2,Y_2)}(t,s)$ definita come in figura

$\to$ è effettivamente una funzione di densità perché $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X_2,Y_2)}(t,s)\,dt\,ds = 1$

Sia $(t,s) \in [0,1]^2$

$\Rightarrow F_{(X_2,Y_2)}(t,s) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f_{(X_2,Y_2)}(x,y)\,dx\,dy = 2\,t \cdot s$ altezza

$F_{X_2}(t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot t = t$

$F_{Y_2}(t) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot s = s$

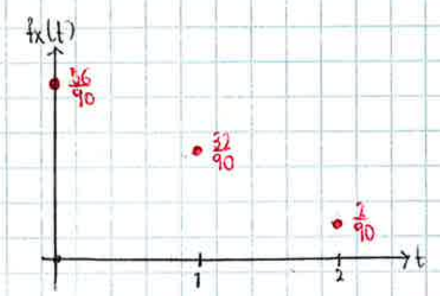
ho trovato le stesse marginali dell'esempio precedente partendo da due f. di ripartizione congiunte differenti

ciò significa che data una f. di ripartizione congiunta sono sempre in grado di trovare le sue marginali in modo univoco, ma non è sempre vero il viceversa

• Esperimento: urna con 10 componenti (8 OK + 2 KO)
estraggo 2 ~~e vedo se~~ (senza rimbussolamento)
v.c. N = # componenti guasti estratti

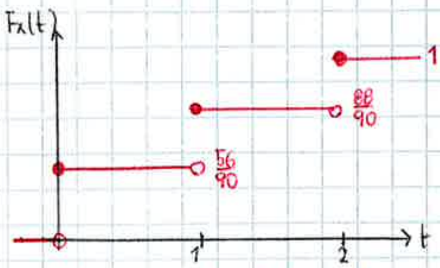
È una v.c perchè il risultato è un numero (#componenti KO)

→ v.c. discreta ~~(1 o 2)~~ (0, 1, 2)
$supp(N) = \{0, 1, 2\}$



$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \notin supp(N) \\ P[N=0] = \frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9} = \frac{56}{90} & t=0 \\ P[N=1] = 1 - \frac{56}{90} - \frac{2}{90} = \frac{32}{90} & t=1 \\ P[N=2] = \frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{90} & t=2 \end{cases}$$

la somma deve dare 1



$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \frac{56}{90} & t \in [0,1) \\ \frac{56}{90} + \frac{32}{90} = \frac{88}{90} & t \in [1,2) \\ 1 & t \geq 2 \end{cases}$$

la funzione di ripartizione è sempre a gradoni quando la variabile casuale è discreta.

* quindi $dF_X(t) = F'_X(t)\,dt = f_X(t)\,dt$ se F_X è derivabile
Altrimenti se la funzione non è derivabile, e compie dei salti, l'integrale si trasforma in una sommatoria (ovvero vale sempre 0 tranne nei punti in cui vale quanto l'ampiezza del salto).

• X con densità $f_X(t) = \begin{cases} 6(1-t)t & t \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$E[X] = \int_{\mathbb{R}} t \cdot f_X(t)\,dt = \int_0^1 6t^2(1-t)\,dt = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2}$ → la variabile casuale mediamente assume valore $\frac{1}{2}$ (baricentro parabola)

• N = n° componenti guasti estratti (es precedente)

$E[N] = \sum_{t_i} t_i f_X(t_i) = 0 \cdot \frac{56}{90} + 1 \cdot \frac{32}{90} + 2 \cdot \frac{2}{90} = \frac{2}{5} = 0,4$

- Proprietà della media o valore atteso

1) non sempre la media esiste o è finita

- esempio

X a valori $\{t_k = \frac{2^k}{k},\ k=1,2,\dots\}$ e $f_X(t_k) = \frac{1}{2^k}$ $k=1,2,\dots$ ⇒ X è discreta

f_X è densità? Sì se $\sum_{k=1}^{\infty} f_X(t_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 = 2-1 = 1$ ok!

$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} t_k f_X(t_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{2^k}}{k} \cdot \frac{1}{\cancel{2^k}} = +\infty$

2) se X = costante (cioè se $P[X=a]=1$) allora $E[X] = a \cdot P[X=a] = a \cdot 1 = a$

3) se supp(X) è limitato superiormente ed inferiormente allora $E[X] = [\inf(\text{supp}(X)), \sup(\text{supp}(X))]$

4) sia X v.c. e $Y = aX+b$, $a,b \in \mathbb{R}$ allora $E[Y] = E[aX+b] = aE[X]+b$ → linearità

Dimostrazione: (caso an. continuo)

$E[aX+b] = \int_{\mathbb{R}} (at+b) f_X(t)\,dt = a\int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\,dt + b\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = aE[X] = b \cdot 1 = aE[X]+b$

- esempio:

• Venditore porta a porta. Ogni giorno 3 clienti
Ognuno compra con probabilità $\frac{1}{3}$ (indipendente da altri)

X = n° oggetti venduti domani
$Y = 100 + 50 \cdot X$ = guadagno domani

$E[Y] = 100 + 50\,E[X] = 100 + 50 \cdot 1 = 150$

$P[X=0] = \frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

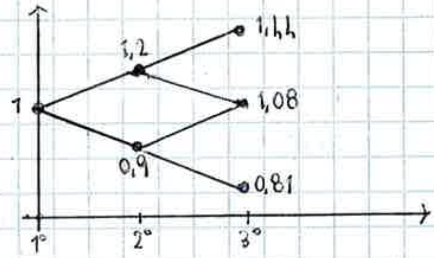
$P[X=1] = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$

$P[X=2] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$

$P[X=3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

⇒ $E[X] = 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{12}{27} + 2 \cdot \frac{6}{27} + 3 \cdot \frac{1}{27} = 1$

- esempio:
- investimento finanziario (incrementi indipendenti)
  investo una cifra a in un titolo azionario
  → ogni giorno il titolo può essere moltiplicato per 1,2 o per 0,9 (+20%, −10%) con probabilità rispettivamente $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$



Sia Y = valore del portafoglio il giorno 3

$E[Y] = E[(aX_1)\cdot X_2] = aE[X_1]E[X_2]$ → per l'ipotesi di indipendenza

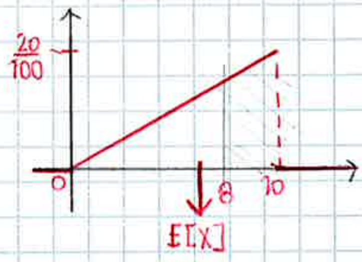
$Y = (a\cdot X_1)\cdot X_2$ con $X_i = \begin{cases} 1,2 \\ 0,9 \end{cases} \Rightarrow E[X_i] = 1,2\cdot\frac{1}{3} + 0,9\cdot\frac{2}{3} = \frac{3}{3}$

$\Rightarrow E[Y] = a\cdot 1\cdot 1 = a$ → investimento che restituisce in media quello da cui ero partito

~~Riepilogo~~:
Riepilogo:
- valori attesi: data v.c X, $\phi: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$
  . $E[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\, dF_X(t)$ integrale di Reimann - St.

In particolare: $E[X] = \int_{\mathbb{R}} t\, dF_X(t)$ avendo $\phi(x) = x$

- esercizi
- Sia X = livello acqua in una diga
  Sia $f_X(t) = \begin{cases} \frac{2}{100}t & t\in[0,10] \\ 0 & t\notin[0,10] \end{cases}$ è eff. una funzione di densità perché l'area è uno



a) $P[X>8] = \int_8^\infty f_X(t)\,dt = 1 - P[X<8] = \cancel{1-\frac{1}{2}10\frac{8}{100}8 = 1-\frac{8}{10}}\ 1-\frac{1}{2}8\cdot\frac{16}{100}$

b) $P[X=8] \neq \cancel{f_X(8)} = 0 \rightarrow \int_a^a f_X(t)\,dt = 0$

c) $E[X] = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\,dt = \int_0^{10} t\cdot\frac{2}{100}t\,dt = \frac{2}{100}\cdot\frac{1}{3}t^3\Big|_0^{10} = \frac{2}{100}\cdot\frac{1}{3}\cdot 10^3 = 10\cdot\frac{2}{3} = 6,\overline{6}$

- Urna $\{r, r, r, v, v\}$
  Estraggo senza reimbussolare
  Sia N = # estrazioni per ottenere una ROSSA ⇝ variabile casuale

→ descrivere la distribuzione di N
→ $E[N]$

→ 1) $\mathrm{Supp}(N) = \{1,2,3\}$ dopo tre estrazioni prendo sicuramente almeno una rossa

$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t\notin \mathrm{Supp}(N) \\ \frac{6}{10} & t=1 \\ \frac{3}{10} & t=2 \\ \frac{1}{10} & t=3 \end{cases}$

$P[N=1] = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

$P[N=2] = \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}\left(\frac{2}{5}\right)\frac{3}{4} = \frac{3}{10}$

N=2 se la prima è verde

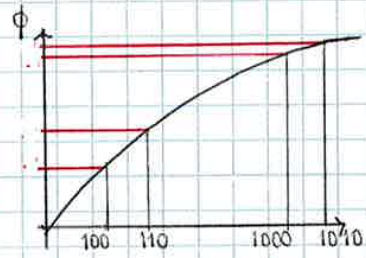
$P[N=3] = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} = \frac{1}{10}$

$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ \frac{6}{10} & t\in[1,2) \\ \frac{9}{10} & t\in[2,3) \\ 1 & t\geq 3 \end{cases}$ → funzione di ripartizione

$E[N] = \sum_i t_i\, P[N=t_i] = 1\cdot\frac{6}{10} + 2\frac{3}{10} + 3\cdot\frac{1}{10} = \frac{3}{2}$ $\left(\begin{matrix} N=t_i \\ P[N] = f_X(t_i) \end{matrix}\right)$

Ogni individuo ha una sua "funzione utilità" $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che descrive il grado di soddisfazione nel possedere del denaro

Si suppone che ϕ abbia il seguente andamento (crescente e concava)



Posso scegliere $\phi(t) = \log(t+1)$

Adesso confronto $E[\phi(X_1)]$, $E[\phi(X_2)]$ e scelgo il maggiore

$$E[\phi(X_1)] = \int_{\mathbb{R}} \log(t+1) f_{X_1}(t)\, dt =$$
$$= \int_1^3 \log(t+1) \cdot \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left[(1+t)(\log(1+t)-1)\right]_1^3 = 1{,}07$$

$$E[\phi(X_2)] = \int_{\mathbb{R}} \log(t+1) \cdot f_{X_2}(t)\, dt =$$
$$= \int_0^4 \log(t+1) \cdot \frac{1}{4}\, dt = \frac{1}{4}\left[(1+t)(\log(1+t)-1)\right]_0^4 = 1{,}01$$

Essendo $E[\phi(X_1)] > E[\phi(X_2)] \Rightarrow$ scelgo l'investimento 1

Nota: X_1 e X_2 hanno la stessa media ma sono chiaramente diverse
la media, da sola, non basta per descrivere le variabili casuali (è solo un indicatore riassuntivo (forse troppo)).
Sarebbe bello avere un indice che indica di quanto mi discosto dal valore effettivamente assumibile

Altro esempio

$$X_1 = \begin{cases} -1 & \frac{1}{3} \text{ (probabilità)} \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow E[X_1] = E[X_2] = \emptyset$
ma nel secondo esempio sono più vicino al valore medio

$$X_2 = \begin{cases} -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Come descrivere la variabilità? VARIANZA...

→ $E[X]$ fornisce la media pesata di tutti i possibili valori di X, ma non dà alcuna informazione riguardo alla variabilità, o dispersione di questi valori

2) $Var[X]=0$ se $X=a$ con probabilità 1

Dimostrazione:

$E[X]=a\cdot 1$

$V[X]=E[(X-E[X])^2]=(a-a)^2\cdot 1=0$

3) Data X
$V[aX+b]=a^2V[X],\ \forall a,b\in\mathbb{R}$

Dimostrazione:

$V[aX+b]=E[(aX+b-E[aX+b])^2]=$ → applico definizione $E[aX+b]=aE[X]+E[b]=aE[X]+b$

$=E[(aX+\cancel{b}-aE[X]-\cancel{b})^2]=$ → $(aX-aE[X])^2=a^2(X-E[X])^2$

$=a^2E[(X-E[X])^2]=$ ⇝ Immagina $E=\int$

$=a^2V[X]$

Quindi:
- se aggiungo o tolgo una costante, la varianza è la stessa
- $a<0$, non cambia niente

4) siano X, Y stocasticamente indipendenti
⇒ $V[X+Y]=V[X]+V[Y]$ ⇝ differenza rispetto alla medesima proprietà del valore atteso

Dimostrazione:

$V[X\pm Y]=E[(X\pm Y-E[X\pm Y])^2]=$ → definizione: $V[X]=E[(X-E[X])^2]$ → $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$

$=E[(X\pm Y-E[X]\mp E[Y])^2]=$

$=E[((X-E[X])\pm(Y-E[Y]))^2]=$

$=E[(X-E[X])^2+(Y-E[Y])^2\pm 2(X-E[X])(Y-E[Y])]=$

$=E[(X-E[X])^2]+E[(Y-E[Y])^2]\pm 2E[XY-E[X]Y-E[Y]X+E[X]\cdot E[Y]]$

$=V[X]+V[Y]\pm 2\,(E[XY]-E[\underbrace{E[X]\cdot Y}_{E[X]E[Y]}]-E[\underbrace{E[Y]\cdot X}_{E[Y]\cdot E[X]}]+E[\underbrace{E[X]\cdot E[Y]}_{E[X]\cdot E[Y]}])$ → $E[X]=\text{cost}\Rightarrow E[E[X]]=E[X]$

$=V[X]+V[Y]\pm 2(E[XY]-E[X]E[Y])$ ⇝ indipendenza ⇒ $E[XY]=E[X]\cdot E[Y]$

$=V[X]+V[Y]$

OSSERVAZIONE:

$V[X-Y]\neq V[X]-V[Y]$ perché il − sarebbe rimasto solo al termine che si annulla (vedi ±)

infatti

$V[X-Y]=V[X]+V[Y]$

⇒ siano, X e Y stocasticamente indipendenti ⇒ $V[X\pm Y]=V[X]+V[Y]$

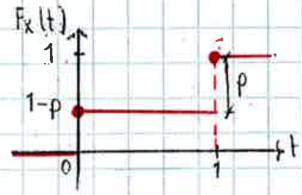
DISTRIBUZIONI NOTEVOLI

[$\sim$ = distribuita come]

- **discrete**

- Distribuzione di BERNOULLI

X è detta distribuita secondo una BERNOULLI di un parametro $p \in [0,1]$, e scriviamo $X \sim Bernoulli(p)$ se:

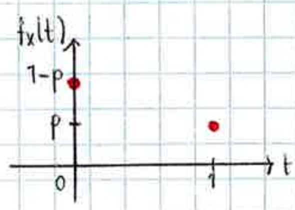


$$X = \begin{cases} 0 & \text{con probabilità } (1-p) \\ 1 & \text{"} \quad p \end{cases}$$

$p(0) = 1-p = P[X=0]$
$p(1) = p \quad = P[X=1]$

→ $E[X] = 0(1-p) + 1\,p = p$

→ $V[X] = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 (p) = p(1-p)$



Questa distribuzione si presenta quando un fenomeno può capitare o no! Possibili esiti: SUCCESSO o INSUCCESSO
$X=1$ $\quad$ $X=0$

- Distribuzione BINOMIALE

Siano $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, n variabili distribuite secondo una BERNOULLI di identico parametro p e indipendenti
Sia $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + \dots + X_n$

X è detta distribuita secondo una BINOMIALE di parametri n $(n \in \mathbb{N})$ e $p \in [0,1]$
$X \sim Binomiale(n,p)$

A cosa serve? A contare quanti individui su un totale di n, soddisfano una certa proprietà

$Supp(X) = \{0, 1, \dots, n\}$ essendo $Supp(X_i) = \{0; 1\}$

→ $P[X=K] = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$ * = probabilità di ottenere esattamente K successi

→ $E[X] = \sum_{K=0}^{n} K \cdot P[X=K] = \dots = E[X_1 + \dots + X_n] =$
$\quad = E[X_1] + \dots + E[X_n] = np$ ⇝ perché $X_i \sim Bernoulli(p)$

→ $V[X] = V[X_1 + \dots + X_n] \underset{\text{indipendenza}}{=} V[X_1] + \dots + V[X_n] = np(1-p)$

OSSERVO CHE: Una variabile aleatoria di Bernoulli è semplicemente una variabile binomiale di parametri (1, p)

$$\boxed{X \sim Bernoulli(p) = Binomiale(1,p)}$$

* $P[X=K] = \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$ = probabilità di ottenere esattamente K successi
Infatti:
ogni particolare successione di n esiti contenenti K successi e n-K insuccessi si verifica, grazie all'ipotesi di indipendenza delle prove, con probabilità pari a $\underbrace{p^K}_{succ} \underbrace{(1-p)^{n-K}}_{insucc}$

Essendoci esattamente $\binom{n}{K}$ differenti scelte delle K prove nelle quali si verifichino i successi (ovvero ci sono $\binom{n}{K}$ differenti successioni di n esiti contenenti K successi e n-K insuccessi) si giunge alla formula di $P[X=K]$

Per esempio se n=4, la probabilità di ottenere K=3 successi sarà verificata in esattamente $\binom{4}{3} = 4$ modi, ovvero ci sono 4 modi nei quali le quattro prove possono dare come risultato 3 successi e 1 insuccesso: (s,s,s,i), (s,s,i,s), (s,i,s,s), (i,s,s,s)

- Ho 2 monete e ne estraggo una a caso e la lancio h volte (la stessa moneta)

$M_1 \begin{cases} T & \frac{1}{2} \\ C & \frac{1}{2} \end{cases}$, $M_2 \begin{cases} T & \frac{1}{3} \\ C & \frac{2}{3} \end{cases}$

Sia N = numero di teste dopo h lanci → conto quante volte esce testa

$P[N=2] = P(M_1) \cdot P[N=2 \mid M_1] + P(M_2) \cdot P[N=2 \mid M_2] =$

$= \frac{1}{2} P[\text{Binomiale}(h, \frac{1}{2}) = 2] + \frac{1}{2} P[\text{Binomiale}(h, \frac{1}{3}) = 2] =$

h lanci → prob. che esca testa   h lanci

$= \frac{1}{2}\binom{h}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\binom{h}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \ldots$

h → numero max di teste ottenibili

$E[N] = \sum_{n=0}^{h} n \, P[N=n] =$

$= \sum_{n=0}^{h} n \left(\frac{1}{2} P[Bin(h, \frac{1}{2}) = n] + \frac{1}{2} P[Bin(h, \frac{1}{3}) = n] \right) =$ $X \sim Bin(n,p)$

$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{h} n P[Bin(h, \frac{1}{2}) = n] + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{h} n P[Bin(h, \frac{1}{3}) = n] =$ $\to E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \, P[X=k] = np$

$= \frac{1}{2} E[Bin(h, \frac{1}{2})] + \frac{1}{2} E[Bin(h, \frac{1}{3})] =$

$= \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

- stesse monete di prima

Sempre h lanci, ma dopo ogni lancio mischio le monete ed estraggo nuovamente

$N = \#$ teste dopo h lanci

$= X_1 + X_2 + X_3 + X_h$ $X_i = \begin{cases} 0 & C \\ 1 & T \end{cases}$

X_i, X_j indipendenti

$\Rightarrow N \sim Bin(h, p)$, p = probabilità testa al singolo lancio

$= P(M_1) \cdot P(T \mid M_1) + P(M_2) \cdot P(T \mid M_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

$P[N=2] = P[Bin(h, \frac{5}{12}) = 2] =$

$= \binom{h}{2} \frac{5}{12}^2 \cdot \left(1 - \frac{5}{12}\right)^2 = \ldots \neq P[N=2]$ di prima

$E[N] = \sum_{n=0}^{h} n \cdot P[N=n] =$

$= np = \frac{5}{3}$ → il valore atteso è lo stesso di prima

È un caso che abbiano lo stesso valore atteso!

Dimostrazione:
Noto che $Supp(S) = \mathbb{N}$

$$P[S=K] = P[X_1=0, X_2=K] + P[X_1=1, X_2=K-1] + \dots + P[X_1=K, X_2=0] =$$

$$= P[X_1=0]\, P[X_2=0] + \dots + P[X_1=K]\, P[X_2=0] =$$ → X_1, X_2 indipendenti

$$= \sum_{i=0}^{K} P[X_1=i]\, P[X_2=K-i] =$$

$$= \sum_{i=0}^{K} \left(\frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1}\right)\left(\frac{\lambda_2^{K-i}}{(K-i)!} e^{-\lambda_2}\right) =$$ → moltiplico e divido per $K!$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{K!} \sum_{i=0}^{K} \frac{K!}{i!(K-i)!} \lambda_1^i \lambda_2^{K-i} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{K!} \sum_{i=0}^{K} \binom{K}{i} \lambda_1^i \lambda_2^{K-i} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{K!} (\lambda_1+\lambda_2)^K =$$ → $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^K}{K!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} = P[\text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)] =$$

2) Sia $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$
$X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$
X_1, X_2 stocasticamente indipendenti

$$\Rightarrow \boxed{P[X_1=K \mid X_1+X_2=n] = P[X=K],\ X \sim Bin\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)}$$

Dimostrazione:

$$P[X_1=K \mid X_1+X_2=n] = \frac{P[X_1=K, X_1+X_2=n]}{P[X_1+X_2=n]} =$$

$$= \frac{P[X_1=K, X_2=n-K]}{P[X_1+X_2=n]} =$$ → $X_1=K$, $X_1+X_2=n$ ⇒ $X_2=n-K$

$$= \frac{P[X_1=K]\cdot P[X_2=n-K]}{P[X_1+X_2=n]} =$$ → X_1, X_2 indipendenti

$$= \frac{\left(\frac{\lambda_1^K}{K!}\cancel{e^{-\lambda_1}}\right)\left(\frac{\lambda_2^{n-K}}{(n-K)!}\cancel{e^{-\lambda_2}}\right)}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}} =$$

$$= \frac{n!}{K!(n-K)!} \frac{\lambda_1^K \cdot \lambda_2^{n-K}}{(\lambda_1+\lambda_2)^n} =$$

$$= \binom{n}{K}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^K \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-K} =$$

$$= \binom{n}{K} p^K (1-p)^{n-K}$$ → $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$

$$= P[Bin(n,p)=K]$$

- Distribuzione GEOMETRICA

Ripetiamo un esperimento in sequenza fino al verificarsi di un fenomeno che mi interessa
Supponiamo che, ogni volta, la probabilità di verificarsi sia costante e uguale a p.
Sia N=# esperimenti da effettuare per avere l'evento positivo
N è detta distribuita secondo una ~~geome~~ GEOMETRICA p. e si indica $N \sim Geo(p)$

$Supp(N)=\{1,\dots\}=\mathbb{N}^+$ → devo fare almeno un tentativo

$P[N=1]=p$ (l'evento 1 si verifica)
$P[N=2]=(1-p)\cdot p$ (l'evento 1 non si verifica, l'evento 2 si verifica)
$P[N=3]=(1-p)^2\cdot p$ (l'evento 1 e 2 non si verificano, l'evento 3 si verifica)
⋮

→ $P[N=K]=(1-p)^{K-1}\cdot p$ → non moltiplico $\binom{n}{k}$ perché la possibile sequenza è unica (NO-NO-...-SI)

OSSERVO CHE:

$$-\sum_{K=1}^{\infty} P[N=K] = \sum_{K=1}^{\infty}(1-p)^{K-1}p = p\sum_{n=1}^{\infty}\cancel{(1-p)^{-1}\cdot(1-p)^K}$$

$$= p\sum_{K=0}^{\infty}(1-p)^K = p\frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1 \rightarrow 1-p<1 \Rightarrow$$ è effettivamente una distribuzione di probabilità

$$\rightarrow E[N]=\sum_{K=1}^{\infty}K\,P[N=K]=\sum_{K=1}^{\infty}K(1-p)^{K-1}\cdot p =$$ converge assolutamente perché la somma è una geometrica finita

$$= p\sum_{K=1}^{\infty}\left(-\frac{d}{dp}(1-p)^K\right) = -p\sum_{K=1}^{\infty}\frac{d}{dp}(1-p)^K = p\cdot\frac{d}{dp}\sum_{K=1}^{\infty}(1-p)^K = -p\frac{d}{dp}\left(\sum_{K=0}^{\infty}(1-p)^K - 1\right) =$$

$$= -p\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{1-(1-p)}-1\right) = -p\left(-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{p}$$

$\Rightarrow E[N]=\frac{1}{p}$ (sensato: se la prob che il Torino vinca è uno su 20 $(\frac{1}{20})$ mi aspetto che il numero medio di giocate che deve fare prima di vincere è 20)

In maniera analoga si verifica che:

→ $V[N]=\frac{1-p}{p^2}$

- esempi:
- lancio dado equilibrato finché esce 6
  N = n° lanci

a) $P[N=3]$
b) $E[N]$
c) $P[N>2]$

a) $P[N=3]=P[Geo(\frac{1}{6})=3]=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$ (probabilità che venga 6)

b) $E[N]=\frac{1}{\frac{1}{6}}=6$

c) $P[N>2]=1-\underbrace{P[N=0]}_{=0 \text{ non accetto}}-P[N=1]-P[N=2]=$

$$=1-0-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=1-\frac{11}{36}$$

Attenzione:
Alcuni libri di testo definiscono $N\sim Geo(p)$ se N = # prove da fare prima di ottenere esito positivo (cioè le prove andate a vuoto).
In questo caso (traslazione di 1): $Supp(N)=\{0,1,\dots\}$
$P[N=K]=(1-p)^K\cdot p$
$E[N]=\frac{1}{p}-1$
$V[N]=\frac{1-p}{p^2}$

06.05.2015

- esempio
- lancio due dadi equilibrati insieme finquando uno di questi si assume valore 1.

Sia $N = \#$lanci da fare
→ $P[N>2]$
→ $E[N]$

Sia $N_1 = \#$lanci per ottenere 1 sul dado 1
$N_2 =$ " " " " 2

$N = \min(N_1, N_2)$

→ N_1 conta quanti esperimenti devo fare ⇒ distribuzione geometrica
$N_1 \sim Geo(\frac{1}{6})$ $p_1 = \frac{1}{6}$

→ $N_2 \sim Geo(\frac{1}{6})$ $p_2 = \frac{1}{6}$

N_1 e N_2 sono indipendenti

⇒ $N \sim Geo(p_1 + p_2 - p_1 p_2)$
$N \sim Geo(\frac{11}{36})$

→ $P[N>2] = (1 - \frac{11}{36})^2$ $(P[N>k] = (1-p)^k)$

→ $E[N] = \frac{1}{\frac{11}{36}} = \frac{36}{11}$

~~- Distribuzione BINOMIALE NEGATIVA (PASCAL)~~

es.
~~- dado equilibrato. lo lanciamo fin quando il numero 1 compare due volte (compare per la seconda volta)~~
~~$X = \#$ lanci da fare~~
~~$Supp(X) = \{2, 3, 4, \dots\}$ $p = \frac{1}{6}$~~

~~→ $P[X=2] = p \cdot p = p^2$~~

~~non conto il caso $pp(1-p)$ perché mi fermo appena trovo l'1 per la seconda volta~~

~~→ $P[X=3] = (1-p)pp + p(1-p)p = 2(1-p)p^2$~~

~~→ $P[X=4] = 3(1-p)^2 p^2$~~

1°	2°	3°	4°
1	x	x	1
x	1	x	1
x	x	1	1

~~Per induzione~~
~~$P[X=k] = (k-1)(1-p)^{k-2} p^2 = \binom{k-1}{1} (1-p)^{k-2} p^2$~~

~~In questi casi~~
↓
~~$X \sim NBin(2, p)$ dove $2 = \#$ di volte che deve verificarsi l'evento positivo che mi interessa~~
~~$p =$ probabilità che in ogni singola ripetizione dell'esperimento si verifica il fenomeno di interesse~~

~~Generalizzando~~
~~$X \sim NBin(k, p)$ dove $r \in \mathbb{N}^+$ e $p \in [0,1] \subseteq \mathbb{R}$~~

~~→ $P[X=k] = \binom{k-r-1}{r-1}$~~

- Distribuzione IPERGEOMETRICA

introduciamola con un esempio:
- suppongo urna con n_A oggetti di tipo A e n_B oggetti di tipo B
  Ne estraggo n senza reimbussolamento $(0 \le n \le n_A + n_B)$
  Sia $X = \#$ oggetti di tipo A estratti

Se ad esempio ho un'urna con 2 palle rosse e 2 palle blu e faccio 3 estrazioni X potrà assumere i seguenti valori:
→ nel caso pessimo: faccio 3 estrazioni ⇒ prendo 2 blu e solo 1 rossa ⇒ $X=1$
→ nel caso migliore: faccio 3 estrazioni ⇒ prendo 2 rosse e 1 blu ⇒ $X=2$
⇒ $Supp(X) = \{1,2\} = \{n - n_B, n_A\}$ (n = estrazioni)

Se invece il numero di estrazioni è minore del numero delle palle rosse, ad esempio faccio 1 estrazione
→ nel caso pessimo: faccio 1 estrazione ⇒ prendo 1 blu ⇒ $X=0$
→ nel caso migliore: faccio 1 estrazione ⇒ prendo 1 rossa ⇒ $X=1$
⇒ $Supp(X) = \{0,1\} = \{0, n\}$

In generale quindi (se non posso confrontare n e n_A) si ha:

→ $Supp(X) = \{\max\{0, n-n_B\}, \dots, \min\{n, n_A\}\}$

In questi casi $X \sim Iper(n_A, n_B, n)$ → Importante l'ordine dei parametri n_A e n_B
Il primo si riferisce agli oggetti ~~che sto~~ estratti che sto contando.
Se devo contare gli oggetti di tipo A estratti, il primo parametro è il numero totale di oggetti di tipo A

Generalizzando
la distribuzione ipergeometrica $Iper(n_A, n_B, n)$ descrive la variabile aleatoria X che conta, per n elementi distinti estratti a caso (in modo equiprobabile) da un insieme di cardinalità $n_A + n_B$, quanti sono nel sottoinsieme di cardinalità n_A. In tal caso si scrive $X \sim Iper(n_A, n_B, n)$

→ $Supp(X) = \{\max\{0, n-n_B\}, \dots, \min\{n, n_A\}\}$

→ $P[X=k] = \dfrac{\binom{n_A}{k}\binom{n_B}{n-k}}{\binom{n_A+n_B}{n}}$

→ casi favorevoli: $\binom{n_A}{k}$ = # possibili estrazioni di k elementi tra n_A elementi
$\binom{n_B}{n-k}$ = # possibili estrazioni di n-k elementi restanti tra gli n_B elementi

→ casi possibili: $\binom{n_A+n_B}{n}$ = # possibili estrazioni di n elementi tra n_A+n_B elementi

→ $E[X] = \sum_{k=r}^{+\infty} k\, P[X=k] = \dots$

OSSERVO CHE: $X = X_1 + \dots + X_n$ dove $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se di tipo A} \Rightarrow p_A = \frac{n_A}{n_A+n_B} \\ 0 & \text{se di tipo B} \Rightarrow p_B = \frac{n_B}{n_A+n_B} \end{cases}$

Ma X non è una binomiale perché X_i e X_j sono dipendenti (se estraggo un oggetto di tipo A, alla successiva estrazione, la probabilità di estrarre un oggetto di tipo A, sarà condizionata dal fatto che già ne ho preso una.

→ $E[X] = E[X_1 + \dots + X_n] \overset{\text{anche se non indipendenti}}{=} E[X_1] + \dots + E[X_n] = \frac{n_A}{n_A+n_B} + \dots + \frac{n_A}{n_A+n_B}$ $\quad E[X_i] = 1 \cdot \frac{n_A}{n_A+n_B} + 0 \cdot \frac{n}{n_A+n_B} = \frac{n_A}{n_A+n_B}$

⇒ $E[X] = n \frac{n_A}{n_A+n_B}$

~~ESAME~~ → ESAME

+ urna, 8 componenti $\begin{cases} 6 & KO \\ 2 & OK \end{cases}$

Ne voglio 2 componenti funzionanti
Estraggo uno alla volta e li testo fin quando non ritrovo in mano i due funzionanti
Sia $N = \#$ test per concludere l'operazione
→ Dire tutto su N

1) $\text{supp}(N) = \{2, 3, \dots, 8\}$
fortunato (2) — sfortunato (8)

⇒ $N \not\sim$ Bernoulli(p) perché non vale solo 0 e 1 $(\text{supp}(N) \neq \{0,1\})$

$N \not\sim$ Binomiale(n,p) perché non sto contando gli esiti positivi

$N \not\sim$ Geo(p) perché non sto contando il numero di estrazioni che devo fare per ottenere 1 volta, quello che mi interessa (qui mi serve due volte)

$N \not\sim$ NBin(r,p) perché nella Binomiale negativa, tutte le volte che estraggo ho la stessa probabilità di avere esito positivo (qui è limitato perché una volta testato, metto via)

⇒ devo studiarla!

→ $P[N=2] = \left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{7}\right)$ → estraggo 1 funzionante su 7
↳ estraggo 1 funzionante su 8

1	2	3
x	1	1
1	x	1

→ $P[N=3] = \frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6} = 2\left(\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\right) = \binom{2}{1}\left(\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}\right)$

→ $P[N=4] = \frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{6}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5} + \frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \binom{3}{1}\left(\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\right)$

1	2	3	4
1	x	x	1
x	1	x	1
x	x	1	1

⋮

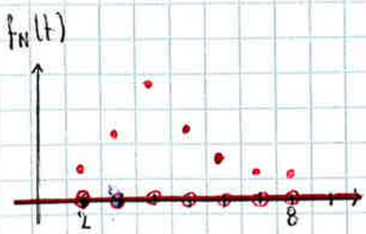
→ $P[N=K] = \binom{K-1}{1}\underbrace{\left(\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdots\frac{K-2}{8-(K-2)}\right)}_{K-2 \text{ non funzionanti}}\cdot\left(\frac{2}{8-(K-2)-1}\cdot\frac{1}{8-K}\right)$ → 2 funzionanti

$$= \left(\frac{1}{8-K}\right)\frac{\binom{6}{K-2}\binom{1}{1}}{\binom{7}{K-1}}$$

→ funzionante
→ non funzionante
→ estrazione
ultima funzionante

$$P[N=K] = \frac{1}{8-K}\cdot\frac{\binom{6}{K-2}\binom{1}{1}}{\binom{7}{K-1}}$$

$f_N(t)$

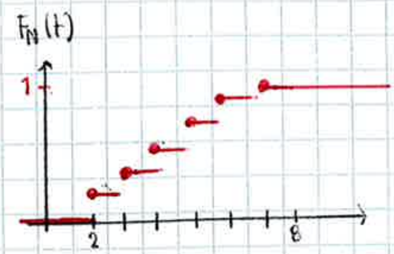


$E[N] = \sum_{K=2}^{8} K \cdot P[N=K] = \dots$

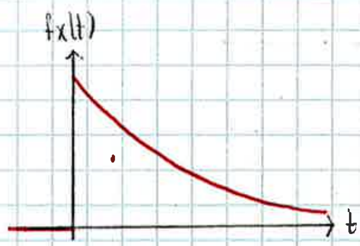
$V[N] = E[N^2] - (E[N])^2 = \sum_{K=2}^{8} K^2 P[N=K] - (E[N])^2 = \dots$

per variabili discrete è meglio utilizzare questa formula per calcolare la varianza

$F_N(t)$



- Distribuzione ESPONENZIALE



Definiamo $X \sim Exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ se

$$\boxed{f_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}}$$ (è eff. una funzione di densità)

$\Rightarrow F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(t)\,dt = 1 - \int_{t}^{\infty} f_X(t)\,dt = \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$ per definizione

$= 1 - \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_t^{\infty} = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0)$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{F}_X(t) = P[X > t] = \begin{cases} 1 & t < 0 \\ e^{-\lambda t} & t \geq 0 \end{cases}}$$ $\rightarrow$ serve per il tempo di vita dei componenti

$\rightarrow E[X] = \int_{0}^{\infty} t f_X(t)\,dt =$

$= \int_0^{\infty} \bar{F}_X(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}$

$\Rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda}$

$\rightarrow V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

- esempio
- Componente elettronico con vita media $= 100$ gg
  T = suo tempo di vita

  $P[T > 150] = ?$

  $T \sim Exp(\lambda)$

  $\lambda = ? \Rightarrow E[X] = \frac{1}{\lambda} = 100 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{100}$

  $\Rightarrow P[T > 150] = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{1}{100} \cdot 150} = e^{-\frac{3}{2}}$

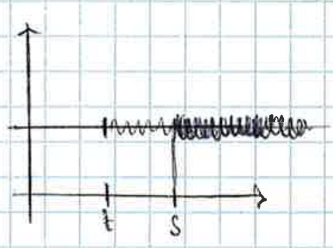
- Proprietà di non memoria
Sia $X \sim Exp(\lambda)$. Allora $\forall t, s \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{P[X > t+s \mid X > t] = P[X > s]}$ $\rightarrow$ Significa che la probabilità che il componente sopravviva altri s istanti, sapendo che ne ha già vissuti t, è uguale alla probabilità che sopravviva s istanti da nuovo.

Dimostrazione:

$P[X > t+s \mid X > t] = \frac{P[X > t+s,\ X > t]}{P[X > t]} =$

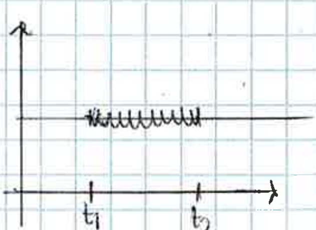
$= \frac{P[X > t+s]}{P[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[X > s]$



È l'unica distribuzione, tra quelle continue, che gode di questa proprietà

Si dimostra analogamente che

$P[X < t_2 \mid X > t_1] = P[X < t_2 - t_1]$
$t_2 > t_1$



- Distribuzione di WEIBULL

È una generalizzazione della esponenziale
Definiamo $X \sim$ Weibull (α, β), $\alpha, \beta > 0$ se

$$r_X(t) = \begin{cases} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \cdot \frac{\beta}{\alpha} & \text{se } t \geq 0 \\ \text{no def.} & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Noto se $\beta = 1 \Rightarrow r_X(t) = \frac{1}{\alpha} = \text{cost} \Rightarrow$ ~~Weibull~~ Esponenziale

se $\beta > 1 \Rightarrow r_X(t)$ è crescente

se $\beta < 1 \Rightarrow r_X(t)$ è decrescente

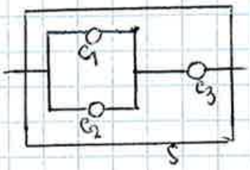
$\Rightarrow \bar{F}_X(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}$

$\rightarrow E[X] = \alpha \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ dove $\boxed{\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx,\ \alpha > 0}$ $\rightarrow$ funzione di Gamma

12.05.2015

- esercizi

- Componenti in serie e in parallelo



Siano T_1, T_2, T_3 i tempi di vita dei 3 componenti (supposti indipendenti)
$\rightarrow T =$ tempo di vita di S (intero sistema)
$\rightarrow E[T]$

a) $T_i \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$

b) $T_i \sim U(0,10)$

c) $P[C_1$ sia ok $| S$ è ok$]$ in $t = 10$ con $T_i \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$

a) $T_i \sim Exp\left(\frac{1}{10}\right)$ indipendenti
devo calcolare la funzione di sopravvivenza di T

$\bar{F}_T(t) = P[T > t] = P[\underset{\uparrow\ C_3 \text{ ok}}{(T_3 > T)} \cap ((T_1 > T) \underset{\uparrow\ \text{almeno 1 tra } C_1 \text{ e } C_2 \text{ ok}}{\cup} (T_2 > T))] =$ $\rightarrow T_i$ indipendenti ma non incompatibili

$= P[T_3 > t] \cdot (P[T_1 > t] + P[T_2 > t] - P[T_1 > t] P[T_2 > t]) \rightarrow$ perché T_1 e T_2 non sono incompatibili

$= \bar{F}_{T_3}(t) \cdot (\bar{F}_{T_1}(t) + \bar{F}_{T_2}(t) - \bar{F}_{T_1}(t)\bar{F}_{T_2}(t)) =$

$= e^{-\frac{1}{10}t} [2e^{-\frac{1}{10}t} - e^{-\frac{2}{10}t}] =$

$= 2e^{-\frac{2}{10}t} - e^{-\frac{3}{10}t}$ $(t \geq 0)$ $\rightarrow$ per f. di densità, derivare!!

$$E[T] = \int_0^{+\infty} \bar{F}_T(t)\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2}{10}t}\, dt - \int_0^\infty e^{-\frac{3}{10}t}\, dt = 2\left(\frac{10}{2}\right) - \left(\frac{10}{3}\right) = \frac{20}{3}$$

$\left(E[X] = \frac{1}{\lambda} \text{ se } f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}\ \ t \geq 0\right) \sim$ dist. esponenziale

c) Uso sdo 1, sapendo che ho concluso

$$P[T_1>8 \mid T>8] = \frac{P[T_1>8, T>8]}{P[T>8]} = \frac{P[T_1>8]}{P[T>8]} = \dots$$

ovvio se $T_1>8$

d) $P[$1° si sia guastato prima di 5gg | il secondo è in funzione all'VIII giorno$] =$

↳ $T_1+T_2 \geq 8$ ma $T_1 \leq 8$

$$= P[T_1 \leq 4, T_1 \leq 8, T_1+T_2 \geq 8] =$$

$T_1 \leq 4$ is the same!!

$$= \frac{P[T_1 \leq 4, T_1 \leq 8, T_1+T_2 \geq 8]}{P[T_1<8, T_1+T_2 \geq 8]} = \frac{P[T_1 \leq 4, T_1+T_2 \geq 8]}{P[T_1<8, T_1+T_2 > 8]} =$$

$\rightarrow P[T_1 \leq 4, T_1+T_2 > 8] = P[T_1=1]\cdot P[T_1+T_2>8 \mid T_1=1] + P[T_1=2]\cdot P[T_1+T_2>8 \mid T_1=2] + \cancel{P[T_1=4]\,P[T_1+T}$
$+ P[T_1=3]\cdot P[T_1+T_2>8 \mid T_1=3] + P[T_1=4]\cdot P[T_1+T_2>8 \mid T_1=4] =$

$$= p\cdot P[T_2>8-1] + (1-p)\,p\,P[T_2>8-2] + (1-p)^2\, p\, P[T_3>8-3] + (1-p)^3 p\, P[T_4>8-4] =$$

$$= p(1-p)^7 + (1-p)\,p\,(1-p)^6 + (1-p)^2\, p\,(1-p)^5 + (1-p)^3 p\,(1-p)^4 =$$

$$= 4p(1-p)^7$$

+ Similmente per il denominatore

• Siano $X_1, X_2 \sim$ Bernoulli$(0,4)$ indipendenti.
Dire tutto su:

- $Y_1 = X_1 \cdot X_2$
- $Y_2 = \min(X_1, X_2)$
- $Y_3 = \max(X_1, X_2)$
- $Y_4 = Y_3 - Y_2$

$\Rightarrow X_i \begin{cases} 1 & p_1 = 0,4 \\ 0 & p_0 = 0,6 \end{cases}$

- $\mathrm{supp}(Y_1) = \{0,1\}$ $\Rightarrow Y_1 \begin{cases} 1 & \text{prob} = 0,4\cdot 0,4 = 0,16 \\ 0 & \text{prob} = 1-0,16 = 0,84 \end{cases}$

$\Rightarrow Y_1 \sim$ Bernoulli$(0,16)$

- $\mathrm{Supp}(Y_2) = \{0,1\}$ $\Rightarrow Y_2 \begin{cases} 1 & \text{prob} = 0,16 \\ 0 & \text{prob} = 0,84 \end{cases}$

$\Rightarrow Y_2 \sim$ Bernoulli$(0,16)$

- $\mathrm{Supp}(Y_3) = \{0,1\}$ $\Rightarrow Y_3 \begin{cases} 1 & \text{prob} = 1-0,36 = 0,64 \\ 0 & \text{prob} = 0,6\cdot 0,6 = 0,36 \end{cases}$

$\Rightarrow Y_3 \sim$ Bernoulli$(0,64)$

- $\mathrm{Supp}(Y_4) = \{0,1\}$ $\Rightarrow Y_4 \begin{cases} 1 & \text{prob} = 0,48 \\ 0 & \text{prob} = 0,52 \end{cases}$

$\Rightarrow Y_4 \sim$ Bernoulli$(0,48)$

	X_1	X_2	Y_2	Y_3	Y_4
0,36	0	0	0	0	0
0,24	0	1	0	1	1
0,24	1	0	0	1	1
0,16	1	1	1	1	0

- Distribuzione GAMMA

13-05-2015

Ricordo che $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ → l'integrale esiste finito $\forall \alpha > 0$

Si osserva che:

$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$

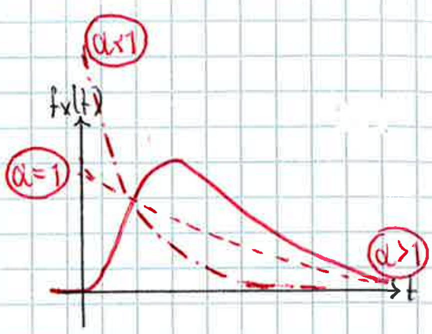
$\Gamma(1)=1$

$\Gamma(n)=(n-1)! \quad n\in\mathbb{N}^+$

$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$

X è distribuita secondo una gamma di parametri $\alpha,\lambda>0$ se:

$$\boxed{f_X(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \dfrac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & t\geq 0 \end{cases}}$$



se $\alpha=1$ trovo l'esponenziale

→ caso in cui $\alpha=n\in\mathbb{N}^+$

n=1) $X\sim Exp(\lambda)$

n=2) variabile definita come somma di esponenziali di identico parametro λ

$$\boxed{X\sim\Gamma(n,\lambda) \text{ se } X=X_1+\dots+X_n \quad X_i\sim Exp(\lambda) \text{ indipendenti}}$$

⇝ lo dimostro dopo (somma di v.c. indipendenti)

In particolare, se $\alpha=n$, allora si parla di distribuzioni di Erlang

→ ~~funzione di sopravvivenza~~ distribuzione cumulata

$F_X(t)=\int_0^t f_X(\tilde{t})d\tilde{t}=$

→ $E[X]=E[X_1+\dots+X_n]=E[X_1]+\dots+E[X_n]=n\cdot\frac{1}{\lambda}$ ⇝ Ricordando che $X\sim\Gamma(n,\lambda)$

→ $E[X]=n\frac{1}{\lambda}$

→ $V[X]=n\frac{1}{\lambda^2}$

- esempio

• lavoro di ~~un~~ 12 ore, dispongo di 2 operai.
Comincia il primo e quando crolla inizia a lavorare il secondo.

Calcolare la probabilità di riuscire a concludere ~~ete~~ il lavoro sapendo che $T_i\sim Exp(\frac{1}{5})$ e indipendenti

$T=T_1+T_2 \quad \rightarrow T\sim\Gamma(2,\frac{1}{5})$

$P[T>12]=$

$$=\int_{12}^{\infty} f_T(s)\,ds=\int_{12}^{\infty}\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{\Gamma(n)}ds=\int_{12}^{\infty}\frac{\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}t}\cdot\frac{1}{5}\cdot t}{1!}dt=\dots=e^{-\frac{12}{5}}\left(1+\frac{12}{5}\right)$$

Dimostrazione:

Definisco $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Voglio mostrare che Z ha distribuzione normale di media 0 e varianza 1.

$\rightarrow F_Z(t) = P[Z \leq t] = P[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq t] = P[X \leq \sigma t + \mu] = F_X(\mu + \sigma t)$

$\rightarrow f_Z(t) = F_Z'(t) = F_X'(\mu+\sigma t) = f_X(\mu+\sigma t)\cdot\sigma =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\mu+\sigma t-\mu)^2}{\sigma^2}}\cdot\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow Z \sim N(0,1)$$

L'operazione $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ è detta standardizzazione

- esempio:

- Sia $X \sim N(100, 25)$
  $\mu = 100$
  $\sigma^2 = 25 \rightarrow \sigma = 5$

$P[X>108] = \int_{108}^{\infty} f_X(t)\,dt =$ non so farlo

$P[X>108] = P[\frac{X-100}{5} > \frac{108-100}{5}] = P[Z>1,6] = 1-1,06 = 0,06$ ⇝ da tabella

- $X \sim N(10,16)$
  $\mu = 10$
  $\sigma^2 = 16 \rightarrow \sigma = 4$

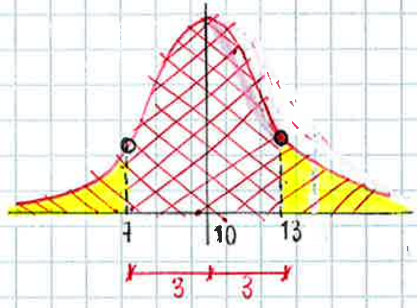
$- P[X \leq 15] = \int_{-\infty}^{15} f_X(t)\,dt =$ non so farlo

$P[X\leq 15] = P[\frac{X-10}{4} \leq \frac{15-10}{4}] = P[Z \leq 1,25] = 0,89$ ⇝ sensato perché $\mu < 15$ quindi

$- P[X<8] = P[\frac{X-10}{4} < \frac{8-10}{4}] = P[Z<-0,5] = 1-P[Z<0,5] = 1-0,69 = 0,31$

$- P[|X-10|>3] = P[X<7] + P[X>13] = 2\cdot P[X<7] = 2P[Z<-0,75] = 0,46$

$|x-10|>3$ $\quad x-10<3 \vee x-10>3$
$\quad x<7 \vee x>13$



- $X \sim N(0,1)$
  $\mu = 0$
  $\sigma = 1$

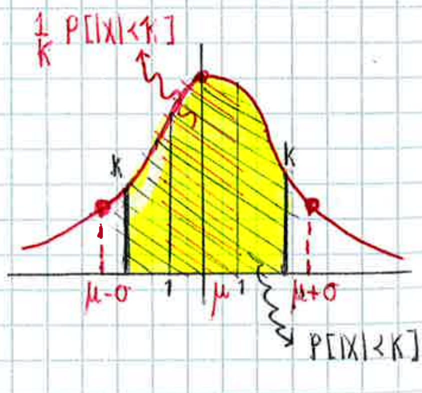
⇝ Si dimostra che: $(K>0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} P[|X|<K] = 2p^*-1 \\ P[|X|>K] = 2(1-p^*) \end{array}}$$

$p^* = P[X<K]$ da tabella

$- P[|X|<2] \leq 2P[|X|<1]$
lo dimostro graficamente

$\Rightarrow P[|X|<K] \leq K\,P[|X|<1],\ K\geq 1$



- **Proprietà**

Siano $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ indipendenti
$X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\Rightarrow \boxed{X_1 + X_2 \sim N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)}$

- esempio:

$X_1, X_2 \sim N(1, 16)$ indipendenti

a) $P[X_1<2, X_2<2]$
b) $P[X_1+X_2<4]$

SOMMA DI V.C. INDIPENDENTI

- esempio
2 dadi eq. X_1 = n.s. rosso
X_2 = n.s. verde

$S = X_1 + X_2$
$Supp(S) = \{2, \dots, 12\}$

$P[S=2] = P[X_1=1, X_2=1] = P[X_1=1]\, P[X_2=1] = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P[S=7] = P[X_1=1, X_2=6] + P[X_1=2, X_2=5] + \dots + P[X_1=6, X_2=1] = \sum_{i=1}^{6} P[X_1=i]\, P[X_2=7-i] =$
$= \sum_{i=1}^{6} P[X_1=i] \cdot P[X_2=7-i]$

Quindi la probabilità che $S=K$ = $P[S=K] = \sum_{i=1}^{6} P[X_1=i]\, P[X_2=K-i]$ $\quad K \in \{2, \dots, 12\} \in Supp(S)$

$\Rightarrow \boxed{f_S(t) = \sum_{i=1}^{6} f_{X_1}(i) \cdot f_{X_2}(K-i)}$ → operazione di convoluzione

Generalizzando, nel caso continuo, con un passaggio al limite, si arriva a dire che:
X_1, X_2 ass. continue e indipendenti

$\Rightarrow S = X_1 + X_2$ ass. $f_S(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(s) \cdot f_{X_2}(t-s)\, ds$

Conclusione:
Siano X_1 e X_2 variabili casuali indipendenti

$$\boxed{f_{X_1+X_2}(t) = \begin{cases} \sum_{i \in Supp(X_1)} f_{X_1}(i) \cdot f_{X_2}(K-i), \; K \in Supp(X_1+X_2) \\ \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(s)\, f_{X_2}(t-s)\, ds \end{cases}}$$

⇝ X_i discrete
⇝ X_i assolutamente continue

operatore di convoluzione
$(f_{X_1+X_2} = f_{X_1} \circledast f_{X_2})$

- esempio
- $X_1, X_2 \sim Exp(\lambda)$ indipendenti
$S = X_1 + X_2$
$Supp(S) = \mathbb{R}^+$ ⇝ $f_S(t) = 0 \;\forall\, t < 0$

Prendo $t > 0$ $\qquad$ è ≠ da 0 solo se $t-s > 0$

$f_S(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(s)\, f_{X_2}(t-s)\, ds = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda s} \cdot f_{X_2}(t-s)\, ds = \int_0^{t} \lambda e^{-\lambda s}\, \lambda e^{-\lambda(t-s)}\, ds = \lambda^2 \int_0^t e^{-\lambda t}\, ds =$
$= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t ds = \frac{\lambda e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^1}{1!} \sim \Gamma(2, \lambda)$

~~Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ non c'è una formula bella~~

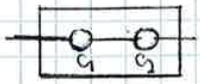
- $X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, indipendenti
$X_2 \sim Exp(\lambda_2)$

$S = X_1 + X_2$
$t \geq 0$
$f_S(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(s) \cdot f_{X_2}(t-s)\, ds = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \cdot f_{X_2}(t-s)\, ds = \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 s} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (t-s)}\, ds = \lambda_1 \lambda_2 \int_0^t e^{-\lambda_2 t} \cdot e^{-(\lambda_1 - \lambda_2) s}\, ds =$
$= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} \left[-\frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)s} \right]_0^t = \dots = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t} \right]$ ese è eff una funzione di densità perché valgono le proprietà

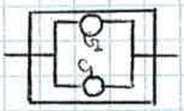
- esempi 26.05.2015

• due sistemi di componenti in serie e in parallelo

I tempi di vita dei componenti $T_1 \sim Exp(\lambda_1)$ e sono indipendenti
$T_2 \sim Exp(\lambda_2)$



S_1



S_2

S_1, S_2 sono i tempi di ~~attesa~~ vita dei ~~componenti~~ sistemi S_1 e S_2

1) distribuzione di S_1 e S_2
2) $E[S_1]$, $E[S_2]$

1) $S_1 = \min\{T_1, T_2\}$ → minimo perché il primo che si rompe causa la rottura di tutto il sistema

$$\bar F_{S_1}(t) = P[S_1>t] = P[T_1>t, T_2>t] = P[T_1>t]\,P[T_2>t] = \bar F_{T_1}(t)\,\bar F_{T_2}(t) = e^{-\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 t} = e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$S_2 = \max\{T_1, T_2\}$ → massimo perché l'ultimo a rompersi causa la rottura del sistema

$$F_{S_2}(t) = P[S_2 \le t] = P[T_1\le t, T_2\le t] = P[T_1\le t]\,P[T_2\le t] = F_{T_1}(t)\,F_{T_2}(t) = (1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_2 t})$$

2) $E[S_1] = \int_0^\infty \bar F_{S_1}(t)\,dt$ (assume valori positivi)

$$= \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,dt = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Nota: se per es. $\lambda_1=\lambda_2=1 \Rightarrow E[S_1]=\frac{1}{2} \neq \min\{E[T_1], E[T_2]\} = \min\{1,1\}=1 \Rightarrow E[S_1] \le \min\{E[T_1], E[T_2]\}$

$$E[S_2] = \int_0^\infty \bar F_{S_2}(t)\,dt =$$
$$= \int_0^\infty (1-F_{S_2}(t))\,dt = \int_0^\infty (e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t})\,dt = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Nota: se per es. $\lambda_1=\lambda_2=1 \Rightarrow E[S_2]=\frac{3}{2} \neq \max\{E[T_1], E[T_2]\} = \max\{1,1\}=1 \Rightarrow E[S_2] \ge \max\{E[T_1], E[T_2]\}$

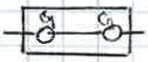
3) $P[T_1>t \mid S_1>t] = \dfrac{P[T_1>t, S_1>t]}{P[S_1>t]} = \dfrac{P[S_1>t]}{P[S_1>t]} = 1$

S_1 funziona se T_1 funziona

4) $P[T_1>t \mid S_2>t] = \dfrac{P[T_1>t, S_2>t]}{P[S_2>t]} = \dfrac{P[T_1>t]}{P[S_2>t]}$

T_1 funziona $\Rightarrow$ S_2 funziona

• $T_1, T_2 \sim Exp(\lambda)$ ma λ non è noto a priori



$\Rightarrow \Lambda$ aleatoria con supp$(\Lambda)=\{0,1,2\}$

$\lambda=1$ se ambiente freddo $\frac{1}{2}$
$\lambda=2$ se ambiente caldo $\frac{1}{2}$

Sia T il tempo di vita del sistema.

due componenti

$-\bar{F}_X(t) = P[\Lambda=1]\cdot P[T>t\,|\,\Lambda=1] + P[\Lambda=2]\,P[T>t\,|\,\Lambda=2] = \frac{1}{2}e^{-(1+1)t} + \frac{1}{2}e^{-(2+2)t} \quad (t\geq 0)$

$-E[T] = \frac{1}{2}\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{2+2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

I tempi di vita dei comp. sono dipendenti perché se io osservo che il primo componente ha è vissuto pochissimo, questo mi porta a pensare che sto lavorando nell'ambiente caldo dove i componenti si guastano in fretta e diminuisce la probabilità di sopravvivenza del secondo componente.
Quindi non sono indipendenti
Se fisso però il valore del parametro (conosco l'ambiente) allora diventano indipendenti
Se non so qual'è l'ambiente sono dipendenti, se lo fisso sono indipendenti)
Questa ipotesi si chiama indipendenza condizionata (cioè sono indipendenti ma condizionatamente all'evento osservazione dell'ambiente aleatorio.

SOMME ALEATORIE DI VARIABILI ALEATORIE

Siano: $X_1, \dots, X_n, \dots$ indipendenti e identicamente distribuiti (con densità f_X)

Sia: $S_1 = X_1$ $\quad f_X(t) = f_X^{(1)}(t)$
$S_2 = X_1 + X_2$ $\quad f_X^{(2)}(t)$ (convoluzione)
$S_3 = X_1 + X_2 + X_3$
$\vdots$
$S_n = X_1 + \dots + X_n$ $\quad f_X^{(n)}(t)$

$\{S_1, S_2, S_3, \dots\}$
Sia N una variabile casuale a valori in $\mathbb{N}$

$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{N} X_i}$ (numero di addendi è casuale) $\rightsquigarrow Y=0$ se $N=0$

Y è una somma aleatoria di variabili aleatorie

Y è una mistura: $Y = S_N$ (estraggo N, poi prendo S_N)

-Proprietà

Data Y definita come prima, vale

$$\boxed{\begin{aligned} E[Y] &= E[N]\,E[X_i] \\ V[Y] &= V[X_i]\,E[N] + (E[X_i])^2\,V[N] \end{aligned}}$$

$\rightsquigarrow$ componente di variabilità dovuta al numero di addendi

componente di variabilità dovuta ai singoli addendi

-esempio

• X_i costi da rimborsare $\quad X_i \sim Exp(\frac{1}{10})$
$N = \#$ clienti che chiedono il rimborso $\quad N \sim Poisson(5)$

Definisco Y = totale dei ~~rimborsi~~ rimborsi
$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$

$E[Y] = E[N]\cdot E[X_i] = 5\cdot 10 = 50$ $\rightsquigarrow$ manca di realismo nell'ipotesi di indipendenza tra rimborsi e # di persone da rimborsare

DISTRIBUZIONI CONGIUNTE, V.C. DOPPIE (complementi)

(X,Y) / discrete
\ assolutamente continue

- Per descriverle si usa la funzione di densità congiunta

$\boxed{f_{(X,Y)}(t,s) = P[X=t, Y=s] \quad \forall t,s}$ → funzione di densità congiunta

- la funzione di ripartizione congiunta è invece

$\boxed{F_{(X,Y)}(t,s) = P[X \leq t, Y \leq s] \quad \forall t,s}$ → funzione di ripartizione congiunta

INDICI

- vettore delle medie $(E[X], E[Y]) = \bar{\mu}$
- vettore delle varianze $(V[X], V[Y])$

informazioni separate su X e Y

- covarianza: indice che descrive relazione tra X, Y

$$\boxed{Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])]} =$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^2} (t-E[X])(s-E[Y]) f_{(X,Y)}(t,s)\, dt\, ds$$

- Proposizione:

$$\boxed{Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]}$$

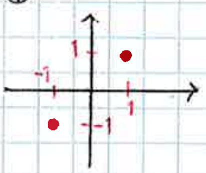
Dimostrazione

$$Cov[X,Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] =$$
$$= E(XY - XE[Y] - E[X]Y + E[X]E[Y])] =$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y] - E[Y]\cancel{E}[X] + E[X]\cancel{E}[Y]$$
$$= E[XY] - E[X]E[Y]$$ → valore atteso del prodotto − prodotto dei valori attesi

Ricorda: se X e Y sono stocasticamente indipendenti
$\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$

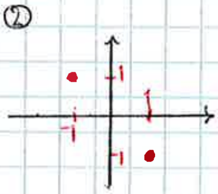
- esempio

①



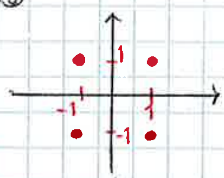
$$(X,Y) = \begin{cases} (1,1) & \frac{1}{2} \\ (-1,-1) & \frac{1}{2} \end{cases}$$

②



$$(X,Y) = \begin{cases} (1,-1) & \frac{1}{2} \\ (-1,1) & \frac{1}{2} \end{cases}$$

③



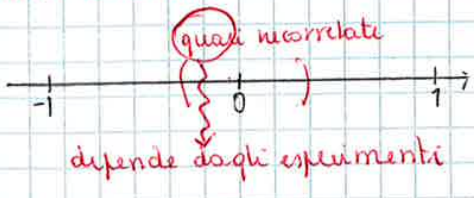
$$(X,Y) = \begin{cases} (1,1) \\ (-1,-1) \\ (1,-1) \\ (-1,1) \end{cases}$$

Problema:
Suppongo che $cov[X,Y]=0,3 \Rightarrow$ correlazione positiva o incorrelazione??

~~Il valore~~
l'unità di misura della cov dipende da quella di X e Y
si preferisce utilizzare un indice adimensionato!

- indice di correlazione lineare

$$\boxed{r(X,Y)=\frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]\cdot V[Y]}}}$$ $\Rightarrow$ non dipende dall'unità di misura adottata.



Si può dimostrare che: $-1 \le r(X,Y) \le 1$

- casi limiti:
Data X, sia $Y=aX+b$, $a,b\in\mathbb{R}$

- X,Y non sono indipendenti essendo legati in modo lineare
- X,Y non sono incorrelate
- X,Y sono fortemente correlate perché se conosco una, automaticamente conosco anche l'altra.
la correlazione è positiva se $a>0$, negativa altrimenti

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=$$
$$=E[X(aX+b)]-E[X]E[aX+b]=$$
$$=aE[X^2]+bE[X]-a(E[X])^2-bE[X]=$$
$$=a\left(E[X^2]-(E[X])^2\right)=$$
$$=aV[X]$$

$$V[Y]=V[aX+b]=a^2V[X]+0=a^2V[X]$$

$$\Rightarrow r(X,Y)=\frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{V[X]\cdot V[Y]}}=\frac{aV[X]}{\sqrt{a^2(V[X])^2}}=\frac{a}{|a|}\begin{cases}-1 & \text{se } a<0 \\ 1 & \text{se } a>0\end{cases}$$

-1 se $a<0$ → minimo
massima correlazione negativa

1 se $a>0$ → massimo
massima correlazione positiva

- esempio
- siano $Z_1, Z_2 \sim N(0,1)$ indipendenti $\Rightarrow E[Z_1]=E[Z_2]=0$
$V[Z_1]=V[Z_2]=1$

$$\begin{cases}X=Z_1-Z_2\\ Y=2Z_1-1\end{cases}$$

$(X,Y)\to$ indipendenti? incorrelati?

$X=Z_1+Z_2\sim N(\mu_1+\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ se $Z_1\sim N(\mu_1;\sigma_1^2)$, $Z_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

Analogamente:

$X=Z_1-Z_2\sim N(\mu_1-\mu_2,\ \sigma_1^2+\sigma_2^2)$ se $Z_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Z_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ → le varianze si sommano sempre

$X=Z_1-Z_2\sim N(0,2)$

$\Rightarrow E[X]=0$

- $E[Y]=E[2Z_1-1]=-1$

$$\Rightarrow Cov[S,D] = \Big((-1)(2)\cdot 0 + (-1)(3)\cdot\tfrac{1}{8} + (-1)(4)\,0 + (-1)(5)\,0 + (0)(2)\tfrac{1}{8} + (0)(3)\,0 + (0)(4)\tfrac{1}{8} + (0)(5)\,0 + (1)(2)\,0 + (1)(3)\tfrac{1}{8} + (1)(4)\cdot 0 + (1)(5)\cdot\tfrac{2}{8} + (2)(2)\,0 + (2)(3)\cdot 0 + (2)(4)\cdot\tfrac{2}{8} + (2)(5)\cdot 0 \Big) - \frac{15}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{7}{16}$$

→ se esiste una correlazione, questa è ~~negativa~~ positiva

$(\dots) = E[SD]$

$E[S]E[D] = \frac{15}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{45}{16}$

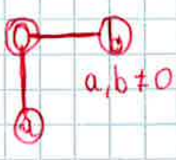
c) $r_{(S,D)} = \dfrac{Cov[S,D]}{\sqrt{V[D]\cdot V[S]}} = \dfrac{7}{15} \simeq 0{,}45$ → (c'è correlazione ma non è fortissima)

$\Rightarrow$ S e D non sono incorrelate $\Rightarrow Cov[S,D] \neq 0$

Poiché (indipendenza $\Rightarrow$ incorrelazione) $\Rightarrow$ NON incorrelazione $\Rightarrow$ NON indipendenza

$\Rightarrow$ S e D non sono indipendenti

Potevo osservare che non sono indipendenti dalla tabella a doppio ingresso.
Se un valore della tabella è 0 e le rispettive probabilità marginali ~~non~~ entrambe non sono nulle, allora non sono indipendenti.
Altrimenti devo fare i conti!



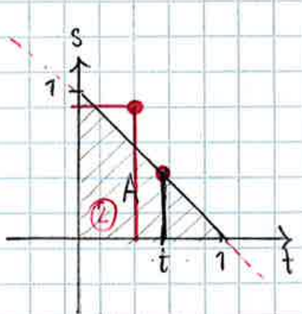
d) $P[S>3, D<0]$ = è la somma di tutte le probabilità sulle coppie (S,D) in cui $S>3$ e $D<0$
$= 0+0 = 0$

$$P[S>3 \mid D<0] = \frac{P[S>3, D<0]}{P[D<0]} = \frac{0}{\frac{1}{8}} = 0$$

• (X,Y).
$$f_{(X,Y)}(t,s) = \begin{cases} 0 & (t,s)\notin A \\ 2 & (t,s)\in A \end{cases}$$
→ è una densità: $\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(t,s)\,dt\,ds = \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\right)(2) = 1$

Area triangolo

Altezza



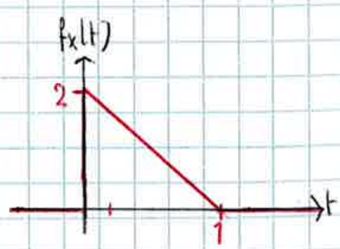
a) determinare le marginali di X e Y
b) dire se sono indipendenti e/o incorrelate
c) $S = X+Y$, trovare $P[S \leq \frac{1}{2}]$
d) determinare la legge della somma → conclusioni solo se indipendenti
e) $P[X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}]$

a) Poiché la funzione di densità è simmetrica, calcolo solo la marginale di X
$Supp(X) = [0,1]$

$f_X(t) = 0$ se $t \in [0,1]$

$$f_X(t) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(t,s)\,ds = \int_0^{1-t} 2\,ds = \cancel{2(1-t)}\Big|_0^s = 2s\Big|_0^{1-t} = 2(1-t) \quad t\in[0,1]$$

$$\Rightarrow f_X(t) = \begin{cases} 0 & t\notin[0,1] \\ 2(1-t) & t\in[0,1] \end{cases}$$
→ è una densità? $\int_{\mathbb{R}} f_X(t)\,dt = 1$ sì



$\Rightarrow f_Y \equiv f_X$

$$E[X] = E[Y] = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)\,dt = \int_0^1 t(2(1-t))\,dt = \dots = \frac{1}{3}$$ → baricentro

- $X, Y \sim U[0,1]$ indipendenti

  $S = X+Y \Rightarrow supp(S) = [0,2]$

  Già fatto con la convoluzione

(X,Y)

$f_{(X,Y)}(t,s) = f_X(t) f_Y(s)$ perché indipendenti

$= 1$ se $(t,s) \in supp(A)$

$\rightarrow z \in [0,1]$

$F_S(z) = P[X+Y \leq z] = \iint_{\{t+s \leq z\}} f_{(X,Y)}(t,s) = \frac{1}{2} z^2$ Area

$\hookrightarrow z \in [1,2]$

$P[X+Y \leq \ ] = 1 - P[X+Y > z]$

$$\Rightarrow F_S(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ \frac{1}{2} z^2 & z \in [0,1] \\ 1 - \frac{1}{2}(z-2)^2 & z \in [1,2] \\ 1 & z > 2 \end{cases}$$

Se derivo ottengo $f_S(z)$. È più facile trovarla così che con la convoluzione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 167 di 422

$\rightarrow E[X \mid Y=0] = \sum_{t_i} t_i \, f_{X|Y=0}(t_i) = 0 \, f_{X|Y=0}(0) + 1 \, f_{X|Y=0}(1) + 2 \, f_{X|Y=0}(2) =$

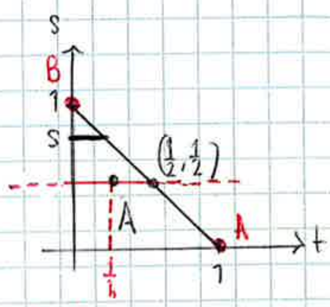
$= 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

$E[X] = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} = \frac{9}{8} \neq \frac{3}{2}$

in generale: $E[X|Y=s] \neq E[X]$

- (X,Y) continua

$f_{(X,Y)}(t,s) = \begin{cases} 2 & \text{su } A \quad (t \in [0,1],\ s \in [0,1]) \\ 0 & \text{fuori } A \quad (t \notin [0,1],\ s \notin [0,1]) \end{cases}$



$\frac{t - t_B}{t_A - t_B} = \frac{s - s_B}{s_A - s_B}$

$\frac{t-0}{1} = \frac{s-1}{-1}$

$t = -s + 1 = 1 - s$

$\Rightarrow t \in [0, 1-s]$

Suppongo $Y = \frac{1}{2}$

$\rightarrow E[X|Y=\frac{1}{2}] = ?$

Determino la funzione di densità condizionata

$f_{X|Y=\frac{1}{2}}(t) = \frac{f_{(X,Y)}(t,\frac{1}{2})}{f_Y(\frac{1}{2})}$

$f_Y(\frac{1}{2}) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(t,\frac{1}{2})\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 2 = 1$

$f_{X|Y=\frac{1}{2}}(t) = \begin{cases} \frac{2}{1} = 2 & t \in [0,\frac{1}{2}] \rightarrow \text{nel triangolo} \\ \frac{0}{1} = 0 & t \notin [0,\frac{1}{2}] \rightarrow \text{fuori dal triangolo} \end{cases}$

$E[X|Y=\frac{1}{2}] = \int_{\mathbb{R}} t \, f_{X|Y=\frac{1}{2}}(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t \cdot 2 \, dt = 2 \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$ (baricentro)

$\rightarrow E[X|Y=s] =$

Y può assumere solo valori compresi tra 0 e 1

$0 \leq s \leq 1$

$f_{X|Y=s}(t) = \begin{cases} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(1-s)} & t \in [0, 1-s] \\ 0 & t \notin [0, 1-s] \end{cases}$

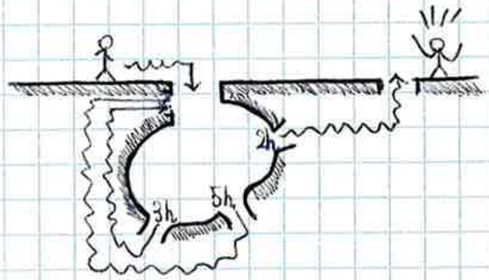
$f_Y(s) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(t,s)\,dt = \int_0^{1-s} 2\,dt = 2t \Big|_0^{1-s} = 2(1-s)$

$E[X|Y=s] = \int_0^{1-s} t \, f_{X|Y=s}(t)\,dt = \frac{1}{1-s}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{1-s} = \frac{1-s}{2}$ (funzione di s)

giusto perché se $s=0 \Rightarrow E[X|Y=0] = \frac{1}{2}$ baricentro

- esempio:

minatore intrappolato



$p = \frac{1}{3}$ di scegliere ~~ogni~~ una porta

T = tempo di uscita

$E[T] = ?$

$supp(T) = \{2, 5, 7, 8, 10, \dots\}$

$f_T(2) = \frac{1}{3}$ esce al primo colpo

$f_T(5) = \frac{1}{3}\frac{1}{3}$

$f_T(10) = \underset{5h}{\frac{1}{3}} \cdot \underset{3h}{\frac{1}{3}} \cdot \underset{2h}{\frac{1}{3}} + \underset{3h}{\frac{1}{3}} \cdot \underset{5h}{\frac{1}{3}} \cdot \underset{2h}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{27}$

Introduco Y

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se 1° porta è quella delle 2h} \quad \frac{1}{3} \\ 1 & \text{se 1° porta è quella delle 3h} \quad \frac{1}{3} \\ 2 & \text{se 1° porta è quella delle 5h} \quad \frac{1}{3} \end{cases}$$

Considero (T, Y)

$E[T|Y]$

$E[T|Y=0] = 2$ ore

$E[T|Y=1] = 3 + E[T]$

$E[T|Y=2] = 5 + E[T]$

$$E[T] = E[E[T|Y]] = E[h(Y)] = P[Y=0] \cdot E[T|Y=0] + P[Y=1] \cdot E[T|Y=1] + P[Y=2] \cdot E[T|Y=2] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3}(3 + E[T]) + \frac{1}{3}(5 + E[T]) =$$

$$= \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3}E[T] + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}E[T]$$

$\Rightarrow E[T] = 10$

- es esame

2 monete
- M_1: T $\frac{1}{4}$, C $\frac{3}{4}$
- M_2: T $\frac{1}{2}$, C $\frac{1}{2}$

Prendo moneta a caso e lancio 2 volte

T = # di teste

$supp(T) = \{0, 1, 2\}$

Introduco $Y = \begin{cases} 1 & \text{se estraggo } M_1 \quad \frac{1}{2} \\ 2 & \text{"} \quad M_2 \quad \frac{1}{2} \end{cases}$

$$E[T] = E[E[T|Y]] = P[Y=1]\,E[T|Y=1] + P[Y=2]\,E[T|Y=2] = \frac{1}{2}(\dots$$

$$= \frac{1}{2}E[Bin(2, \tfrac{1}{4})] + \frac{1}{2}E[Bin(2, \tfrac{1}{2})] = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

CALCOLO COMBINATORIO: N è un insieme di n elementi. $\#(N) = n$.
Il numero delle *permutazioni* (di tutti i possibili ordinamenti) di N è $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$.
Il numero dei *sottoinsiemi* (non ordinati) di N formati da k elementi è $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$; si dice *combinazioni* di k elementi di N.
Dalle definizioni segue: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n_1+n_2}{k} = \sum_{h=0}^{k} \binom{n_1}{h}\binom{n_2}{k-h}$.
Il numero di *partizioni* di N in s parti di numerosità $k_1 \dots k_s$ è $\binom{n}{k_1 \cdots k_s} = \frac{n!}{k_1! \cdots k_s!}$.
Il numero di *partizioni* di n oggetti indistinguibili in (esattamente) s gruppi (distinti) è $\binom{n-1}{s-1}$.
Il numero di *partizioni* di n oggetti indistinguibili in al più s gruppi (distinti) è $\binom{n+s-1}{s-1}$.

PROBABILITÀ. Gli *eventi* sono sottoinsemi dello *spazio campionario* S. $\emptyset$ è l'evento *impossibile*. S è l'evento *certo*.
Per ogni evento si definisce una probabilità : $0 \le P(A) \le 1$, $P(S) = 1$ e per ogni successione $(A_n)_{n \in I}$ di eventi disgiunti (incompatibili) si ha $P\left(\bigcup_{n \in I} A_n\right) = \sum_{n \in I} P(A_n)$.
PROPRIETÀ: $P(E^c) = 1 - P(E)$, se $A \subseteq B$ allora $P(A) \le P(B)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
PROBABILITÀ CONDIZIONATA: $P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B)$, con $P(B) > 0$.
Formula della *probabilità totale*: C_k non trascurabili e partizione di S: $P(A) = \sum_k P(A \cap C_k) = \sum_k P(A \mid C_k) P(C_k)$.
Formula di *Bayes*: $P(C_m \mid A) = (P(A \mid C_m) P(C_m))/(\sum_k P(A \mid C_k) P(C_k))$.
Formula del *prodotto*: $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \dots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.
INDIPENDENZA: A e B sono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A) P(B)$ o anche, se esiste, $P(A \mid B) = P(A)$.
A, B e C sono indipendenti se $P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C)$ e, inoltre, lo sono tutte le coppie.

DENSITÀ DI VARIABILE ALEATORIE DISCRETA X: $0 \le p(x) = P(X = x)$. $P_X(B) = \sum_{x \in B} p(x)$.
Bernoulli(p): $p(k) = p^k(1-p)^{(1-k)}$ $k = 0, 1$. $0 \le p \le 1$. $E(X) = p$. $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.
Binomiale(n, p): $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, $0 \le p \le 1$. $E(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.
Ipergeometrica: $p(z) = \binom{n_1}{z}\binom{n-n_1}{k-z}/\binom{n}{k}$, $\max\{0, k+n_1-n\} \le z \le \min\{k, n_1\}$.
Geometrica(p): $p(k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, con $0 \le p \le 1$. $E(X) = 1/p$, $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$. $P[X>k] = (1-p)^k$
Poisson(λ): $p(k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, $k = 0, 1, \dots$, con $\lambda > 0$. $E(X) = \lambda$, $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.
VALORE ATTESO DI FUNZIONE $g(X)$: $E(g(X)) = \sum_x g(x)p(x)$

DENSITÀ CONGIUNTA, MARGINALE E CONDIZIONATA DI COPPIE DI VA DISCRETE.
Densità *congiunta* $p(x, y) = P(X = x, Y = y)$.
Densità *marginali*: $p_X(x) = \sum_y p(x, y)$ e $p_Y(y) = \sum_x p(x, y)$.
Densità *condizionata*: $p_{X|Y}(x|y) = p(x, y)/p_Y(y)$ per ogni y t.c. $p_Y(y) > 0$.
Valore atteso: $E(g(X, Y)) = \sum_x \sum_y g(x, y)p(x, y)$.
X è *indipendente* da Y se e solo se $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$, o $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x)$, o $E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$.
Valore atteso condizionato: $E(g(X, Y)|Y = y) = \sum_x g(x, y)p_{X|Y}(x|Y = y)$; $E(E(g(X, Y)|Y)) = E(g(X, Y))$.

VARIABILE ALEATORIA CONTINUA X. Funzione di distribuzione FdD: $F(x) = P(X \le x)$. Densità: $f(x) \ge 0$
$P_X(B) = P(X \in B) = \int_B f(x)\,dx$. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$; $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$.
$U(a, b)$: $f(x) = \frac{1}{b-a}(a < x < b)$. $E(X) = (a+b)/2$, $\mathrm{Var}(X) = (b-a)^2/12$.
Exp(λ): $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}(x > 0)$. $E(X) = 1/\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$.
Gamma $\Gamma(a, \lambda)$: $f(x) = \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}/\Gamma(a)(x > 0)$. $E(X) = a/\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = a/\lambda^2$.
Gaussiana o Normale $N(a, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$, $E(X) = a$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Normale *standard* $N(0, 1)$.
VALORE ATTESO DI FUNZIONE: $E(g(X)) = \int g(x) f(x)\,dx$

VA CONTINUE X E Y. FdD: $F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$.
$F(x, +\infty) = F_X(x)$, $F(+\infty, y) = F_Y(y)$. marginali
Densità *congiunta*: $P((X, Y) \in B) = \int\int_B f(x, y)\,dx\,dy$; $P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dx\,dy$.
Marginali: $f_X(x) = \int f(x, y)\,dy$ e $f_Y(y) = \int f(x, y)\,dx$. $F(x, y) = \int_{-\infty}^{b} \int_{-\infty}^{d} f(u, v)\,du\,dv$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = f(x, y)$.
Condizionata: se $f_Y(y) > 0$, $f_{X|Y}(x|y) = f(x, y)/f_Y(y)$.
Valore atteso: $E(g(X, Y)) = \int\int g(x, y) f(x, y)\,dx\,dy$.
X è *indipendente* da Y se e solo se $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, o $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$, o $E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$.
Valore atteso condizionato: $E(g(X, Y)|Y = y) = \int g(x, y) f_{X|Y}(x|Y = y)\,dx$; $E(E(g(X, Y)|Y)) = E(g(X, Y))$.
Se $Y = aX + b$, $a \ne 0$, allora $f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$.
La coppia Y_1, Y_2 è una *Gaussiana bivariata*, con medie a_1, a_2, varianze σ_1^2, σ_2^2, correlazione $\rho_{12} \ne \pm 1$ se:
$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = (2\pi)^{-1} \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho_{12}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left(\left(\frac{y_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho_{12}\left(\frac{y_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y_2-a_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right)\right)$$

ALGEBRA DEI VALORI ATTESI . Se $X \ge 0$, allora $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > u)\,du$.
Linearità: $E(aX + b) = aE(X) + b$ e $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
Varianza: $\mathrm{Var}(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
Scarto quadratico medio o deviazione standard: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.
Covarianza: $\mathrm{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
Coefficiente di correlazione lineare: $-1 \le \rho(X, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y)/(\sigma(X)\sigma(Y)) \le 1$.
Covarianza tra due somme: $\mathrm{Cov}\left(\sum_i X_i, \sum_j Y_j\right) = \sum_i \sum_j \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$.
Varianza della combinazione lineare: $\mathrm{Var}(aX + bY + c) = a^2\,\mathrm{Var}(X) + b^2\,\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.
Se X e Y indipendenti, allora sono *non correlate*, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
ČEBIČEV: $P(|X - E(X)| > c) \le \mathrm{Var}(X)/c^2$.

ESERCITAZIONE 1 (13.03.2015)

①

f. algebrica: $z = x+iy$

f. trigonometrica: $z=\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

f. esponenziale: $z = \cancel{e^{i}} \rho e^{i\theta}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ → Eulero

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2+y^2 \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

$i^2 = -1$

$\arg(z) = \theta$ = può assumere infiniti valori che differiscono per multipli interi

$\operatorname{Arg}(z)$ = valore principale di $\arg(z)$

= unico valore ~~di~~ θ di $\arg(z)$ per cui $-\pi \le \theta < \pi$

→ $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{|z|^2}$

→ $|z| = 1 \Rightarrow \left|\frac{3z-i}{3+iz}\right| = 1$ $\quad z = x+iy$

$\cancel{(3z-i)\left(\frac{1}{3+iz}\right) = \frac{(3z-i)(3z-i)}{\sqrt{40}} \cdot \frac{(3-iz)}{\sqrt{40}} = \frac{(3x+3iy-i)(3-ix+y)}{\sqrt{40}} =}$

$\cancel{= \frac{9x-3x^2i+3xy+9iy+9xy+3y^2i-3i-x-iy}{\sqrt{40}} =}$

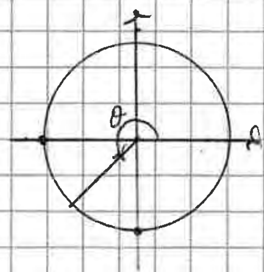
$\cancel{= \frac{8x-3x^2i+12xy+8iy+3y^2i-3i}{\sqrt{40}} = \frac{1}{\sqrt{40}}(8x+12xy) + \frac{1}{\sqrt{40}}(8y+3y^2-3x^2-3)i}$

→ ~~f. trigonometrica / esponenziale~~

~~− $z = -8-8i$~~

~~$\rho = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt2$~~

~~$\arctan\theta = \frac{y}{x} = 1$~~



− f. algebrica → f. esponenziale

→ $z_1 = -8-8i$

$\Rightarrow \rho = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt2$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

$\Rightarrow z_1 = 8\sqrt2\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$

→ $z_2 = 9+6i$

$\Rightarrow \rho = \sqrt{9^2+6^2} = \sqrt{117}$

$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{3} = \cancel{\frac{\sqrt2}{3}\left(\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)} \Rightarrow \theta = \theta_0$

$\Rightarrow z_2 = \sqrt{117}\, e^{i\theta_0}$

− f esponenziale → f algebrica

→ $z_1 = 5e^{i\frac{5}{6}\pi}$

$= 5\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\operatorname{sen}\frac{5}{6}\pi\right) = 5\left(-\frac{\sqrt3}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

→ ~~radici complesse~~

→ ~~$z^7 = 3$~~

~~$z = \rho e^{i\theta}$~~

~~$z^7 = \rho^7 e^{7i\theta}$~~ $\Rightarrow$ ~~$\rho^7 = 3$~~

~~$e^{i7\theta} = 1$~~ $\Rightarrow \theta = 2\pi k$ → infatti $\boxed{\cancel{e^{i2k\pi} = \cos(2k\pi) + i\operatorname{sen}(2k\pi) = 1 + i0 = 1}}$

~~$\Rightarrow z^7 = 3e^{i2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$~~

~~$\Rightarrow \begin{cases}\rho^7 = 3 \Rightarrow \rho = \sqrt[7]{3} \\ 7\theta = \end{cases}$~~

Altro ragionamento:

$e^{iz} = -e^{-iz}$

$e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}} = 0$

$\frac{e^{iz} e^{iz} + 1}{\cancel{e^{iz}}} = 0 \Rightarrow e^{2iz} = -1$

RICORDA
$-1 = e^{i\pi}$ infatti $\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi) = -1 + i0 = -1$

$e^{2iz} = e^{i\pi}$

$e^{2i(x+iy)} = e^{i\pi}$

$e^{-2y+2ix} = e^{i\pi}$

$e^{-2y} e^{2ix} = e^{i\pi} \Rightarrow \begin{cases} e^{-2y} = 1 \Leftrightarrow y = 0 \\ 2x = \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (Anche in $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \text{sen}(z) = i$

$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = i$

~~$e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} = 2i^2 \Rightarrow e^{2iz} - 1 = -2$~~ $\quad e^{iz} - e^{-iz} = -2$

~~$e^{2iz} = -1$~~

$z = x + iy$

$e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)} = -2$

$e^{ix} e^{-y} - e^{-ix} \cdot e^{y} = -2$

$(\cos(x) + i\,\text{sen}(x))\, e^{-y} - e^{-ix}(\cos(-x) + i\,\text{sen}(-x))\, e^{y} = -2$

$(\cos(x) + i\,\text{sen}(x))\, e^{-y} - (\cos(x) - i\,\text{sen}(x))\, e^{y} = -2$

$e^{-y} \cos x + i\,\text{sen}(x) \cdot e^{-y} - e^{y} \cos x + i\,\text{sen}(x)\, e^{y} = -2$

~~$e^{-y}(\cos x - e$~~

$\cos x\,(e^{-y} - e^{y}) + i\,\text{sen}(x)(e^{-y} + e^{y}) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{\cos x\,(e^{y} - e^{y}) = -2} \\ \cancel{\text{sen}\,x\,(e^{-y} + e^{y}) = 0} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \cos x\,(e^{-y} - e^{y}) = -2 \\ \text{sen}\,x\,(e^{-y} + e^{y}) = 0 \end{cases}$

$\text{sen}\,x\,(e^{-y} + e^{y}) = 0$

$e^{-y} + e^{y} > 0 \quad \forall y \Rightarrow \text{sen}\,x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos x\,(e^{-y} - e^{y}) = -2$

$\rightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow e^{-y} - e^{y} = -2 \\ \cos x = -1 \Rightarrow e^{-y} - e^{y} = 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi \\ \Rightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \end{matrix}$ entrambe compatibili con $\text{sen}\,x = 0$

$e^{-y} - e^{y} = 2 \Rightarrow \frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = 1 \Rightarrow \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = -1 \Leftrightarrow \text{senh}(y) = -1 \Rightarrow y = \text{arcsenh}(-1)$

$\Rightarrow z_1 = \pi + 2k\pi + i\,\text{arcsenh}(-1)$

$e^{-y} - e^{y} = -2$

$e^{y} - e^{-y} = 2 \Rightarrow y = \text{arcsenh}(1)$

$\Rightarrow z_2 = 2k\pi + i\,\text{arcsenh}(1)$

ESERCITAZIONE 2 (20.03.2015)

- $f(z)=|z|^2$

il concetto di derivabilità è puntuale
il concetto di funzione olomorfa è esteso ad un intervallo

$z=x+iy$

$f(z)=|x+iy|^2=x^2+y^2$ → le funzioni

$$\cancel{f'(z)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$ ← rapporto incrementale reale ($h\in\mathbb{R}$)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|z+h|^2-|z|^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+y^2-x^2-y^2}{h}=2x=f'(z)$$

Per essere derivabile, deve esistere anche il rapporto incrementale quando mi avvicino dall'asse immaginario

$$\cancel{f'(z)}=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+ih)-f(z)}{ih}=\dots=\frac{2}{i}y$$ → rapporto incrementale immaginario

R.I. reale = R.I. complesso ⇒ derivabile

$2x=\frac{2}{i}y \Leftrightarrow x=y=0 \Rightarrow f'(0)$ esiste
$\Rightarrow f$ è derivabile solo in $(0,0)$

Infatti f non è olomorfa!
Verifico con le condizioni di CR

$$f(z)=|z|^2=x^2+y^2 \Rightarrow \begin{cases} u(x,y)=x^2+y^2=\mathrm{Re}f(z)\\ v(x,y)=0=\mathrm{Im}f(z)\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x\neq\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=2y\neq-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$
⇒ ~~non sono verificate le condizioni di CR~~

$\Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$
$2y=0 \Rightarrow y=0$
⇒ le condizioni di CR sono verificate solo in ~~(0,0)~~ $z_0=0$

- $f(z)=e^z$

$z=x+iy$

~~$f(z)=e^xe^{iy} \Rightarrow u(x,y)=e^x,\ v(x,y)=e^{iy}$~~

$$f(z)=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\,\mathrm{sen}\,y)=e^x\cos y+ie^x\,\mathrm{sen}\,y \Rightarrow \begin{cases}u(x,y)=e^x\cos y\\ v(x,y)=e^x\,\mathrm{sen}\,y\end{cases}$$

$\Rightarrow u,v$ sono C^∞

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\,\mathrm{sen}\,y$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\,\mathrm{sen}\,y \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y \Rightarrow \begin{pmatrix}e^x\cos y & -e^x\,\mathrm{sen}\,y\\ e^x\,\mathrm{sen}\,y & e^x\cos y\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ ⇒ le condizioni di CR sono OVUNQUE verificate

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
  $Re\, f(z) = Im(z)$
  $f(0) = i$

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$
$\Rightarrow u(x,y) = y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow v(x,y) = -x + c$$

$\Rightarrow f(z) = y + i(-x + c)$
$f(0) = i \Leftrightarrow 0 + i(-0 + c) = i$
$ic = i \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow f(z) = y + i(-x+1) = y - xi + i = -iz + i$

$z = x + iy$
$iz = i(x+iy) = ix - y$
$-iz = y - ix$

- $P_1(x,y) = ax + by + c$
  $P_2(x,y) = dx^2 + ey^2 + fxy + P_1(x,y)$

P_1 è armonico se $\partial_x^2 P_1 + \partial_y^2 P_1 = 0 \Rightarrow \Delta P_1 = 0$ laplaciano.

$\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial x} = a \Rightarrow \frac{\partial^2 P_1(x,y)}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y} = b \Rightarrow \frac{\partial^2 P_1(x,y)}{\partial y^2} = 0$

$\Rightarrow P_1$ è sempre armonico

$\frac{\partial P_2(x,y)}{\partial x} = 2xd + fy + \frac{\partial P_1(x,y)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 P_2(x,y)}{\partial x^2} = 2d + \frac{\partial^2 P_1(x,y)}{\partial x^2} = 2d$

$\frac{\partial P_2(x,y)}{\partial y} = 2ye + fx + \frac{\partial P_1(x,y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 P_2(x,y)}{\partial y^2} = 2e + \frac{\partial^2 P_1(x,y)}{\partial y^2} = 2e$

$\Rightarrow \partial_x^2 P_2 + \partial_y^2 P_2 = 0 \Leftrightarrow 2e + 2d = 0 \Leftrightarrow e = -d$

Nota:
$\Delta P_2 = \partial_x^2 P_2 + \partial_y^2 P_2 = \Delta(dx^2 + ey^2 + fxy) + \underbrace{\Delta P_1}_{=0}$ perché P_1 è armonico
$\Rightarrow$ basta dunque verificare che $\Delta(dx^2 + ey^2 + fxy) = 0$

$\Rightarrow$ l'operatore laplaciano è lineare

- Se u, v sono armoniche $\not\Rightarrow f = u + iv$ è olomorfa
  (il viceversa vale sempre!)

$\Rightarrow$ esempio:
$u(x,y) = x \Rightarrow u, v$ armoniche
$v(x,y) = 1$

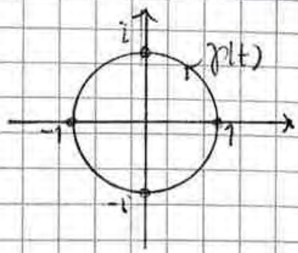
$f(x+iy) = x + i$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow f$ non è olomorfa dato che non sono ovunque verificate le condizioni di CR.

ESERCITAZIONE 3 (10.04.2015)



- $\gamma: [0,4\pi] \to \mathbb{C}$
  $t \mapsto e^{it}$

indice di avvolgimento $= I_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz$

se $z_0 \notin \text{int}(\gamma) \Rightarrow I_\gamma(z_0) = 0$

$z_0 = 0 \in \text{int}(\gamma)$

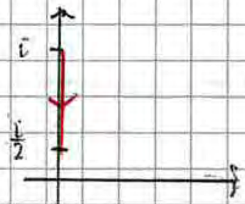
$\Rightarrow I_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{4\pi} \frac{1}{\cancel{e^{it}}}\, i\cancel{e^{it}}\,dt = \frac{4\pi \cancel{i}}{2\pi \cancel{i}} = 2$ $\quad \gamma(t) = e^{it}$

se γ fosse percorsa in senso orario, otterrei $I_\gamma(z_0) = -2$

- $\int_\gamma (2\bar z + 3)\,dz = \int_0^{2\pi} (2e^{-it} + 3)\, i e^{it}\,dt = 2i\int_0^{2\pi} dt + i3\int_0^{2\pi} e^{it}\,dt = 4\pi i + \underbrace{\cancel{\frac{e^{it}}{i}\Big|_0^{2\pi}}}_{=0} = 4i\pi$

$\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{C}$
$t \to e^{it}$

$z = e^{it} = \cos t + i \sin t$
$\bar z = \cos t - i \sin t = e^{-it}$



- $\int_\gamma e^{\pi z}\,dz$ $\quad \gamma$ segmento che unisce i e $\frac{i}{2}$

$\gamma(t) = i - t\frac{i}{2}$, $t \in [0,1]$ $\quad$ ($\gamma(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$ seg. che unisce z_0 a z_1)

$\Rightarrow \int_\gamma e^{\pi z}\,dz = \cancel{\int_0^1 e^{\pi(i - t\frac{i}{2})}\left(-\frac{i}{2}\right)dt = -\frac{i}{2}\int_0^1 e^{\pi i}\,dt - \frac{i}{2}\int_0^i e^{-t\frac{i}{2}}\,dt = -\frac{i}{2}\, e^{\pi i}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{i}\right) e^{-t\frac{i}{2}}\Big|_0^1}$

$= \cancel{\dots} = \cancel{\frac{i}{2\pi}\, e^{\pi i} + e^{-\frac{i}{2}} - 1}$

$\frac{i}{\pi}(1+i) \quad = \int_0^1 e^{\pi(i - t\frac{i}{2})}\left(-\frac{i}{2}\right)dt = -\frac{i}{2}\int_0^1 e^{\pi i}\,dt - \frac{i}{2}\int_0^1 e^{-t\frac{i}{2}\pi}\,dt = -\frac{i}{2} e^{\pi i}[t]_0^1 - \frac{i}{2}\left[-\frac{2}{\pi i} e^{-t\frac{i}{2}\pi}\right]_0^1 =$

$(e^{\pi i} = -1)$ $\quad \cancel{= -\frac{i}{2}e^{\pi i} + (e^{-\frac{i}{2}}} = -\frac{i}{2}e^{\pi i} + (e^{-\frac{i}{2}\pi} - 1) = +\frac{i}{2} + \quad = \dots = \frac{1}{\pi}(1+i)$

- $\int_\gamma \bar z\,dz$

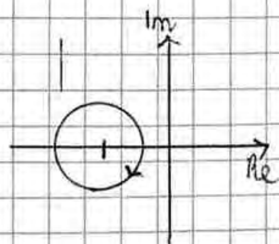
$\bar z$ non è olomorfa
fosse olomorfa farebbe 0!

RICORDA:
$|z - z_0| = r$
centro z_0
raggio r

$\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$\gamma(t) = t^2 + it$

$\Rightarrow \int_\gamma \bar z\,dz = \int_0^{2\pi} (\overline{t^2 + it})(2t + i)\,dt = \int_0^{2\pi} (t^2 - it)(2t + i)\,dt = \dots = 8\pi^4 + 2\pi^2 - i\frac{8}{3}\pi^3$

- $\int_\gamma \frac{z^{12}}{e^{\cos(z)}}\,dz$, $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z+2| = 1\}$ percorsa in senso orario

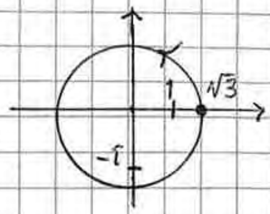


$|z+2| = 1 \to$ raggio 1, centro -2

Osservo: z^{12} olomorfa
$e^{\cos(z)}$ olomorfa perché composizione di f olomorfe

$e^{\cos(z)} \neq 0 \quad \forall z \Rightarrow \frac{z^{12}}{e^{\cos(z)}}$ è olomorfa perché rapporto di f. olomorfe

$\Rightarrow I = \pi i\, f\left(i\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{9}{2\sqrt{6}}\, e^{i\sqrt{\frac{3}{2}}}\,\pi$



$- \; I = \int_\gamma \frac{e^{-5iz}}{z^2+4iz-3}\, dz \,, \; \gamma = \partial B_{\sqrt{3}}(0) = \{z : |z| = \sqrt{3}\}$ antiorario

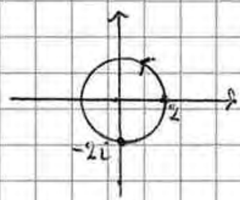
Trovo le radici del denominatore
$z^2+4iz-3=0$
$z_1=-3i,\; z_2=-i$

$-3i \notin \mathrm{Int}(\gamma)$, $-i \in \mathrm{Int}(\gamma) \rightarrow$ singolarità della f. integranda che $\in \mathrm{Int}\,\gamma$

$I = \int_\gamma \underbrace{\frac{e^{-5iz}}{(z+3i)}}_{f(z)} \frac{1}{(z+i)} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z+i} = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i\, f(-i) = 2\pi i \,\frac{e^{+5i^2}}{-i+3i} = \frac{e^{-5}}{2\cancel{i}}\, 2\pi \cancel{i} = \pi e^{5}$

$- \; I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\, dz \,, \; \gamma = \{z \in \mathbb{C} : \cancel{|z-i| = 2\sqrt{2}}\; |z| = 2\}$ percorsa in senso antiorario

$|z|=2 \rightarrow$ circonferenza di raggio 2 e centro 0



- Trovo le radici del denominatore
$z(z^2+8)=0$
$z_1=0$
$z_2=\sqrt{-8}=\sqrt{8i^2}=i\sqrt{8}$

$\Rightarrow z_1 \in \mathrm{Int}\,\gamma \;\Rightarrow f(z) = \cancel{\frac{\cos z}{z^2}}\; \cancel{\frac{\cos z}{z^2+8}}\; \frac{\cos z}{z^2+8}$
$\quad z_2 \notin \mathrm{Int}\,\gamma$

$\Rightarrow z_0 = 0$

$I = \int_\gamma \frac{f(z)}{z}\, dz = 2\pi i\, f(z_0) = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i\, \frac{\cos 0}{8} = \cancel{2}\pi i\, \frac{\pi}{\cancel{2}}\, \frac{1}{8} = \frac{\pi^2 i}{8}$

Quindi - passi per questa tipologia di esercizi:

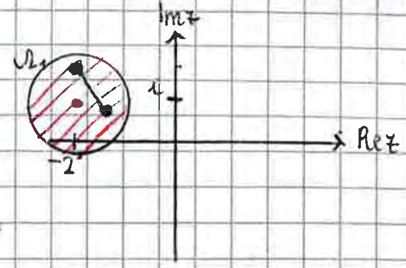
1) faccio il disegno di γ.
2) trovo gli zeri del denominatore della funzione integranda
3) individuo lo zero ~~della~~ del punto 2) che appartiene a $\mathrm{Int}\,\gamma \rightarrow$ sia z_0 tale punto

$\Rightarrow \int_\gamma I(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = 2\pi i \cdot f(z_0)$

$f(z)$ si ottiene da $I(z)$, ovvero la f. integranda ~~in~~ a meno del fattore $(z-z_0)$

ES ① (pag 20) - Numeri complessi e f. elementari

9) a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2+i| \le 1\}$

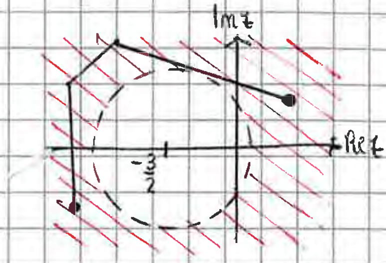


$|z-2+i| \le 1 \to$ punti interni e sulla circonferenza di raggio 1 e centro $z_0 = -2+i$

Ω_1 è chiuso e connesso (presi comunque due punti in Ω_1, esiste una spezzata che li congiunge)

$\partial\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2+i| = 1\}$

$\partial\Omega_1 \subseteq \Omega_1$ infatti Ω_1 è chiuso



b) $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |2z+3| > 4\}$

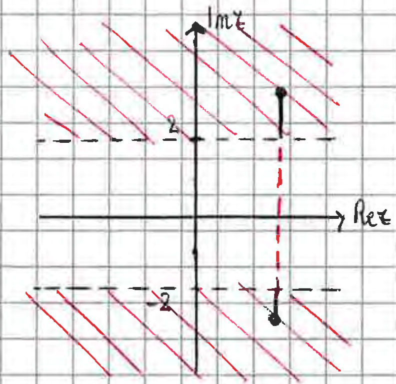
$|2z+3| > 4$

$|2(z+\frac{3}{2})| > 4$

$|z+\frac{3}{2}| > 2 \to$ punti esterni alla circonferenza di raggio 2 e centro $z_0 = -\frac{3}{2}$

Ω_2 è aperto, connesso

$\partial\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |2z+3| = 4\}$



c) $\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| > 2\}$

Ω_3 è aperto NON CONNESSO

$\partial\Omega_3 = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| = 2\} \to$ coppie di rette parallele all'asse reale

~~d) A~~

12) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + 2ix(1-y)$

$z = x+iy$

$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2y + 2ix - 2ixy$

~~Osservo che: $2ix - 2y = 2(ix-y) = 2(\frac{i^2}{i}x$~~

$\Rightarrow z = x+iy \Rightarrow 2z = 2x+2iy \Rightarrow 2zi = 2xi - 2y$

$\Rightarrow f(x,y) = x^2 - y^2 + (2ix - 2y) - 2ixy$

$\Rightarrow x^2 - 2ixy - y^2 = z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 + 2xiy - y^2) = (x^2 - y^2 + i2xy)$

$\Rightarrow \bar{z}^2 = (x^2 - y^2 - i2xy)$

$\Rightarrow f(x,y) = (x^2 - 2ixy - y^2) + (2ix - 2y) \Rightarrow f(z) = (\bar{z}^2) + 2zi$

Verifico:

$f(x+iy) = \overline{(x+iy)}^2 + 2i(x+iy) = (\overline{x+iy})^2 + 2ix - 2y = \overline{(x^2 + 2xiy - y^2)} + 2ix - 2y =$

$= x^2 - 2ixy - y^2 + 2ix - 2y$

Più veloce: sostituisco ad x e y rispettivamente Re z e Im z

$$\boxed{\begin{array}{l} x \to \mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \\ y \to \mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) \end{array}}$$

ES. ② (pag 4.8) - funzioni analitiche

1) C-R

condizioni di Cauchy Riemann = $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$

- $f(z) = |z|$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dom $f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2+y^2})$

$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow f$ non è derivabile in $\mathbb{C}$

- $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \Rightarrow f(x,y) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \Rightarrow$ dom $f = \mathbb{C}$

$u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

$v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

~~$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$~~

~~$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)-y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^2}$~~

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$

- $f(z) = z^n$ $\rightarrow$ ossia che $g(z) = z$ è derivata su $\mathbb{C}$ (intera)

dom $f = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ il prodotto di f. derivate è derivate

$\Rightarrow f(z)$ è derivata.

~~$f(x,y) = (x+iy)^n$~~

2) $f(z) = \frac{1}{z}$ dom $f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{|z|^4}(-x^2+y^2+2xyi) =$

$= -\frac{1}{(|z|^2)^2}(x^2-y^2-2xyi) = -\frac{1}{(|z|^2)^2}(\bar{z}^2) = -\frac{1}{z^2}$

$f(z) = \frac{1}{z} \Rightarrow f'(z) = -\frac{1}{z^2}$

- $f(z) = x^2 + iy^2$ dom $f = \mathbb{C}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow x = y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ $\Rightarrow f$ è derivabile $\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow z = x + ix$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x$

f è analitica (olomorfa) su D se:

1) u, v sono di classe C^1 su D
2) valgono le condizioni di C-R.

5) a) $f(z) = 3x+y+i(3y-x)$ dom f $= \mathbb{C}$

$u(x,y) = (3x+y)$ ⇒ u, v sono di classe C^1 su $\mathbb{C}$
$v(x,y) = (3y-x)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1$
$\frac{\partial v}{\partial x} = -1$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3$ ⇒ valgono le condizioni di C-R su $\mathbb{C}$

⇒ f è olomorfa nel suo dominio.

b) $f(z) = e^{-y}e^{ix} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = e^{-y}\cos x + e^{-y} i \operatorname{sen} x$ → dom f $= \mathbb{C}$

$u(x,y) = e^{-y}\cos x$ ⇒ u, v sono di classe C^1 su $\mathbb{C}$
$v(x,y) = e^{-y}\operatorname{sen} x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\operatorname{sen} x\, e^{-y}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y}\cos x$
$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-y}\cos x$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\operatorname{sen} x\, e^{-y}$ ⇒ valgono le condizioni di C-R su $\mathbb{C}$

⇒ f è olomorfa nel suo dominio

c) $f(z) = xy + iy$ dom f $= \mathbb{C}$

$u(x,y) = xy$ ⇒ u, v sono di classe C^1 su $\mathbb{C}$
$v(x,y) = y$

$\frac{\partial u}{\partial x} = y$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x$
$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$ ⇒ non valgono le condizioni di C-R su $\mathbb{C}$

⇒ f non è olomorfa nel suo dominio
Vedo dove è olomorfa.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow y = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow x = 0 \end{cases}$$ ⇒ f è olomorfa in $z = i$ e $f'(z) = y$

d) $f(z) = e^{y}e^{ix}$ dom f $= \mathbb{C}$
$f(z) = e^{y}\cos x + i e^{y}\operatorname{sen} x$

$u(x,y) = e^{y}\cos x$ ⇒ u, v sono di classe di C^1 su $\mathbb{C}$
$v(x,y) = e^{y}\operatorname{sen} x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{y}\operatorname{sen} x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{y}\cos x$
$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{y}\cos x$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{y}\operatorname{sen} x$ ⇒ non valgono le condizioni di C-R su $\mathbb{C}$

⇒ f non è olomorfa nel suo dominio

f è armonica se è di classe C^2 su D e vale $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \forall (x,y)\in D$

f ~~armonica~~ derivata ⇒ le sue componenti cartesiane sono armoniche su D

→ ~~cerco~~ armonica coniugata

Sia u armonica

v è completamento armonico di u (o armonica coniugata) se $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ è derivata.

Cerco $v(x,y)$ imponendo le condizioni di C-R.

7) a) $u(x,y)=2x(1-y)=2x-2xy$

$D=\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x-2xy)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2x-2xy)=\frac{\partial}{\partial x}(2-2y)+\frac{\partial}{\partial y}(-2x)=0+0=0$$

⇒ u è armonica su D.

Cerco l'armonica coniugata, imponendo le condizioni di CR

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=2-2y \Rightarrow v(x,y)=\int(2-2y)\,dy=2y-y^2+c(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(2y-y^2+c(x))=\cancel{2-2y}\ c'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=+2x$$

Ricorda:

$\int - \, dx = - + c(y)$

$\int - \, dy = - + c(x)$

⇒ $c'(x)=+2x$

$c(x)=+x^2+c$

⇒ $v(x,y)=2y-y^2+c(x)=2y-y^2+x^2+c$

Verifico: $\frac{\partial v}{\partial y}=2-2y=\frac{\partial u}{\partial x}=2-2y$

$\frac{\partial v}{\partial x}=+2x=-\frac{\partial u}{\partial y}=+2x$

⇒ $v(x,y)=2y-y^2+x^2+c$

b) $u(x,y)=y^2-x^2$

$D=\mathbb{R}^2$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-2x \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2$

$\frac{\partial u}{\partial y}=2y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2$

⇒ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ ⇒ u è armonica su D

⇒ Cerco l'armonica coniugata imponendo le condizioni di C-R

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=-2x \Rightarrow v(x,y)=\int -2x\,dy=-2xy+c(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(-2xy+c(x))=-2\cancel{y}+c'(x)$$

$c'(x)=0 \Rightarrow c(x)=c$

$\Rightarrow -2\cancel{y}+c'(x)=-\cancel{2y}$ ⇒ ~~$c'(x)=2x-2y \Rightarrow c(x)=x^2-2xy+c$~~

~~$c(x)=\int(2x-2y)\,dx$~~

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-2y$$

⇒ $v(x,y)=-2xy+c(x)=-2xy$ ~~$+x^2-2xy$~~ $+c$ ~~$=x^2-4xy+c$~~ $=-2xy+c$

d) $u(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} = y\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

$D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{-y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \to \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{-2y(x^2+y^2)^2 + 2xy(2x)2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{(x^2+y^2) - y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2} \to \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{-2y(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)2\cdot 2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2y(x^4+2x^2y^2+y^4) + 8x^2y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2x^4y - 4x^2y^3 - 2y^5 + 8x^4y + 8x^2y^3}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2y^5+6x^4y+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2y(x^4+2x^2y^2+y^4) - 4y(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{-2x^4y - 4x^2y^3 - 2y^5 - 4x^4y + 4y^5}{(x^2+y^2)^4} = -\left(\frac{2y^5+6x^4y+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^4}\right)$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow u$ è armonica in D

⇒ Cerco l'armonica coniugata imponendo le condizioni di CR

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

$\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow v(x,y) = \cancel{\displaystyle\int -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \int -2x \int \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}\,dy}$ $\quad \cancel{t = x^2+y^2}$ $\quad \cancel{dt = 2y\,dy}$

~~$\Rightarrow v(x,y) = -2x\displaystyle\int \frac{1}{t^2}\,dt = -2x\int t^{-2}\,dt = -2x\left(-\frac{1}{t}\right) + c(x) \quad t \to y$~~

~~$\Rightarrow v(x,y) = +2\dfrac{x}{y} + c(x)$~~

~~$\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2x}{y} + c(x)\right) = \dfrac{2}{y} + c'(x)$~~ $\Rightarrow$ ~~$c'(x) = -\dfrac{2}{y} - \dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$~~ $\Rightarrow$

~~$-\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$~~

$v(x,y) = -2x\displaystyle\int \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy = \frac{x}{x^2+y^2} + c(x)$

$\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2} + c(x)\right) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + c'(x) \Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow c(x) = c$

$-\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\left(\dfrac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\Rightarrow \boxed{v(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + c}$

~~8) f analitica in Ω~~

ANALITICA = OLOMORFA

~~• f(z) è analitica in Ω ⇒ f(z) = costante~~

~~10. f olomorfa in Ω~~

~~f(z) è olomorfa in Ω~~

~~Tesi: f(z) = costante~~

~~Dimostrazione~~

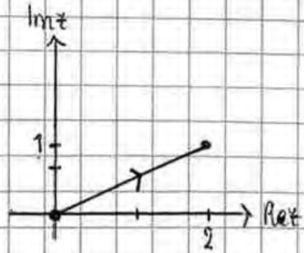
~~f olomorfa in Ω ⇒ le sue componenti cartesiane sono armoniche in Ω, f(z) = u(x,y) + iv(x,y)~~

~~$\Rightarrow u$ è armonica $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$~~

~~$\Rightarrow v$ è armonica $\Rightarrow \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$~~

12) integrale di linea

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt$$



a) $f(z)=z^2$

C = segmento che unisce l'origine a $2+i$

Sia γ la parametrizzazione di C

$\gamma(t)=z_0+t(z_1-z_0) \quad t\in[0,1]$

$z_0=0$

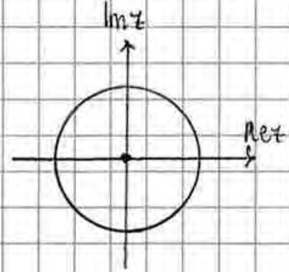
$z_1=2+i$

$\Rightarrow \gamma(t)=(2+i)t \quad t\in[0,1]$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_0^1((2+i)t)^2\cdot(2+i)\,dt=$$

$$=(2+i)\int_0^1(2+i)^2t^2\,dt=(2+i)^3\int_0^1 t^2\,dt=\frac{1}{3}(2+i)^3=\frac{1}{3}(8+\overset{12}{\cancel{6}}i+6i^2+i^3)=$$

$$=\frac{1}{3}(8+12i-6-i)=\frac{1}{3}(2+11i)=\frac{2}{3}+\frac{11}{3}i$$



b) $f(z)=\bar{z}$

C = circonferenza unitaria centrata nell'origine

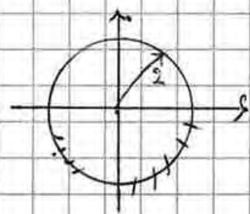
Sia γ la parametrizzazione di C:

$\gamma(t)=z_0+re^{it}=e^{it} \quad t\in[0,2\pi]$ $\quad \cancel{\to \bar{z}\ f(\bar{z})\to f(\overline{\gamma(t)})=f(\gamma(t))}$

$\overline{e^{it}}$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}e^{-it}\cdot ie^{it}\,dt=\cancel{ie}\ i\int_0^{2\pi}e^{-it+it}\,dt=i\int_0^{2\pi}dt=2\pi i$$



c) $f(z)=\frac{z+2}{z} \qquad \text{dom} f=\mathbb{C}\setminus\{0\}$

C = semicirconferenza superiore con $r=2$ e centro 0

Sia $\gamma(t)$ la parametrizzazione di C

$\gamma(t)=z_0+re^{it}=$

$=2e^{it} \quad t\in[0,\pi]$

$$\cancel{\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{it}+2}{2e^{it}}\cdot 2ie^{it}\,dt=\int_0^{2\pi}2ie^{it}\,dt=2i\int_0^{2\pi}e^{it}\,dt=}$$

$$\cancel{=2i\left[\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^{2\pi}=2e^{it}\Big|_0^{2\pi}=2e^{2\pi i}-1=2e-1}$$

$(e^{i\pi}=-1)$

$$\cancel{\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=\int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt=\int_0^{\pi}\frac{2e^{it}+2}{2e^{it}}\cdot 2ie^{it}\,dt=2i\int_0^\pi(1+e^{it})\,dt=}$$

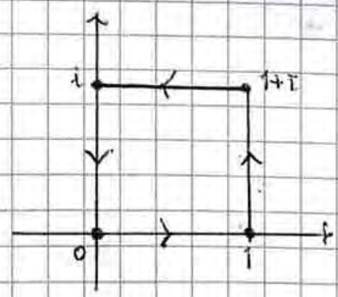
$$\cancel{=2i\left[t+\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^\pi=2i\left(\pi+\frac{1}{i}e^{i\pi}\right)-2i(0+1)=2\pi i+2(-1)-2i=}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz=\int_0^\pi\frac{2e^{it}+2}{2e^{it}}\cdot 2ie^{it}\,dt=2i\int_0^\pi(1+e^{it})\,dt=2i\left[t+\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^\pi=$$

$$=2i\left[t+\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^\pi=\left[2it+2e^{it}\right]_0^\pi=2\pi i+2e^{i\pi}-0-2=2\pi i-4.$$

13) $f(z) = e^{\pi \bar{z}}$

C = frontiera del quadrato di vertici $z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = i$ in verso antiorario



Sia γ la parametrizzazione di C

$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) + \gamma_3(t) + \gamma_4(t)$

$\gamma_1(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = t \quad, t \in [0,1] \qquad \overline{\gamma_1(t)} = t \qquad \gamma_1'(t) = 1$

$\gamma_2(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = 1 + ti \quad, t \in [0,1] \qquad \overline{\gamma_2(t)} = 1 - ti \qquad \gamma_2'(t) = i$

$\gamma_3(t) = z_2 + t(z_3 - z_2) = 1 + i - t, \ t \in [0,1] \qquad \overline{\gamma_3(t)} = 1 - t - i \qquad \gamma_3'(t) = -1$

$\gamma_4(t) = z_3 + t(z_0 - z_3) = i - ti \ , t \in [0,1] \qquad \overline{\gamma_4(t)} = ti - i \qquad \gamma_4'(t) = -i$

$$\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz =$$

Se f fosse olomorfa l'integrale sarebbe 0.
f però non è olomorfa perché è composizione di una funzione olomorfa e^z con una funzione non olomorfa $\bar{z}$.

$$\rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^1 e^{\pi t}\,dt = \frac{1}{\pi} e^{\pi t}\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - 1)$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^1 e^{\pi(1-ti)}\, i\,dt = i\int_0^1 (e^{\pi} + e^{-ti\pi})\,dt = i(e^{\pi}t)\Big|_0^1 + i\left(-\frac{1}{i} e^{-ti}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= ie^{\pi} + (-e^{-i}$$

$$= i\int_0^1 (e^{\pi} + e^{-\pi t i})\,dt = i\int_0^1 e^{\pi}\,dt + i\int_0^1 e^{-\pi t i}\,dt = ie^{\pi} + i\left[\frac{1}{-\pi i} e^{-\pi t i}\right]_0^1 =$$

$$= ie^{\pi} + (-e^{-\pi i} + 1) = ie^{\pi} + \left(-\frac{1}{e^{\pi i}} + 1\right) = ie^{\pi} + 2$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_0^1 e^{\pi(1+t-i)}\,dt = \int_0^1 e^{\pi}$$

$$i\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^1 e^{\pi(1-ti)}\, i\,dt = i\int_0^1 e^{\pi} e^{-ti\pi}\,dt = ie^{\pi}\int_0^1 e^{-ti\pi}\,dt = ie^{\pi}\left[-\frac{1}{i} e^{-ti\pi}\right]_0^1 =$$

$$= -e^{\pi}(e^{-\pi i} - 1) = -e^{\pi}(-1-1) = +2e^{\pi}$$

$$\rightarrow \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_0^1 e^{\pi(1+t-i)}\,dt = \int_0^1 e^{\pi} \cdot e^{-\pi i} e^{t\pi}\,dt = -e^{\pi}\int_0^1 e^{t\pi}\,dt = -e^{\pi}\left[\frac{1}{\pi} e^{t\pi}\right]_0^1 =$$

$$= -e^{\pi} \cdot \frac{1}{\pi}(e^{\pi} - 1)$$

$$\rightarrow \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = \int_0^1 e^{\pi(ti-i)}(-i)\,dt = -i\int_0^1 e^{\pi t i} e^{-\pi i}\,dt = +i\int_0^1 e^{\pi t i}\,dt = i\left[\frac{1}{\pi i} e^{\pi t i}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[e^{\pi t i}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}(-1-1) = -\frac{2}{\pi}$$

Verificare che:

$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le 60$

$f: \cancel{D\subseteq}\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f continua $\Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\,L(\gamma)$ dove $M \ge |f(z)|\ \forall z \in D$

γ è regolare

$L(\gamma)$ = perimetro del trapezio $= 3+\sqrt{3^2+4^2}+4 = 3+5+4 = 12$

$\Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\cdot 12$

~~$|f(z)| = |e^z - \bar{z}| \le |e^z| + |\bar{z}|$ ... $|e^z - \bar{z}|$~~

~~Per trovare M:~~

$|\bar{z}| = |z|$

~~$\left|\int_C |f(z)| \le \max_{z\in supp(\gamma)} |f(z)| = \max_{z\in supp(\gamma)} |e^z - \bar{z}| =\right.$~~

Per trovare M

$|f(z)| = |e^z - \bar{z}| \le |e^z| + |\bar{z}| \le \underset{\substack{\downarrow \\ z=0\in\mathbb{R}}}{\max_{z\in supp(\gamma)}} |e^z| + \underset{\substack{\downarrow \\ z=4}}{\max_{z\in supp(\gamma)}} |\bar{z}| = e^0 + 4 = 5$

15) γ = traccia della circonferenza $|z| = R$ percorsa in senso antiorario

$\lim_{R\to+\infty} \int_\gamma \frac{\text{Log}\, z}{z^2}\,dz = 0$?

$\log z = \log re^{i\theta} = \text{Log}\, r + \log e^{i\theta} = \text{Log}\, r + i\theta$

$r = |z|$

$\theta = \arg z$

$\arg z = \text{Arg}\, z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ la funzione logaritmo complesso non è univoca

$\Rightarrow$ valore principale di $\log z$ si ha ponendo $\theta = \text{Arg}\, z$.

$\therefore = \text{Log}\, z = \text{Log}|z| + i\,\text{Arg}\, z$

$\Rightarrow \boxed{\text{Log}\, z = \text{Log}|z| + i\,\text{Arg}\, z}$

($\text{Arg}\, z$ unico valore θ di $\arg z$ tale che $-\pi < \theta \le \pi$)

So che

$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\,L(\gamma)$

$L(\gamma) = 2\pi R$

$\Rightarrow \left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\cdot 2\pi R$

$\gamma(t) = \cancel{2\pi e^{\pi}}\ Re^{it}\quad t \in [0, 2\pi)$

$|f(z)\,\cancel{dz}| = \left|\frac{\text{Log}\, z}{z^2}\right| = \frac{1}{z^2}|\text{Log}|z| + i\,\text{Arg}\, z|$

$\Rightarrow \max_{z\in supp(\gamma)} \left|\left|\frac{1}{z^2}\right|\left|\text{Log}|z| + i\,\text{Arg}\, z\right|\right| = \max_{z=|R|} \left|\left|\frac{1}{z^2}\right|\left|\text{Log}|z| + i\,\text{Arg}\, z\right|\right| =$ $\to z \in supp(\gamma) \Leftrightarrow z = |R|$

$= \frac{1}{R^2}(\text{Log}|z| + i\,\text{Arg}\, R) \le \frac{1}{R^2}(\text{Log}\, R + \pi)$

$\Rightarrow \left|\int_\gamma \frac{\text{Log}\, z}{z^2}\,dz\right| \le \frac{2\pi}{R}(\text{Log}\, R + \pi)$

$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_\gamma \frac{\text{Log}\, z}{z^2}\,dz\right| \le \lim_{R\to+\infty} \frac{2\pi}{R}(\text{Log}\, R + \pi) = 0$

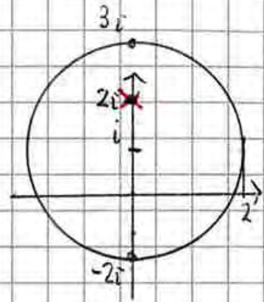
$\Rightarrow$ per il confronto si ha la tesi!

Quindi:
$\int_\gamma f(z)\,dz$

sia $\operatorname{dom} f = \mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, \dots, z_k\}$
sia $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{g(z)}{z-z_0} \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \dfrac{g(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, g(z_0)$

d) $\int_\gamma \dfrac{1}{(z^2+4)^2}\,dz \quad \gamma = \partial C \quad C = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| = 2\}$



$\Rightarrow \gamma(t) = i + 2e^{ti} \quad t \in [0, 2\pi)$

$\operatorname{dom} f = \mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$
$z^2+4 \neq 0$
$z^2 \neq -4$
$z \neq \sqrt{-4} = \sqrt{4 i^2} = \pm 2i \qquad i^2 = -1 \quad \sqrt{i^2} = i$

~~f non è~~
$z_0 \in$
$-2i \notin \operatorname{Int}\gamma$
$2i \in \operatorname{Int}\gamma$

~~$(z^2+4)^2 = (z^2-(-4))^2 = (z-(-2))$~~
~~$z^2+4 = z^2+2^2 = z^2-(-2)^2 = (z-(-2))(z+(-2)) = (z+2)(z-2)$~~

~~$f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \Rightarrow \int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} = \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)$~~

~~$f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2} = (z^2+4)^{-2}$~~

RICORDA:
$z^2 + z_0^2 = (z - z_0 i)(z + z_0 i)$

~~$f'(z) = -2(z^2+4)^{-1} \cdot 2z = -\dfrac{4z}{z^2+4} = \dfrac{-4z}{(z+2i)(z-2i)} =$~~

~~$f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2} = \dfrac{g(z)}{z-z_0} = \dfrac{g(z)}{z-2i} \Rightarrow g(z) = \dfrac{z-2i}{(z^2+4)^2} =$~~

$z_0 = 2i$
So che $f^{(n)}(z_0) = \int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \Rightarrow \boxed{\int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = f^{(n)}(z_0)\,\dfrac{2\pi i}{n!}}$

$\dfrac{1}{(z^2+4)^2} = \dfrac{1}{(z-2i)^2} \cdot f(z) \Rightarrow f(z) = \dfrac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2} = \dfrac{(z-2i)^2}{(z-2i)^2(z+2i)^2} = \dfrac{1}{(z+2i)^2}$

~~$\Rightarrow \int_\gamma \dfrac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \int_\gamma \dfrac{1}{(z-2i)^2}\dfrac{1}{(z+2i)^2}\,dz = \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = \dfrac{2\pi i\,(-2)}{2z+2i} = -\dfrac{4\pi i}{4i}$~~
~~$n = 2-1 = 1$~~
~~$z_0 = 2i$~~

$\Rightarrow \int_\gamma \dfrac{1}{(z^2+4)^2}\,dz = \int_\gamma \dfrac{1}{(z+2i)^2(z-2i)^2}\,dz = \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) = 2\pi i \dfrac{d}{dz}\dfrac{1}{(z+2i)^2}\Big|_{z=2i}$
$n=1$
$z_0 = 2i$

Serie di Taylor

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n}$$

$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow$ su $z \in \mathbb{C} \Rightarrow e^z$ è intera

$- f(z) = \operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \dfrac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-iz)^n}{n!}\right) =$

$= \dfrac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(i^n - (-1)^n i^n)}{n!} z^n\right)$

- per n pari $\Rightarrow i^n - (-1)^n i^n = i^n - i^n = 0 \Rightarrow f(z) = 0$
- per n dispari:

$f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{i^{2n+1} + i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right) =$

$(-1)^{2n+1} = -1$
$i^2 = -1$ $\Rightarrow i^{2n+1} = (i^2)^n i = (-1)^n i$

$\cancel{= \dfrac{1i}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{+1+1}{n!} z^{2n+1}}$

$= \dfrac{1}{2i} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n i + (-1)^n i}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \dfrac{1}{2i} 2i \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}} \quad R = +\infty$$

$- f(z) = \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-iz)^n}{n!}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(i^n + (-1)^n i^n)}{n!} z^n\right)$

- per n dispari $\Rightarrow i^n + (-1)^n i^n = i^n - i^n = 0 \Rightarrow f(z) = 0$
- per n pari: $i^{2n} + (-1)^{2n} i^{2n} = i^{2n} + i^{2n} = 2i^{2n}$

$f(z) = \dfrac{1}{\cancel{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cancel{2} i^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}} \quad R = +\infty$$

Analogamente si prova che:

$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ (Ricorda: $\operatorname{senh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$)

$\cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} z^{2n}$ (Ricorda: $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$)

→ $f(z) = \frac{1}{iz^2(1+iz^3)}$ $\{|z|<1\}$ calcolo residuo in $z=0$

$f(z) = \frac{1}{iz^2}\left(\frac{1}{1-(-iz^3)}\right)$

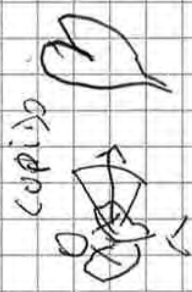
$|-iz^3|<1,\ |z^3|<1 \Rightarrow |z|<1 \Rightarrow \frac{1}{1-(-iz^3)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-iz^3)^n$

$f(z) = \frac{1}{iz^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-iz^3)^n =$

$= \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-i)^n z^{3n-2} =$

$3n-2 = \begin{cases} -2 & n=0 \\ 1 & n=1 \end{cases}$ ⇒ il termine di grado (-1) ha coeff nullo quindi $\text{Res} f(0) = 0$

$3n-2=-1$
$3n=1$
$n=\frac{1}{3}$ ⇒ ma $n\in\mathbb{N}^+ \Rightarrow a_{-1}=0=\text{Res} f(0)$



→ $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ $\{|z|\neq 1\}$. calcolo residuo in $z=1$

$f(z) = \frac{e^{2(z-1+1)}}{(z-1)^3} = \frac{e^{2(z-1)}}{(z-1)^3}\cdot e^2 = e^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2(z-1))^n}{n!(z-1)^3} = e^2\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{2^n}{n!}}_{a_n}(z-1)^{n-3}$

$n-3=-1$
$n=2$
$\text{Res} f(1) = e^2\frac{2^2}{2!} = 2e^2$

→ $f(z) = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$ $\{|z|>2\}$

$\left|\frac{2}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>2$
⇒ ok perché $\{|z|>2\}$
$\left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>1$

$f(z) = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \left(\frac{1}{z}\right)^n\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$

ESERCITAZIONE 5 (17.04.2015)

→ classificare singolarità

$f(z) = \dfrac{\cos z}{\left(z^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)^2}$ nel punto $z = \frac{\pi}{2}$ (è conveniente fare lo sviluppo in $z = \frac{\pi}{2}$)

$$f(z) = \frac{\cos\left(z - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2} = \frac{\cos\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\overbrace{\cancel{\cos\frac{\pi}{2}}}^{=0} - \operatorname{sen}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\overbrace{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}^{=1}}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2} =$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$$= -\frac{\operatorname{sen}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} =$$

$$= -\frac{1}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1} =$$ → polo semplice

$$= -\frac{1}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)^2}\left(\underbrace{\frac{1}{z-\frac{\pi}{2}}}_{n=0} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}\right)$$

$2n - \cancel{1} = -\cancel{1}$

$2n = 0$

$n = 0 \Rightarrow \operatorname{Res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)^2} = -\dfrac{1}{\pi^2}$

→ $f(z) = (a-3)\, z \cosh\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{a}{z}$ in $z = 0$

$-f(z) = \frac{z^3-h}{z^3-z^5}$, residuo in $z=0$

$f(z) = \frac{z^3-h}{z^3(1-z^2)}$

$|z|<1 \Rightarrow f(z) = \frac{z^3-h}{z^3} \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{2n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^3-h)\, z^{2n-3} =$

$2n-3=-1$
$2n = 3-1$
$n=1$
$\Rightarrow Res\, f(0) = a_{-1} = -h$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^{2n} - h z^{2n-3}\right) = -\frac{h}{z^3} \underset{n=0}{} - \frac{h}{z} \underset{n=1}{} + \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} - h z^{2n+1}$ Attenzione!

polo di ordine 3 in 0
$Res\, f(0) = a_{-1} = -h$

$-f(z) = \frac{e^z}{z^3-z^2-5z-3}$, ~~residui~~ trovare i poli e i ~~residui~~ residui nei poli

Se f è olomorfa in $z_0 \Rightarrow Res\, f(z_0) = 0$

e^z è olomorfa, $e^z \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$
z^3-z^2-5z-3 è olomorfa

Unico pericolo nei punti in cui si annulla il denominatore ~~.........~~

$z^3-z^2-5z-3=0$
$z=-1$ è soluzione
$\frac{z^3-z^2-5z-3}{z+1} = z^2-2z-3 = (z-3)(z+1)$

$\Rightarrow z=-1$ con molteplicità 2
$z=3$ " 1

$\Rightarrow$ poli: $z=3 \rightarrow$ semplice (è facile calcolare il residuo)
$z=-1 \rightarrow$ doppio

~~Suppongo che~~
$\rightarrow$ polo in $z=3$ semplice
$f(z) = \frac{R}{z-3} + r(z) \rightarrow$ olomorfa
$R = \lim_{z\to 3} (z-3) f(z)$

$\Rightarrow Res\, f(3) = \lim_{z\to3} \cancel{(z-3)} \frac{e^z}{(z+1)^2 \cancel{(z-3)}} = \frac{e^3}{16}$

$\rightarrow$ polo in $z=-1$ doppio
$f(z) = \frac{c_2}{(z+1)^2} + \frac{c_1}{z+1} + r(z)$
① $c_2 = \lim_{z\to-1} (z+1)^2 f(z)$
$\tilde{f}(z) = f(z) - \frac{c_2}{(z+1)^2} = \frac{c_1}{z+1} + r(z) \rightarrow$ caso prima

SE IL POLO (z_0) È SEMPLICE: $f(z) = \frac{R}{z-z_0} + r(z)$ Residuo
quando è semplice, si fa così senza fare lo sviluppo (basta sapere che la funzione ammette lo sviluppo)

$Res\, f(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z_0)$

SE IL POLO (z_0) È DOPPIO: $f(z) = \frac{c_2}{(z-z_0)^2} + \frac{c_1}{(z-z_0)} + r(z)$ Residuo
②
$g(z) = (z-z_0)^2 f(z) = c_2 + (z-z_0)\, c_1 + (z-z_0)^2 r(z)$
$g'(z) = c_1 + 2(z-1)\, r(z)$
$\Rightarrow g'(z_0) = \text{Residuo} = Res\, f(z_0)$

ES. 2

e) $\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4} dz$ $\quad \gamma = \partial C$

$C = [-1,1] \times [-1,1]$

$\Rightarrow$ dom $g = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

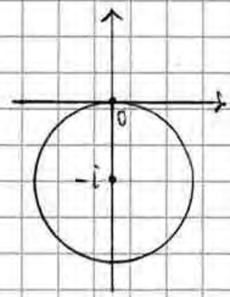
$z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz \rightsquigarrow f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$\int_\gamma \frac{\cosh z}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad \text{con } z_0 = 0, \quad n = 4 - 1 = 3$$

$$= \frac{2\pi i}{3!} f^{(3)}(z_0) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi i \frac{d^3}{dz^3} \cosh z \Big|_{z=0} = \frac{1}{3}\pi i \operatorname{senh} 0 = 0$$



f) $\int_\gamma \frac{1}{z^4 - 1} dz$, $\quad \gamma = \partial C$

$C = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 1\}$

$\gamma(t) = -i + e^{ti} \quad t \in [0, 2\pi)$

dom $g(z)$: $z^4 - 1 \neq 0$

$z^4 \neq 1$ $\quad z^2 \neq \pm 1$ — $z^2 \neq 1 \to z \neq \pm 1$; $z^2 \neq -1 \to z \neq \pm i$

~~$z \neq \pm 1$~~

~~dom $g(z) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$~~

~~$\pm 1 \notin \operatorname{Int}\gamma$~~

~~$\Rightarrow g$ è olomorfa $\Rightarrow$~~

dom $g(z) = \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

$i \notin \operatorname{Int}\gamma$

$-i \in \operatorname{Int}\gamma$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \Rightarrow \frac{1}{z^4 - 1} = \frac{f(z)}{z + i} \Rightarrow f(z) = \frac{z + i}{z^4 + 1} = \frac{z - 1}{(z+i)(z-i)(z^2-1)} = \frac{1}{(z-i)(z^2-1)}$$

$$\cancel{\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz} = \int_\gamma \frac{1}{z^4 - 1} dz = \int \underbrace{\frac{1}{(z-i)(z^2-1)}}_{f(z)} \frac{1}{(z+i)} dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i \frac{1}{-2i} \cdot \frac{1}{(-2)} = \frac{\pi}{2}$$

3) a) $f(t) = t^3 - 3t^2 + 4t - 2$
$t_0 = 2$

← sviluppo di Taylor di un polinomio in $t_0 \neq 0$

$$f(t) = (t-2)^3 - 3(t-2)^2 + 4(t-2) - 2 + c_0 =$$
$$= (t^3 - 6t^2 + 12t - 8) - 3(t^2 - 4t + 4) + 4t - 8 - 2 + c_0$$
$$= t^3 - 6t^2 + \cancel{12t} - 8 + 3t^2 - \cancel{12t} + 12 + 4t - 8 - 2 + c_0$$
$$= t^3 - 3t^2 + 4t - 6 + c_0$$

$\Rightarrow -6 + c_0 = -2$
$\Rightarrow c_0 = 4$

$\Rightarrow f(t) = (t-2)^3 - 3(t-2)^2 + 4(t-2) - 2 + 4$

$\Rightarrow f(t) = 2 + 4(t-2) - 3(t-2)^2 + (t-2)^3$

~~b) $f(t) = te^{2t}$~~
~~$t_0 = 1$~~

$$(z+1)\, e^{2z} - e^{2z} =$$
$$(z+1)\, e^{2(z+1)} \cdot e^{-2} - e^{2(z+1)} \cdot e^{-2}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n}$$
sviluppo di Taylor di f in t_0

~~$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$~~

~~$f(t) = (t-1)e^{2(t-1)} + c_0 = te^{2(t-1)} - e^{2(t-1)} + c_0 = te^{2t}e^{-1} - e^{2t}e^{-1} + c_0 = te^{2t}\left(e^{-1} - \frac{1}{t}e^{-1}\right) + c_0$~~

~~$\Rightarrow c_0 = 0$~~
~~$e^{-1} - \frac{1}{t}e^{-1} = 1$~~

~~$\frac{1}{e} = \frac{1}{te} \Leftrightarrow t = 1$~~

~~$f(t) = (t+1-1)e^{2(t+1-1)} = (t+1-1)\left(e^{t+1-1}\right)^2 = (t+1-1)\left(e^{t-1}e\right)^2 = (t+1-1)\left(e^{(t-1)}\right)^2 e^2 =$~~
~~$= (t-1)\left(e^{(t-1)}\right)^2 e^2 + \left(e^{(t-1)}\right)^2 e^2 = (t-1)\left(e^2\right)^{t-1}e^2 + e^2\left(e^2\right)^{t-1}$~~
~~$= (t-1)\sum_{n=0}^{+\infty} e^2\left(\frac{e^{2n}}{n!}\right) + e^2 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{2n}}{n!} =$~~
~~$= e^2$~~

~~$f(t) = te^{2t}$~~ ~~$t - t_0 = t+1$~~
~~$t = t - t_0 = t+1$~~

~~$\Rightarrow f(t) = (t+1)e^{2(t+1)} = (t+1)\left(e^2\right)^{t+1} = (t+1)\sum \frac{(t+1)^n}{n!}$~~

~~$f(t) = (t+1-1)e^{2(t+1-1)} = ((t+1)-1)e^{2((t+1)-1)} = ((t+1)-1)\left(e^2\right)^{t+1} \cdot e^{-2} =$~~
~~$= (t+1)\left(e^2\right)^{t+1}e^{-2} - \left(e^2\right)^{t+1}e^{-2} =$~~ $\leadsto e^t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} \Rightarrow e^{2(t+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(t+1)^n}{n!}$

~~$= (t+1)\sum_{n=0}^{+\infty}(2t+2)^n$~~

~~$= (t+1)\, 2\sum_{n=0}^{+\infty}$~~

~~$= e^{-2}(t+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(t+1)^{n}}{n!} - e^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(t+1)^n}{n!} =$~~
~~$= e^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(t+1)^{n+1}}{n!} - e^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n(t+1)^n}{n!}$~~

~~$n+1 = m$~~
~~$n = m-1$~~

h) a) $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$, $z_0 = 0$

$n+1 = u$
$u = u-1$

$\{|z|<1\}$

$|z|<1$

$$\frac{z+1}{z-1} = -\frac{z+1}{1-z} \stackrel{\downarrow}{=} -(z+1)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = -z\sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n - 1\right) =$$

$$\Rightarrow f(z) = -1 - 2\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1}$$

$\{|z|>1\}$

$\left|\frac{1}{z}\right|<1 \Rightarrow |z|>1$

$$\frac{z+1}{z-1} = -\frac{z+1}{1-z} = \frac{z+1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} \stackrel{\downarrow}{=} \frac{z+1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \cancel{(z+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n =$$

$n_0 = 0$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$$

$\Rightarrow f(z) = 1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}$ → rappresentazione di $f(z)$ in $\{|z|>1\}$

b) $f(z) = \frac{\cos 2z^2}{z^5}$, $z_0 = 0$

$\{|z|>0\}$

$$\frac{1}{z^5}\cos 2z^2 = \frac{1}{z^5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2z^2)^{2n} = \frac{1}{z^5}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^n z^{4n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^n z^{4n-5}$$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^n z^{4n-5}$ → rappresentazione di $f(z)$ in $\{|z|>0\}$

c) $f(z) = \frac{6iz^2}{z^2+9}$, $z_0 = 0$

$\leftarrow \rightarrow$

$\{|z|<3\}$

$\left|\frac{9}{z^2}\right|<1 \Rightarrow 9<|z^2| \Rightarrow z^2>9 \Rightarrow -3<z \vee z>3$

$$\frac{6iz^2}{z^2+9} = \frac{6i\cancel{z^2}}{\cancel{z^2}\left(1+\frac{9}{z^2}\right)} \stackrel{\downarrow}{=}$$ NON VA BENE perché deve essere $|z|<3$

$$= \frac{6iz^2}{9\left(1+\frac{z^2}{9}\right)} \stackrel{\uparrow}{=} \frac{6iz^2}{9\left(1-\left(-\frac{z^2}{9}\right)\right)} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}}iz^2}{\underset{3}{\cancel{9}}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z^2}{9}\right)^n = \frac{2}{3}iz^2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{9^n}z^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{2}{3}i\frac{1}{9^n}z^{2n+2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{6}{9^{n+1}}z^{2n+2} i$$

$\left|\frac{z^2}{9}\right|<1$, $|z^2|<9 \Rightarrow -3<z<3 \Rightarrow |z|<3$

$\Rightarrow f(z) = 6i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{9^{n+1}}z^{2n+2}$ → rappresentazione di $f(z)$ in $\{|z|<3\}$

$\{|z|>3\}$

OK

$$\frac{6iz^2}{z^2+9} = \frac{6i\cancel{z^2}}{\cancel{z^2}\left(1+\frac{9}{z^2}\right)} \stackrel{\downarrow}{=} 6i\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{9}{z^2}\right)^n = 6i\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{9^n}{z^{2n}}$$

$\Rightarrow f(z) = 6i\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{9^n}{z^{2n}}$ → rappresentazione di $f(z)$ in $\{|z|>3\}$

ESERCITAZIONE 6 (21.04.2014)

z_0 POLO SEMPLICE: $\mathrm{Res}\, f(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\cdot f(z_0)$

z_0 POLO DOPPIO: $\mathrm{Res}\, f(z_0) = g'(z_0)$, $\quad g(z) = (z-z_0)^2 f(z)$

→ $f(z) = \dfrac{\cosh(2z)}{3+2iz}$

→ $\cosh z = \dfrac{e^z+e^{-z}}{2} \neq 0$ è olomorfa

→ $3+2iz$ è olomorfa.

i residui vanno a cercarsi negli zeri del denominatore

$3+2iz = 0 \Rightarrow z = \frac{3}{2}i$ → polo semplice

$$\Rightarrow \mathrm{Res}\, f\left(\tfrac{3}{2}i\right) = \lim_{z\to\frac{3}{2}i} \left(z-\tfrac{3}{2}i\right)\frac{\cosh(2z)}{3+2iz} = \lim_{z\to\frac{3}{2}i} \left(z-\tfrac{3}{2}i\right)\frac{\cosh 2z}{2i\left(z+\frac{3}{2i}\right)} = \lim_{z\to\frac{3}{2}i}\cancel{\left(z-\tfrac{3}{2}i\right)}\frac{\cosh 2z}{\left(2i\,\cancel{\left(z-\frac{3}{2}i\right)}\right)} =$$
$$= \frac{\cosh 3i}{2i}$$

→ $f(z) = \dfrac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$

$z+1$ è olomorfa

$z-1$ è olomorfa

$\Rightarrow z-1=0 \Rightarrow z=1$ polo doppio (molteplicità 2)

$\mathrm{Res}\, f(1) = g'(z_0) = 2(1+1) = 4$

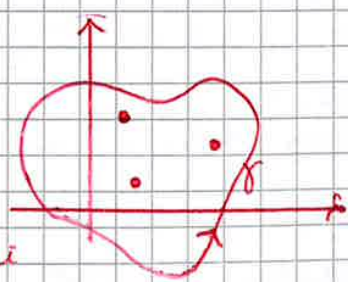
$g(z) = \cancel{(z-1)^2}\dfrac{(z+1)^2}{\cancel{(z-1)^2}} = (z+1)^2 \Rightarrow g'(z) = 2(z+1)$

Oppure

$$f(z) = \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2} = \frac{z^2-2z+1+4z}{(z-1)^2} = \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2} + 4\left(\frac{z-1+1}{(z-1)^2}\right) = 1 + 4\left(\frac{\cancel{z-1}}{(z-1)^{\cancel{2}}} + \frac{1}{(z-1)^2}\right) =$$
$$= 1 + \frac{4}{(z-1)^2} + \frac{4}{z-1} \Rightarrow \mathrm{Res}\, f(1) = 4 = \text{coeff di } z^{-1}$$

- Teorema dei residui

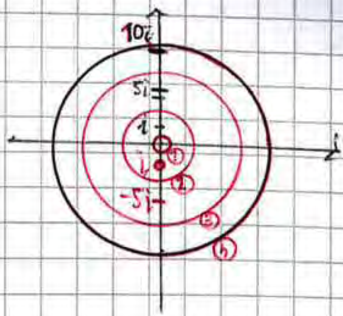
$I = \int_\gamma f(z)\,dz$



- f è olomorfa in $\Omega \in \gamma \Rightarrow I = 0$
- f è olomorfa tranne nei ~~poli~~ punti p_i nei quali ha dei poli. Sia R_i residuo di f in p_i

$$\boxed{\Rightarrow I = 2\pi i \left(\textstyle\sum_i R_i\right)}$$

Oss (Se f è olomorfa non ho i residui, quindi $I=0$)



$\rightarrow f(z) = \dfrac{1}{(z+i)(z+5)(z-10i)}$

$I_R = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz, \quad \gamma_R = \{z : |z| = R\}$

→ trovo gli zeri ovvero i poli di f
$z=-i$ polo semplice
$z=-5$ polo semplice
$z=10i$ polo semplice

I parametri che cambiano il valore ~~de~~ di I sono $R=1,5,10$.

$z_0=-i \Rightarrow \text{Res} f(-i) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z_0) = \dfrac{1}{(-i+5)(-i-10i)}$

$z_0=-5 \Rightarrow \text{Res} f(-5) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z_0) = \dfrac{1}{(-5+i)(-5-10i)}$

$z_0=10i \Rightarrow \text{Res} f(10i) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z_0) = \dfrac{1}{(10i+i)(10i+5)}$

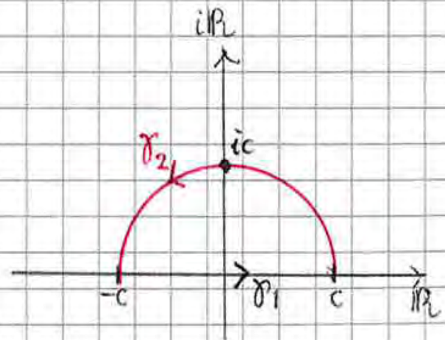
* $0<R<1$
$\Rightarrow I = 0$

* $1<R<5$
$\Rightarrow I = 2\pi i \,\text{Res} f(-i)$

* $5<R<10$
$\Rightarrow I = 2\pi i \left(\text{Res} f(-i) + \text{Res} f(-5)\right)$

* $R>10$
$\Rightarrow I = 2\pi i \left(\text{Res} f(-i) + \text{Res} f(-5) + \text{Res} f(10i)\right)$

$\rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}\,dz$ → integrale ≠ reale



$I = \lim_{c\to\infty} \displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}\,dz$

chiudo γ_1 con γ_2! per poter applicare il th dei residui

$\gamma_1(t) = t,\ t\in[-c,c]$

$\gamma_2(t) = z_0 + re^{it} = ce^{it},\ t\in[0,\pi)$
$(|\gamma_2(t)| = c)$

$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t)$

$f(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z^2+1)^2} = \dfrac{z(z+1)}{(z-i)^2(z+i)^2}$

$z_0 = i$ polo doppio
$z_p = -i$ polo doppio $\notin \text{Int}\gamma$ → non calcolo $\text{Res} f(-i)$

$\Rightarrow \text{Res} f(z_0) = g'(z_0) = -\frac{1}{4} i$

$g(z) = (z-z_0)^2 f(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z+i)^2} \Rightarrow g'(z) = \dfrac{(2z+1)(z+i)^2 - (2z+2i)(z^2+z)}{(z+i)^4} \Rightarrow g'(i) = -\frac{1}{4} i$

6) $\dfrac{\cos t \cosh t}{t^3\left(t^2-\frac{\pi^2}{4}\right)^2\left(t^2+\frac{\pi^2}{4}\right)}$

Poiché il numeratore e il denominatore sono diversi, i poli coincidono con gli ~~valori a cercati tra~~ gli del denominatore

$\rightarrow t^3=0 \Rightarrow t_1=0$ con molteplicità 3 $\Rightarrow t_1=0$ è un ~~nodo~~ polo di ordine 3

$\rightarrow \left(t^2-\frac{\pi^2}{4}\right)^2=0$

$t^2=\frac{\pi^2}{4}$

$t=\pm\frac{\pi}{2}$ con molteplicità 2 $\Rightarrow \begin{cases} t_2=-\frac{\pi}{2} \text{ è un } \cancel{\text{nodo}} \text{ polo doppio} \\ t_3=+\frac{\pi}{2} \text{ è un } \cancel{\text{nodo}} \text{ polo doppio} \end{cases}$

$\Rightarrow t^2+\frac{\pi^2}{4}=0$

$t^2=-\frac{\pi^2}{4}$

$t=\pm i\frac{\pi}{2}$ con molteplicità 1 $\Rightarrow \begin{cases} t_4=-i\frac{\pi}{2} \text{ è un } \cancel{\text{nodo}} \text{ polo semplice} \\ t_5=i\frac{\pi}{2} \text{ è un } \cancel{\text{nodo}} \text{ polo semplice} \end{cases}$

7)

$-f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-2z}$

$z^2-2z=0$

$z(z-2)=0$

$\begin{matrix} z=0 \\ z=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} z_0=0 & \text{polo semplice} \\ z_1=2 & \text{polo semplice} \end{cases}$

~~$z_0=0 \Rightarrow \text{Res}f(z_0)=g'(z_0)=-\frac{3}{4}$~~

~~$g_0(z)=(z-z_0)f(z)=z\cdot\frac{z+1}{z(z-2)}=\frac{z+1}{z-2} \Rightarrow g_0'(z)=\frac{(z-2)-(z+1)}{(z-2)^2} \Rightarrow g_0'(z_0)=\frac{(-2)-1}{(-2)^2}=-\frac{3}{4}$~~

~~$z_1=2 \Rightarrow \text{Res}f(z_1)=g_1'(z_1)=-\frac{1}{4}$~~

~~$g_1(z)=(z-z_1)f(z)=\frac{z+1}{z}=1+\frac{1}{z} \Rightarrow g_1'(z)=-\frac{1}{z^2} \Rightarrow g_1'(z_1)=-\frac{1}{4}$~~

POLO SEMPLICE $z_0 \Rightarrow \text{Res}f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\cdot f(z_0)$

POLO DOPPIO $z_0 \Rightarrow \text{Res}f(z_0)=g'(z_0)$, $g(z)=(z-z_0)^2 f(z)$

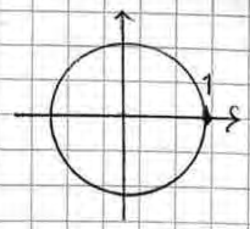
$\Rightarrow z_0=0$, polo semplice

$\text{Res}f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\cancel{z}\dfrac{z+1}{(z-2)\cancel{z}}=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow z_1=2$, polo semplice

$\text{Res}f(z_1)=\lim\limits_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\lim\limits_{z\to 2}\cancel{(z-2)}\dfrac{z+1}{z\cancel{(z-2)}}=\dfrac{3}{2}$

b) $\int_C e^{\frac{1}{z^2}} dz \quad C=\{|z|=1\}$



f è olomorfa ovunque tranne in $z=0$ dove ~~si annulla~~ non è definita

$\Rightarrow z_0=0$ è un polo doppio

$\Rightarrow I=2\pi i \, \text{Res} f(0)$

$\text{Res} f(0) = g'(0)$

$g(z) = (z-z_0)^2 f(z) = \dots ?$

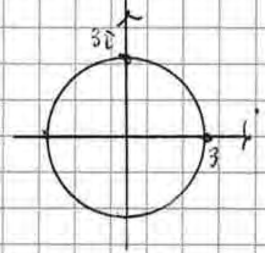
Faccio lo sviluppo di Laurent

$e^{\frac{1}{z^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{2k} k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^{-2k}$

$\Rightarrow \text{Res} f(0) = 0$ perché $\text{Res} f(0) = a_{-1}$ ma ci sono ~~solo~~ solo i termini di grado pari

$\Rightarrow I = 2\pi i \, \text{Res} f(0) = 0$

c) $\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz, \quad C=\{|z|=3\}$



$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$

$z_0 = 0$ polo semplice

$z_1 = 1$ polo semplice

$z_0, z_1 \in \text{Supp}(\gamma)$

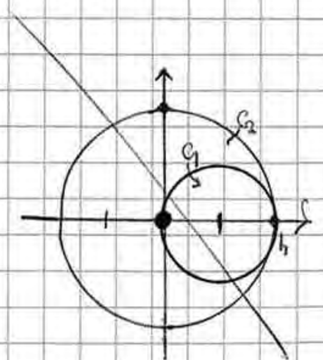
$\Rightarrow I = 2\pi i (\text{Res} f(0) + \text{Res} f(1))$

$\text{Res} f(0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 2$

$\text{Res} f(1) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) f(z) = 3$

$\Rightarrow I = 10\pi i$

$\Rightarrow \underline{I = 10\pi i}$



d) $\int_C$ ~~$\frac{3z^2+2}{(z-1)(z^2+9)} dz$, $C_1=\{|z-2|=2\} \Rightarrow \gamma_1 = \partial C_1$, $C_2=\{|z|=4\}$, $\gamma_2 = \partial C_2$~~

poli:

~~$z_0=1$ polo semplice semplice~~

~~$z=\pm 3i$ poli semplici~~ ~~$z_1 = -3i$~~ ~~$z_2 = 3i$~~

~~$z_0 \in \text{Supp}(\gamma_1)$~~

~~$z_1, z_2 \in \text{Supp}\, \gamma_1$~~

~~$z_0 \notin \gamma_2$~~

~~$z_1 \notin \gamma_2$~~

~~$z_2 \in \gamma_2$~~

~~$\Rightarrow \int_{\gamma_1} = 2\pi i (\text{Res} f(1), + \text{Res} f(-3i) + \text{Res} f(3i))$~~

~~$\int_{\gamma_2} = 2\pi i \, \text{Res} f(3i)$~~

ESERCITAZIONE ⑦ (08.05.2015)

→ $f(x)=e^{x^2}$

$T_f: \mathcal{D}\to\mathbb{C}$

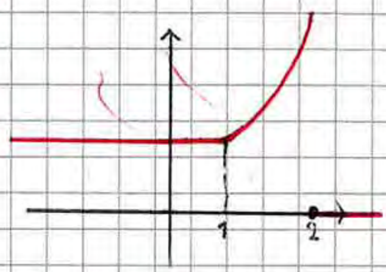
$\varphi \mapsto \int f(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_f,\varphi\rangle$

- linearità: banale perché l'integrale è lineare
- continuità:

$|\langle T_f,\varphi\rangle| \le C_K \|D^\alpha\varphi\|_\infty$ K compatto t.c. $supp(\varphi)\subseteq K$

$\Rightarrow \left|\int e^{x^2}\varphi(x)\,dx\right| \le \int e^{x^2}|\varphi(x)|\,dx \le \|\varphi(x)\|_\infty \int e^{x^2}dx \le C_K\|\varphi(x)\|$

→ $f(x)=\begin{cases} 1 & x<1 \\ x^2 & 1\le x<2 \\ 0 & x\ge 2\end{cases}$



~~$T_f: \mathcal{D}$~~

$\varphi \mapsto \int f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1}\varphi(x)\,dx + \int_1^2 x^2\varphi(x)\,dx$

$\Rightarrow |\langle T_f,\varphi\rangle| \le \|\varphi\|_\infty\cdot|K| + h\cdot\|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_\infty(|K|+h)$

è una distribuzione

$K = supp(\varphi)$

→ $T: \mathcal{D}\to\mathbb{C}$

$\cancel{\delta\to\delta_0^2}$ $\varphi\to\varphi(0)^2$

- lineare: $T(\varphi_1+\varphi_2) = (\varphi_1(0)+\varphi_2(0))^2 \ne T(\varphi_1)+T(\varphi_2) = \varphi_1^2(0)+\varphi_2^2(0)$

$\Rightarrow$ non è lineare!

→ $T: \mathcal{D}\to\mathbb{C}$

$\varphi\to\int_{-2}^{2}\varphi'(x)\,dx$

Applico il th fondamentale del calcolo integrale

$\int_{-2}^{2}\varphi'(x)\,dx = \varphi(2)-\varphi(-2) = \langle\delta_2,\varphi\rangle - \langle\delta_{-2},\varphi\rangle$

$\Rightarrow T = \delta_2-\delta_{-2}$

es: $f_1(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$

$f_2(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$

$f_1(x)\ne f_2(x)$ $\quad f_1(-1)=0$, $f_2(-1)=1$

$\langle T_{f_1},\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{(-1,1)}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx$

$\langle T_{f_2},\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[-1,1]}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\varphi(x)\,dx$ $\quad\Rightarrow T_{f_1} = T_{f_2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 227 di 422

Riscalamento

$f \in \mathcal{R}^1_{loc}$

$\langle T_{f(\alpha x)}, \phi \rangle = \int f(\alpha x)\phi(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int f(x)\phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)dx = \frac{1}{\alpha}\cancel{\langle T, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\rangle}\ \frac{1}{\alpha}\langle T_{f(x)}, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\rangle$

$\cancel{\Rightarrow \langle T_{f(\alpha x)}, \varphi(x)\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle T_{f(x)}, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\rangle}$

$\Rightarrow \langle T_{f(\alpha x)}, \varphi(x)\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle T_{f(x)}, \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\rangle$

$\rightarrow \langle \delta_2(\alpha x), \varphi \rangle = \frac{1}{\alpha}\langle \delta_2(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\rangle$

$+ T_n = \delta_{(-2)^{3n}\log(2n+1)}$

$\lim_{n\to+\infty} T_n$ nel senso delle distribuzioni

$\langle T_n, \varphi \rangle = \varphi((-2)^{3n}\log(2n+1)) = 0 \Leftarrow (-2)^{3n}\log(2n+1)$ è più grande del sup K

$K = \mathrm{Supp}\,\varphi$

$\Rightarrow T_n \rightarrow 0$

e) $\langle T,\varphi\rangle = \varphi(1)-\varphi(2)+\varphi(3)-\varphi(4)$

$T=\delta_1-\delta_2+\delta_3-\delta_4$

infatti

$\langle \delta_1-\delta_2+\delta_3-\delta_4,\varphi\rangle = \langle\delta_1,\varphi\rangle-\langle\delta_2,\varphi\rangle+\langle\delta_3,\varphi\rangle-\langle\delta_4,\varphi\rangle = \varphi(1)-\varphi(2)+\varphi(3)-\varphi(4)$

$\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ sono distribuzioni

$\Rightarrow$ combinazione lineare di distribuzioni è distribuzione

f) $\langle T,\varphi\rangle = \int_{-4}^{4} \operatorname{sen}x\cdot\varphi(x)\,dx + 6\varphi(4)$

$T=$ $T_{\operatorname{sen}x\,\mathbb{1}_{[-4,4]}(x)}+6\delta_4$ infatti

$\langle T_{\operatorname{sen}x\,\mathbb{1}_{[-4,4]}(x)}+6\delta_4,\varphi\rangle = \langle T_{\operatorname{sen}x\,\mathbb{1}_{[-4,4]}(x)},\varphi\rangle + 6\langle\delta_4,\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sen}x\,\mathbb{1}_{[-4,4]}\varphi(x)\,dx+6\varphi(4) =$

$=\int_{-4}^{4}\operatorname{sen}x\,\varphi(x)\,dx+6\varphi(4)$

$T_{\operatorname{sen}x\,\mathbb{1}_{[-4,4]}(x)}$

Poiché $T_{\operatorname{sen}x\,\mathbb{1}_{[-4,4]}(x)}$ e δ_4 sono distribuzioni $\Rightarrow T$ è distribuzione

2) a) $\langle T,\varphi\rangle = \int_{-1}^{1}x^2\varphi(x)\,dx+\int_{-2}^{3}e^x\varphi(x)\,dx$

$T_f+T_g=T$

$f(x)=$ ~~$x^2\in\mathcal{R}^1_{loc}$~~ $x^2\cdot\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\in\mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$

$g(x)=e^x\cdot\mathbb{1}_{[-2,3]}(x)\in\mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow T$ è una distribuzione in quanto è c.l. di distribuzioni regolari

b) $\langle T,\varphi\rangle = \int_0^1(\varphi(x))^3\,dx$

$T:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$

$\to$ linearità: $\langle T,\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\rangle = \int_0^1(\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x))^3\,dx \neq \lambda_1\int_0^1(\varphi_1(x))^3\,dx+\lambda_2\int_0^1(\varphi_2(x))^3\,dx =$

$=\lambda_1\langle T,\varphi_1\rangle+\lambda_2\langle T,\varphi_2\rangle$

$\Rightarrow T$ non è lineare

$\Rightarrow T$ non è distribuzione

c) $\langle T,\varphi\rangle = \int_0^1 x\,\varphi'(x)\,dx$

$T:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$

$\to$ linearità: $\langle T,\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2\rangle = \int_0^1 x(\lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x))'\,dx = \lambda_1\int_0^1 x\varphi_1'(x)\,dx+\lambda_2\int_0^1 x\varphi_2'(x)\,dx =$

$=\lambda_1\langle T,\varphi_1\rangle+\lambda_2\langle T,\varphi_2\rangle$

$\Rightarrow T$ è lineare.

$\to$ continuità: sia $\varphi_n\xrightarrow{\mathcal{D}}\varphi$ per $n\to+\infty$

devo dimostrare che $\langle T,\varphi_n\rangle\to\langle T,\varphi\rangle$ su $\mathbb{R}$ per $n\to+\infty$

$\langle T,\varphi_n\rangle = \int_0^1 x\varphi_n'(x)\,dx \to \underbrace{\int_0^1 x\varphi'(x)\,dx}_{=\langle T,\varphi\rangle}$ per $n\to+\infty$ perché φ converge implica che tutte le sue derivate convergono

$\Rightarrow T$ è continua

$\Rightarrow T$ è distribuzione.

~~se ad esempio $\varphi(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$~~.

5) $\varphi \in \mathcal{D} : \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$

Dimostrare che $\exists\, \rho \in \mathcal{D}$ tale che $\rho'(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
ρ è unica??

- $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$
  supp(φ) è compatto

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$

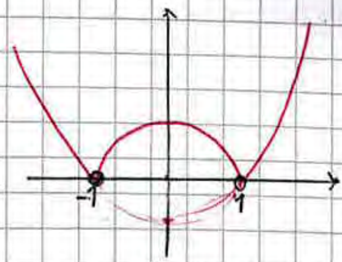
Sia $\rho \in \mathcal{D} \Rightarrow \rho' \in \mathcal{D}$

Per l'esercizio precedente $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x)\,dx = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$

c) $f(x) = |x^2-1|$

f ovunque derivabile ~~tranne~~

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x^2-1 \geq 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 1-x^2 & \text{se } x^2-1 < 0 \Rightarrow -1 < x < 1 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -2x & -1 < x < 1 \end{cases}$$

$f'_F \; R^1_{loc}$

$\Rightarrow \langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$

$$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f\, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\Big(\underbrace{f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx\Big) =$$

$$= +\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

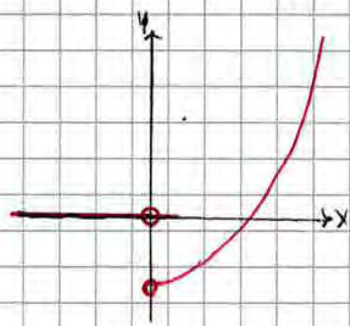
$$\Rightarrow T_f = T_{f'} = \langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\cancel{dx}\,\varphi(x)\,dx =$$

$$\cancel{= \int_{-\infty}^{-1} 2x\,\varphi(x)\,dx + \int_{-1}^{1} -(2x)\,\varphi(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} 2x\,\varphi(x)\,dx =}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x^2-1 \geq 0 \\ -2x & \text{se } x^2-1 < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(x^2-1) \cdot 2x$$

$\Rightarrow T_{f'} = T_{2x\,\operatorname{sgn}(x^2-1)}$

d) $$f(x) = (x^2-1)H(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



f ovunque derivabile tranne in $x_0 = 0$ (salto)

$f' \in R^1_{loc}(I)$ $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x_0^+) = -1$

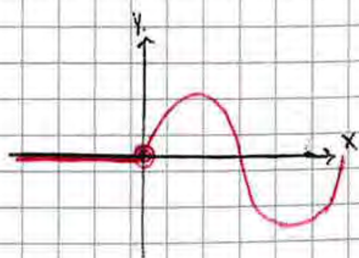
$f(x_0^-) = 0$

$$\Rightarrow T_f' = T_{f'} + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\,\delta_{x_0} =$$

$$= \int_0^{+\infty} 2x\,\varphi(x)\,dx + (-1)\,\delta_{x_0} =$$

$$= T_{2x\,H(x)} - \delta_{x_0}$$

e) $$f(x) = \sin x\, H(x) = \begin{cases} \sin x & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



$$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -[f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

$$T_f' = T_{f'} = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x)\,\varphi(x)\,dx = T_{\cos x\, H(x)}$$

b) $T = e^{x^2}\delta_{-1} + T_{3sgn(-x)}$

$T = T_1 + T_2$

$T' = T_1' + T_2'$

(prodotto di una distribuzione) $\langle T\psi, \varphi\rangle = \langle T, \psi\varphi\rangle$ con $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\langle (T\psi)', \varphi\rangle = \langle T, \psi$

$T_1 = e^{x^2}\delta_{-1}$

$e^{x^2} \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\langle \tilde{T}_1\psi, \varphi\rangle = \langle \tilde{T}_1, \psi\varphi\rangle = \langle \delta_{-1}, \psi\varphi\rangle \Rightarrow \langle \delta_{-1}', \psi\varphi\rangle = -\langle \delta_{-1}, (\psi\varphi)'\rangle =$

$= -\langle \delta_{-1}, \psi\varphi' + \psi'\varphi\rangle = -\langle \delta_{-1}, e^{x^2}\varphi'(x) + 2xe^{x^2}\varphi(x)\rangle =$

$= -\langle \delta_{-1}, e^{x^2}\varphi'(x)\rangle - \langle \delta_{-1}, 2xe^{x^2}\varphi(x)\rangle =$

$= -e^{(-1)^2}\varphi'(-1) - 2(-1)e^{(-1)^2}\varphi(-1) =$

$= -e\varphi'(-1) + 2e\varphi(-1)$

$\Rightarrow T_1' = -e\varphi'(-1) + 2e\varphi(-1)$

$\Rightarrow T_2 = T_{3sgn(-x)}$

$f(x) = 3sgn(-x) = \begin{cases} 3 & se\ x<0 \\ 0 & se\ x=0 \\ -3 & se\ x>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$

$x_0 = 0$, f non è derivabile

$f(x_0^+) = -3$

$f(x_0^-) = +3$

$T_f' = T_{f'} + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\delta_{x_0} = -6\delta_0$

$\Rightarrow T_2' = -6\delta_0 = -6\delta_0$

c) $T = x^2 T_{\Pi[-1,1]}(x)$

$\langle (x^2 T_{\Pi[-1,1]}(x))', \varphi(x)\rangle = \langle T_{\Pi[-1,1]}(x), x^2\varphi(x)\rangle =$

$\langle (x^2 T_{\Pi[-1,1]}(x))', \varphi(x)\rangle = \langle$

c) $\tilde{T} = x^2 T_{\Pi[-1,1]}(x)$

$\langle \tilde{T}', \varphi\rangle = -\langle \tilde{T}, \varphi'\rangle = -\langle x^2 T_{\Pi[-1,1]}, \varphi'(x)\rangle = -\langle T_{\Pi[-1,1]}, x^2\varphi'(x)\rangle$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 237 di 422

3) $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$

$T_{f_n} \to 0$ come distribuzione. Dimostrazione:

$\left|\frac{\cos(nx)}{n} - 0\right| \leq \left(\frac{1}{n}\right) \to 0$

~~conv~~

converge unif di $f_n(x)$ come funzione

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ |\langle T_{f_n}, \varphi\rangle| = \left|\int \frac{\cos(nx)}{n} \varphi(x)\,dx\right| \leq \left|\frac{\cos(nx)}{n}\right| \int |\varphi(x)|\,dx \to 0$

$\frac{\cos(nx)}{n} \to 0$, $\int |\varphi(x)|\,dx$ finito

$\Rightarrow T_{f_n} \to 0$

4) $f_n(x) = \text{sen}(nx)$

OSS: $\text{sen}(nx)$ non converge, ma converge come distribuzione.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle = \int \text{sen}(nx)\varphi(x)\,dx =$ * supponiamo che $\text{supp}(\varphi) \subset [-R, R]$ perché $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$= -\frac{\cos(nx)}{n}\varphi(x)\Big|_{-R}^{R} + \int \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx$

perché $\varphi(-R) = 0$, $\varphi(R) = 0$ * $\left|\int \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{n}\int |\varphi'(x)|\,dx \to 0$ per $n \to +\infty$

$\int |\varphi'(x)|\,dx$ finito

5) $T_n = n\left[\delta_0\left(x - \frac{1}{n}\right) - \delta_0\left(x + \frac{1}{2n}\right)\right]$

non ha senso parlare di $\lim$ nel senso delle

$\langle T_n, \varphi\rangle = \langle n[\delta_0(x - \frac{1}{n}) - \delta_0(x + \frac{1}{2n})], \varphi\rangle = n\langle \delta(x - \frac{1}{n}), \varphi\rangle - n\langle \delta_0(x + \frac{1}{2n}), \varphi\rangle =$

$= n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - n\varphi\left(-\frac{1}{2n}\right) =$

OSS: $n[\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)] + n[\varphi(0) - \varphi(-\frac{1}{2n})]$

$= \underbrace{\frac{\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)}{\frac{1}{n}}} + \underbrace{\frac{\varphi(-\frac{1}{2n}) - \varphi(0)}{2\left(-\frac{1}{2n}\right)}} \xrightarrow{n \to +\infty} \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi'(0) = \frac{3}{2}\varphi'(0)$

~~$\langle T_n, \varphi\rangle =$~~

rapporti incrementali

$\Rightarrow \langle T_n, \varphi\rangle \to \langle -\frac{3}{2}\delta_0', \varphi\rangle = \langle \frac{3}{2}\delta_0, \varphi'\rangle = \frac{3}{2}\langle \delta_0, \varphi'\rangle$ $\rightsquigarrow$ $\langle \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi'\rangle$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 239 di 422

CONTINUA ES 4 (pag 113)

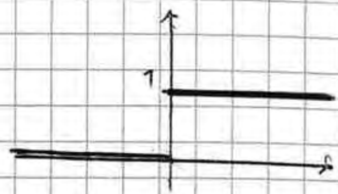
11) a) $\hat{T} = T_{H(2x)} + 5\delta_3(2x) = T_1 + T_2$

$\hat{T}' = T_1' + T_2'$

$T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{k} \left(f(x_i^+) - f(x_i^-)\right)\delta_{x_i}$ dove 1,2,...k sono il numero di punti in cui f non è derivabile (salti o discontinuità eliminabili.

→ $T_1 = T_{H(2x)}$

$f(x) = H(2x) = \begin{cases} 1 & se\ 2x>0 \quad x>0 \\ 0 & se\ 2x<0 \quad x<0 \end{cases}$ $\qquad f'(x) = \begin{cases} 0 & se\ x<0 \\ 0 & se\ x>0 \end{cases}$



f non è derivabile in $x_0=0$

$f(x_0^+)=1$
$f(x_0^-)=0$

$\Rightarrow T'_{H(2x)} = T_{H(2x)'} + \delta_{x_0}\left(f(x_0^+)-f(x_0^-)\right) = \delta_0(1-0) + 0$

→ $T_2 = 5\delta_3(2x)$

$\langle T_2', \varphi\rangle = -\langle T_2,\varphi'\rangle = -5\langle \delta_3(2x),\varphi'(x)\rangle = -\frac{5}{2}\langle\delta_3(x),\varphi'(\frac{x}{2})\rangle = \cancel{\frac{5}{2}\varphi'(\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}\delta(\frac{3}{2})} = -\frac{5}{2}\varphi'(\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2}\delta'_{\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \hat{T}' = \delta_0 - \frac{5}{2}\delta'_{\frac{3}{2}}$

b) $\hat{T}_1 = e^{x^2}\delta_{-1}$ $\cancel{+ T_{3sgn(-x)}}$ $\qquad T_1 = e^{x^2}\delta_{-1}$
$\cancel{T_2 = T_{3sgn(-x)}}$

$\cancel{\hat{T} = T_1 + T_2}$

$\boxed{(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)' = \lambda_1 T_1' + \lambda_2 T_2'}$

$\boxed{T_1' = (e^{x^2}\delta_{-1})' = 2xe^{x^2}\delta_{-1} + e^{x^2}\delta'_{-1}}$ → la derivata è un operatore lineare anche per le distribuzioni

$\left(\langle\delta_{x_0}, f(x)\varphi(x)\rangle = f(x_0)\varphi(x_0)\right)$

$\cancel{\langle 2xe^{x^2}\delta_{-1} + e^{x^2}\delta'_{-1}, \varphi\rangle = 2\langle xe^{x^2}\delta_{-1},\varphi\rangle + \langle e^{x^2}\delta'_{-1},\varphi\rangle} =$

$\cancel{= 2\langle\delta_{-1}, xe^{x^2}\varphi(x)\rangle + \langle\delta'_{-1}, e^{x^2}\varphi(x)\rangle} =$

$\cancel{= 2xe^{x^2}\varphi(-1) - \langle\delta_{-1}, (e^{x^2}\varphi(x))'\rangle} =$

$\cancel{= 2xe^{x^2}\varphi_{-1} - (2xe^{x^2}\varphi(-1) + e^{x^2}\varphi'(-1))} =$

$\cancel{= e^{x^2}\delta'_{-1}}$

$= \cancel{2(-1)e^{(-1)^2}\varphi(-1) - \langle\delta_{-1}, (e^{x^2}\varphi(x))'\rangle} =$

$= \cancel{-2e\delta_{-1} - \langle\delta_{-1}, 2xe^{x^2}\varphi(x) + e^{x^2}\varphi'(x)\rangle} =$

$= \cancel{-2e\delta_{-1} - (\langle\delta_{-1}, 2xe^{x^2}\varphi(x)\rangle + \langle\delta_{-1}, e^{x^2}\varphi'(x)\rangle)} =$

$\cancel{= -2e\delta_{-1} - 2(-1)e^{(-1)^2}\varphi(-1) + e^{(-1)}\varphi'(-1) = -e\delta'_{-1}}$

Alternativamente

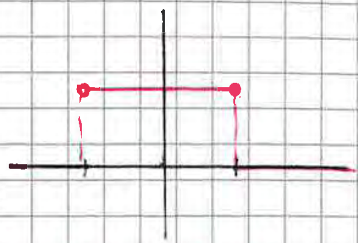
$\cancel{\langle T_1',\varphi\rangle = -\langle T_1,\varphi'\rangle = -\langle (e^{x^2}\delta_{-1}), \varphi'(x)\rangle = -\langle\delta_{-1}, e^{x^2}\varphi'(x)\rangle = -e^{(-1)^2}\varphi'(-1)}$

c) $\tilde{T} = x^2 T_{\Pi[-1,1]}(x)$

$\cancel{\tilde{T}' = \langle (x^2 T_{\Pi[-1,1]}(x))', \varphi(x) \rangle =}$

$\cancel{= \langle 2x T_{\Pi[-1,1]}(x), \varphi(x) \rangle + \langle x^2 T'_{\Pi[-1,1]}(x), \varphi(x) \rangle =}$

$\cancel{= \langle T_{\Pi[-1,1]}, 2x\varphi(x) \rangle + \langle T'_{\Pi[-1,1]}, x^2 \varphi(x) \rangle =}$



$\tilde{T} = (\psi T)$

$\tilde{T}' = (\psi T)' = \psi T' + \psi' T$

$f(-1^-) = 0 \qquad f(1^-) = 1$

$f(-1^+) = 1 \qquad f(1^+) = 0$

$\tilde{T}' = x^2 T'_{\Pi[-1,1](x)} + 2x T_{\Pi[-1,1]}(x) =$

$\to T'_{\Pi[-1,1](x)} = \underbrace{T_{f'}}_{=0} + \delta_{-1}\left(f(-1^+) - f(-1^-)\right) + \delta_{+1}\left(f(1^+) - f(1^-)\right) = \delta_{-1}(1) + \delta_1(-1) = \delta_{-1} - \delta_1$

$\langle \tilde{T}', \varphi \rangle = \langle x^2(\delta_{-1} - \delta_1), \varphi(x) \rangle + \langle 2x T_{\Pi[-1,1]}(x), \varphi(x) \rangle =$

$= \langle \delta_{-1} - \delta_1, x^2 \varphi(x) \rangle + \langle T_{\Pi[-1,1](x)}, 2x\varphi(x) \rangle =$

$= \langle \delta_{-1}, x^2\varphi(x) \rangle - \langle \delta_1, x^2 \varphi(x) \rangle + \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi[-1,1](x)\, 2x\varphi(x)\, dx =$

$= (-1)^2 \delta_{-1} - 1\,\delta_1 + \int_{-1}^{1} 2x\varphi(x)\, dx =$

$= \delta_{-1} - \delta_1 + \langle T_{2x\Pi[-1,1]}, \varphi(x) \rangle =$

$= \delta_{-1} - \delta_1 + T_{2x\Pi[-1,1](x)}$

ES (1): introduzione alle distribuzioni:

4) Dimostrare che
se $\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = 0$

$\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
φ ha supporto limitato ~~ovvero~~ ovvero $\exists R>0: \varphi(x)=0 \ \forall x: |x|>R$

$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Ricordo: $f \in \mathcal{C}^k(I)$ se: in I esiste $f^{(k)}$
$f^{(k)} \in \mathcal{C}^0(I)$ continua

$\Rightarrow \varphi$ ha supporto limitato $\Rightarrow \varphi(x)=0 \quad \forall |x| > R$
$\Rightarrow \varphi'(x)=0 \quad \forall |x| \geq R$ (sicuramente)

$\Rightarrow \varphi' \in \mathcal{C}^\infty \qquad \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}$
φ' ha supporto limitato

Poiché $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \varphi'(x)\,dx = \varphi(x)\Big|_{-R}^{R} = \varphi(R) - (\varphi(-R)) = \varphi(R) - \varphi(-R) = ?$

5) $\varphi \in \mathcal{D}$ tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0$

Dimostro che $\exists \rho \in \mathcal{D}$ tale che $\rho'(x) = \varphi(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$
È unica ρ?

$\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) \neq 0\}}$ ovvero $\exists R>0: \varphi(x)=0 \ \forall x: |x|>R$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \varphi(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow \int_{-R}^{0} \varphi(x) + \int_{0}^{R} \varphi(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{0}^{R} \varphi(x)\,dx = -\int_{-R}^{0} \varphi(x)\,dx \Rightarrow \varphi$ è pari

Sia $\rho \in \mathcal{D}$
$\Rightarrow \rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \qquad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx = \int_{-\hat{R}}^{\hat{R}} \rho(x)\,dx$
$supp(\rho)$ è limitato.

Per l'es precedente se $\rho \in \mathcal{D} \Rightarrow \rho' \in \mathcal{D}$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{-\hat{R}}^{\hat{R}} \rho'(x)\,dx = \rho(\hat{R}) - \rho(-\hat{R}) = 0$

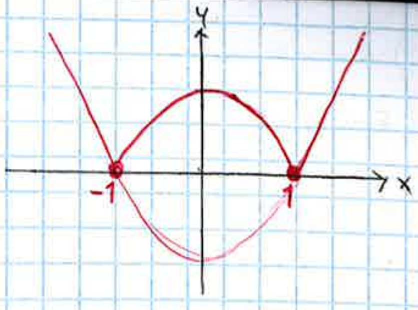
~~$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'(x)\,dx$~~

$\Rightarrow \rho(\hat{R}) = \rho(-\hat{R}) \Rightarrow \rho$ è pari

3) T_f

$|x^2-1| = f(x)$

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & se\ x^2-1 \geq 0 \quad x^2>1 \Rightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 1-x^2 & se\ x^2-1<0 \Rightarrow -1<x<1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \\ 1-x^2 & x \in (-1,1) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f è ovunque derivabile

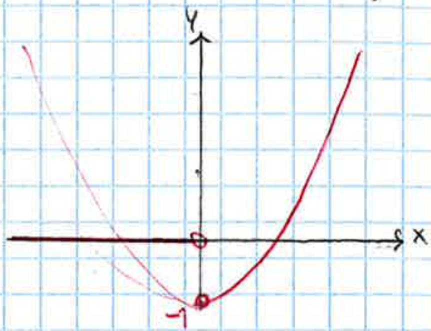
$T_f' = T_{f'}$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \\ -2x & x \in (-1,1) \end{cases} \Rightarrow \cancel{T_{f'}}\ 2x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)$$

$\Rightarrow T_{f'} = T_{2x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}$

4) T_f

$$(x^2-1)H(x) = f(x) = \begin{cases} x^2-1 & se\ x>0 \\ 0 & se\ x<0 \end{cases}$$



$f(x_0^+) = -1$

$f(x_0^-) = 0$

$\Rightarrow$ f è ovunque derivabile tranne in 0 (salto)

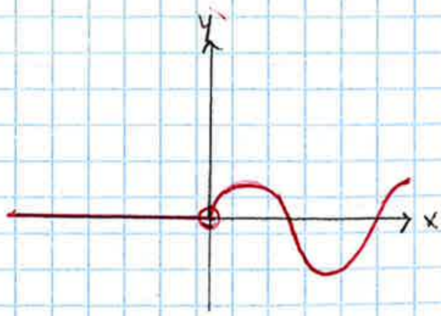
$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & se\ x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \cancel{T_{2xH(x)}}\ 2x\,H(x)$$

$$\Rightarrow T_f' = T_{f'} + \delta_0 \left(f(x_0^+) - f(x_0^-)\right) =$$

$$= T_{2xH(x)} + \delta_0(-1) = T_{2xH(x)} - \delta_0$$

$$(x^2-1)H(-x) = \begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{T_{f'}}\ f'(x) = \begin{cases} 2x & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases} = 2x\,H(-x)$$

$\Rightarrow T_f' = T_{2xH(-x)} + \delta_0$



5) T_f

$$\mathrm{sen}\,x\,(H(x)) = \begin{cases} \mathrm{sen}\,x & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases} = f(x)$$

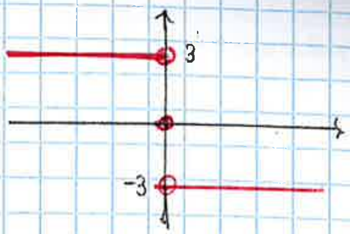
f non è derivabile in 0

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases} = \cos x \cdot H(x)$$

$$\Rightarrow T_f' = T_{f'} + \delta_0 \left(f(0^+) - f(0^-)\right) = T_{\cos x\,H(x)} + \delta_0 \cdot 0 = T_{\cos x\,H(x)}$$

$\hat{T} = T_{3\,sgn(-x)}$

$$f(x) = 3\,sgn(-x) = \begin{cases} -3 & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ 3 & se\ x < 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow f'(x) = 0$

f non è derivabile in $x_0 = 0$

$f(x_0^+) = -3$
$f(x_0^-) = 3$

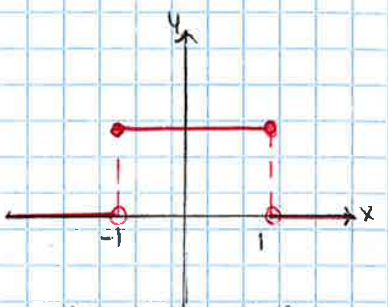
$\Rightarrow \hat{T}_f' = 0 + \delta_0(-3-3) = -6\delta_0$

$\Rightarrow T' = -e\delta_1' - 6\delta_0$

3) $x^2 T_{\mathbb{1}[-1,1]}(x)$

$\hat{T} = x^2 T_{\mathbb{1}[-1,1]}(x) \Rightarrow \hat{T}' = (\psi T)' = \psi' T + \psi T' = 2x\, T_{\mathbb{1}[-1,1]}(x) + x^2 T'_{\mathbb{1}[-1,1]}(x)$

$x^2 \in \mathcal{C}^\infty$



$T'_{\mathbb{1}[-1,1]}(x)$

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in [-1,1] \\ 0 & altrimenti \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \neq \{\pm 1\}$$

$T_f' = T_{f'} + \delta_{-1}(f(-1^+) - f(-1^-)) + \delta_1(f(1^+) - f(1^-)) =$

$= \delta_{-1}(1-0) + \delta_1(-1) = \delta_{-1} - \delta_1$

$f(-1^+) = 1$ $\quad f(1^+) = 0$
$f(-1^-) = 0$ $\quad f(1^-) = 1$

$\boxed{\text{Ricordo: } \psi(x)\,\delta_{x_0}(x) = \psi(x_0)\,\delta_{x_0}(x)}$

$\Rightarrow \hat{T}' = 2x\, T_{\mathbb{1}[-1,1]}(x) + x^2(\delta_{-1} - \delta_1)$

$= 2x\, T_{\mathbb{1}[-1,1]}(x) + x^2\delta_{-1} - x^2\delta_1 =$

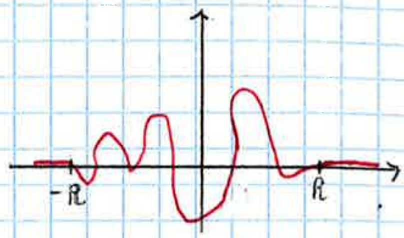
$= 2x\, T_{\mathbb{1}[-1,1]}(x) + \delta_{-1} - \delta_1$

Convergenza di distribuzioni

Def
$T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Si dice che $T_n \to T$ in $\mathcal{D}'$ (o nel senso delle distribuzioni) se $\forall \varphi \in \mathcal{D}$:

$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T_0, \varphi \rangle$ per $n \to +\infty$



Videolezione:

1) $T_n = \delta_n$, $n \in \mathbb{N}$
Prendo una funzione test arbitraria
Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ ($\Rightarrow \varphi \in C^\infty$, $\exists R > 0$: $supp(\varphi) \subseteq [-R, R]$)

$\exists T \in \mathcal{D}'$ per cui $\langle \delta_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$?? domanda da porsi

$\langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(n) \to 0 \quad \forall n > R$ (perché φ ha supporto compatto)

$\Rightarrow \langle \delta_n, \varphi \rangle = \varphi(n) \to 0$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow \langle \delta_n, \varphi \rangle \to \langle T_0, \varphi \rangle = \langle 0, \varphi \rangle$

$\Rightarrow T_n \to 0$ per $n \to +\infty$ in $\mathcal{D}'$

2) $T_n = n\delta_{-n}$
Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

$\langle T_n, \varphi \rangle = \langle n\delta_{-n}, \varphi \rangle = n \langle \delta_{-n}, \varphi \rangle = n\varphi(-n) \to 0$ per $n \to +\infty$ (perché φ ha supporto compatto)

$\Rightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle 0, \varphi \rangle$

$\Rightarrow n\delta_{-n} \to 0$ per $n \to +\infty$ in $\mathcal{D}'$

NB Ricorda: f è continua $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
$x \to 0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$

3) $T_n = \delta_{3n} - \delta_{\frac{2}{n}}$
Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

$\langle T_n, \varphi \rangle = \langle \delta_{3n} - \delta_{\frac{2}{n}}, \varphi \rangle = \langle \delta_{3n}, \varphi \rangle - \langle \delta_{\frac{2}{n}}, \varphi \rangle = \varphi(3n) - \varphi(\frac{2}{n})$

$\varphi(3n) \to 0$ (per $n \to +\infty$)

$\frac{2}{n} \to 0$ e poiché φ è continua $\Rightarrow \varphi(\frac{2}{n}) \to \varphi(0)$

$\Rightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \to 0 - \varphi(0) = \langle -\delta_0, \varphi \rangle$

$\Rightarrow T_n \to -\delta_0$ per $n \to +\infty$, in $\mathcal{D}'$

4) $T_n = \delta_{(-2)^{3n} \log(2n)}$
Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

$\langle T_n, \varphi \rangle = \langle \delta_{(-2)^{3n} \log(2n)}, \varphi \rangle = \varphi((-2)^{3n} \log 2n)$

Osservo che: $(-2)^{3n} \log 2n \to \nexists$ per $n \to +\infty$ ma non ci dice nulla!!

In modulo però tende a $(+\infty)$ $\quad 2^{3n} \log 2n \to +\infty$

Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n\varphi(x)\,dx = n\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\frac{1}{n}}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\,dx \overset{*}{=}$$

$$= \varphi(x_n)$$

Th. media integrale

$\exists x_n \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$ per cui $* = \varphi(x_n)$

$$\underset{\downarrow\, 0}{-\frac{1}{2n}} \le \underset{\downarrow\, 0}{x_n} \le \underset{\downarrow\, 0}{\frac{1}{2n}} \Rightarrow x_n \to 0 \text{ per } n\to+\infty \Rightarrow \text{poiché } \varphi \text{ è continua} \Rightarrow \varphi(x_n) \to \varphi(0) \text{ per } \underset{x_n\to 0}{n\to+\infty}$$

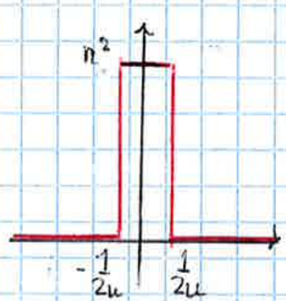
$\Rightarrow \langle T_{f_n}, \varphi\rangle \to \langle \delta_0, \varphi\rangle$ per $n\to+\infty$

$\Rightarrow T_{f_n} \to \delta_0$ in $\mathcal{D}'$

7) con questo esempio vediamo che quando l'area non è 1 cambiano le cose

$f_n(x) = n^2 p_{\frac{1}{n}}(x)$

ossia che $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty & x=0 \\ 0 & x\neq 0 \end{cases}$



Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 p_{\frac{1}{n}}(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n^2\varphi(x)\,dx = n^2\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\,dx =$$

$$= n\,\underbrace{\frac{1}{\frac{1}{n}}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\,dx}_{\to\,\varphi(0) \text{ per } n\to+\infty}$$

$*$:

$$\Rightarrow T_n \to \begin{cases} -\infty & \text{se } \varphi(0)<0 \\ 0 & \text{se } \varphi(0)=0 \\ +\infty & \text{se } \varphi(0)>0 \end{cases} \Rightarrow T_{f_n} \text{ non ammette limite in } \mathcal{D}'$$

8) $f_n = 2n\, p_{\frac{1}{n}}$

$2\underbrace{\left(n\, p_{\frac{1}{n}}\right)}_{\delta_0} \Rightarrow 2\delta_0 \qquad 2n\,p_{\frac{1}{n}} \to 2\delta_0$

9) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$f_n \to f$ uniformemente su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow T_{f_n} \to T_f$ in $\mathcal{D}'$

Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

voglio che

$\langle T_{f_n}, \varphi\rangle \to \langle T_f, \varphi\rangle \Rightarrow \langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle \to 0$ per $n\to+\infty$

$\Rightarrow |\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| \to 0$

$$\Rightarrow |\langle T_{f_n}, \varphi\rangle - \langle T_f, \varphi\rangle| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (f_n(x)-f(x))\varphi(x)\,dx\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |(f_n(x)-f(x))\varphi(x)|\,dx$$

Treno d'impulsi

$T_n = \sum_{k=-n}^{n} \delta_k$ non è lui il treno d'impulsi

$T_n = \delta_{-n} + \dots + \delta_0 + \delta_1 + \dots + \delta_n$

$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$??

Sia $\varphi \in \mathcal{D}$ $(\text{supp}(\varphi) = [-R, R])$ R può essere anche un intero

$\langle T_n, \varphi \rangle \underset{\text{linearità}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \langle \delta_k, \varphi \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \varphi(k)$

$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=-n}^{n} \varphi(k) =$ aggiungo sempre più addendi quindi ad un certo punto $R < n$

$= \sum_{k=-R}^{R} \varphi(k) =$ Aggiungo $\varphi(n) = 0 \quad \forall n > R$

$= \langle T, \varphi \rangle$ dove $T: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ è definita da $\langle T, \varphi \rangle := \sum_{k=-R}^{R} \varphi(k)$ dove ~~support~~ $\text{supp}(\varphi) \subseteq [-R, R]$ ~~$(R \in \mathbb{N})$~~ $R \in \mathbb{N}$

$\sum_{k=-R}^{R} \varphi(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$ perché tanto $\forall k > R$ è 0.

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k) =: \text{treno di impulsi}}$$

$\Rightarrow T_n \to T$ in $\mathcal{D}'$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 255 di 422

4) $f(t) = H(t)\, e^{-\alpha t} \quad \alpha > 0$

$$\mathcal{F}(f(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t}\, H(t) e^{-\alpha t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-2\pi i \omega t} e^{-\alpha t}\, dt =$$

$$\cancel{= \int_0^{\infty} e^{-2\pi i t(\omega - \alpha)}\, dt = \mathcal{F}(H)(\omega - \alpha)\ \mathcal{F}(H(t))(\omega - \alpha)} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t(2\pi i \omega + \alpha)}\, dt = -\frac{1}{2\pi i \omega + \alpha}\, e^{-t(2\pi i \omega + \alpha)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi i \omega + \alpha}$$

~~f non è continua ⇒ $\hat{f}$ decresce di ordine 1~~

f non è continua ⇒ $\hat{f}$ decresce di ordine 1)

5) $f(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}$ $\qquad a \neq 0$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t}\, \frac{1}{a^2 + t^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t}\, \frac{1}{a^2}\, \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}\, dt = \qquad t' = \frac{t}{|a|} \quad dt = |a|\, dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega (a t')}\, \frac{1}{a^{\cancel{2}}}\, \frac{\cancel{a}}{1 + (t')^2}\, dt' = \int_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i (a\omega) t'}\, \frac{1}{1 + (t')^2}\, dt' = \frac{1}{|a|}\, \mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + (t)^2}\right)(a\omega)$$

muta

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right) = \frac{1}{|a|}\, \mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + t^2}\right)(a\omega)$$

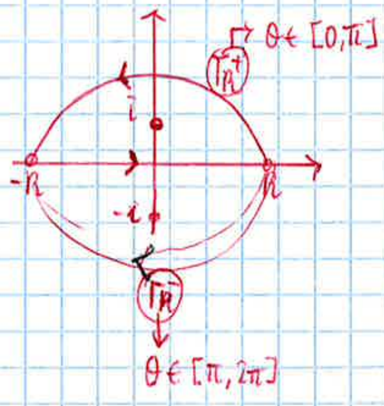
$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1 + t^2}\right)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t}\, \frac{1}{1 + t^2}\, dt$$

Risolvo questo integrale con il metodo dei residui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t}\, \frac{1}{1 + t^2}\, dt$$

$$g(t) = \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{1 + z^2}$$

poli $z = \pm i$



$$\mathrm{Res}\, g_{z = i} = \lim_{z \to i} \cancel{(z - i)}\, \frac{e^{-2\pi i z \omega}}{(z + i)\cancel{(z - i)}} = \frac{e^{-2\pi i i}}{2i} = \frac{e^{2\pi\omega}}{2i}$$

$$\mathrm{Res}\, g_{z = -i} = \lim_{z \to -i} \cancel{(z + i)}\, \frac{e^{-2\pi i \omega z}}{\cancel{(z + i)}(z - i)} = \frac{e^{+2\pi i i}}{-2i} = -\frac{e^{-2\pi\omega}}{2i}$$

$\Gamma_R^+ : z = Re^{i\theta} \quad \theta \in [0, \pi]$

$z = R(\cos\theta + i \sin\theta)$

$$\left|e^{-2\pi i z \omega}\right|_{\Gamma_R^+} = \left|e^{-2\pi i \omega R(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| = \left|e^{-2\pi i \omega R\cos\theta} \cdot e^{2\pi \omega R \sin\theta}\right| \leq \left|e^{2\pi \omega R \sin\theta}\right|$$

lo vogliamo limitare $\left|e^{-2\pi i \omega z}\right|_{\Gamma_R^+} \leq \left|e^{2\pi R \sin\theta\, \omega}\right| \leq 1$ se $\omega \leq 0$

Quindi, analogamente

$$\left|e^{-2\pi i z \omega}\right|_{\Gamma_R^-} \leq \left|e^{2\pi R \sin\theta\, \omega}\right| \leq 1 \text{ se } \omega > 0$$

Videolezioni:

1) $T = T_{xe^{4ix}} + e^{2x}\delta_3 \in \mathcal{D}'$

$\rightarrow T$ è temperata.

$T_1 = T_{xe^{4ix}} = xe^{4ix}$

$|xe^{4ix}| = |x| \Rightarrow xe^{4ix}$ è ~~a~~ crescita lenta $\Rightarrow T_1$ è temperata

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice a crescita lenta se ① $f \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$

② $\exists A, B \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$: $|f(x)| \leq A|x|^m + B, \forall x$

f è a crescita lenta $\Rightarrow T_f$ è una distribuzione temperata

$\rightarrow e^{2x}\delta_3 = e^6\delta_3$ è ha supporto compatto $\Rightarrow T_2$ è temperato.

Poiché lo spazio delle distribuzioni temperate è uno spazio vettoriale, allora T è temperata

$\Rightarrow \mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(T_1 + T_2) = \mathcal{F}(T_1) + \mathcal{F}(T_2)$

$= \mathcal{F}(xe^{4ix})(\omega) + \mathcal{F}(e^{2x}\delta_3)(\omega) =$

$= \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)[\mathcal{F}(e^{4ix})]'(\omega) + e^6\mathcal{F}(\delta_3)(\omega) =$

$= -\frac{1}{2\pi i}\left(\mathcal{F}\left(e^{2\pi i\left(\frac{2}{\pi}\right)x}\right)\right)'(\omega) + e^6 e^{-2\pi i 3\omega} =$

$= -\frac{1}{2\pi i}(\delta\ )'(\omega) + e^{6(1-\pi i\omega)} =$

$\rightarrow \mathcal{F}(t^k(T(t)))(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k (\mathcal{F}(T))^{(k)}(\omega)$

$\rightarrow \mathcal{F}(\delta_k)(\omega) = e^{-2\pi i k\omega}$

$\rightarrow \mathcal{F}(e^{2\pi i x_0 t}) = \delta_{x_0}$

2) $f(x) = x^{100} + x$, $x \in \mathbb{R}$

$T = \delta_0' + T_f$

T è temperata? SE SÌ calcolare $\mathcal{F}(T)$

~~$T_1 = x^{100}$~~

$T_1 = \delta_0'$ è temperata perché le δ sono ~~se~~ a supporto compatto e quando derivo, al più si ~~fa~~ riduce ~~l'intero~~ il supporto. $\Rightarrow T_1 \in S'$

$T_2 = T_f$

$f(x) = x^{100} + x$ è ~~ecc~~ a crescita lenta perché è un polinomio $\Rightarrow T_2 \in S'$

$\Rightarrow T$ è temperata essendo S' uno spazio vettoriale

OSSERVAZIONE

$|x^{100} + x| \leq |x|(|x|^{99} + 1) \leq |x|(|x|+1)^{99}$ (th del Binomio)

$\leq (|x|+1)(|x|+1)^{99} = (|x|+1)^{100}$

$\Rightarrow |x^{100} + x| \leq A(1+|x|)^m$ con $A = 1$, $m = 100$

(ogni polinomio è a crescita lenta)

5) $\mathcal{F}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)(\omega) = ?$

$\frac{x^2}{1+x^2}$ è limitata ed è in R^1_{loc}

$\Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} \in S'$

$\to \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+t^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\omega|}$

$\frac{d}{d\omega}|\omega| = sign(\omega)$

$$\mathcal{F}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \left[\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right]''(\omega) = -\frac{1}{4\pi^2}\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\pi e^{-2\pi|\omega|}\right)$$

derivata distribuzionale

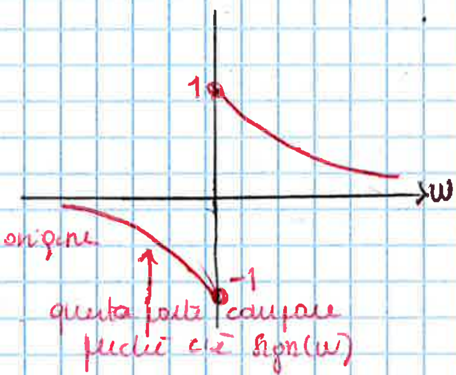
$$= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{d\omega}\left(-\pi 2\pi e^{-2\pi|\omega|} sign(\omega)\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\frac{d}{d\omega}\left(-2\pi^2 e^{-2\pi|\omega|} sign(\omega)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\omega}\left(e^{-2\pi|\omega|} sign(\omega)\right) =$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(sign(\omega) e^{-2\pi|\omega|}\right) = -2\pi e^{-2\pi|\omega|} \cancel{sign(\omega)} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\, 2\delta_0$$

salto nell'origine

per $\omega > 0$
$* = -2\pi e^{-2\pi\omega}$
per $\omega < 0$
$* = -2\pi e^{2\pi\omega}$



(Ho usato la formula della derivata distribuzionale: $T'_f = T_{f'} + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\delta_{x_0}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)(\omega) = \frac{1}{2}\left(-2\pi e^{-2\pi|\omega|} sign + 2\delta_0\right) = -\pi e^{-2\pi|\omega|} + \delta_0$$

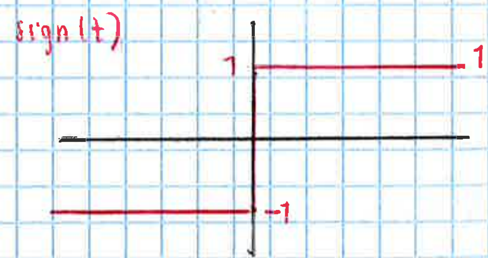
~~Oppure:~~
~~So che~~ $\cancel{\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \pi e^{-2\pi|\omega|}}$

$\cancel{\mathcal{F}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)(\omega) = \left(\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\right.}$

~~6)~~ $\cancel{\mathcal{F}(vp\frac{1}{t})(\omega)}$

6) $\mathcal{F}(sign(t)) = ?$

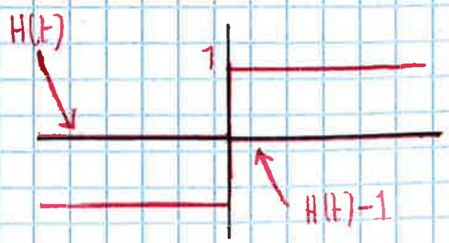
So che $\mathcal{F}(H(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi i} vp\frac{1}{\omega} + \frac{1}{2}\delta_0$



$\mathcal{F}(sign(t)) = \mathcal{F}(2H(t) - 1)(\omega) =$

$= 2\mathcal{F}(H(t))(\omega) - \mathcal{F}(1)(\omega) = \frac{1}{\pi i} vp\frac{1}{\omega} + \cancel{\delta_0} - \cancel{\delta_0} =$

$= \frac{1}{\pi i} vp\frac{1}{\omega}$



$sign(t) = 2H(t) - 1$

10) $\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right)$ → funzione assolutamente integrabile

$$\frac{1}{t^2+t+1} = \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$ completamento dei quadrati

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+t+1}\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)(\omega) = e^{-2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)\omega}\,\mathcal{F}\left(\frac{1}{t^2+\frac{3}{4}}\right)$$ → $\mathcal{F}(T(t-t_0))(\omega) = e^{-2\pi i t_0 \omega}\mathcal{F}(T(t))$

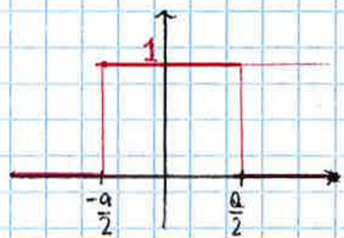
→ $\mathcal{F}(T(t+t_0))(\omega) = e^{2\pi i t_0 \omega}\mathcal{F}(T(t))$

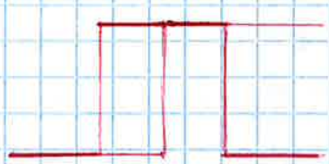
$$= e^{+\pi i\omega}\,\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\,e^{-2\pi\frac{\sqrt{3}}{2}|\omega|} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\,e^{\pi(i\omega-\sqrt{3}|\omega|)}$$ → no DISTRIBUZIONE

OSSERVO: la funzione è assolutamente integrabile
Trovo una NON distribuzione

11) $\mathcal{F}(p_a(t))(\omega) = ?$

$$p_a(t) := \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$





$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}\, dx$$

$$\mathcal{F}(p_a(t)) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-2\pi i\omega x}\, dx =$$

$t = -2\pi i\omega x$
$dt = -2\pi i\omega\, dx$

$$= -\frac{1}{2\pi i\omega}\, e^{-2\pi i\omega x}\Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{-2\pi i\omega\frac{a}{2}} - e^{2\pi i\omega\frac{a}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{2\pi i\omega\frac{a}{2}} - e^{-2\pi i\omega\frac{a}{2}}\right) = \frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{+\left(2\pi\omega\frac{a}{2}\right)i} - e^{-\left(2\pi\omega\frac{a}{2}\right)i}\right) = \frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{(\pi\omega a)i} - e^{-(\pi\omega a)i}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\pi\omega a)}{\pi\omega}$$

$\operatorname{sen}(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$$\boxed{\mathcal{F}(p_a(t))(\omega) = \frac{\operatorname{sen}(\pi\omega a)}{\pi\omega}}$$

~~4) $g(t) = \cos(2t+1)$~~ → ~~$\mathcal{F}(T(x \pm x_0)) = e^{\pm 2\pi i \omega x_0}\mathcal{F}(T(1))(\omega)$~~

~~$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \mathcal{F}(\cos(2t+1)) = e^{2\pi i \omega}\mathcal{F}(\cos(2t))(\omega) =$~~

~~$= e^{2\pi i \omega}\frac{1}{2}\mathcal{F}(\cos t)\left(\frac{\omega}{2}\right) =$~~ → ~~$\mathcal{F}(T(\alpha x))(\omega) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}(T)\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$~~

$= \frac{1}{2}e^{2\pi i \omega}\left(\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2\pi}} + \frac{1}{2}\delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right)\left(\frac{\omega}{2}\right) =$

~~$= \frac{1}{2}e^{\pi i \omega}\left(\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2\pi}} + \frac{1}{2}\delta_{-\frac{1}{2\pi}}\right)(\omega) =$~~

~~$= \frac{1}{4}e^{\pi i \frac{1}{2\pi}}$~~

$= \frac{1}{4}$

4) $g(t) = \cos(2t+1) = \ldots = \frac{1}{2}\left(e^{2\pi\omega i}\,\delta_{\frac{1}{\pi}} + e^{2\pi i \omega}\,\delta_{-\frac{1}{\pi}}\right) =$ $\quad \cos(2t) = \frac{e^{2ti} + e^{-2ti}}{2}$

$= \frac{1}{2}\left(e^{2\pi i \frac{1}{\pi}}\,\delta_{\frac{1}{\pi}} + e^{2\pi i\left(-\frac{1}{\pi}\right)}\,\delta_{-\frac{1}{\pi}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{2i}\,\delta_{\frac{1}{\pi}} + e^{-2i}\,\delta_{-\frac{1}{\pi}}\right)$

5) $g(t) = \cos t\, e^{-3t} H(t) =$

$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \mathcal{F}(H(t)\cos t\, e^{-3t})(\omega) = \mathcal{F}\left(H(t)e^{-3t}\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\right)(\omega)$

$= \mathcal{F}\left(H(t)e^{-3t}\frac{1}{2}e^{it}\right)(\omega) + \mathcal{F}\left(H(t)e^{-3t}\frac{1}{2}e^{-it}\right)(\omega) =$

$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(H(t)e^{-3t+it})(\omega) + \mathcal{F}(H(t)e^{-3t-it})(\omega)\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}(H(t)e^{-t(3-i)})(\omega) + \mathcal{F}(H(t)e^{-t(3+i)})(\omega)\right) =$ → $\mathcal{F}(H(t)e^{-at}) = \frac{1}{a + 2\pi i \omega}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(3-i) + 2\pi i\omega} + \frac{1}{(3+i) + 2\pi i \omega}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{(3+\cancel{i}) + 2\pi i \omega + (3-\cancel{i}) + 2\pi i \omega}{((3-i) + 2\pi i \omega)((3+i) + 2\pi i \omega)}\right) =$ ~~$\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}(3 + 2\pi i \omega)$~~

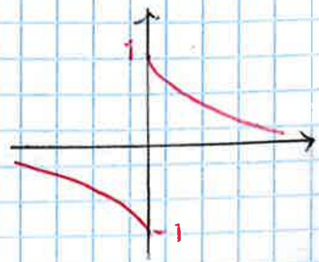
$= \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\,\frac{3 + 2\pi i \omega}{(3-i)(3+i) + (3-i)(2\pi i \omega) + (3+i)(2\pi i\omega) + (2\pi i \omega)^2} =$

$= \frac{3 + 2\pi i \omega}{9 + 1 + 6\pi i \omega + \cancel{2\pi\omega} + 3\cdot 2\pi i \omega - \cancel{2\pi\omega} + (2\pi i \omega)^2} =$

$= \frac{3 + 2\pi i \omega}{(3 + 2\pi i \omega)^2 + 1}$

6) $g(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$

$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(t^2\frac{1}{1+t^2}\right)(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^2\left(\pi e^{-2\pi|\omega|}\right)'' =$



$= -\frac{1}{4\pi^2}\underbrace{\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\pi e^{-2\pi|\omega|}\right)}_{d.d} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{d}{d\omega}\underbrace{\left(-2\pi e^{-2\pi|\omega|}\cdot \operatorname{sign}(\omega)\right)}_{d.d} =$

Ricorda: $T_f' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{n}[f(x_i^+) - f(x_i^-)]\,\delta_{x_i}$

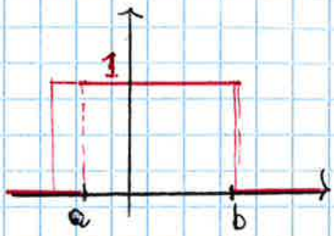
8) $g(t) = p_T(t-t_0)$ (dove $t_0 \in \mathbb{R}$, $T>0$)

$\to \mathcal{F}(T(t-t_0))(\omega) = e^{-2\pi i\omega t_0}\,\mathcal{F}(T(t))(\omega)$

$\to \mathcal{F}(p_a(t))(\omega) = \frac{sen(a\pi\omega)}{\pi\omega}$

$\mathcal{F}(p_T(t-t_0))(\omega) = e^{-2\pi i\omega t_0}\,\mathcal{F}(p_T(t))(\omega) =$

$= e^{-2\pi i\omega t_0}\cdot \frac{sen(T\pi\omega)}{\pi\omega}$



9) $g(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}$ (dove $a,b\in\mathbb{R}$ e $a<b$)

$$\mathbb{1}_{[a,b]} = \begin{cases} 1 \text{ se } t\in[a,b] \\ 0 \text{ se } t\notin[a,b] \end{cases}$$

~~$\mathbb{1}_{[a,b]} =$~~

$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-2\pi i\omega}\, dt = \int_a^b e^{-2\pi i\omega t}\,dt = -\frac{1}{2\pi i\omega} e^{-2\pi i\omega t}\Big|_a^b =$

$= \frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{-2\pi i b\omega} - e^{-2\pi i a\omega}\right)$

~~$sen(\beta-\alpha) = sen(\beta)cos(\alpha) - cos(\beta)sen(\alpha)$~~

$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, e^{-2\pi i\omega t}\, dt = \int_a^b e^{-2\pi i\omega t}\,dt = -\frac{1}{2\pi i\omega} e^{-2\pi i\omega t}\Big|_a^b =$

$= -\frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{-2\pi i\omega b} - e^{-2\pi i\omega a}\right) =$

$sen z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$

$= -\frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{-2\pi i\omega(b-a+a)} - e^{-2\pi i\omega(a-b+b)}\right) = +\frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{-2\pi i\omega(a-b)}\, e^{-2\pi i\omega b} +\right.$

$\left. - e^{-2\pi i\omega(b-a)}\, e^{-2\pi i\omega a}\right) =$

$= \frac{1}{2\pi i\omega}\left(e^{i(2\pi(b-a))}\, e^{-2\pi i\omega b} - e^{-i(2\pi(b-a))}\, e^{-2\pi i\omega a}\right) = \frac{\cancel{e^{-2\pi i\omega a}}}{\cancel{e^{-2\pi i\omega a}}} \quad \cancel{2\pi}$

$= \frac{1}{2\pi i\omega}\, e^{-2\pi i\omega a}\left(e^{i(2\pi(b-a))}\, e^{-2\pi i\omega(b+a)} - e^{-i(2\pi(b-a))}\right) =$

$=$

12) $\cancel{g(t) = \frac{t\,\text{sen}(2t)}{(t^2+4)^2}}$ $\rightarrow \mathcal{F}(T^{(k)})(\omega) = (2\pi i \omega)^k \mathcal{F}(T)(\omega)$

$\cancel{\frac{d}{dt}\frac{1}{t^2+4} = -\frac{2t}{(t^2+4)^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{t^2+4}\right)' = -\frac{2t}{(t^2+4)^2}}$ $u = \frac{t}{(t^2+1)^2}$

$\cancel{\left(\frac{1}{t^2+4}\right)' = -\frac{2t}{(t^2+4)^2}}$ $\mathcal{F}\left(u \cdot \frac{e^{2ti} - e^{-2ti}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\, \mathcal{F}(M_{\frac{1}{\pi}} u) - \mathcal{F}(M_{-\frac{1}{\pi}} u)$

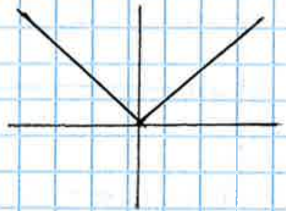
13) $g(t) = t \cdot H(t)$

$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \mathcal{F}(tH(t))(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right) \mathcal{F}(H(t))'(\omega) =$

$= -\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2\pi i} vp\frac{1}{\omega} + \frac{\delta_0}{2}\right)' =$

$= \frac{1}{4\pi^2}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)' - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2}\delta_0' = \frac{1}{4\pi^2}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)' - \frac{1}{4\pi i}\delta_0' = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)' + i\delta_0'\right)$

14) $g(t) = |t|$



$g(t) = H(t)\,t + H(-t)(-t) = tH(t) - tH(-t)$

$\mathcal{F}(g(t))(\omega) = \mathcal{F}(tH(t))(\omega) - \mathcal{F}(t(H(-t)))(\omega) =$

$= -\frac{1}{2\pi i}\mathcal{F}(H(t))'(\omega) + \frac{1}{2\pi i}\mathcal{F}(H(-t))(\omega) =$

$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)' + i\delta_0'\right) + \frac{1}{2\pi i}\left(\mathcal{F}(H(t))'(-\omega)\right) =$

~~[illegible]~~

$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)' + i\delta_0'\right) + \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{2\pi i} vp\left(-\frac{1}{\omega}\right) + \frac{\delta_0}{2}\right)' =$

~~[illegible]~~

$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)' + i\delta_0'\right) - \frac{1}{4\pi^2}\left(vp\left(-\frac{1}{\omega}\right)\right)' + \frac{1}{4\pi i}\delta_0' =$

$\cancel{= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left(vp\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)' + i\delta_0' + \frac{1}{\pi}\left(vp\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)'\right)}$

$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\pi}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)' + i\cancel{\delta_0'} + \frac{1}{\pi}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)' - i\cancel{\delta_0'}\right) = \frac{1}{2\pi^2}\left(vp\frac{1}{\omega}\right)'$

$$\boxed{vp\left(-\frac{1}{x}\right) = -vp\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \left(vp\left(-\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(-vp\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}$$

ESERCITAZIONE 11: (03.06.2015)

(1) Ricorda:

$(\mathcal{F}u')(\omega) = 2\pi i \omega\, \hat{u}(\omega)$

1) $\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle$ $\quad T_1 = 1$

$\langle \mathcal{F}(T_1), \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)\, d\omega \Rightarrow$ formula di inversione: $(\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F})\varphi(t) = \varphi(t)$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t\omega} \hat{\varphi}(\omega)\, d\omega = \varphi(t)$

PRINCIPIO DI HEISENBERG

$\Rightarrow \varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{2\pi i \omega 0}}_{1} \hat{\varphi}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)\, d\omega \Rightarrow \mathcal{F}(1) = \delta_0$

perfettamente localizzata nello spazio

per niente localizzata nel tempo

Altro metodo

suppongo che: $1 = \lim_{k \to +\infty} f_n$ con $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ $\quad$ 1 è dis. temperata

$\Rightarrow \mathcal{F}(\lim_{n\to+\infty} f_n) = \mathcal{F}(1)$

(Importante) posso farlo perché $\mathcal{F}$ è continua

$\mathcal{F}(\lim_{n\to+\infty} f_n) = \lim_{n\to+\infty} (\mathcal{F} f_n)$

Scelgo $f_n(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$ (in S') $\quad$ infatti $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|t|}{n}} \varphi(t)\, dt = 1$ perché φ è ha supporto compatto

$\Rightarrow \mathcal{F}(1)(\omega) = \lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}(e^{-\frac{|t|}{n}})(\omega)$ (in S') $\quad \rightarrow \mathcal{F}(e^{-\frac{|t|}{n}}) = \frac{2n}{1+n^2 4\pi^2\omega^2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{1+n^2 4\pi^2\omega^2}$ in S'

limite distribuzionale

$\langle \frac{2n}{1+n^2 4\pi^2\omega^2}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2n}{1+n^2 4\pi^2 \omega^2} \varphi(\omega)\, d\omega =$ $\quad n\omega = \omega'$, $n\,d\omega = d\omega'$

$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+4\pi^2\omega'^2} \varphi\left(\frac{\omega'}{n}\right) d\omega' =$ $\quad 2\pi\omega' = t$, $2\pi\, d\omega' = dt$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \varphi\left(\frac{t}{2\pi n}\right) dt =$

$= \frac{1}{\pi} \int_{-K}^{K} \frac{1}{1+t^2} \varphi\left(\frac{t}{2\pi n}\right) dt$ $\quad \mathrm{Supp}(\varphi) = [-K, K]$

$\xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{\pi} \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$

$= \frac{1}{\pi} \varphi(0) \arctan(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \varphi(0)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(1) = \delta_0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 271 di 422

ESERCITAZIONE 12 (05.06.2012)

1) $\cancel{\mathcal{L}(H(t)e^{\alpha t})(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\alpha)t}\,dt = \frac{1}{-s+\alpha}\int_0^{+\infty}}$

$$= \int_0^{+\infty} e^{t(-s+\alpha)}\,dt = \frac{1}{\alpha - s}\, e^{t(\alpha-s)}\Big|_0^{+\infty}$$

$\mathcal{L}(H(t)e^{\alpha t})(s) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$f(t) = H(t)e^{\alpha t}$

$\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : t \mapsto f(t)e^{-st} \in \mathcal{R}^1([0,+\infty))\}$

$|H(t)e^{\alpha t}e^{-st}| = |e^{-(s-\alpha)t}| = e^{-(\mathrm{Re}\,s-\alpha)x} \in \mathcal{R}^1([0,+\infty)) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s)\ \alpha > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s) > \alpha$

$\Rightarrow \Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$

$\Rightarrow \mathcal{L}(H(t)e^{\alpha t})(s) = \int_0^{+\infty} e^{t(-s+\alpha)}\,dt = +\frac{1}{-s+\alpha}\, e^{-(s-\alpha)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s-\alpha}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(e^{\alpha t})(s) = \frac{1}{s-\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \forall s : \mathrm{Re}(s) > \alpha}$ Se $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \forall s : \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(\alpha)$

Se $\alpha = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s}$

2) $\mathcal{L}(\mathrm{sen}\,\omega t)(s)$ $\qquad \omega \in \mathbb{R}$

$\mathrm{sen}\,\omega t = \frac{1}{2i}(e^{+\omega t i} - e^{-\omega t i})$

$\mathcal{L}\left(\frac{1}{2i}(e^{+\omega t i} - e^{-\omega t i})\right)(s) = \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}(e^{+\omega t i})(s) - \mathcal{L}(e^{-\omega t i})(s)\right) =$ $\qquad \rightarrow \mathcal{L}(e^{s_0 t})(s) = \frac{1}{s-s_0} \quad \forall s : \mathrm{Re}(s) > s_0$

$= \cancel{\frac{1}{2i}}$

$\rightarrow \mathcal{L}(e^{\omega t i})(s) = \frac{1}{s-\omega i} \quad \forall s : \mathrm{Re}\,s > 0$ $\qquad \mathrm{Re}(\omega i) = 0$

$\rightarrow \mathcal{L}(e^{-\omega t i})(s) = \frac{1}{s+\omega i} \quad \forall s :$ $\cancel{\mathrm{Re}\,s > -\omega i \rightarrow \mathrm{Re}\,s > 0}$ $\mathrm{Re}\,s > 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathrm{sen}\,\omega t)(s) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega} - \frac{1}{s+i\omega}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{s+i\omega-s+i\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{2i}\,\frac{2i\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(\mathrm{sen}\,\omega t)(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}}$ $\quad \forall s : \mathrm{Re}(s) > 0$

Analogamente

$\boxed{\mathcal{L}(\cos\omega t)(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}}$ $\quad \forall s : \mathrm{Re}(s) > 0$

6) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right)(t)$

$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(f)) = f$

$\rightarrow \mathcal{L}(f) = F \Rightarrow f = \mathcal{L}^{-1}(F)$

$\rightarrow \mathcal{L}(\text{sen}(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right)(t) = \text{sen}\,\omega t$

$\rightarrow \mathcal{L}(e^{s_0 t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-s_0)$

$\cancel{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right)(t) =}$

$\rightarrow \mathcal{L}(f(t-t_0))(s) = e^{-s t_0}(\mathcal{L}(f(t)))(s) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(e^{-s t_0}\mathcal{L}(f(t)))(s) = f(t-t_0)$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{s^2+1}\right)e^{-s}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}(e^{-s}(\mathcal{L}(\text{sen}\,t)))(s) = \text{sen}(t-1)$

$\forall s: \text{Re}(s) > 0$

7) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-h}{(s-h)^2+9}\right)(t)$

$\rightarrow \mathcal{L}(f(t-t_0))(s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}(f(t))(s)$

$\rightarrow \mathcal{L}(e^{s_0 t} f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-s_0) \Rightarrow \left[\mathcal{L}^{-1}(f(t))(s-s_0) = e^{s_0 t}\mathcal{L}^{-1}(f(t))(s)\right]$

$\rightarrow \mathcal{L}(\cos(\omega t))(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)(t) = \cos\omega t$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-h}{(s-h)^2+9}\right)(t) = e^{ht}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)(t) = e^{ht}\cos 3t$

8) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3}{s^2-1}\right)(t)$

$s^3 + 0s^2 + 0s^1 + 0$	$s^2 + 0s - 1$
$s^3 + 0s^2 - s$	s
$\setminus \quad \setminus \quad s$	

$\rightarrow \mathcal{L}(\delta_{x_0}^{(k)}) = s^k e^{-x_0 s}$

$\mathcal{L}(\delta_0^{(k)}) = s^k \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(s^k) = (\delta_0^{(k)})$

$\rightarrow \mathcal{L}(e^{s_0 t}) = \frac{1}{s-s_0} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-s_0}\right) = e^{s_0 t}$

$s^3 = s(s^2-1) + s \rightarrow$ resto

$\rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-s_0)^k}\right) = \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{s_0 t}H(t)$

$\frac{s^3}{s^2-1} = \frac{s(\cancel{s^2-1})}{\cancel{s^2-1}} + \frac{s}{s^2-1} = s + \frac{s}{s^2-1}$

$\mathcal{L}(\cosh(\omega t)) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$

$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^3}{s^2-1}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(s + \frac{s}{s^2-1}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}(s)(t) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-1}\right)(t) = \delta_0' + \cosh(t)$

$\mathcal{L}(\delta_{x_0}^{(k)}) = s^k e^{-s x_0}$

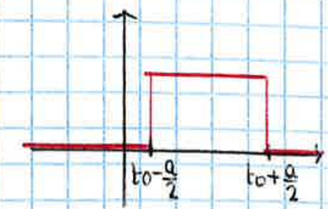
⑥ esercizi sulla trasformata di Laplace

$\cancel{\mathcal{L}(p_1(t-2))}$

→ RICORDO CHE: $\boxed{\mathbb{1}_{[a,b]}(t) = H(t-a) - H(t-b)}$

a) trasformate

1) $f(t) = p_a(t-t_0)$ dove $a, t_0 > 0$, $(a/2 < t_0)^*$



$$p_a(t-t_0) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t-t_0| \le \frac{a}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$|t-t_0| \le \frac{a}{2} \Rightarrow -\frac{a}{2} < t-t_0 < \frac{a}{2} \Rightarrow -\frac{a}{2} + t_0 < t < \frac{a}{2} + t_0$$

$$*\left(t_0 - \frac{a}{2} > 0\right)$$

$$p_a(t-t_0) = \mathbb{1}_{[t_0-\frac{a}{2},\, t_0+\frac{a}{2}]}(t) = H(t-(t_0-\tfrac{a}{2})) - H(t-(t_0+\tfrac{a}{2})) = \cancel{H(t-t_0+\tfrac{a}{2}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \mathcal{L}(p_a(t-t_0))(s) = \mathcal{L}(H(t-(t_0-\tfrac{a}{2})) - H(t-(t_0+\tfrac{a}{2})))(s) =}$$

$$\cancel{= e^{-(t_0-\frac{a}{2})s}\mathcal{L}(H(t))(s) - e^{-(t_0+\frac{a}{2})s}\mathcal{L}(H(t))(s) =}$$

$$\cancel{= e^{t_0} e^{\frac{a}{2}}\mathcal{L}(H(t))(s) - e^{-t_0} e^{\frac{a}{2}}\mathcal{L}(H(t))(s)}$$

$$\cancel{= \frac{1}{s} e^{-t_0}(e^{\frac{a}{2}} - e^{-\frac{a}{2}}) = \frac{1}{s} e^{-t_0}\, 2\,\text{senh}}$$

$$\mathcal{L}(p_a(t-t_0))(s) = \mathcal{L}(H(t-(t_0-\tfrac{a}{2})) - H(t-(t_0+\tfrac{a}{2})))(s) =$$

$= \mathcal{L}(H(t-(t_0-\frac{a}{2})))(s) - \mathcal{L}(H(t-(t_0+\frac{a}{2})))(s) =$ → $\mathcal{L}(f(t-t_0))(s) = e^{-t_0 s}\mathcal{L}(f(t))$

$= e^{-(t_0-\frac{a}{2})s}\mathcal{L}(H(t))(s) - e^{-(t_0+\frac{a}{2})s}\mathcal{L}(H(t))(s) =$ → $\mathcal{L}(H(t))(s) = \frac{1}{s}$

$$= \frac{1}{s}\left(e^{-(t_0-\frac{a}{2})s} - e^{-(t_0+\frac{a}{2})s}\right) = \frac{1}{s}\left(e^{-t_0 s} e^{\frac{as}{2}} - e^{-t_0 s} e^{-\frac{as}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{s} e^{-st_0}\, 2\,\text{senh}\left(\frac{as}{2}\right)$$

2) $f(t) = \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$ dove $0 \le a < b$ ⇝ $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}\, s > 0\}$

$$\mathcal{L}(\mathbb{1}_{[a,b]}(t))(s) = \mathcal{L}(H(t-a) - H(t-b))(s) = \mathcal{L}(H(t-a))(s) - \mathcal{L}(H(t-b))(s) =$$

$$= e^{-as}\mathcal{L}(H(t))(s) - e^{-bs}\mathcal{L}(H(t))(s) =$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-bs})$$

3) $f(t) = p_h(t-1)\, H(t)$ $\Omega_f = \{s \in \mathbb{C} : \text{Re}(s) > 0\}$

$\cancel{\mathcal{L}(f(t))(s)} =$

$$p_h(t-1) = \begin{cases} \cancel{|t-1| \le 2}\ 1 & \text{se } |t-1| \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad -2 < t-1 < 2 \Rightarrow -1 < t < 3$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^3 e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^3 = -\frac{1}{s}(e^{-3s} - 1) = \frac{1}{s}(1 - e^{-3s})$$

$f(t) = t(H(t)-H(t-1)) + (2-t)(H(t-1)-H(t-2)) + (t-2)(H(t-2)) =$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(\ldots)(s)$

$= \mathcal{L}(tH(t))(s) - \mathcal{L}(tH(t-1))(s) + \mathcal{L}((2-t)H(t-1))(s) - \mathcal{L}((2-t)H(t-2))(s) +$

$+ \mathcal{L}((t-2)H(t-2))(s) =$

$= \frac{1}{s^2} - \mathcal{L}((t-1)H(t-1))(s) + \mathcal{L}(H(t-1)\cancel{)}(s) - (\mathcal{L}((t-1)H(t-1))(s) + \mathcal{L}(H(\cancel{t}-1))(s)) +$

$+ \mathcal{L}((t-2)H(t-2))(s) + \mathcal{L}((t-2)H(t-2))(s) =$

$= \frac{1}{s^2} - 2\mathcal{L}((t-1)H(t-1))(s) + 2\mathcal{L}((t-2)H(t-2))(s) =$

$= \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\mathcal{L}(tH(t))(s) + 2e^{-2s}\mathcal{L}(tH(t))(s) =$

$= \frac{1}{s^2} - 2e^{-s}\frac{1}{s^2} + 2e^{-2s}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}(1-2e^{-s}+2e^{-2s}) =$

~~6)~~

6) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0,1] \\ 2 & \text{se } t \in [1,2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$f(t) = (H(t)-H(t-1)) + (-2)(H(t-1)-H(t-2)) \neq$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s} - 2e^{-s}\frac{1}{s} + 2e^{-2s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s}(1-e^{-s}-2e^{-s}+2e^{-2s}) = \frac{1}{s}(1-3e^{-s}+2e^{-2s})$

7) $f(t) = H(t)e^{t-1} + H(t-2)\cos t$

$f(t) = H(t)e^{t-1} + H(t-2)\cdot\frac{1}{2}(e^{+it}+e^{-it}) =$

$= e^{-1}H(t)e^{t} + \frac{1}{2}H(t-2)(e^{+it}+e^{-it})$

$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(e^{-1}H(t)e^{t})(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t-2)e^{it})(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t-2)e^{-it})(s) =$

$= e^{-1}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t-2)e^{i(t-2)+2i})(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t-2)e^{-i(t-2)-2i})(s) =$

$= e^{-1}\frac{1}{s-1} + e^{2i}\cdot\frac{1}{2}\mathcal{L}(H(t-2)e^{i(t-2)})(s) + \frac{1}{2}e^{-2i}\mathcal{L}(H(t-2)e^{-i(t-2)})(s)$ $\quad s_0 = \;\in \mathbb{C}$

$= e^{-1}\frac{1}{s-1} + e^{2i}\frac{1}{2}e^{-2s}\mathcal{L}(H(t)e^{it})(s) + \frac{1}{2}e^{-2i}e^{-2s}\mathcal{L}(H(t)e^{-it})(s) =$ $\quad \text{Re}\,s > \text{Re}(s_0)$, $\text{Re}\,s > 1$

$= e^{-1}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}e^{2(i-s)}\cdot\frac{1}{s-i} + \frac{1}{2}e^{2(-i-s)}\frac{1}{s+i} =$

$= \frac{e^{-1}}{s-1} + \frac{e^{-2(s-i)}}{2(s-i)} + \frac{e^{-2(s+i)}}{2(s+i)}$

10) ~~$\cos^2$~~ $f(t) = \cos^2 t\, H(t)$

$$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \Rightarrow \cos^2 t = \frac{(e^{it}+e^{-it})^2}{4} = \frac{e^{2it}+2e^0+e^{-2it}}{4} = \frac{e^{2it}+2+e^{-2it}}{4}$$

~~$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{1}{4}\mathcal{L}(e^{2it})(s) + \frac{1}{4}2\mathcal{L}(1)(s) + \frac{1}{4}\mathcal{L}(e^{-2it})(s) =$~~

~~$= \frac{1}{4}\mathcal{L}(1)(s-2i) + \frac{1}{4}2\mathcal{L}(1)(s) + \frac{1}{4}\mathcal{L}(1)(s+2i) =$~~

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}(\cos^2 t\, H(t))(s) = \frac{1}{4}\left(\mathcal{L}(e^{2it}H(t))(s) + 2\mathcal{L}(H(t))(s) + \mathcal{L}(e^{-2it}H(t))(s)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathcal{L}(H(t))(s-2i) + 2\cdot\frac{1}{s} + \mathcal{L}(H(t))(s+2i)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2i} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2i}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{s(s+2i)+2(s-2i)(s+2i)+s(s-2i)}{s(s-2i)(s+2i)} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{s^2+\cancel{2is}+2(s^2+4)+s^2-\cancel{2si}}{s(s^2+4)} = \frac{4s^2+8}{4s^3+16s} \qquad Re(s)>0$$

~~11) $f(t) = (t-3)H(t-2)e^{t+1}$~~

~~$\mathcal{L}(f(t))(s) = \mathcal{L}((t-3)H(t-2)e^{t+1})(s) =$~~

~~$= e^1\mathcal{L}((t-3)H(t-2)e^t)(s) =$~~

~~$= e\,\mathcal{L}((t-3)(H(t-2))(s-1) =$~~

$= e\,\mathcal{L}((t-2-1)H(t-2))(s-1) =$

$= e\left(\mathcal{L}((t-2)H(t-2))(s-1) + \mathcal{L}((-1)H(t-2))(s-1)\right) =$

~~$= e\left(e^{-2(s-1)}\mathcal{L}((t)H(t))(s-1) - \mathcal{L}(H(t-2))(s-1)\right) =$~~ $\rightarrow \mathcal{L}(f(t-t_0))(s-s_0) = e^{-t_0(s-s_0)}\mathcal{L}(f(t))(s-s_0)$

~~$= e\left(e^{-2(s-1)}\frac{1}{(s-1)^2} - e^{-2(s-1)}\frac{1}{s-1}\right) =$~~

~~$= e^{-2(s-1)+1}\left(\frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)}\right) = e^{-2(s-1)+1}\left(\frac{1-s+1}{(s-1)^2}\right) =$~~

~~$= \frac{2-s}{(s-1)^2}e^{-2s+3}$~~

$$\cancel{\frac{1}{s^2+s^3} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s+1} = \frac{A(s+1)+Bs^2}{s^2(s+1)} = \frac{As+Bs^2+A}{s^2(s+1)}}$$

scomporre in fratti semplici

~~$\Rightarrow A=1$~~
~~$B=0$~~

grado 2-1 grado 1-1

$$\frac{1}{s^2+s^3} = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A+Bs}{s^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{(A+Bs)(s+1)+Cs^2}{s^2(s+1)} = \frac{As+A+Bs^2+Bs+Cs^2}{s^2(s+1)}$$

grado 2 grado 1

$$\begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \\ B+C=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2+s^3} = \frac{1-s}{s^2} + \frac{1}{s+1}$$

verifica

$$\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \frac{s+1-s(s+1)+s^2}{s^2(s+1)} = \frac{\cancel{s}+1-\cancel{s^2}-\cancel{s}+\cancel{s^2}}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2+s^3}$$

$$\frac{1}{s^2+s^3} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(tH(t))(s) - \mathcal{L}(H(t))(s) + \mathcal{L}(e^{-t}H(t))(s)$$

$$\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(tH(t))(s)$$

$$\frac{1}{s} = \mathcal{L}(H(t))(s)$$

$$\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(e^{-t}H(t))(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s^3}\right)(t) = tH(t) - H(t) + e^{-t}H(t) = H(t)(t-1+e^{-t})$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2+s^3}\right)(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\mathcal{L}(tH(t)-H(t)+e^{-t}H(t))(s)\right) \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-t_0 s}\mathcal{L}(f(t))(s)\right) = f(t-t_0)$$

$$= (t-2)H(t-2) - H(t-2) + e^{-(t-2)}H(t-2)$$

$$= H(t-2)(t-2-1+e^{-t+2}) =$$

$$= H(t-2)(t-3+e^{-t+2})$$

?

h) $F(s) = \frac{s^3+2s^2+s-1}{s^2+2s+1}$

$$\begin{array}{rrrr|l} s^3 & +2s^2 & +s & -1 & s^2+2s+1 \\ s^3 & +2s^2 & +s & & s \\ \hline = & = & = & -1 & \end{array}$$

$(s^3+2s^2+s-1) = s\cdot(s^2+2s+1)-1$
s^3+2s^2+s-1

$$F(s) = \frac{s(s^2+2s+1)-1}{s^2+2s+1} = \frac{s(s^2+2s+1)}{s^2+2s+1} - \frac{1}{s^2+2s+1} = s - \frac{1}{s^2+2s+1} = s - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$\rightarrow \mathcal{L}(\delta_{x_0}^{(k)})(s) = s^k e^{-x_0 s}$

voglio $k=1$, $x_0=0 \Rightarrow \mathcal{L}(\delta_0')(s) = s \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(s)(t) = \delta_0'$

$\rightarrow \mathcal{L}(t^k H(t))(s) = \frac{k!}{s^{k+1}}$

Voglio $k=1$

$\mathcal{L}(tH(t))(s) = \frac{1}{s^2} \Rightarrow \frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}(tH(t))(s+1) = \mathcal{L}(e^{-t}\,tH(t))(s)$

$F(s) = s - \frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}(\delta_0')(s) + \mathcal{L}(e^{-t}tH(t))(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = \delta_0' + e^{-t}t\,H(t)$

5) $F(s) = \frac{s^2+3}{(s+1)(s^2+6s+9)} = \frac{s^2+3}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+3)^2} = \frac{A(s+3)^2+B(s+1)}{(s+1)(s+3)^2}$

$As^2+6As+9A+Bs+B$

$$\begin{cases} A=1 \\ 9A+B=3 \\ B+6A=0 \end{cases}$$

$9+B=3 \rightarrow B=-6$

$\Rightarrow \frac{s^2+3}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{6}{(s+3)^2} = \mathcal{L}(e^{-t}H(t))(s) - 6\,\mathcal{L}(tH(t))(s+3) =$

$= \mathcal{L}(e^{-t}H(t))(s) - 6\,\mathcal{L}(e^{-3t}tH(t))(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s))(t) = e^{-t}H(t) - 6e^{-3t}tH(t)$

~~$\mathcal{L}(f(t-t_0))$~~

$\mathcal{L}(e^{s_0 t}f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-s_0)$

$\frac{h}{(s-s_0)^2} = h\,\mathcal{L}(tH(t))(s-s_0) = h\,\mathcal{L}(e^{s_0 t}t\,H(t))(s)$

ULTIMA ESERCITAZIONE (09-06-2015) (12-06-2015)

[illegible]

Esercizi di riepilogo

- $f(z) = \frac{\sin \alpha z^2 - z^2}{z^3}$ $\quad f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$

f olomorfa perché somma e divisione di f. olomorfe

1) sviluppo di Laurent
2) classificazione singolarità
3) calcolo residuo

} al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$

1) se in polo è al massimo di ordine 3

$\sin w = \sum \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} w^{2k+1}$

$$f(z) = \frac{1}{z^3}\left[\sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \alpha^{2k+1} z^{4k+2} - z^2\right] =$$

$$= \frac{1}{z^3}\left[(\alpha-1)z^2 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\alpha^{2k+1} z^{4k+2}\right]$$

$$= \frac{\alpha-1}{z} + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\alpha^{2k+1} z^{4k-1}$$ sviluppo di Laurent in 0

olomorfa perché tutte z a potenze positive

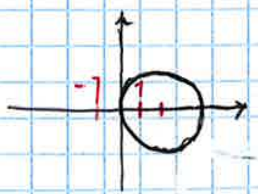
2) se $\alpha = 1 \Rightarrow 0$ è una singolarità eliminabile
se $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ il termine è presente $\Rightarrow$ polo semplice

3) $Res_0(f) = \alpha - 1$

Res è coeff del grado -1 quindi se avessi avuto $\frac{\alpha-1}{z^2}$ il residuo era 0

- γ circonferenza centrata in z 2 e raggio 2 (percorsa in senso antiorario)

Calcolare $\int_\gamma \frac{z e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz$ $\leftarrow f$



f è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$

$\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$\gamma(t) = 2 + 2e^{it}$

$$\int_\gamma \frac{z e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz = 2\pi i \, Res_1\left(\frac{z e^{iz}}{(z^2-1)^2}\right)$$ solo il punto che sta dentro la circonferenza

$$\frac{z e^{iz}}{(z^2-1)^2} = \frac{z e^{iz}}{(z-1)^2 (z+1)^2}$$

$$Res_1\left(\frac{z e^{iz}}{(z^2-1)^2}\right) = \frac{d}{dz} \frac{z e^{iz}}{(z+1)^2}\Big|_{z=1}$$

polo doppio (derivo e valuto in 1)
polo semplice (valuto in 1)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 287 di 422

- $f(z) = 3 - |z|^2$ → non è un polinomio
è derivabile

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$z = x + iy$

$|z|^2 = x^2 + y^2$

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ $\quad u, v \in C^{\infty}$

$u(x,y) = 3 - x^2 - y^2$
$v(x,y) = 0$

$$C.R \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} & -2x = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} & -2y = 0 \end{cases}$$

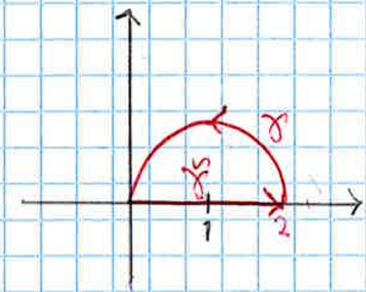
$\Rightarrow (0,0)$ è l'unico punto dove la funzione è ~~deriv~~ olomorfa

- integrali

$f : \Omega \to \mathbb{C}$

$\gamma : [a,b] \to \Omega$

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$



$\int_{\gamma} e^z\,dz \qquad \gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$

$\gamma(t) = e^{it} + 1$ → semicirconferenza di raggio 1 centrata in 1

Con la formula non so farlo

Chiudo il cammino con $\tilde{\gamma}$ $\quad \tilde{\gamma}(s) = s \;,\; s \in [0, 2]$

$$\Rightarrow \int_{\gamma + \tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\gamma} + \int_{\tilde{\gamma}} = 0 \quad \text{per C-G} \quad (f \text{ è olomorfa}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} = -\int_{\tilde{\gamma}} e^z\,dz = -\int_0^2 e^s\,ds = -e^s\Big|_0^2 = 1 - e^2$$

5) $X_1 \; X_2 \; X_3$

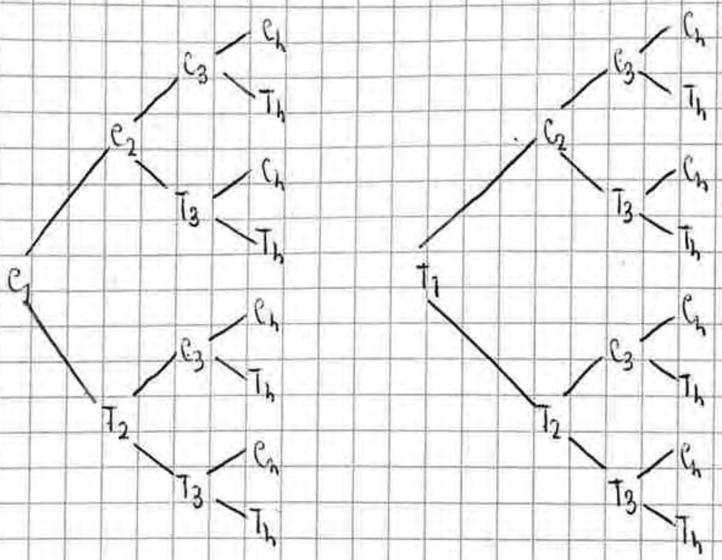
7 scelte per X_1 — passo 1: 7 scelte possibili
2 scelte per X_2 — passo 2: 2 scelte possibili
8 scelte per X_3 — passo 3: 8 scelte possibili

\# possibili prefissi $= 7 \cdot 2 \cdot 8 = 112$

\# prefissi con $\cancel{X_1 \neq b}$ $(X_1 = b) = 1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$

- Probabilità condizionate:

3) esperimento: 4 lanci di una moneta equilibrata



	(A)	(B)	(A∩B)
1) (C_1, C_2, C_3, C_4)			
2) (C_1, C_2, C_3, T_4)			
3) (C_1, C_2, T_3, C_4)			
4) (C_1, C_2, T_3, T_4)	← 1		
5) (C_1, T_2, C_3, C_4)			
6) (C_1, T_2, C_3, T_4)	← 2		
7) (C_1, T_2, T_3, C_4)	← 3		
8) (C_1, T_2, T_3, T_4)			
9) (T_1, C_2, C_3, C_4)		← 1	
10) (T_1, C_2, C_3, T_4)	← 4	← 2	← ①
11) (T_1, C_2, T_3, C_4)	← 5	← 3	← ②
12) (T_1, C_2, T_3, T_4)		← 4	
13) (T_1, T_2, C_3, C_4)	← 6	← 5	← ③
14) (T_1, T_2, T_3, C_4)		← 6	
15) (T_1, T_2, T_3, T_4)		← 7	
16) (T_1, T_2, C_3, T_4)		← 8	

$P(A) = \frac{6}{16}$

$P(B) = \frac{8}{16}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{48}{16^2}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{8}{16}} = \frac{3}{8} = \frac{6}{16} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{ok!}$$

⇒ A e B sono indipendenti

4) 300 persone
170 T, 90 I, 40(T+I)

A = "parla tedesco" $\quad$ A∩B = "~~poco~~ parla inglese e tedesco"
B = "parla inglese"

$$\cancel{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{40}{300}}{\frac{90}{300}} = \frac{4}{9}}$$

B = "parla inglese = parla inglese oppure parla inglese e tedesco"

$$\Rightarrow P(B) = \underbrace{\frac{90}{300}}_{\text{solo inglese}} + \underbrace{\frac{40}{300}}_{\text{inglese + tedesco}} = \frac{130}{300}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{40}{130} = \frac{4}{13}$$

Risultato attendibile perché $P(A) > P(B)$
con la reintroduzione delle carte, ho più probabilità di pescare 3 figure!

- Teorema delle probabilità totali
$\{A_1, \dots A_n\}$ partizione di Ω

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B | A_i)$$

52 carte
♡ 13 → 3
◇ 13 → 3
♤ 13 → 3
♧ 13 → 3

~~1) esp. estrazione di tre carte da 52.~~
~~→ A = escono tre figure dello stesso seme separato (REINT. CARTE)~~

~~Considero la seguente partizione di Ω~~
~~A_1 = esce una figura di X alla prima estrazione~~
~~A_2 = esce una figura di X alla seconda estrazione~~
~~A_3 = esce una figura di X alla terza estrazione~~

Considero i seguenti eventi:
A_1 = esce una figura di X alla prima estrazione
A_2 = " " seconda "
A_3 = " " terza "

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{12}{52} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{3^3}{12^3} \cong 0{,}016$$

→ B = escono tre figure dello stesso seme (SENZA REINTRODUZIONE CARTE)

$$P(B) = P\big((B_{1,1} \cap B_{1,2} \cap B_{1,3}) \cup (B_{2,1} \cap B_{2,2} \cap B_{2,3}) \cup \dots \cup (B_{4,1} \cap B_{4,2} \cap B_{4,3})\big) =$$

B_{ij} = esce una figura del seme i (1 = cuori, 2 = ...) all'estrazione j

$\cancel{\Rightarrow P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B}$

$\Rightarrow P(B) = 4 \cdot P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

B_1 = esce 1 ~~seme di~~ figura di ♡ all'estrazione 1
B_2 = " 2 → eventi dipendenti
B_3 = " 3

$$P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) \cdot P(B_3 | B_1 \cap B_2) = \frac{12}{52} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cong 0{,}0032$$

~~⇒ P(B) ≅ 0,01 =~~

$$\Rightarrow P(B) = 4 \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{11} = \frac{2}{13} \cdot \frac{1}{11} \cong 0{,}01$$

~~Risultato attendibile perché P(A) > P(B)~~

~~→ C = escono due figure ed un asso (indipendentemente dall'ordine)~~
~~• SENZA REINTRODUZIONE CARTE~~

$P(C) = P(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$

~~C_1 = esce 1 figura alla prima estrazione~~
~~C_2 = " seconda "~~
~~C_3 = esce 1 asso alla terza estraz.~~

$$P(C) = \cancel{\frac{12}{52} \cdot \frac{11}{51} \cdot \frac{4}{50}} \quad \frac{12}{52} \cdot \frac{12}{52} \cdot \frac{4}{52} \cong 0{,}0041$$

~~Formato~~

8) esp: apro un cofanetto a caso ed estraggo un anello a caso

cofanetto 1 = 2 oro + 1 arg
2 = 1 oro + 3 arg
3 = 0 oro + 2 arg

A = esce un'oro
A_1 = apro il cofanetto 1
A_2 = " 2
A_3 = " 3
} A_1, A_2, A_3 partizione di Ω

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)\, P(A|A_i) =$$

$P(A|A_i)$ = probabilità che esca un oro sapendo che ho aperto i

$$= P(A_1)\cdot P(A|A_1) + P(A_2)\, P(A|A_2) + P(A_3)\cdot P(A|A_3) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{0}{2} = \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{8+3}{36} = \frac{11}{36}$$

~ Formula di Bayes

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\,P(B|A_i)}{\underbrace{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\, P(B|A_j)}_{P(B)}}}, \{A_1, \dots, A_n\} \text{ partizione di } \Omega$$

9) urna 1: 2r, 2b, 2v
2: 1r, 4b, 1v

esperimento = scelgo un'urna e faccio due est. con reimbussolamento.

→ A = estraggo dall'urna 1 sapendo che la prima palla estratta è verde
⇒ B = estraggo 1 verde
A_1 = estraggo dall'urna 1, A_2 = estraggo dall'urna 2

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1|B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(A_1)\,P(B|A_1) + P(A_2)\,P(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{12}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{12}{3} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$P(A_1) = \frac{1}{2}$ (urne indistinguibili)

$P(B|A_1) = \frac{2}{6}$ (estraggo 1 verde dall'urna 1)

$P(A_2) = \frac{1}{2}$

$P(B|A_2) = \frac{1}{6}$ (estraggo 1 verde dall'urna 2)

→ ~~B~~ A = estraggo una palla bianca alla seconda estrazione, sapendo che la prima palla estratta è bianca

~~calcolo prima la probabilità dei seguenti eventi:~~
~~A_1 = estraggo da urna 1~~
~~A_2 = estraggo da urna 2.~~

~~So che si è verificato B = la prima palla estratta è bianca~~

~~⇒ P(A~~