NUMERO: 1741.2A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Loverre Michele

MATERIA: Metodi matematici per l'ingegneria, Appunti - prof. Fagnani, Pellerey

METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA - 10 CFU — 03-03-2015

prof. Fabio Fagnani - Umberto Battisti — AC Analisi

prof. Franco Pellerey — P Probabilità — Ricevimento 610 15:00 - 17:00

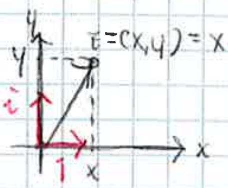
MAR - Fagnani 14:30 - 16:00
MER - Pellerey 10:00 - 11:30 11:30 - 13:00
VEN - Fagnani

Analisi { ~~...~~ analisi complessa (calcolo integrali), distribuzioni, trasformate (segnali)

ANALISI COMPLESSA

- Introduzione: numeri complessi

piano di Gauss



$i = (0,1)$ unità imm.
$1 = (1,0)$ unità reale
$x = \mathrm{Re}\, z$
$y = \mathrm{Im}\, z$

$\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$z = (x,y) \to$ num. complesso
se $x = 0 \Rightarrow z = (0,y)$ immaginari puri
se $y = 0 \Rightarrow z = (x,0)$ numero reale

- Richiami sui numeri complessi e complementi (1)

• punti nel piano C oppure come vettori con origine in (0,0)? Noi si usa la rappresentazione con le coordinate cartesiane

• somma e prodotto

$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
$z_2 = x_2 + iy_2$

per prodotto $\Rightarrow$ impongo $i^2 = -1$

$$\underset{z}{z_1 \cdot z_2} = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + i^2 y_1y_2 = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{\mathrm{Re}\, z} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\mathrm{Im}\, z}$$

$(\mathbb{C}, \cdot, +)$ è un campo: campo dei numeri complessi

• coniugato

$z = x + iy \to \bar{z} := x - iy$ (è il simmetrico z, rispetto l'asse x)

• modulo

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ lunghezza vettore

Osservo:

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \qquad \to z \cdot \bar{z} = |z|^2 \leftarrow \qquad z \cdot \bar{z} = |z|^2 \to z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$

Quindi se $z \neq 0 \Rightarrow z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \Rightarrow$ per def di reciproco $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \to \boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$

esempio: $\frac{1+i}{1-i} = (1+i)\frac{1}{1-i} \to$ reciproco di $1-i$

$(1-i)^{-1} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \rightsquigarrow$

Ricorda:
$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$
$\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

$= (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = i$

Proprietà:

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ dis. triangolare
$|z_1 z_2| \le |z_1|\,|z_2|$

$\rightsquigarrow$ Quindi:
somma $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$
prodotto: $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + y_1x_2)$

$\Rightarrow (x,0) + (0,y) = (x,y) \Rightarrow (x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0)$
$(0,1)(y,0) = (0,y)$

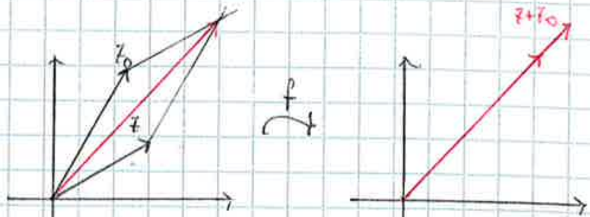
- forma cartesiana o algebrica: $\boxed{z = x + iy}$

- funzioni definite su $\mathbb{C}$ = introduzione con un esempio

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ o definite su un sottoinsieme

~~$f(z) = \gamma z + z_0$ dove γ e z_0 sono elementi di $\mathbb{C}$ fissati.~~

il grafico di f vive in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ ~~$\neq \mathbb{R}^4$~~



esempio: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f(z) = \gamma z + z_0$

dove γ e z_0 sono elementi di $\mathbb{C}$ fissati

CASI PARTICOLARI:

→ $\gamma = 1 \Rightarrow f(z) = z + z_0$ sommo $z + z_0$ con la regola del parallelogramma

$\Rightarrow$ traslazione nel piano

→ $z_0 = 0 \Rightarrow f(z) = \gamma z$

$z = \rho e^{i\theta}$, $\gamma = r e^{i\varphi}$

$f(z) = \rho r e^{i(\theta+\varphi)} \Rightarrow$
- $r = 1 \Rightarrow |\gamma| = 1 \Rightarrow$ moltiplicazione per $\gamma \Rightarrow$ rotazione di z di un angolo φ in senso antiorario $\Rightarrow f$ è una rotazione pura
- $r \neq 1 \Rightarrow$ rotazione + amplificazione $(r>1)$ o contrazione $(r<1)$ $\Rightarrow f$ è una ROTOOMOTETIA → OMOTOPIE

~~se $\gamma = 1$ cioè $|\gamma| = 1$~~

FUNZIONI DI VARIABILE COMPLESSA

06.03.2015

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

il dominio e il codominio sono bidimensionali ⇝ $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$

il grafico di f vive in $\mathbb{R}^4$

Riprendendo l'esempio precedente:

$f(z) = \gamma z + z_0$

$z \mapsto \gamma z \mapsto \gamma z + z_0$ rotoomotetia + traslazione

Se $|\gamma| = 1$ sto combinando una rotazione con una traslazione

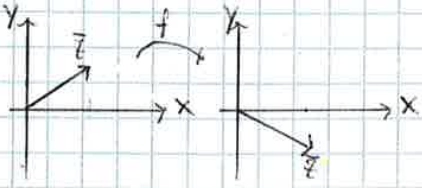
le trasformazioni così ottenute sono isometrie (trasf rigide) in quanto non cambiano le distanze tra punti di $\mathbb{C}$.

problema: mostrare che una qualunque rotazione in $\mathbb{C}$ attorno ad un centro qualunque w si può sempre scrivere come $f(z) = \gamma z + z_0$ per opportuni $|\gamma| = 1$, $z_0 \in \mathbb{C}$

ci sono altre isometrie in $\mathbb{C}$ che invece non possono essere rappresentate in questa forma? NO

es: $f(z) = \bar{z}$ → riflessione rispetto l'asse x

questa trasformazione non si può scrivere nella forma $f(z) = \gamma z + z_0$



- notazioni sulle funzioni

Data una funzione $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in generale si può rappresentare introducendo le coordinate cartesiane nel dominio e nel codominio: $z = x + iy$

$f(z) = u + iv$ u, v dipendono da z

z dipende da x, y

(Studiare una funzione di variabile complessa z come studiare due funzioni di variabili reali)

$\Rightarrow$ u, v dipendono dalla coppia (x, y)

$\begin{cases} u = u(x,y) \to \text{tipiche funzioni di An II} \\ v = v(x,y) \end{cases}$

$u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$

$v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- scrivo $f(z)=z^2$ in coordinate cartesiane
  $z = x+iy$
  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$z^2 = (x+iy)(x+iy) = x^2 + (iy)^2 + 2xiy = x^2 - y^2 + i\,2xy \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^2-y^2 \\ v(x,y) = 2xy \end{cases}$

- $f(z) = \frac{1}{z}$
  → non è definita su tutto il piano complesso
  $z \neq 0$

se do in pasto una retta o una circonferenza questi vengono trasf in rette o circonferenze (non necessariamente retta → retta e circonferenza → circonferenza)

$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$

Tutte le funzioni razionali del tipo $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ hanno le seg proprietà:

① trasformano rette e cerchi in rette e cerchi (in senso generale)
① mantengono gli angoli tra vettori
Si dicono trasformazioni CONFORMI
(si può dimostrare: prova!?)

- funzione esponenziale (esponenziale complesso)
  $f(z) = e^z = u(x,y) + iv(x,y)$
  $z = x+iy$

$f(z) = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ → definizione!
$= e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) =$
$= e^x \cos y + i\,e^x \mathrm{sen}\,y \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y \\ v(x,y) = e^x \mathrm{sen}\,y \end{cases}$

l'esponenziale complesso gode delle seguenti proprietà *vale anche $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$?
1) $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
2) $e^0 = 1$
3) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Tutte le formule trigonometriche derivano da queste proprietà dell'esponenziale complesso

ELEMENTI DI TOPOLOGIA SUL PIANO COMPLESSO

Esempi:
$f_1(z) = \frac{1}{z}$ $f_1 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$
$f_2(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ $f_2 : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$

→ togliere un punto al piano complesso è più complicato che togliere un punto ad $\mathbb{R}$

I domini naturali di def. delle funzioni di variabile complessa sono molto vari e non facilmente riconducibili ad un oggetto base come lo è invece l'intervallo su $\mathbb{R}$.

→ $z_0 \in \mathbb{C}$, $A \subseteq \mathbb{C}$
Insiemistica: $z_0 \in A$
$z_0 \notin A$

Topologico: 1)
2)
3)

Def: Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$
$B_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ = cerchio aperto di centro z_0 e raggio r = palla aperta
= intorno aperto centrato in z_0 e raggio r

→ Definizioni:

- $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice aperto se $A = \mathring{A}$
- $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice chiuso se $\partial A \subseteq A$

esempi: $\mathbb{C}, \emptyset, B_r(z_0), \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ sono aperti → $\mathbb{C}, \emptyset$ sono sia aperti che chiusi +

$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\, z \geq 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ sono chiusi

$A^* = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\, z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\, z = 0, \text{Re}\, x > 0\}$

$\mathring{A} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\, z > 0\}$

$\partial A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}\, z = 0\}$

$\mathring{A^c} =$

A non è né chiuso, né aperto

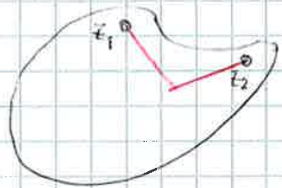
- chiusura di A: ~~$\bar{A} = \mathring{A} = \mathring{A} \cup \partial A$~~ $\bar{A} = A \cup \partial A$

Quindi A è chiuso $\Leftrightarrow A = \bar{A}$

- Proprietà:
  1) A aperto $\Leftrightarrow A^c$ chiuso
  2) A, B aperti $\Rightarrow A \cap B$ e $A \cup B$ sono aperti
  3) A, B chiusi $\Rightarrow A \cap B$ e $A \cup B$ sono chiusi
  4) $\mathring{A}$ è sempre aperta → l'operazione di parte interna è INDEPOTENTE : $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$
  5) $\bar{A}$ è sempre chiusa → l'operazione di chiusura è INDEPOTENTE $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

- dominio

$A \subseteq \mathbb{C}$ si dice DOMINIO se è aperto e connesso (presi z_1 e $z_2 \in A$ esiste sempre una spezzata lineare che collega z_1 e z_2 interamente contenuta in A)



- regione

$A \subseteq \mathbb{C}$ si dice REGIONE se si può ottenere da un dominio, eventualmente aggiungendo una parte della frontiera

(le regioni saranno per noi gli equivalenti degli intervalli)

→ I domini sono regioni

→ Il semipiano chiuso è una regione

→ A (dell'esempio) è una regione *

Il cuore di una regione deve essere una parte interna quindi se $\mathring{A} = \emptyset \Rightarrow A$ non è regione

esercizio: $A = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$ A è una regione?

$\mathring{A} =$

$\partial A =$

$\mathring{A^c} =$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 174

- Teorema di Jordan

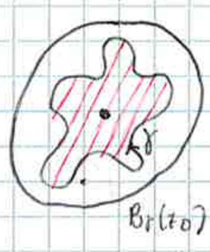
Enunciato: data una curva di Jordan γ, l'insieme $\mathbb{C} \setminus \text{supporto}(\gamma)$ è aperto e sconnesso.
Più precisamente esistono due domini D_1 e D_2 uno limitato e uno no, tali che $\mathbb{C} \setminus \text{supporto}(\gamma) = D_1 \cup D_2$
Il dominio limitato si dice la parte interna di γ e indicato con $\text{Int}(\gamma)$

- semplicemente connesso

una regione $R \subseteq \mathbb{C}$ si dice semplicemente connessa se $\forall \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ di Jordan, con $\text{supporto}(\gamma) \subseteq R$, si ha $\text{Int}(\gamma) \subseteq R$

esempi:
- $\mathbb{C}$, $B_r(z_0)$ sono semplicemente connessi
- $R = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ non è semplicemente connesso (piano bucato)

Infatti $\text{Int}\,\gamma = B_r(z_0)$
$z_0 \in \text{Int}\,\gamma$ ma $z_0 \notin R$

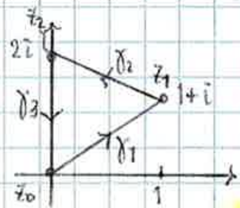


Operativamente, una regione è semplicemente connessa se ogni cappio può essere sciolto senza uscire da R

* parametrizzazione di una curva e della sua inversa
Supponiamo di conoscere $\gamma(t)$, $t \in [a,b]$ $\Rightarrow$ la sua inversa sarà $\underset{-\gamma(t)}{\underset{\parallel}{\gamma(a+b-t)}}$, $t \in [a,b]$

Esercizio

- parametrizzare la curva che ha come supporto il triangolo in figura:



$\cancel{\gamma(t) =}$

$\gamma_1(t) = z_0 + t(z_1 - z_0) = 0 + t(1+i-0) = t(1+i), \quad t \in [0,1]$
$\gamma_2(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = 1+i + t(2i-1-i) = 1+i+t(i-1), \quad t \in [0,1]$
$\gamma_3'(t) = ti, \ t \in [0,2]$ è la curva γ_3 percorsa in senso inverso
$\Rightarrow \gamma_3(t) = \gamma_3'(a+b-t) = \gamma_3'(2-t) = (2-t)i, \ t \in [0,2]$

$$\Rightarrow \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = t(1+i) & t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) = 1+i+t(i-1) & t \in [0,1] \\ \gamma_3(t) = (2-t)i & t \in [0,2] \end{cases}$$

CONTINUITÀ

- Definizione:

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ regione, $z_0 \in \Omega$ e sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$
f si dice continua in z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ ovvero
$$\begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow u$ e v sono continue in (x_0,y_0)
$\Rightarrow$ la continuità di f in z_0 è equivalente alla continuità di u e v in (x_0,y_0)

Osservazione: polinomi, funzioni razionali, esponenziale, trigonometriche, ..., sotto e loro composizioni sono continue, ove definite

DERIVABILITÀ

- Definizione:

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $f: D \to \mathbb{C}$
Si dice che f è derivabile in z_0 se esiste $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

Tale limite se esiste si indica con $f'(z_0)$ e si chiama derivata di f in z_0

(Come nel caso reale, valgono le usuali regole di derivazione)

Osservazione: polinomi, esponenziali, ..., sono derivabili dove definite

? Si può leggere la derivabilità di f sulle componenti di u e v?

- Richiami

- differenziabilità:

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ dominio, $(x_0,y_0) \in D$, $u: D \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ si dice che u è differenziabile nel punto (x_0,y_0) se $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\boxed{u(x,y) = u(x_0,y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)}$$

Inoltre se ciò accade, necessariamente si ha:
$$\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$$
$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Osservazione: u, v di classe C^1 su $D \Rightarrow u, v$ differenziabili ~~su D~~ su D

Quindi, ritornando a f di variabili complessa

- f derivabile in $z_0 \overset{?}{\Leftrightarrow} u, v$ differenziabili in (x_0,y_0) $\rightsquigarrow$ la risposta sarà NO

Si osserva che:
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0) = o(z-z_0)$ per $z \to z_0$

$\Rightarrow$ la derivabilità è equivalente alla scrittura $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + o(z-z_0)$ per $z \to z_0$
(ovvero lo sviluppo del primo ordine con il resto di Peano)

$\Rightarrow$ condizioni di Cauchy-Riemann (CR) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$

Teorema

Sia $f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Sono fatti equivalenti

1) f è derivabile in z_0

2) u, v differenziabili in (x_0,y_0) e valgono le condizioni di CR

(vale in un punto)

Inoltre

$\boxed{f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)}$ $\to$ equivalente a $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$

Infatti $\mathrm{Re}\, f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)$ e $\mathrm{Im}\, f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \Rightarrow f'(z_0) = \mathrm{Re}\, f'(z_0) + i\,\mathrm{Im}\, f'(z_0)$

Osservazione: abbiamo dimostrato ① $\Rightarrow$ ②

Per mostrare ② $\Rightarrow$ ① basta ripercorrere indietro la sequenza di equivalenze che avevamo derivato.

Noto che:

$$\begin{cases} u(x,y) = u(x_0,y_0) + \mathrm{Re}\, f'(z_0)(x-x_0) - \mathrm{Im}\, f'(z_0)(y-y_0) + \underbrace{o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)}_{= \omega_1(x,y)} \\ v(x,y) = v(x_0,y_0) + \mathrm{Re}\, f'(z_0)(y-y_0) + \mathrm{Im}\, f'(z_0)(x-x_0) + \underbrace{o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)}_{= \omega_2(x,y)} \end{cases}$$

In termini matriciali

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, f'(z_0) & -\mathrm{Im}\, f'(z_0) \\ \mathrm{Im}\, f'(z_0) & \mathrm{Re}\, f'(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1(x,y) \\ \omega_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, f'(z_0) & -\mathrm{Im}\, f'(z_0) \\ \mathrm{Im}\, f'(z_0) & \mathrm{Re}\, f'(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix} = J_f(x_0,y_0)$$ $\to$ Jacobiano

$\Rightarrow \det J(x_0,y_0) = \mathrm{Re}\, f'(z_0)^2 + \mathrm{Im}\, f'(z_0)^2 = |f'(z_0)|^2 \geq 0$

$\Rightarrow$ Se f è derivabile $\Rightarrow \det J_f \geq 0$

$\Rightarrow$ tutte le trasformazioni caratterizzate da uno Jacobiano con det ≥ 0 sono derivabili.
Per questo il coniugato non è derivabile
In generale, le riflessioni hanno determinante negativo e dunque non sono derivabili

• ~~$f(z)=e^z$ → esercizio~~

Osservazione: i polinomi, esponenziali, ... e tutte le loro composizioni sono olomorfe dove definite

FUNZIONI ARMONICHE

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ = laplaciano o operatore di laplace

- Definizione

Sia D un dominio e $f: D \to \mathbb{R}$

f è armonica se è di classe C^2 su D e tale che $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \forall (x,y) \in D}$ → eq di laplace

esempio:

• $u(x,y) = a + bx + cy$ è armonica su tutto $\mathbb{R}^2$ (le funzioni lineari sono armoniche.

infatti $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

• $u(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow 2a + 2b = 0 \Leftrightarrow a = -b$

⇒ ogni polinomio di grado 2 omogeneo del tipo $u(x,y) = a(x^2 - y^2) + cxy$ è armonico.

Osservazione: se $u_1, u_2 \ D \to \mathbb{R}$ sono armoniche allora anche la loro combinazione lineare lo è $(u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)$

Verifica:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right)$$

$$= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}}$$

- relazione tra funzioni armoniche e olomorfe

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ e $f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa (dunque valgono le condizioni di CR)

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $z = x + iy$

Ipotizzo che u e v siano di classe C^2 (vedremo che: segue direttamente dal fatto che f è olomorfa)

Derivo le condizioni di CR:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$

vale il th di Schwartz perchè $v \in C^2$

⇒ u è armonica su D

Similmente si dimostra che anche v è armonica su D

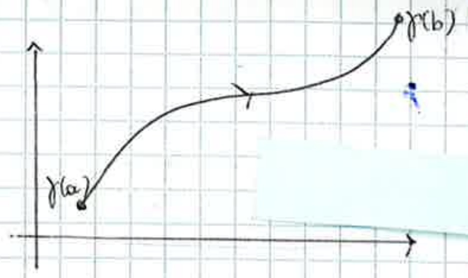
⇒ u,v armoniche su D

⇒ $\boxed{f: D \to \mathbb{C} \text{ è olomorfa} \Rightarrow \text{le sue componenti cartesiane sono armoniche su D}}$ → Teorema

esempio:

• e^z olomorfa $\Rightarrow \begin{cases} e^x \cos y \\ e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$ sono armoniche

INTEGRALI SU CURVE



Curve su cui integriamo: = curve regolari
$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$, C^1 a tratti

In ~~componenti~~ coordinate cartesiane:
$\gamma(t) = x(t) + i y(t) = (x(t), y(t))$

$\gamma'(t) = x'(t) + i y'(t)$
$\downarrow$
- interpretazione geometrica = vettore tangente
- interpretazione fisica = vettore velocità (che è sempre tangente alla sua traiettoria)

esempio:
- $\gamma(t) = Re^{it} = R\cos t + iR\sin t$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\text{circonferenza di raggio } R \quad Re^{it} \quad t\in[0,2\pi)}$
$\gamma'(t) = -R\sin t + iR\cos t = i\gamma(t)$

$\to$ il prodotto per i ruota di $\frac{\pi}{2}$ e quindi si ha un vettore tangente

- integrale
se $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$
$$\Rightarrow \int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt$$

valgono le usuali proprietà degli integrali

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \int_a^b (\lambda_1 \gamma_1(t) + \lambda_2 \gamma_2(t))\,dt = \lambda_1 \int_a^b \gamma_1(t)\,dt + \lambda_2 \int_a^b \gamma_2(t)\,dt \\ 2)\ \int_a^b \gamma'(t)\,dt = \gamma(b) - \gamma(a) \to \text{th fondamentale del calcolo integrale} \\ 3)\ \left|\int_a^b \gamma(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |\gamma(t)|\,dt \end{array}}$$

esempio:
- $\gamma(t) = e^{i\alpha t}$ ~~$\alpha\in\mathbb{R}$~~
$= \cos(\alpha t) + i\,\text{sen}(\alpha t), \quad \alpha\in\mathbb{R}$

$\to \gamma'(t) = i\alpha e^{i\alpha t}$
$=$ ~~$\alpha\cos$~~

$$\to \int_a^b e^{i\alpha t}\,dt = \frac{1}{i\alpha}\int_a^b i\alpha e^{i\alpha t}\,dt = \frac{1}{i\alpha}e^{i\alpha t}\Big|_a^b = \frac{1}{i\alpha}\left(e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}\right)$$

- richiamo: integrale di linea di $\bar{F}$ lungo γ
$D\subseteq\mathbb{R}^2$ dominio, $\gamma: [a,b]\to D$ curva regolare, $\bar{F}: D\to\mathbb{R}^2$ campo continuo
$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$
$\bar{F}(x,y) = (\alpha(x,y), \beta(x,y))$ α, β continue $\to$ un campo è una funzione che ad ogni punto del dominio associa un vettore

$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma \bar{F}(x,y)\,d\bar{l} := \int_a^b \left(\alpha(x(t),y(t))\,x'(t) + \beta(x(t),y(t))\cdot y'(t)\right)dt}$$
$\to$ integrale del campo lungo la curva
= lavoro del campo $\bar{F}$ su un corpo che si sposta seguendo γ. (con eq. oraria data γ)

- Proprietà dell'integrale

1) linearità rispetto a $f(z)$ (segue immed. dalla corrispondente proprietà dell'integrale di R.)

$f_1, f_2 : D \to \mathbb{C}$ continue e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \int_\gamma (\lambda_1 f_1(z) + \lambda_2 f_2(z))\, dz = \lambda_1 \int_\gamma f_1(z)\, dz + \lambda_2 \int_\gamma f_2(z)\, dz$

2) additività rispetto alla concatenazione dei cammini $(\gamma_1 \vee \gamma_2)$ (segue dall'additività dell'int di Riemann)

$f : D \to \mathbb{C}$ continua

$\gamma_1 : [a,b] \to D$ e $\gamma_2 : [b,c] \to D$ curve regolari tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

$\Rightarrow \int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$

3) invarianza rispetto alla riparametrizzazione.

$f : D \to \mathbb{C}$ continua

$\gamma : [a,b] \to D$ regolare e $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ C^1 e strettamente crescente

$\Rightarrow \int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$

es. riparametrizzazione:

~~$\gamma(t) = e^{it}$~~

$\gamma(t) = e^{2\pi i t}$ $t \in [0,1]$ $\to$ curva di Jordan

$\alpha : [0,1] \to [0,1]$

$\alpha(s) = s^2 \to$ parabola

$\Rightarrow (\gamma \circ \alpha)(s) = \gamma(\alpha(s)) = e^{2\pi i s^2}$

$\Rightarrow$ stesso supporto di $\gamma(t)$

è cambiata la velocità di percorrenza dello stesso supporto

$\Rightarrow$ riparametrizzare significa cambiare la velocità di percorrenza e ciò non influisce nel calcolo dell'integrale

α è strettamente crescente per far sì che il verso di percorrenza sia lo stesso

- Dimostrazione (prop. 3)

$\int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot (\gamma \circ \alpha)'(s)\, ds =$

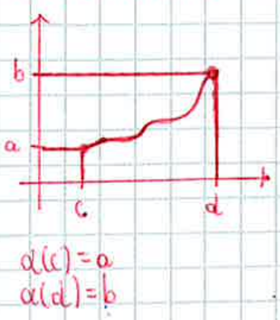
$= \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \gamma'(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)\, ds =$

$\gamma : [a,b] \to D$

$\alpha : [c,d] \to [a,b]$

$\gamma \circ \alpha : [c,d] \to D$

α è s. crescente



$\to$ opero la sostituzione $\alpha(s) = t$, $dt = \alpha'(s)\, ds$ $\to$ inoltre - se $t = c \Rightarrow \alpha(s) = \alpha(c) = a$; $t = d \Rightarrow \alpha(s) = \alpha(d) = b$

$= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f(z)\, dz$

$\alpha(c) = a$

$\alpha(d) = b$

$\Rightarrow \int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$

Osservazione:

- se $\alpha(t)$ è st. crescente $\Rightarrow \alpha'(t) > 0 \Rightarrow \int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$

- se $\alpha(t)$ è st. decrescente $\Rightarrow \alpha'(t) < 0 \Rightarrow \int_{\gamma \circ \alpha} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 174

$\Rightarrow \int_{\gamma \vee \tilde{\gamma}} f(z)\,dz = 0$ per il th precedente

D'altra parte: $\int_{\gamma \vee \tilde{\gamma}} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\tilde{\gamma}_1} f(z)\,dz$

$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz \overset{\circ}{=} -\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz$ la parametrizzazione non cambia l'integrale

$\Rightarrow \int_{\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\,dz = -\int_0^1 \left(-\frac{1}{1+\pi} + t\left(1+\frac{1}{1+\pi}\right)\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{1+\pi}\right) dt = \dots$ calcoli

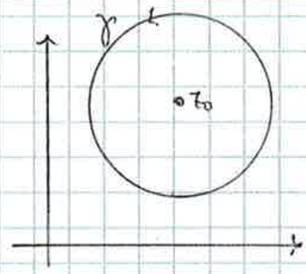
Conclusione: ogni volta che devo integrare una funzione olomorfa, posso sostituire un cammino con un altro più facile seguendo la procedura vista nell'esempio precedente, ovvero chiudendo la curva "difficile" con una curva più facile, e applicando il th di Cauchy-Goursat, concludo che l'integrale lungo la curva più difficile è uguale all'opposto dell'integrale sulla curva più facile.

• esempio:

$\gamma(t) = Re^{it} + z_0, \quad t \in [0, 2\pi)$

$f(z) = (z - z_0)^k$

$k \geq 0$



$\Rightarrow \int_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz = 0$ per th di Cauchy-Goursat.

E se $k<0$? $(k<0 \Rightarrow (z-z_0)^k$ non è olomorfa in $z_0) \Rightarrow$ non applico C-G!

$$\int_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz = \int_0^{2\pi} (Re^{it})^k\, Ri\,e^{it} = R^{k+1} \cdot i \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}\,dt = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } k=-1 \\ R^{k+1} \cdot i \frac{1}{i(k+1)} e^{i(k+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{se } k \neq -1 \end{cases}$$

quindi, generalizzando $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\int_{\gamma} (z-z_0)^k\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } k = -1 \end{cases}}$$

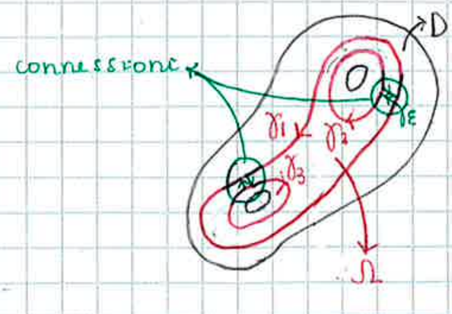
① la sua estensione è la formula di Cauchy [...]

se $\gamma(t) = Re^{it} + z_0$, $t \in [0, 2\pi]$ ovvero circonferenza centrata in $z_0 \in \mathbb{C}$, di raggio $R>0$ e percorsa in senso antiorario.

- **Teorema (estensione di Cauchy-Goursat)**

Sia $f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa
Sia $\Omega \subseteq D$ dominio con bordo tale che $\bar{\Omega} \subseteq D$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0}$$



Dimostrazione (idea):

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0$$

Per la dimostrazione, ci si riconduce al vecchio th di C-G dove ho ~~in so~~ una sola curva di Jordan.
Si fanno dei tagli sulle γ_i e si uniscono le varie curve.
La parte interna della nuova curva di Jordan è ancora contenuta in D.
Dunque riapplico il th di C-G

I tagli sono di misure esili (ε)
γ_ε è la nuova curva di Jordan con tagli di ampiezza $\varepsilon > 0$ e collegamenti tra le γ_i

$\Rightarrow \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$ per il teorema di Cauchy-Goursat

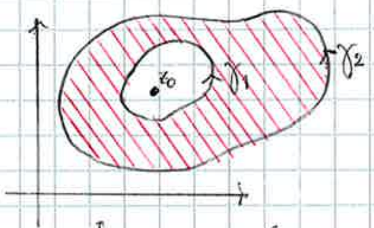
Per $\varepsilon \to 0$, $\gamma_\varepsilon \to \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \gamma_3 \vee$ curve di connessione
(non contribuiscono all'integrale perché sono percorse in sensi opposti)

- **Conseguenza del teorema di Cauchy-Goursat - corollario**

1) $f: \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa
Considero due curve di Jordan che circondano z_0 e non si intersecano ovvero:
→ $z_0 \in Int(\gamma_i)$ $i = 1,2$
→ supporto$(\gamma_1) \cap$ supporto$(\gamma_2) = \emptyset$ ⇝ da convenzione quando non dico niente, le curve di Jordan sono percorse in senso antiorario

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Dimostrazione:

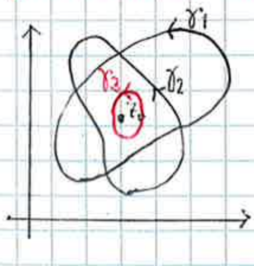


$\Omega = Int(\gamma_2) \cap Int(\gamma_1)^c = Int(\gamma_2) \setminus Int(\gamma_1)$

$\partial\Omega$ è parametrizzato con orientamento positivo dalle curve γ_2 e $-\gamma_1$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \Rightarrow \int_{\gamma_2} f(z)\,dz - \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$$

È importante il fatto che le curve non si intersechino per la dimostrazione fatta in questo modo.
Per dimostrare questo corollario per curve che si intersecano si considera una curva γ_3 più piccola che non interseca γ_1 e γ_2



~~Per dimostrare nel caso~~
Sia γ_3 curva più piccola.
Per il corollario precedente: $\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ se considero γ_1
$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ se considero γ_2

⇒ per la p. transitiva dell'uguaglianza

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

⇒ Se ho una f. olomorfa tranne in un punto, allora qualsiasi curva di Jordan che non contiene questo punto ha int nullo (C-G), se giro intorno a questa singolarità l'int è sempre lo stesso valore

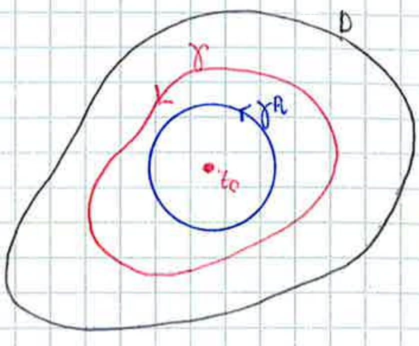
Posso quindi dimostrare la formula di Cauchy

10.04.2015

Enunciato:

D dominio semplicemente connesso
$f: D \to \mathbb{C}$ olomorfa
γ curva di Jordan in D (percorsa nel senso antiorario)
$z_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$

$$\Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$



Dimostrazione:
Non so com'è $\gamma \Rightarrow$ prendo una particolare curva di Jordan γ^R

$\gamma^R(t) = z_0 + Re^{it}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$
$\mathrm{supp}\,\gamma^R \subseteq \mathrm{Int}\,\gamma$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$ (conseguenza del th di C-G)

Lavoro dunque con γ^R

$$\int_{\gamma^R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\gamma^R} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \underbrace{\int_{\gamma^R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz}_{= I} \to \int_{\gamma^R} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\int_{\gamma^R}(z-z_0)^{-1}\,dz = f(z_0)\cdot 2\pi i$$

$$= f(z_0)\cdot 2\pi i + I$$

Si tratta ora di far vedere che $I=0$
I è un rapporto incrementale su una curva di Jordan
→ intuitivamente
$I=0$ perché se passiamo al limite per $z\to z_0$, la funzione integranda è una derivata.
Ma per il teorema ~~del calcolo~~ fondamentale del calcolo integrale, integrare una derivata significa fare $g(b)-g(a)$, ma essendo la curva chiusa, $g(b)-g(a)=0$ perché $g(b)=g(a)$

$$I = \int_{\gamma^R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$|I| \overset{\text{proposizione 1}}{\leq} \sup_{z\in \mathrm{supp}(\gamma^R)}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| L(\gamma^R) = \sup_{z\in\mathrm{supp}(\gamma^R)} |f(z)-f(z_0)|\cdot\frac{1}{R}\cdot 2\pi R$$

→ prendo $M = \sup\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$

$2\pi R \to L(\gamma^R)$

$\frac{1}{R} \to \sup_{z\in\mathrm{supp}(\gamma^R)}\left|\frac{1}{z-z_0}\right| = \frac{1}{R}$

$$= 2\pi \sup_{z\in\mathrm{supp}(\gamma^R)} |f(z)-f(z_0)|$$

Poiché f è sicuramente continua in z_0, fissato $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che ~~$|z-z_0|<\delta$~~

$|z-z_0|<\delta,\ z\in D \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ → def di continuità

Prendo $R<\delta$, allora $\forall z\in\mathrm{supp}(\gamma^R) \Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$
→ tanto scelgo io γ^R $\quad \Rightarrow \sup_{z\in\mathrm{supp}(\gamma^R)}|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

$\Rightarrow |I| \leq 2\pi\varepsilon$

$\Rightarrow$ data l'arbitrarietà di ε, $|I|=0$ necessariamente

$\Rightarrow I=0$.

⇝ Oss: la f. continua a valere se D non è semplicemente connesso. Basta che $\mathrm{Int}\,\gamma \subseteq D$.

$\Rightarrow$ la formula di Cauchy è dimostrata

Poichè $\frac{1}{z-w}$ è derivabile infinite volte, si può dimostrare che l'integrale a destra della formula di Cauchy è in realtà C^∞ in w e quindi lo è anche $f(w)$

Inoltre

→ derivando n volte $(-w)$ viene ~~vengono~~ n volte (-1)

$$\frac{d^n}{dw^n}(z-w)^{-1} = (-1)(-2)\dots(-n)(z-w)^{-n-1}(-1)^n \,{*} = \frac{n!}{(z-w)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}\,dz}$$ → formule di Cauchy generalizzate per le derivate

Allora poichè ~~f(t)=~~ per definizione f è analitica se $f(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

⇒ le funzioni olomorfe sono analitiche

* $(-1)(-2)\dots(-n)(-1)^n = n!$ infatti:

→ n pari ⇒ $(-1)(-2)\dots(-n)(-1)^n = n!(-1)^n = n!$

→ n dispari ⇒ $(-1)(-2)\dots(-n)(-1)^n = -n!(-1) = n!$

- esempio:
- $z \in \mathbb{C}, |z|<1$. Studiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ (serie geometrica)

$|z^n| = |z|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (p.prec.) (ciò non implica che $\sum z^n$ converge. Infatti, il criterio necessario di convergenza afferma che: $\sum z_n$ converge $\Rightarrow z_n \to 0, n\to+\infty$. Non vale sempre il viceversa. Vale invece che: $z_n \not\to 0$ $(n\to+\infty)$ $\Rightarrow \sum z_n$ NON converge)

Si nota ora che

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \to \frac{1}{1-z}$$

$\Rightarrow$ la serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ è convergente se $|z|<1$ e vale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \ \forall z \in \mathbb{C} : |z|<1$$

Ricorda che: vale la formula triangolare generalizzata: $\boxed{|\sum z_n| \leq \sum |z_n|}$

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k z^{2k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{iz^2}{2}\right)^k$. Pongo $w = \frac{iz^2}{2}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} w^k$. Tale serie converge $\Leftrightarrow |w| = \left|\frac{iz^2}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \sqrt{2}$ (Ricorda: $|i|=1$) converge nella palla di centro 0 e raggio $\sqrt{2}$

Quindi se $|z|<\sqrt{2}$ posso calcolarne la somma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k z^{2k}}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{iz^2}{2}} - (1)$$

$\rightarrow$ tolgo 1 perché la serie parte da 1, anziché da 0.

- serie di potenze

Sono serie del tipo: $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ dove } \{a_n\} \text{ è una successione in } \mathbb{C} \text{ e } z_0 \in \mathbb{C}}$

Le serie degli esempi precedenti sono serie di potenze:

$\rightarrow \sum z^n \Rightarrow z_0 = 0, \{a_n\} = 1$

$\rightarrow \sum \frac{i^k z^{2k}}{2^k} = \sum \frac{i^k}{2^k} z^k \cdot z^k \Rightarrow$ ~~$\frac{i^k}{2^k}$~~ $, z_0 = 0$ $\left\{\begin{array}{l} a_{2n+1} = 0 \\ a_{2n} = \frac{i^n}{2^n} \end{array}\right)$

- Teorema

Considero una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

Allora $\exists R \in [0,+\infty)$ tale che:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge assolutamente $\forall z \in (B_R(z_0))$ $\rightarrow$ il fatto che la convergenza si ha in una palla, anziché ~~che~~ in un intervallo è la sostanziale differenza con il caso ~~a~~ reale
- non converge se $|z-z_0| \geq R$

Inoltre se $\exists \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$ (se $a_n \neq 0, \forall n$) $\rightarrow$ criterio del rapporto per il calcolo del raggio di convergenza

R è detto raggio di convergenza
$B_R(z_0)$ è detto cerchio di convergenza

$\rightarrow R = +\infty \Rightarrow B_R(z_0) = \mathbb{C}$

$R = \sup\{|z| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ converge}\}$

$\Rightarrow f^{(k)}(z_0) = k(k-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot a_k$ → si annullano tutti i termini della serie perché $(z-z_0)^{n-k} = (z_0-z_0)^{n-k} = 0$ (perché sto calcolando in z_0).
L'unico termine però che resta è $(z-z_0)^{k-k} = 0^0 = 1$
$\Rightarrow$ se calcolo $f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=k}^{k} (n)(n-1)\ldots(n-k+1)(z_0-z_0)^{n-k} a_k = \sum_{n=k}^{k} k(k-1)\ldots 1\cdot a_k$

$\Rightarrow f^{(k)}(z_0) = k!\, a_k$

$$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$ → serie di Taylor di $f(z)$ centrata in z_0.

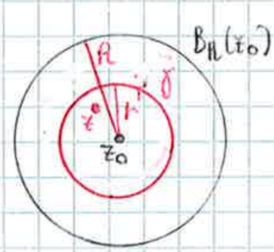
→ faccio vedere che le funzioni olomorfe sono somme di serie di potenza (che quindi sarà la sua serie di Taylor)

-Teorema

Sia $f: B_R(z_0) \to \mathbb{C}$, olomorfa
Allora vale

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \quad \forall z \in B_R(z_0)}$$

$\gamma(t) = z_0 + re^{it}$
$|z-z_0| < r < R$



Dimostrazione:
Fisso $z \in B_R(z_0)$ e considero γ curva di Jordan che gira attorno a z e z_0: prendo la circonferenza di centro z_0 e raggio r
Considero la formula di Cauchy:

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw$$ → formula di Cauchy generalizzata per le derivate

Quindi: $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\,dw \cdot (z-z_0)^k$ → è costante rispetto w posso metterlo nell'integrale!

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{w-z_0}\cdot\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k dw =$$

→ serie geometrica, ponendo $s = \frac{z-z_0}{w-z_0}$ che converge se $|s|<1$

$|s| = \frac{|z-z_0|}{|w-z_0|} = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{w-z_0}{w-z}$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{\cancel{w-z_0}}\cdot\frac{\cancel{w-z_0}}{w-z}\,dw =$$

$$= f(z)$$

→ $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ (z fissato) (F. di Cauchy)

z è fissato ma arbitrario, dunque il risultato vale $\forall z \in B_R(z_0)$.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0) \quad \forall z \in B_R(z_0)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 174

$= (z-z_0)^{n_0} \sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^{k-n_0} = \to \sum_{k=n_0} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=n_0} a_k (z-z_0)^{k+n_0+n_0} = \sum_{k=n_0} (z-z_0)^{n_0} a_k (z-z_0)^{k-n_0}$

$= (z-z_0)^{n_0} \sum_{h=0}^{+\infty} a_{h+n_0} (z-z_0)^h =$ ~~h=k-z0~~ Pongo $h = k - n_0$

$= (z-z_0)^{n_0} \cdot g(z) =$ $g(z_0) = a_{n_0} \neq 0$

g è olomorfa che non si annulla in z_0

$\Rightarrow f(z) = (z-z_0)^{n_0} \cdot g(z)$

$\Rightarrow$ gli zeri di f sono z_0 e gli zeri di $g(z)$ (per la legge di ~~annullamento~~ annullamento del prodotto)

Con un ragionamento di continuità (th di permanenza del segno) si ha che $\exists r > 0 : |g(z)| > 0$, $\forall z \in B_r(z_0)$

Quindi in $B_r(z_0)$ l'unico zero di f è z_0.

$\Rightarrow n_0$ è detta molteplicità di 0.

$n_0 = 1 \Rightarrow$ lo zero si dice semplice

~~singolarità e serie di Laurent~~

- singolarità e serie di Laurent

Se una funzione non è analitica in qualche punto o in qualche sottoinsieme del piano complesso, non ammette sviluppi in serie di Taylor nell'intorno di tali punti. Ciononostante è possibile costruire rappresentazioni in serie di potenze, centrate in un punto di non analiticità z_0, contenenti potenze sia positive sia negative di $(z-z_0)$. (continua *)

Siano f, g due funzioni olomorfe $f, g : D \to \mathbb{C}$ e g non nulla a tappeto

Sia

$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \Rightarrow h$ è definita su $D \setminus \{z \in D : g(z) = 0\}$

Tali z sono zeri ~~isolati~~ isolati

Sia $z_0 \in D : g(z_0) = 0$

Sappiamo che $g(z) = (z-z_0)^{n_0} \cdot \tilde{g}(z)$ dove ~~n_0~~ $\tilde{g}(z) \neq 0$ $\forall z \in B_r(z_0)$

Sostituendo si ha:

$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{-n_0} \frac{f(z)}{\tilde{g}(z)} = (z-z_0)^{-n_0} \cdot \tilde{h}(z) \Rightarrow \tilde{h}$ è olomorfa su ~~D~~ $B_r(z_0)$ perché ~~ho~~ ho tirato ~~da~~ fuori da h tutto quello che faceva annullare $h(z)$

$\Rightarrow \tilde{h}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$ $\to b_n = \frac{\tilde{h}^{(n)}(z_0)}{n!}$

$\Rightarrow h(z) = (z-z_0)^{-n_0} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^{n-n_0} =$ $\to n - n_0 = k$

$= \sum_{k=-n_0}^{+\infty} b_{k+n_0} (z-z_0)^k$

$\Rightarrow \boxed{h(z) = \sum_{k=-n_0}^{+\infty} b_{k+n_0} (z-z_0)^k, \ \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}}$ $\to$ serie di Laurent di h centrata in z_0.

Pongo $a_k = b_{k+n_0}$

$\to$ collegamento tra a_k e $h(z)$.

$a_k = b_{k+n_0} = \frac{\tilde{h}^{(k+n_0)}(z_0)}{(k+n_0)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\tilde{h}(z)}{(z-z_0)^{k+n_0+1}} dz =$ $\to$ Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$

γ: curva che ruota attorno a z_0

$= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)(z-z_0)^{n_0}}{(z-z_0)^{k+n_0+1}} dz$

$\Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz}$

(* continua) In effetti la decomposizione in serie di Laurent permette di rappresentare una funzione analitica in un anello $\{r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ $(r_1 < r_2)$ come la somma di una funzione analitica nell'anello e di una analitica all'interno

• esempio

$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ è olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow e^{w} = \sum \frac{w^k}{k!} \quad \forall w \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum \frac{z^{-k}}{k!} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2} + \dots$

$\Rightarrow \int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \, a_{-1} = 2\pi i$

- singolarità

- ha $f: B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ è olomorfa e $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$

1) $a_k = 0 \ \forall k < 0 \Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k \right.$ è una serie di potenze che è olomorfa su tutto $\left. B_R(z_0) \right)$

$\Rightarrow f(z)$ è estendibile ad una funzione olomorfa su ~~$B_R(z_0)$~~ $B_R(z_0)$

$\Rightarrow z_0$ = singolarità eliminabile

2) $\exists n_0 : a_k = 0 \ \forall k < -n_0$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-n_0}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$

→ è quoziente di funzione olomorfa

$\Rightarrow z_0$ = polo (n_0 = molteplicità del polo / ordine di z_0) $\rightsquigarrow g(z) := (z-z_0)^{n_0} f(z)$ è olomorfa $\Rightarrow f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n_0}}$

3) ci sono infiniti termini a potenza negativa nello sviluppo di Laurent

$\Rightarrow z_0$ = singolarità essenziale

In ogni caso:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{-1} = \mathrm{Res}_{(z_0)} f \\ \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi a_{-1} \end{array}}$$

a_{-1} è il coeff del primo termine solo quando z_0 è polo semplice ($n_0 = 1$)

Tutta questa nomenclatura non ha senso se D è una corona circolare

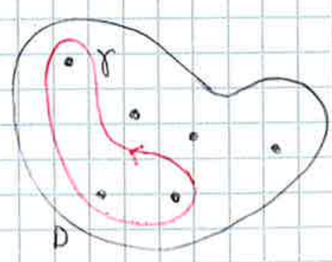
→ TEOREMA DEI RESIDUI

D = dominio bt con tanti buchi

$f: D \to \mathbb{C}$

γ curva di Jordan su D t.c. $\mathrm{Int}(\gamma)$ è contenuta in D a meno di un numero finito di punti

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z \in \mathrm{Int}(\gamma) \setminus D} \mathrm{Res}_z(f)$



• esempio

Sia $f(z)=z^k$ in $\gamma(t)=e^{it}$ → $f(z)$ ha uno zero (o polo) di ordine k in 0 ($k \lessgtr 0$)

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{k z^{k-1}}{z^k}\,dz = \frac{k}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{k}{2\pi i}\cdot 2\pi i = k$$

$k<0 \Rightarrow k = \#$poli
$k>0 \Rightarrow k = \#$zeri

Osservazione: $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$, $\gamma:[a,b]\to D$
f olomorfa definita in D, $f: D\to\mathbb{C}$

$\gamma:[a,b]\to D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$

Posso pensare alla curva $f\circ\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ (non è detto che $f\circ\gamma$ sia di Jordan ma è chiusa)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))}f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \quad \rightsquigarrow \left(\int_\gamma g(z)\,dz = \int_a^b g(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt\right)$$

Invece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\cdot\gamma'(t)\,dt$$

ho quindi:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma}\frac{1}{z}\,dz = Z-P$$

~~Se prendo γ e applico f, $\frac{1}{z}$~~ So che girando intorno a z in senso antiorario una volta verrà 1, se giro 2 volte, verrà 2, se giro in senso antiorario viene -1.

Interpretazione: il numero di volte che ~~γ~~ $f\circ\gamma$ gira intorno a z in senso antiorario meno il numero di volte che gira in senso orario è sempre uguale al numero di zeri meno il numero di ~~volte~~ poli di f in Int γ

⇝ teoria dei controlli)

Dimostrazione:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{z} \mathrm{Res}_z\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)$$
→ z = poli o zeri di f in Int γ

→ se z_0 è uno zero di f con molteplicità n_0, si ha: $f(z)=(z-z_0)^{n_0}\tilde f(z)$, $\tilde f(z_0)\neq 0$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_0(z-z_0)^{n_0-1}\tilde f(z)+(z-z_0)^{n_0}\tilde f'(z)}{(z-z_0)^{n_0}\tilde f(z)} = \frac{n_0\tilde f(z)+(z-z_0)\tilde f'(z)}{(z-z_0)\tilde f(z)} =$$

$$= n_0\frac{1}{z-z_0}+\frac{\tilde f'(z)}{\tilde f(z)} = n_0(z-z_0)^{-1}+\frac{\tilde f'(z)}{\tilde f(z)}$$

$\tilde f(z)$ → non si annulla in z_0

olomorfo vicino a z_0 ⇒ la serie di Laurent è una serie di potenze (non c'è il coeff di grado -1)

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right)=n_0$$

→ se z_0 è un polo di f con molteplicità m_0, si ha: $f(z)=(z-z_0)^{-m_0}\cdot\hat f(z)$, $\hat f(z_0)$ olomorfa e non si annulla in un int. di z_0.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -m_0(z-z_0)^{-1}+\frac{\hat f'(z)}{\hat f(z)}$$

$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{f'}{f}\right)=-m_0$ e quindi si ottiene la tesi!

es 2) Abbiamo una ~~carica~~ densità volumetrica di cariche distribuite secondo la densità di carica $\rho(x,y,t)$

$\Rightarrow Q = \iiint_V \rho(x,y,t)\,dx\,dy\,dt$ → carica totale contenuta in V

Se invece abbiamo ~~tra~~ cariche uniformi $q_1, \dots, q_n$ nel volume V:

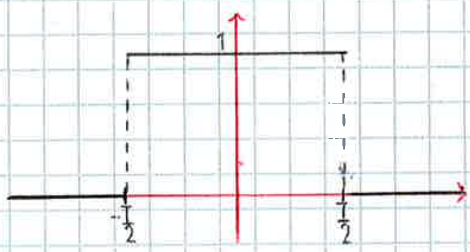
$\Rightarrow Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$ → carica totale contenuta in V

Le due formule sono chiaramente di tipo diverso: ci piacerebbe averne una unica che possa trattare densità e cariche puntiformi allo stesso modo.
Il problema chiaramente è che le cariche puntiformi non possono essere descritte da densità se queste devono essere delle normali funzioni

Le cariche puntiformi possono in effetti essere approssimate da densità di cariche.
Facciamo vedere lavorando per semplicità sulla retta ~~invece~~ invece che nello spazio.

Considero la successione di densità lineari di carica: $\rho_n(x) = \bar{q} \cdot n \cdot p_{\frac{1}{n}}(x)$

→ $p_{\frac{1}{n}}$ è la funzione porta
Si definisce funzione porta di ampiezza T



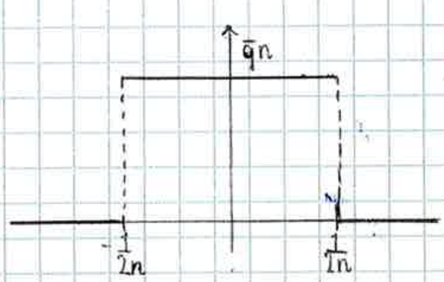
$$\boxed{p_T(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}}$$ → funzione porta di ampiezza T

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{q}\, n\, p_{\frac{1}{n}}(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \bar{q}\, n\,dx = \bar{q}\, n\, x \Big|_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} = \bar{q}\, n \frac{1}{n} = \bar{q}$$

tanto oltre questo intervallo è sempre nulla

$$\Rightarrow Q_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x)\,dx = \bar{q}$$



All'aumentare di n quindi queste distribuzioni di cariche tendono a concentrarsi sempre di più intorno allo 0, ma sempre mantenendo costante la quantità di cariche totale $\bar{q}$.
L'idea dovrebbe essere che al tendere di $n \to +\infty$ tali densità dovrebbero convergere alla carica puntiforme $\bar{q}$ concentrata in 0.
Tuttavia se ne guardiamo il limite dal punto di vista delle funzioni si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \rho_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Tale funzione limite, se integrata sulla retta dà come risultato 0 e non q.
Anzi l'informazione che la carica totale è $\bar{q}$ sembra essersi completamente persa nel passaggio al limite

→ I fenomeni puntuali o impulsivi non possono essere efficacemente modellati attraverso funzioni, che eventualmente abbiano valore in essi uguale a +∞

È necessario un approccio diverso ⇝ teoria delle distribuzioni.

L'idea fondamentale della teoria delle distribuzioni è che una misura di una qnt fisica, di un segnale temporale, non fornisce mai il valore in un preciso istante o in uno preciso punto dello spazio. ~~Il~~ La qnt fisica, il segnale non è necessario pensarlo come qualcosa di definito nello ~~spazio~~ punto per punto o istante per istante, quanto invece come un qualcosa che associa ad ogni possibile misura un numero che è il valore della misura su quel segnale.

- distribuzione

Si definisce distribuzione T una qualunque applicazione (che associa ad ogni strumento di misura $\in \mathcal{D}$, una misura $\in \mathbb{R}$)

$T: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

tale che: equivale a $\langle T, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$

1) T è lineare: $T(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2)$, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

2) T è continua: se $\varphi_n \to \varphi$, per $n \to +\infty$ su $\mathcal{D}$ allora $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ per $n \to +\infty$

$\leadsto$ una distribuzione rappresenta un possibile segnale la cui natura è quella di essere "qualcosa" che associa ad ogni possibile misura, un determinato valore (da interpretarsi come il valore del segnale sotto quella misura)

la richiesta di continuità è quello che rende difficile la teoria delle distribuzioni!

- richiami: concetto di convergenza di funzioni
- convergenza puntuale

Sia $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ successione di funzione

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si dice che f_n converge puntualmente a f su $\mathbb{R}$ per $n \to +\infty$, se: $f_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ovvero:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0.\ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

- convergenza uniforme

Sia $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ successione di funzione

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Si dice che f_n converge uniformemente a f su $\mathbb{R}$, per $n \to +\infty$, se $\bar{n}$ non dipende da x, ovvero:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ tale che } \forall n \geq \bar{n}, \forall x \in \mathbb{R} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

• Teorema:

$$f_n \to f \text{ uniformemente su } \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0 = \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty$$

NB: in tutte le definizioni si è vista la convergenza su $\mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)
Analogamente si può studiare la convergenza su un intervallo I: in tal caso $x \in I$

• Teorema:

Sia f_n una successione di funzioni continue

Sia $f_n \to f$ uniformemente

$\Rightarrow f$ è continua

Ciò significa che:

Se f_n è una successione di funzione continua e f non è continua

$\Rightarrow f_n \not\to f$ uniformemente

- convergenza in $\mathcal{D}$

Sia φ_n una successione di funzioni test

Sia φ una funzione test

Si dice che φ_n converge a φ in $\mathcal{D}$ (e si scrive $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$) se accade:

1) equilimitatezza dei supporti

$\exists r > 0 : \varphi_n(x) = 0 \quad \forall x : |x| > r, \forall n$. (le φ_n vivono solo su una zona fissata della retta, fuori sono 0)

2) $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ uniformemente su $\mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. (conv. uniforme di tutte le derivate)

- funzione integrabile su un intervallo I ($f \in R^1(I)$)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$

f si dice integrabile se

→ f è continua a tratti

→ f è assolutamente integrabile su I, ovvero $\int_I |f(x)|\,dx < +\infty$

- funzioni localmente integrabili su I ($f \in R^1_{loc}(I)$)

Sia $f: I \to \mathbb{R}$

f si dice localmente integrabile su I se è integrabile su ogni sottointervallo limitato di I

Osservo che: $\mathcal{C}(I) \subseteq R^1_{loc}(I)$

$\mathcal{C}(I) \not\subseteq R^1(I)$ in generale (ad esempio $\operatorname{sen} x \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ma $\operatorname{sen} x \notin R^1(I)$)

• esempi

- $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \in R^1(\mathbb{R})$

- $f(x) = 1 \notin R^1(\mathbb{R})$
  $\in R^1_{loc}(\mathbb{R})$
  $\in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1]}(x) \in R^1(\mathbb{R})$ (è integrabile in 0^+)

• funzione indicatrice: (per focalizzare l'attenzione su una finestra A)

$$\boxed{\mathbb{1}_A = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in A^c \end{cases}}$$ → funzione indicatrice

In particolare $H(x) = \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x) \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$
  $\notin R^1(\mathbb{R})$ (non è integrabile in $+\infty$)

- distribuzioni regolari

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$

Ad f associamo la seguente distribuzione $T_f: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx}$$

verifico che sia una distribuzione.

Innanzitutto devo verificare che l'integrale abbia senso (restituisce un numero reale)

1) linearità

2) continuità

Si osserva che $\forall \varphi\ \exists r > 0: \varphi(x) = 0$ se $|x| > r$ poiché il supp delle funzioni test è compatto per definizione

In realtà dunque:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \varphi(x)\,dx$ perché al di fuori dell'intervallo $[-r,r]$ è nulla φ.

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-r}^{r} f(x)\varphi(x)\,dx \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \langle T_{f(x-x_0)}, \varphi(x)\rangle = \langle T_{f(x)}, \varphi(x+x_0)\rangle$ → traslare verso dx

⇒ generalizzando:
Se T è una generica distribuzione ~~poniamo~~ spesso utilizzeremo la scrittura $T(x)$ anche se T non è formalmente una funzione della variabile x, semplicemente per ricordare che x è la variabile nella funzione test, di accoppiamento con la distribuzione di T.

Data T e $x_0 \in \mathbb{R}$, si definisce la distribuzione traslata di T di x_0 e si indica con $T(x-x_0)$ quella che sulle funzioni test agisce come segue

$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle$

$\boxed{\langle T(x-x_0), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle}$ (*) → è la mia versione della traslazione sulle distribuzioni la definisco io!

Verifico che è una distribuzione:

→ linearità

$\langle T(x-x_0), \lambda_1\varphi_1(x)+\lambda_2\varphi_2(x)\rangle \overset{\text{def di Traslazione}}{=} \langle T(x), \lambda_1\varphi_1(x+x_0)+\lambda_2\varphi(x+x_0)\rangle =$ → T è una distribuzione

$= \lambda_1\langle T(x), \varphi_1(x+x_0)\rangle + \lambda_2\langle T(x), \varphi_2(x+x_0)\rangle =$

$= \lambda_1\langle T(x-x_0), \varphi_1(x)\rangle + \lambda_2\langle T(x-x_0), \varphi_2(x)\rangle$ → def. di traslazione

→ continuità

$\varphi_n \to 0$ su $\mathcal{D}$

$\langle T(x-x_0), \varphi(x)\rangle = \langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle$, $\varphi(x+x_0) \to 0$ su $\mathcal{D}$ (ho solo traslato)
T è continua

$\Rightarrow \langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle \to 0$

-esempio:

• δ_{x_0}, $y_0 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \delta_{x_0}(x-y_0) = \langle \delta_{x_0}(x-y_0), \varphi(x)\rangle = \langle \delta_{x_0}(x), \varphi(x+y_0)\rangle =$ (non è funzione di x)

$= \varphi(x_0+y_0)$

$\Rightarrow \delta_{x_0}(x-y_0) = \delta_{x_0+y_0}(x)$

*OSSERVAZIONE

~~$\langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle$ ha senso in quanto $\varphi(x+x_0)$ è una funzione test.~~
~~Questa è una buona definizione~~

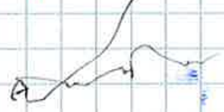
$\langle T(x), \varphi(x+x_0)\rangle$ ha senso in quanto $\varphi(x+x_0)$ è una funzione test.
Questa è una buona definizione in quanto effettivamente definisce una distribuzione:

→ Ricorda: per dare una distribuzione si deve dire quanto essa vale su ogni funzione test e poi verificare linearità e continuità

l'espressione (*) definisce $T(x-x_0)$ contro ogni funzione test ~~φ~~ $\varphi(x)$ in quanto, linearità e continuità seguono facilmente dal fatto che la $T(x)$ aveva le due proprietà.

Si noti inoltre che per le distribuzioni regolari, la traslazione così definita coincide con la traslazione usuale delle funzioni, ovvero si ha:

$T_{f(x)}(x-x_0) = T_{f(x-x_0)}(x)$



→ RICORDA: se un'operazione si vuole fare sulle distribuzioni, si cerca di scaricarla sulle funzioni test.
Ad esempio: traslare la distribuzione in avanti di x_0 vuol dire traslare la funzione test in dietro di x_0.

- Se f è derivabile con $f' \in \mathcal{R}^1_{loc}$: considero la distribuzione regolare

$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = \langle T_{f'}, \varphi \rangle \Rightarrow T'_{f(x)}(x) = T_{f'(x)}(x)$ → estensione del concetto di derivata di una funzione

Cosa succede se però f non è derivabile?

So che
$\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$

le distribuzioni sono sempre derivabili, ma non è sempre ovvio calcolare la derivata, cioè nei casi in cui il simbolo f non è lei stessa derivabile, non è chiaro come questa derivata si calcoli.

Ad esempio:

→ considero f che ha punti in cui ha salti: considero ad esempio la funzione di Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}, \quad H \in \mathcal{R}^1_{loc}$$

Non posso derivare H, cioè $T'_H \neq T_{H'}$ perché non posso derivare il simbolo.

Applico la def:

$$\langle T'_H, \varphi \rangle = -\langle T_H, \varphi' \rangle =$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_0^{+\infty} 1 \cdot \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \cancel{\varphi(0)} - (\underbrace{\varphi(+\infty)}_{=0} - \varphi(0)) = \varphi(0)$$

→ (vale 0)

φ è una funzione test (si annulla a $\pm\infty$)

$\Rightarrow \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

$\Rightarrow \langle T'_H, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \varphi \rangle \Rightarrow T'_H = \delta_0$ → la derivata dell'Heaviside pensata come distribuzione regolare è la delta di Dirac calcolata in 0.
Non vale quindi $T'_H = T_{H'}$!

→ caso più generale

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{C}^1$ tranne in un punto x_0 dove presenta un eventuale salto

Ipotizzo che $f' \in \mathcal{R}^1_{loc}$ (esiste ovunque tranne nel punto x_0, è definita su $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$)

$$\Rightarrow \langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$

→ non posso applicare l'integrazione per parti perché in x_0 non è derivabile

⇒ spezzo l'integrale in x_0 tanto l'integrale non vede cosa succede in un punto!!

$$= -\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\varphi'(x)\,dx - \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx =$$
$$= -\left(f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} - \int_{-\infty}^{x_0} f'(x)\varphi(x)\,dx \right) +$$
$$-\left(f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} - \int_{x_0}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx \right) =$$

→ avendo applicato l'integrazione per parti (al contrario)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx - f(x_0^-)\varphi(x_0) + f(x_0^+)\varphi(x_0) =$$

→ la funzione test si annulla a $\pm\infty$

→ $f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{x_0} = f(x_0^-)\varphi(x_0) - 0 = f(x_0^-)\varphi(x_0)$

$f(x)\varphi(x)\Big|_{x_0}^{+\infty} = 0 - f(x_0^+)\varphi(x_0) = -f(x_0^+)\varphi(x_0)$

$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\varphi(x_0) =$$
$$= \langle T_{f'}, \varphi \rangle + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle$$

⇒ la φ non ha nessun problema perché è $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$

⇒ dovendo lavorare all'interno degli intervalli $(-\infty, x_0)$ e $(x_0, +\infty)$, io non arrivo a x_0 subito, ma arrivo a $x_0 -$ qualcosa(ε), e valuto f in questo punto e successivamente faccio il limite per $\varepsilon \to 0$.

⇒ ottengo $f(x_0^-)$

Analogamente ottengo $f(x_0^+)$

Quindi si lavora sugli intervalli aperti, poi si recupera facendo il limite.

$$\Rightarrow \boxed{T_f' = T_{f'} + [f(x_0^+) - f(x_0^-)]\,\delta_{x_0}}$$

dove $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

4) moltiplicazione

OSSERVAZIONE:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbb{1}_{(0,1)} \in \mathcal{R}^1_{loc}$

$f(x)\, f(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{(0,1)} \notin \mathcal{R}^1_{loc}$ ⇒ il prodotto di due funzioni $\mathcal{R}^1_{loc}$ non è necessariamente $\mathcal{R}^1_{loc}$

Quindi $T_f \cdot T_f$ non ha senso

in generale, non si può definire il concetto di moltiplicazione di due distribuzioni

Quello che si può fare è definire il prodotto di una distribuzione per una funzione C^∞

Sia T una distribuzione e, sia $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e sia $\varphi \in \mathcal{D}$

Definiamo $\psi \cdot T$ come la distribuzione data da

$$\boxed{\langle \psi T, \varphi \rangle = \langle T, \psi\varphi \rangle}$$

Infatti:

- caso regolare

$\langle T_{\psi f}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (\psi(x)\varphi(x))\, dx = \langle T_f, \psi\varphi \rangle = \langle \psi T_f, \varphi \rangle \Rightarrow \boxed{T_{\psi f} = \psi T_f \quad \forall \psi \in C^\infty}$

Verifico che è una distribuzione:

- ha senso la scrittura, ovvero $\psi\varphi$ è una funzione test (perché allora va bene darla in pasto a T).
- φ è C^∞ e a supporto compatto, perché $\varphi \in \mathcal{D}$
- ψ è C^∞

⇒ $\varphi \cdot \psi$ è C^∞ ed è ha supporto compatto* ⇒ $\psi\varphi \in \mathcal{D}$ (è una funzione test)

- linearità:

$\langle \psi T, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \rangle = \langle T, \psi(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \rangle = \langle T, \psi\lambda_1\varphi_1 + \psi\lambda_2\varphi_2 \rangle = \langle T, \psi\lambda_1\varphi_1 \rangle + \langle T, \psi\lambda_2\varphi_2 \rangle =$

$= \langle \psi T, \lambda_1\varphi_1 \rangle + \langle \psi T, \lambda_2\varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \psi T, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \psi T, \varphi_2 \rangle$ (verificato!)

- continuità

Per dimostrare la continuità, faccio vedere che se $\varphi_n \to 0$ anche $\psi\varphi_n \to 0$. È vero!
Infatti i supporti restano equilimitati ma dimostrare la convergenza uniforme di tutte le derivate non è tanto facile.

5) riscalamento

Sia $f \in \mathcal{R}^1_{loc}(\mathbb{R})$ e sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}$

Considero $f(\alpha x)$

- caso regolare

$\langle T_{f(\alpha x)}, \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha x)\varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{1}{|\alpha|} \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx$ $\qquad \alpha x = t \Rightarrow x = \frac{t}{\alpha}$, $dt = |\alpha| dx$

$= \langle T_{f(x)}, \frac{1}{|\alpha|}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \rangle$

$-\int_{+\infty}^{-\infty} = \int_{-\infty}^{+\infty}$

(metto $\frac{1}{|\alpha|}$ perché se $\alpha > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$ altrimenti $\int_{+\infty}^{-\infty}$
⇒ mettendo $\frac{1}{|\alpha|}$ considero entrambi i casi $\int_{-\infty}^{+\infty}$)

⇒ generalizzando:

$$\boxed{\langle T(\alpha x), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|\alpha|} \langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) \rangle}$$

→ ha senso perché lo spazio delle funzioni test è chiuso rispetto ai riscalamenti

Per $\alpha = -1$, si ha:

$$\boxed{\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(-x) \rangle}$$

→ inversione temporale di una distribuzione

*Nota: φ supp(φ) compatto ⇒ supp($\psi\varphi$) è sicuramente compatto. ~~e l'unione sarà supp(ψ) dà~~

supp(ψ) qualunque

Infatti se supp(φ) ⊆ supp(ψ) ⇒ $\psi\varphi = 0 \quad \forall x \in (\text{supp}(\varphi))^c$; altrimenti supp($\psi\varphi$) sarà compatto perché contenuto in un compatto

6) convergenza di distribuzione

Sia (T_n) una successione di distribuzione e sia T una distribuzione.
Si dice che T_n converge a T in $\mathcal{D}'$ se $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ si ha che $\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$ per $n \to +\infty$

$$\boxed{T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Leftarrow \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ per } n \to +\infty} \longleftarrow \text{deve valere } \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

- Proprietà

① $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T,\ S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} S \Rightarrow \lambda T_n + \mu S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \lambda T + \mu S$

② $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow T_n(x-x_0) \xrightarrow{\mathcal{D}'} T(x-x_0)$

③ $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow T_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'$

Dimostrazione di ①

$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ significa che $\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}'} \langle T, \varphi \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$ } ipotesi
$S_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} S$ significa che $\langle S_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}'} \langle S, \varphi \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Dimostrare che $\lambda T_n + \mu S_n \to \lambda T + \mu S$ significa far vedere che } tesi
$\langle \lambda T_n + \mu S_n, \varphi \rangle \to \langle \lambda T + \mu S, \varphi \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Ma ciò è vero infatti
$\langle \lambda T_n + \mu S_n, \varphi \rangle = \lambda \langle T_n, \varphi \rangle + \mu \langle S_n, \varphi \rangle \to$ (e. lineare di distribuzione)
$\to \lambda \langle T, \varphi \rangle + \mu \langle S, \varphi \rangle = \langle \lambda T + \mu S, \varphi \rangle$ per l'algebra sui limiti
$\Rightarrow$ si ha la tesi

Dimostrazione di ②

$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ significa che $\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}'} \langle T, \varphi \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$ → ipotesi
Dimostrare che $T_n(x-x_0) \xrightarrow{\mathcal{D}'} T(x-x_0)$ significa far vedere che } tesi
$\langle T_n(x-x_0), \varphi \rangle \to \langle T(x-x_0), \varphi \rangle\ \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Ma ciò è vero perché
$\langle T_n(x-x_0), \varphi \rangle = \langle T_n(x), \varphi(x+x_0) \rangle \xrightarrow{\text{per } \varphi} \langle T(x), \varphi(x+x_0) \rangle =$
$= \langle T(x-x_0), \varphi(x) \rangle$
$\Rightarrow$ si ha la tesi

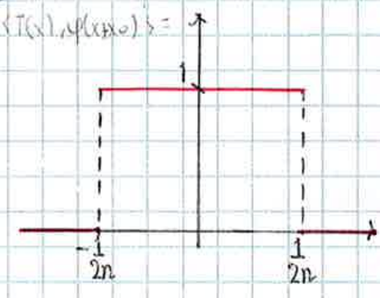
- Dimostrazione della ③

$\langle T_n', \varphi \rangle = -\langle T_n, \varphi' \rangle \to -\langle T, \varphi' \rangle = \langle T', \varphi \rangle$

$\Rightarrow \langle T_n', \varphi \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle T', \varphi \rangle \Rightarrow T_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T'$

- esempio

- $P_{\frac{1}{n}}(x)$



Considero $f_n(x) = n P_{\frac{1}{n}}(x) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) = 1$

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) \varphi(x)\, dx = n \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\frac{1}{n}}(x) \varphi(x)\, dx = n \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}} \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi(x)\, dx = \varphi(y_n) \text{ con } y_n \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \langle T_{f_n}, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \varphi(y_n) = \varphi(0) \to \text{poiché } \varphi \text{ è continua, } y_n \to 0$$

$$= \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

$$\Rightarrow T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$$

- Sia (x_n) una successione di numeri reali tali che $x_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$
considero $T_n = \delta_{x_n}$

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_n}, \varphi \rangle = \varphi(x_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \lim_{n \to +\infty} \varphi(x_n) = 0 \to \text{perché } \varphi \text{ è una funzione test}$$

$$\Rightarrow \delta_{x_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0 \quad \left(\text{similmente } T_n = e^n \delta_{x_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0\right)$$

⇝ segnali che mantengono energia costante, tendono a 0

- passaggi al limite sotto segno di integrale

Sia:

$f: I \times J \to \mathbb{R}$

$I \times J$ = può essere anche una regione di $\mathbb{R}$

1) $f(t,x) \in R^1(J)$ in x $\forall t \in I$

2) $\lim_{t \to t_0} f(t,x) = f_0(x)$ $\quad \forall x \in J$

3) $|f(t,x)| \leq g(x)$ $\quad \forall t,\ g \in R^1(J)$ Condizione più forte della 1)
→ dominazione della funzione g

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{t\to t_0} \int_J f(t,x)\,dx = \int_J \lim_{t\to t_0} f(t,x)\,dx = \int_J f_0(x)\,dx}$$

caso particolare:

$f(t,x)$ continua integrabile e assolutamente integrabile in x. e $|f(t,x)| \leq g(x) \in R^1, \forall t$

$$\Rightarrow \lim_{t\to t_0} \int_J f(t,x)\,dx = \int_J \lim_{t\to t_0} f(t,x)\,dx = \int_J f(t,x)\,dx$$

cioè $t \to \int_J f(t,x)\,dx$ è continua (la continuità si preserva)

OSS: $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega,x)\,dx$

- $f(\omega,x)$ è continua in ω
- $|f(x)e^{-2\pi i \omega x}| = |f(x)| \in R^1 \quad \forall \omega$

$\Rightarrow \omega \mapsto \hat{f}(\omega)$ è continua ($\Rightarrow$ la trasformata di Fourier è sempre continua

- passaggio della derivata sotto il segno di integrale

Sia

$f(t,x)$, $t \in I$, $x \in J$ (I, J intervalli)

1) $f(t,x)$ integrabile in x, $\forall t$

2) derivabile in t, $\forall x$

3) $\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)$ integrabile in x e valga $\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| \leq g(x)$ (integrabile assolutamente)
↳ dominazione della funzione g

$\Rightarrow t \mapsto \int_J f(t,x)\,dx$ è derivabile in t e vale:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\int_J f(t,x)\,dx\right) = \int_J \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\,dx}$$

dipende solo da $t \Rightarrow \frac{d}{dt}$

NOTAZIONE: $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ = trasformata di Fourier di f

OSSERVAZIONI:

1) $f \in R^1(\mathbb{R}) \Rightarrow |f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}| = |f(x)|$

$\Rightarrow x \mapsto f(x)\, e^{-2\pi i\omega x} \in R^1(\mathbb{R}),\ \forall \omega \in \mathbb{R}$ e quindi ha senso definire:

$\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (noto che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}\, dx$$

2) $|\hat{f}(\omega)| :=$ energia di f nella frequenza (meglio dire pulsazione) ω.

Noto che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(\cos(-2\pi\omega x) + i\,\mathrm{sen}(-2\pi\omega x)\big)dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\omega x) - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(2\pi\omega x)\,dx$$

$\to e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta \to$ f. pari
$\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta \to$ f. dispari

$$\Rightarrow \boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\omega x)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(2\pi\omega x)\,dx}$$

Si ha che:

$$\to |\hat{f}(\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\omega x)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(2\pi\omega x)\,dx\right| \leq$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}|\,dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx =: \|f\|_1$$

$\overset{*}{\Rightarrow} |e^{-2\pi i\omega x}| = |\cos(2\pi\omega x) - i\,\mathrm{sen}(2\pi\omega x)| =$
$= \sqrt{\cos^2(2\pi\omega x) + \mathrm{sen}^2(2\pi\omega x)} = 1$

$\to |e^{-2\pi i\omega x}| \overset{*}{=} 1$ perché $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x+iy$
infatti $e^{-2\pi i\omega x} = \cos(-2\pi\omega x) + i\,\mathrm{sen}(-2\pi\omega x) =$
$= \cos(2\pi\omega x) - i\,\mathrm{sen}(2\pi\omega x)$ *

$\boxed{\text{norma-1 di } f = \|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx}$

$\Rightarrow |\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1 \Rightarrow$ l'energia del segnale, per qualunque frequenza non supera mai $\|f\|_1$ della sua funzione

$\to \|\hat{f}\|_\infty := \sup\{|\hat{f}(\omega)| : \omega \in \mathbb{R}\}$

$\boxed{\text{norma-}\infty \text{ di } f = \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}}$

$\Rightarrow \|\hat{f}\|_\infty$ rappresenta la massima composizione possibile del segnale, in modulo, ovvero la massima energia possibile su tutti i valori ammissibili dell'energia

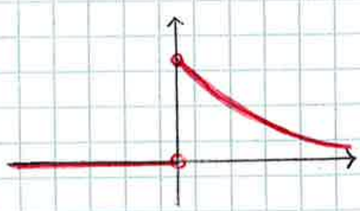
Dunque, essendo $\|\hat{f}\|_\infty$ uno dei valori di $|\hat{f}(\omega)|$ il massimo, si ha che:

$\boxed{\|\hat{f}\|_\infty = \|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1}$ $\to$ la trasformata di Fourier di f è sempre limitata dalla sua norma-1.

- esempi:

• $f(x) = H(x)\, e^{-\alpha x} = \begin{cases} e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

$\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$



$\Rightarrow |f(x)| = |H(x)\, e^{-\alpha x}| = H(x)\, |e^{-\alpha x}| = H(x)\, |e^{-(\mathrm{Re}\,\alpha + i\,\mathrm{Im}\,\alpha)x}| =$

$= H(x)\, e^{-\mathrm{Re}\,\alpha\, x}$

$$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\mathrm{Re}\,\alpha\, x}\, e^{-2\pi\omega i x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(\mathrm{Re}\,\alpha + 2\pi i\omega)x}\,dx = -\frac{1}{\alpha + 2\pi i\omega}\, e^{-(\alpha+2\pi i\omega)x}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\alpha + 2\pi i\omega}$$

19.05.2015

- proprietà della trasformata di Fourier

Ricordo:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx$

- $|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_1$ è sempre limitata
- $\hat{f}$ è sempre continua

$\Rightarrow \hat{f}$ è sempre limitata e continua

- lemma (Riemann-Lebesgue)

$$\boxed{\lim_{|\omega| \to +\infty} \hat{f}(\omega) = 0}$$

→ le trasformate di Fourier decadono a 0 all'infinito non può avere asintoti, essendo limitata

l'energia che emette un segnale ...

- derivata e moltiplicazione nella trasformata di Fourier

Proposizione ①

Sia $f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ derivabile con $f' \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(f')(\omega) = 2\pi i \omega \, \mathcal{F}(f)(\omega)}$$

lemma tecnico (serve per la dimostrazione)

Sia $f \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ derivabile con $f' \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$

→ le funzioni assolutamente integrabili decadono a 0 ~~se tol~~, all'∞ se valgono le ipotesi del lemma

Posso quindi dimostrare la proposizione.

Dimostrazione.

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-2\pi i \omega x} dx =$$

$$= \underbrace{f(x) e^{-2\pi i \omega x} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-2\pi i \omega) e^{-2\pi i \omega x} dx =$$

$$= 2\pi i \omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i \omega x} dx =$$

$$= 2\pi i \omega \, \mathcal{F}(f)(\omega)$$

→ integro per parti

→ $|e^{-2\pi i \omega x}| = 1$ perché è un esponenziale complesso dunque per il lemma quel termine fa 0

Osservo che: il lemma di Riemann-Lebesgue è un caso particolare del lemma tecnico.

infatti

$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{1}{2\pi i \omega} \mathcal{F}(f')(\omega)$ → ma $\mathcal{F}(f')(\omega)$ è limitata

$\Rightarrow \lim_{|\omega| \to +\infty} \mathcal{F}(f)(\omega) = 0 = \lim_{|\omega| \to +\infty} \frac{\mathcal{F}(f')(\omega)}{2\pi i \omega}$ (sotto l'ipotesi f derivabile e $f' \in \mathcal{R}^1$ va a 0 come $\frac{1}{\omega}$)

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(f)(\omega) = o\left(\frac{1}{\omega}\right), \ |\omega| \to +\infty}$$

(come decade l'energia ~~di tu~~ sulle armoniche di alta frequenza) va a 0 almeno come $\frac{1}{\omega}$

informazione sulla velocità di decadimento delle armoniche di alta frequenza.

Se f non è derivabile non è vero! ~~decad~~

Visto che la trasformata di Fourier scambia regolarità con andamento a 0, all'infinito, ~~se più la~~ più la funzione è ~~molto~~ regolare, più la trasformata di Fourier va a 0 all'∞.
Più la trasformata di Fourier è regolare, più il segnale iniziale va a 0 all'∞

Ritorno agli esempi fatti all'inizio

- $f(x) = H(x)e^{-\alpha x}$

$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \dfrac{1}{\alpha + 2\pi i\omega}$

- $f(x) = p_1(x)$

$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega}$

→ entrambe vanno a 0 come $\frac{1}{\omega}$ (ma niente di più)
Questo perché $f' \notin R!$
$\Rightarrow \hat{f}(\omega) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ma non assolutamente integrabili

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ ha ottimo decadimento a 0 all'}\infty \Rightarrow \hat{f} \text{ è ovunque derivabile } \in C^\infty \\ f \text{ non è regolare} \Rightarrow \hat{f} \text{ non decade a 0 molto velocemente} \end{array}}$

- $f(x) = \varphi(x) \in \mathcal{D}$ → φ ha ottimo decadimento a 0 (ha supp compatto)

$\Rightarrow \hat{f}(\omega) \in C^\infty$ e decade a 0 all'∞ più velocemente di qualunque polinomio $\frac{1}{\omega^k}$ (per il corollario ①, ②)

le funzioni test sono molto regolari (C^∞) e decadono velocemente a 0

- **Risultato negativo**

Proposizione:
Se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\varphi \neq 0 \Rightarrow \hat{\varphi}$ non è mai a supporto compatto

non esiste un segnale che abbia energia limitata nello spazio e limitata in frequenza (o uno o l'altro)

Questa proposizione è un caso particolare del principio di Heisenberg. (non si può localizzare un segnale in tutte le variabili di stato contemporaneamente, ma se si vuole misurare precisamente una, rimane incertezza sull'altra).
Nell'ambito della trasformata di Fourier questo principio equivale all'impossibilità localizzare un segnale nello spazio e nella frequenza simultaneamente

Introduciamo lo spazio S per ~~risolv~~ ovviare a questo problema

- S = spazio delle funzioni rapidamente ~~cresc~~ decrescenti

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è rapidamente decrescente se:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ f \in C^\infty \\ 2)\ \forall h,k,\ \lim_{x\to\pm\infty} x^h f^{(k)}(x) = 0 \end{array}}$$

→ decade a 0 più velocemente di ogni polinomio, lei e tutte le sue derivate

OSSERVO:
1) $\mathcal{D} \subseteq S$

2) $e^{-x} \notin S$ perché a $-\infty$ non va a 0!

3) $H(x)e^{-x} \notin S$ perché non è regolare

4) $\dfrac{1}{1+x^{452}} \notin S$ perché se scelgo $h = 452$ non va a 0

5) $e^{-\alpha x^2} \in S$
Gaussiana

20.05.2015

- trasformata di Fourier su S

Sia $\varphi \in S$. Cosa possiamo dire della sua trasformata di Fourier $\hat{\varphi}$?

- Teorema:

$\boxed{\text{Sia } \varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S}$

Dimostrazione:

- $\hat{\varphi} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ in quanto $x^h \varphi(x) \in S$ $\forall h$. Essendo le funzioni in S automaticamente integrabili ne segue che $x^h \varphi(x) \in \mathcal{R}^1(\mathbb{R})$ $\forall h$.

$\Rightarrow$ per il corollario ②, $\hat{\varphi}$ è derivabile un qualunque numero di volte.

- Devo far vedere che: $\omega^h \mathcal{F}(\varphi)^{(k)}(\omega) \to 0$ per $|\omega| \to +\infty$

la regolarità di φ darebbe dare il decadimento di $\hat{\varphi}$ a 0

$\mathcal{F}(\varphi)^{(k)}(\omega) = (-2\pi i)^k \mathcal{F}(\omega^k \varphi(\omega))(\cancel{x})$ → corollario ② = $\mathcal{F}(x^k f(x)) = \left(-\frac{1}{2\pi i}\right)^k \mathcal{F}(f)^{(k)}(\omega)$

$\omega^h \mathcal{F}(\varphi)^{(k)}(\omega) = \frac{(-2\pi i)^k}{(2\pi i)^h} \cdot (2\pi i \omega)^h \mathcal{F}(\omega^k (\varphi(\omega))(\cancel{x})$ → moltiplico per ω^h

$= (-1)^k (2\pi i)^{k-h} \mathcal{F}((\omega^k \varphi(\omega))^{(h)})(\cancel{x})$ → corollario ① = $\mathcal{F}(f^{(k)})(\omega) = (2\pi i \omega)^k \mathcal{F}(f)(\omega)$

Perché

$\Rightarrow \lim_{|\omega| \to +\infty} \omega^h \mathcal{F}(\varphi)^{(k)}(\omega) = (-1)^k (2\pi i)^{k-h} \lim_{|\omega| \to +\infty} \underbrace{\mathcal{F}((\omega^k \varphi)^{(h)})(\cancel{x})}_{\text{trasformata di Fourier di una funzione } \mathcal{R}^1} = 0$ per il lemma di Riemann-Lebesgue

$\Rightarrow$ S è chiuso rispetto la trasformata di Fourier

- Teorema (di inversione)

$\boxed{\forall \varphi \in S \text{ si ha che } \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{2\pi i \omega x} \, d\omega}$ $= \mathcal{F}(\hat{\varphi}(\omega))(-x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi)$

- esempio
- trasformata delle gaussiane. $f(x) = e^{-\alpha x^2}$

$$\mathcal{F}(e^{-\alpha x^2}) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx$$

$$\frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = -2\pi i \, \mathcal{F}(x f(x))(\omega) = -2\pi i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx =$$

$$= -\frac{2\pi i}{-2\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\alpha x) e^{-\alpha x^2} e^{-2\pi i \omega x} dx =$$

$$= \frac{\pi i}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-\alpha x^2})' e^{-2\pi i \omega x} dx = \frac{\pi i}{\alpha} \mathcal{F}((e^{-\alpha x^2})') =$$

$$= \frac{\pi i}{\alpha} 2\pi i \omega \, \mathcal{F}(e^{-\alpha x^2})(\omega) =$$

$$= -\frac{2\pi^2 \omega}{\alpha} \hat{f}(\omega)$$

$\Rightarrow \frac{d}{d\omega}\hat{f}(\omega) = -\frac{2\pi^2 \omega}{\alpha} \hat{f}(\omega)$ → eq differenziale ordinaria (lineare) che coinvolge $\hat{\varphi}(\omega)$ che è la funzione che voglio determinare

$$\hat{f}(\omega) = e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\omega^2} \cdot c$$

$$c = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

- **trasformata di Fourier di distribuzioni**

Caso regolare

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe $\mathcal{R}^1$

$\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx$

$T_{\hat{f}}$ ha senso perché $\hat{f}$ è continua

$$\langle T_{\hat{f}},\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\varphi(\omega)\,d\omega=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i\omega x}\,dx\right)\varphi(\omega)\,d\omega=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)e^{-2\pi i\omega x}\,d\omega\right)dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx=\langle T_f,\hat{\varphi}\rangle$$

Scambio ordine integrazione:
Posso cambiare l'ordine di integrazione perché le due funzioni f e φ sono: $f\in\mathcal{R}^1$ in x, φ è a supporto compatto in ω. E l'armonica non dà nessun problema. Quindi è una funzione in due variabili assolutamente integrabile su tutto il piano
⇝ teorema di Fubini

$\to f(x)\to\mathcal{F}(f(x))(\omega)=\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\,dx$

$f(\omega)\to\mathcal{F}(f(\omega))(x)=\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\,d\omega$

$$\Rightarrow\boxed{\langle T_{\hat{f}},\varphi\rangle=\langle T_f,\hat{\varphi}\rangle}$$

Questo sembrerebbe suggerire che se T è una qualunque distribuzione, si può definire la sua trasformata $\hat{T}$ come la distribuzione tale che:

$$\cancel{\langle\hat{T},\varphi\rangle=\langle T,\hat{\varphi}\rangle}$$

Ha senso?
$\hat{T}$ lineare, è continua?

NON HA SENSO perché $\hat{\varphi}$ non è una funzione test (risultato negativo)
se $\varphi\neq0\Rightarrow\hat{\varphi}$ NON È MAI ~~a~~ supporto compatto, quindi non è una funzione test
$\Rightarrow\langle T,\hat{\varphi}\rangle$ non ha senso

Per la distribuzione regolare funziona perché $f\in\mathcal{R}^1$ ~~è moltiplicata per una funzione~~

- **distribuzioni temperate**

Dobbiamo ridimensionare lo spazio delle distribuzioni
Per definire la trasformata di Fourier dovremo restringere opportunamente la classe delle distribuzioni da trasformare

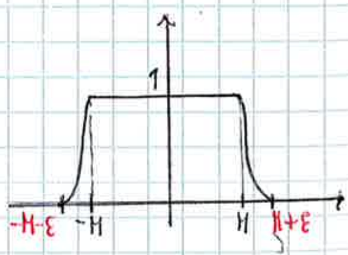
→ considero le distribuzioni a supporto compatto
Sia $T\in\mathcal{D}'$
$\quad supp(T)\subseteq[-M,M]$

⇝ una distribuzione che ha come simbolo una funzione test e ~~ha~~ supporto compatto.

Per tali distribuzioni è possibile estendere la loro azione ad ogni funzione C^∞ nel modo seguente:

1) considero una speciale funzione test, che chiamo $\gamma_{M,\varepsilon}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\gamma_{M,\varepsilon}=\begin{cases}1 & \text{se } x\in[-M,M]\\ 0 & \text{se } x<-M-\varepsilon \text{ o } x>M+\varepsilon\end{cases}$$
→ porta smussata



2) Se $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$ e T è a supporto compatto $\subseteq[-M,M]$ definiamo
$\langle T,\psi\rangle:=\langle T,\gamma_{M,\varepsilon}\psi\rangle$

L'espressione ha senso perché $\gamma_{M,\varepsilon}\psi\in\mathcal{D}$
È una buona definizione nel senso che non dipende dalla particolare M,ε scelta

Equivalentemente

$$\boxed{\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^h \varphi_n^{(k)} - x^h \varphi^{(k)}(x)| \to 0 \text{ per } n\to+\infty}$$

Lemma:

Se (φ_n) è una successione in $\mathcal{D}$ e se $\varphi \in \mathcal{D}$ è tale che φ_n converge a φ in $\mathcal{D}$ $\Rightarrow (\varphi_n)$ converge a φ anche in S (converge in $\mathcal{D}$ $\Rightarrow$ converge in S)

NOTAZIONE: $\varphi_n \xrightarrow{S} \varphi$ (convergenza in S)

- Def: distribuzione temperata

È una qualunque funzione $T: S \to \mathbb{R}$ tale che

- T è lineare
- T è continua, cioè: $\varphi_n \xrightarrow{S} \varphi \Rightarrow T(\varphi_n) \to T(\varphi)$

Indichiamo con S' l'insieme delle distribuzioni temperate.

Si noti che se $T \in S'$, poiché $\mathcal{D} \subseteq S$ si può considerare la restrizione di T a $\mathcal{D}$ ovvero $T_{|\mathcal{D}}: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

(lei è definita su uno spazio più grande, ma io la guardo su uno spazio più piccolo)

- $T_{|\mathcal{D}}$ è lineare
- $T_{|\mathcal{D}}$ è continua su $\mathcal{D}$ in quanto se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{S} \varphi \Rightarrow T_{|\mathcal{D}}(\varphi_n) = T(\varphi_n) \to T(\varphi)$

$\Rightarrow$ le distribuzioni temperate sono un'estensione delle normali distribuzioni.
Se T è temperata $\Rightarrow T_{|\mathcal{D}}$ è una normale distribuzione (che in generale indicheremo con lo stesso simbolo)

Si può far vedere che se partiamo da una T in $\mathcal{D}'$, se questa è possibile estenderla ad una distribuzione temperata, tale estensione è unica.
Possiamo quindi pensare le distribuzioni temperate come una sottofamiglia di $\mathcal{D}'$

$\Rightarrow S' \subseteq \mathcal{D}'$ (Attenzione: $\mathcal{D} \subseteq S$)

- esempi
- le distribuzioni a supporto compatto sono tutte distribuzioni temperate

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathcal{D} \subseteq S \subseteq C^\infty(\mathbb{R}) \\ \mathcal{D}' \supseteq S' \supseteq C^\infty(\mathbb{R})'\end{array}}$$

$C^\infty(\mathbb{R})' \to$ distribuzioni a supporto compatto

$S' \to$ dist temperate

$\mathcal{D}' \to$ distribuzioni classiche

$\leadsto$ più allargo ~~l'insieme di~~ dominio, più restringo l'insieme delle ~~distribu~~ distribuzioni

~~Fa~~ S' è il luogo per fare le trasformate di Fourier

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice funzione a crescita lenta se:

1) $f \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$
2) $\exists A, B \geq 0 : |f(x)| \leq A|x|^m + B, \forall x$ ($m \in \mathbb{N}$)

$\to$ può scoppiare all'infinito ma non più veloce di un polinomio

- ogni funzione $R^1_{loc}(\mathbb{R})$ limitata è a crescita lenta

Osservo che:
poiché $\mathcal{F}^{-1}(\varphi(x)) = \mathcal{F}(\varphi)(-x)$

$\Rightarrow \langle \mathcal{F}^{-1}(T)(x), \varphi(x) \rangle = \langle T(\omega), \mathcal{F}(\varphi)(\omega) \rangle =$

$= \langle T(\omega), \mathcal{F}(\varphi)(-\omega) \rangle = \rightarrow$ riscalamento con $a=-1$
$\langle T(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(-x) \rangle$

$= \langle T(-\omega), \mathcal{F}(\varphi)(\omega) \rangle =$

$= \langle \mathcal{F}(T(-\omega))(x), \varphi(x) \rangle =$

$= \langle \mathcal{F}(T(-x)), \varphi(x) \rangle$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}^{-1}(T)(x) = \mathcal{F}(T)(-x)}$ → formula di inversione

Ricorda: Se $\hat{T}$ è a supporto compatto: Th di Fubini

$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle T(\omega), \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx \rangle \stackrel{\downarrow}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle T(\omega), \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} \rangle dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \langle T(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle dx$

Se T non fosse a supporto compatto, non avrebbe senso!!
$\langle T(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle$ ha senso solo se T è a supporto compatto perché quindi può agire su tutte le funzioni C^{∞} (l'armonica).

rimane una funzione ~~in x~~ del parametro x, una volta che T ci agisce contro
$\hat{T}$ agisce contro φ, prendendo φ e integrandoci contro quella funzione di x ~~(l'armonica)~~

$\Rightarrow \hat{T}$ è una distribuzione regolare che ha per simbolo ~~l'armonica~~ $\langle T(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle$

Se chiamiamo $f(x) = \langle T(\omega), e^{-2\pi i \omega x} \rangle$, si ha $\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle$
$f(x) \in C^{\infty}$ (si dimostra...) → caso generale

- esempio
$T = \delta_{x_0}$
$\langle \hat{\delta}_{x_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_{x_0}, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) e^{-2\pi i \omega x_0} d\omega = \langle T_{e^{-2\pi i \omega x_0}}, \varphi \rangle$

$\Rightarrow \hat{\delta}_{x_0}(\omega) = T_{e^{-2\pi i \omega x_0}}$

NOTAZIONE: tipico abuso di notazione: $\hat{\delta}_{x_0}(\omega) = e^{-2\pi i \omega x_0}$ anziché $\hat{\delta}_{x_0}(\omega) = T_{e^{-2\pi i \omega x_0}}$
cioè $T_f = f$

$\hat{\delta}_0(\omega) = 1$ ovvero $\hat{\delta}_0(\omega) = T_1$
↳ ciò significa che la δ_0 ha come frequenza all'interno tutto lo spettro reale e tutte dotate con la stessa ampiezza 1.

Si noti inoltre che:

$\hat{\delta}_{x_0}(\omega) = T_{e^{-2\pi i \omega x_0}} \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(T_{e^{-2\pi i \omega x_0}})(x) = \delta_{x_0}(x) \Rightarrow \mathcal{F}(T_{e^{-2\pi i \omega x_0}})(-x) = \delta_{x_0}(x)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(T_{e^{2\pi i \omega x_0}})(x) = \delta_{x_0}(x)$

$\Rightarrow \mathcal{F}(T_{e^{2\pi i \omega_0 x}})(\omega) = \delta_{\omega_0}(\omega)$ — stessa scrittura: basta essere coerenti con le variabili

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(T_{e^{2\pi i \omega_0 x}})(\omega) = \delta_{\omega_0}(\omega)}$

⇒ la trasformata di Fourier di un'armonica è la δ nella frequenza corrispondente.
Infatti l'armonica ha dentro un'unica frequenza (segnale puro, oscillatorio) di frequenza ω_0.
Se guardo il suo spettro devo trovare solo quella frequenza

La formula non poteva essere ~~trovata~~ ottenuta usando l'integrale perché l'armonica non è $\mathcal{R}^1$

- Trasformata di Fourier della funzione di Heaviside
- $T_H \to \mathcal{F}(T_H) = ?$

H non è integrabile ⇒ non posso usare la formula
H è a crescita lenta (è limitata) ⇒ T_H è temperata ⇒ $\mathcal{F}(T_H)$ esiste

$\langle \mathcal{F}(T_H), \varphi \rangle = \langle T_H, \hat{\varphi} \rangle =$

$= \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)\, d\omega = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-2\pi i \omega x}\, dx \right) d\omega$ → Ricorda: $\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \omega x} dx$, $\check{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) e^{-2\pi i x \omega} d\omega$

A questo punto non so come andare avanti dato che non posso invertire l'ordine di integrazione dato che non posso applicare il th di Fubini visto che la funzione integranda non è integrabile in ω.

→ Th di Fubini: se $f(x,y)$ è integrabile su $A \times B$ allora $\int_{A\times B} f(x,y)\, dx\, dy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\, dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\, dx \right) dy$

- Strategia:

Ricordo che: $T_H' = \delta_0 \Rightarrow \mathcal{F}(T_H') = \mathcal{F}(\delta_0) = T_1 = 1$ $(\Leftrightarrow \mathcal{F}(T_1) = \delta_0)$

ma

$\mathcal{F}(T_H') = 2\pi i \omega\, \mathcal{F}(T_H)$ → $T_H \in S' \Rightarrow$ proprietà ha) $\mathcal{F}(T')(\omega) = 2\pi i \omega\, \mathcal{F}(T)(\omega)$

Si ha dunque che: ① $2\pi i \omega\, \mathcal{F}(T_H) = T_1$

Posso però anche pensare T_1 nel modo seguente:

② $\dfrac{2\pi i \omega}{2\pi i}\, v.p\left(\dfrac{1}{\omega}\right) = T_1$ → Ricorda: $\boxed{x\, vp\left(\frac{1}{x}\right) = T_1 = 1} \Rightarrow \dfrac{2\pi i}{2\pi i} x\, vp\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \cdot T_1 = 1$

⇒ sottraggo ① e ② ⇒ $2\pi i \omega \left(\mathcal{F}(T_H) - \dfrac{1}{2\pi i} vp\left(\dfrac{1}{\omega}\right) \right) = T_1 - T_1 = 0$

A questo punto se valesse la legge di annullamento del prodotto, avrei potuto concludere che
$2\pi i \omega \left(\mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i} vp\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i} vp\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{F}(T_H) = \frac{1}{2\pi i} vp\left(\frac{1}{\omega}\right) = 0$.

Sbagliato perché non vale la legge di annullamento del prodotto. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione: $\boxed{\text{le uniche distribuzioni } T \text{ tali che } xT(x) = 0 \text{ sono } T(x) = c\,\delta_0(x),\ \forall c \in \mathbb{R}}$

Dimostrazione (faccio solo vedere che $c\delta_0(x)$ soddisfa $xT(x) = 0$)
Ricordo che: $\psi(x)\,\delta_0(x) = \psi(0)\,\delta_0(x)$

$x c \delta_0(x) = 0\, c\, \delta_0(x) = 0 \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (basta porre $\psi(x) = x \Rightarrow \psi(0) = 0$)

Dunque:

$2\pi i \omega \left(\mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i} vp\left(\frac{1}{\omega}\right) \right) = 0$

$\omega \underbrace{\left(\mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i} vp\left(\frac{1}{\omega}\right) \right)}_{T(\omega)} = 0 \Leftrightarrow T(\omega) := \mathcal{F}(T_H) - \frac{1}{2\pi i} vp\left(\frac{1}{\omega}\right) = c\,\delta_0(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}(T_H) = \frac{1}{2\pi i} vp\left(\frac{1}{\omega}\right) + c\,\delta_0(\omega)$

Chi è c?

Ricorda: $\boxed{T_H(x) + T_H(-x) = T_1}$

$H(-x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

$\langle T_H(x) + T_H(-x), \varphi(x) \rangle = \langle T_H(x), \varphi(x) \rangle + \langle T_H(-x), \varphi(x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\, dx + \int_{-\infty}^0 \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = \langle T_1(x), \varphi(x) \rangle$

Segue quindi dal fatto che $\boxed{H(x) + H(-x) = 1}$

- trasformata del treno di impulsi

29·05·2015

$\boxed{T_n = \sum_{k=-n}^{n} \delta_k}$ → distribuzione a supporto compatto $\in S'$

$\boxed{T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k}$ → treno di impulsi

T è una distribuzione temperata che agisce nel modo seguente

$\varphi \in S \Rightarrow \langle T, \varphi \rangle := \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$ → come agisce nelle funzioni test

Ha senso questa scrittura?
Si osserva che, poiché $\varphi \in S \Rightarrow |\varphi(x)| \leq c_1 \ \forall x$ (è limitata)
$|x^2 \varphi(x)| \leq c_1$

$\Rightarrow |(1+x^2)\varphi(x)| \leq |\varphi(x)| + |x^2\varphi(x)| \leq 2c_1$

$\Rightarrow |\varphi(x)| \leq \frac{2c_1}{1+x^2}$

$\Rightarrow |\varphi(k)| \leq \frac{2c_1}{1+k^2} \Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$ è assolutamente convergente

→ così va bene anche per $k=0$

$\Rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k)$ ha senso

linearità e continuità sono verificate

$\Rightarrow T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k \in S'$

→ verifico convergenza in S'

$T_n = \sum_{k=-n}^{+n} \delta_k$

$\forall \varphi \in S \Rightarrow \langle T_n, \varphi \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \delta_k \to \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k = \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) = \langle T, \varphi \rangle$

le somme parziali convergono alla somma della serie

→ trasformata

Ricorda:
$T_n \xrightarrow{S'} T \Rightarrow \mathcal{F}(T_n) \xrightarrow{S'} \mathcal{F}(T)$

$\sum_{k=-n}^{n} \delta_k \to \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k \Rightarrow \mathcal{F}\left(\sum_{-n}^{n} \delta_k\right) \to \mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right)$

$\sum_{-n}^{n} \mathcal{F}(\delta_k) = \sum_{-n}^{n} e^{-2\pi i \omega k}$ ~~ in realtà è $\sum_{-n}^{n} T_{e^{-2\pi i \omega k}}$ ma $T_{e^{-2\pi i \omega k}} = e^{-2\pi i \omega k}$ (per convenzione)

Quindi
$\sum_{-n}^{n} e^{-2\pi i \omega k} \xrightarrow{S'} \mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right)$

Viene così spontaneo scrivere $\mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_k\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega k}$ → questa serie non converge nel senso usuale
la convergenza va pensata in S'

Riscriviamo così
$\sum_{-n}^{n} T_{e^{-2\pi i \omega k}} \xrightarrow{S'} \mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right)$

$\langle \sum_{k=-n}^{n} T_{e^{-2\pi i \omega x}}, \varphi \rangle = \sum_{k=-n}^{n} \int \varphi(\omega) e^{-2\pi i \omega k} \, d\omega = \sum_{k=-n}^{n} \hat{\varphi}(k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dots$

Quindi:

$\boxed{\mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \delta_k\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k}$ → la trasformata del treno di impulsi è il treno di impulsi stesso

Passaggi tecnici da ricordare:

1) dimostro che la ~~trasf~~ distribuzione ha supporto negli interi (trucco della modulazione)

2) dimostro che è invariante per traslazioni (perché lo era la sua approssimante limite)

3) trovo c, sapendo quanto vale la ~~dimost~~ distribuzione sugli interi e quanto valgono sugli interi le trasformate

- Proposizione:

Ω_f ha una delle seguenti possibili forme:

1) $\emptyset$
2) $\mathbb{C}$
3) semipiano dx aperto $= \{s : \operatorname{Re} s > \alpha\}$
4) semipiano dx chiuso $= \{s : \operatorname{Re} s \geq \alpha\}$

~~Tutt~~

- esempi:

• $f(x) = e^{x^2}$ (oppure x^x)

$|e^{x^2} e^{-sx}| = e^{x^2 - \operatorname{Re} s\, x} \to +\infty \Rightarrow$ non è mai assolutamente integrabile

$\Rightarrow \Omega_f = \emptyset$

Se $\Omega_f \neq \emptyset$ si dice che f è $\mathcal{L}$-trasformabile

• f ha supporto limitato

$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ con supporto limitato $(f(x) = 0 \ \forall |x| > M)$

$\int_0^{+\infty} |f(x) e^{-sx}| dx = \int_0^M |f(x) e^{-sx}| dx < +\infty$ (è convergente) $\Rightarrow$ è ass. convergente $\forall s \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \Omega_f = \mathbb{C}$

Altre funzioni f per le quali $\Omega_f = \mathbb{C}$ sono ad esempio $f(x) = e^{-x^2}$ (funzioni che vanno a 0 in maniera iperesponenziale, in modo da mangiarsi e^{-sx})

• $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$|f(x) e^{-sx}| = \left|\frac{1}{1+x^2} e^{-\operatorname{Re} s\, x}\right| \in R^1([0,+\infty)) \Leftrightarrow \operatorname{Re} s \geq 0$

$\Rightarrow \Omega_f =$ è un semipiano chiuso $= \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq 0\}$

NOTAZIONE:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(x) e^{-sx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H(x) e^{-sx} dx$

la trasformata di laplace serve per trasformare derivate nei prodotti per s.
viene usata per risolvere equazioni differenziali.
la derivata diventa un operatore algebrico moltiplicato per s.

da eq differenziali a eq algebriche (e passare indietro)

- esempi
- $f(x) = H(x)\, x^K$

Ricorda: $\boxed{\mathcal{L}(H)(s) = \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad \forall s : Re(s) > 0.}$

$$\mathcal{L}(xH)(s) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \quad \forall s: Re(s) > 0$$

$\vdots$

$$\mathcal{L}(x^K H)(s) = (-1)^K (-1)^K\, 2 \cdot 3 \cdots K \frac{1}{s^{K+1}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x^K H)(s) = K! \frac{1}{s^{K+1}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ f(x) = x^K e^{s_0 x} \cdot H(x) \\ \mathcal{L}(f)(s) = \dfrac{K!}{(s-s_0)^{K+1}} \quad \forall s: Re\, s > Re\, s_0 \end{array}}$$

06.06.2014

- Teorema (regge tutta la trasformata di laplace)

Siano $f, g \in \mathbb{R}^1_{loc}([0,+\infty))$ laplace-trasformabili e tali che $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ $\forall s : Re(s) = a$ fissato

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = g(x) \quad \forall x \geq 0 \text{ dove entrambe sono continue}}$

È un teorema di inversione molto forte
Se conosco la trasf di laplace su una retta verticale, la funzione è praticamente ricostruita, cioè posso ricostruirla dove è continua

Ricorda: la trasf di laplace non vede le discontinuità, essendo un integrale

il teorema garantisce l'invertibilità a meno dei punti di non continuità

NON dice però come si fa l'inverso, ma dice che si può fare.

Data una funzione $F(s)$ definita su un certo semipiano dx di $\mathbb{C}$ e olomorfa, ci chiediamo se

1) $\exists f: [0,+\infty) \to \mathbb{R} : \mathcal{L}(f) = F$?

2) Se sì come si calcola $f = \mathcal{L}^{-1}(F)$
- metodo pragmatico (a vista) ovvero si riconosce che F è $\mathcal{L}(f)$
- metodo analitico basato su $\mathcal{F}^{-1}$

- es)

metodo pragmatico:

So che $\mathcal{L}(x^K e^{s_0 x} H(x))(s) = \dfrac{K!}{(s-s_0)^{K+1}} \Rightarrow x^K e^{s_0 x} H(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{K!}{(s-s_0)^{K+1}}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-s_0)^K}\right) = \frac{1}{(K-1)!} x^{K-1} e^{s_0 x} H(x)}$$

Posso quindi definire la trasformata di Laplace:

$$\boxed{\mathcal{L}(T)(s) = \langle T(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \rangle}$$ perché $\psi_\varepsilon(x)e^{-sx} \in S$

non dipende dalla particolare ψ_ε ~~perché dove vado a cambiare~~

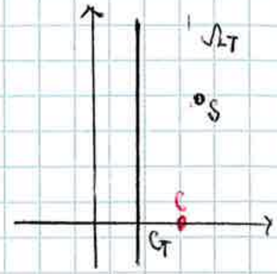
In generale se $T \in \mathcal{D}'$ si definisce $\sigma_T = \inf\{c \in \mathbb{R} : e^{-cx}T(x) \in S'\}$ (con $\operatorname{supp} T \subseteq [0,+\infty)$)

σ_T è detta ascissa di convergenza

T si dice $\mathcal{L}$-trasformabile se $\sigma_T \neq \emptyset$

$\Omega_T = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \sigma_T\}$ = insieme di convergenza

non è mai chiuso (come lo era con le funzioni)



$\Rightarrow \mathcal{L} : \Omega_T \to \mathbb{C}$

Si definisce nel modo seguente

Sia $s \in \Omega_T$

Sia $\sigma_T < c < \operatorname{Re}(s)$ arbitrario (per questo $\Omega_T \in \overset{\text{aperto}}{\tilde{T}}$) così sono sicuro di trovare qualcosa in mezzo!!

$$\mathcal{L}(T)(s) = \langle \overset{e^{-cx}}{e^{-cx}} T(x), \psi_\varepsilon(x) \overset{e^{+cx}}{e^{-(s-c)x}} \rangle = \langle T(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-(s-c)x} e^{-cx} \rangle = \langle T(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \cdot 1 \rangle$$

$c \in \Omega_T \Rightarrow e^{-cx}T(x) \in S'$ (σ_T è infatti l'inf dei c per cui $e^{-cx}T(x) \in S'$)

$s-c>0$ perché $\operatorname{Re}(s)>c$

quindi $e^{-(s-c)x}$ è convergente a $+\infty \Rightarrow \psi_\varepsilon e^{-(s-c)x} \in S$

- Proprietà di $\mathcal{L}$ sulle distribuzioni

T, S $\mathcal{L}$-trasformabili

1) $\mathcal{L}(\lambda T + \mu S)(s) = \lambda \mathcal{L}(T)(s) + \mu \mathcal{L}(S)(s) \quad \forall s \in \Omega_T \cap \Omega_S$

2) $\mathcal{L}(e^{s_0 x} T(x))(s) = \mathcal{L}(T)(s - s_0) \quad \forall s \in \Omega_T + s_0$

3) $\mathcal{L}(T'(x))(s) = s\mathcal{L}(T(x))(s) \quad \forall s \in \Omega_T \cap \Omega_{T'}$

4) $\mathcal{L}(T)(s)$ è olomorfa su Ω_T

$\mathcal{L}(T)'(s) = -\mathcal{L}(xT(x))(s) \quad \forall s \in \Omega_T$

Dimostrazione:

3) nel caso speciale quando $T \in S'$, $T \in \operatorname{Supp}(T) \subseteq [0,+\infty)$

$$\mathcal{L}(T')(s) = \langle T'(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \rangle = \qquad \to \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

$$= -\langle T(x), \tfrac{d}{dx}\psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \rangle =$$

$$= -\langle T(x), \psi_\varepsilon'(x) e^{-sx} \rangle - \langle T(x), \psi_\varepsilon(x)(-s) e^{-sx} \rangle =$$

$$= 0 + s\langle T(x), \psi_\varepsilon(x) e^{-sx} \rangle = s\mathcal{L}(T)(s)$$

Perché $\psi_\varepsilon'(x) \neq$ ha supporto in $(-\infty, 0]$

Poiché T ha supporto in $[0,+\infty)$ allora $\langle T(x), \psi_\varepsilon'(x) e^{-sx} \rangle = 0$

CONVOLUZIONE

È un'operazione che si può fare tra due funzioni o distribuzioni

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy}$$

se l'integrale ha senso

Ipotesi possibili su f e g:

- $f \in R^1_{loc}$ limitata, g a supporto compatto: $g(x) = 0 \ \forall x \notin [a,b]$, $g \in R^1_{loc}$ limitata

l'integrale ha dunque senso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_a^b f(x-y)\, g(y)\, dy$$

- $f, g \in R^1_{loc}$ limitata e $\mathrm{supp} f, \mathrm{supp}\, g \subseteq [0, +\infty)$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y) dy \quad \left(\text{si può scrivere } \begin{matrix} x-y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix} \quad y \leq x \right)$$

$$\| $$

$$\int_0^x f(x-y)\, g(y)\, dy$$

OSSERVAZIONE: la convoluzione è commutativa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

(si passa dall'uno all'altro con un cambiamento di variabile)

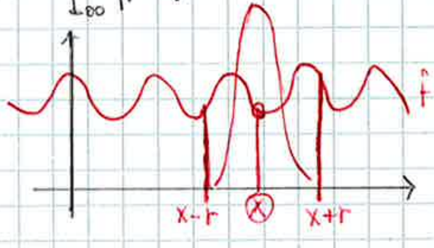
$\Rightarrow f * g = g * f$

- esempi

• Consideriamo $\varphi_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione test con $\mathrm{supp}\varphi_r \subseteq [-r, r]$ tale che $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_r(x) dx = 1$

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, R^1_{loc}

$$(f * \varphi_r)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, \varphi_r(y)\, dy = \int_{-r}^{r} f(x-y)\, \varphi_r(y)\, dy$$

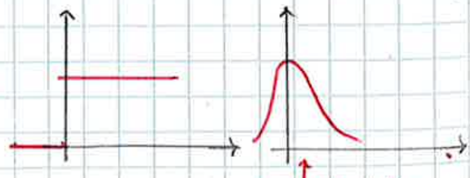


~~Complicare contro la funzione test~~

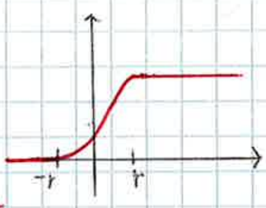
Si può dimostrare che in tal caso $f * \varphi_r$ è sempre C^∞ anche se f presentava delle discontinuità

es) $f(x) = H(x)$

$$(H * \varphi_r)(y) = \int_{-r}^{r} H(y-x)\, \varphi_r(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -r \\ 1 & \text{se } x > r \end{cases}$$



nucleo della convoluzione



~~la φ_r è uno smu~~

la φ_r è uno smussatore, e più piccolo è r, più piccolo sarà lo spazio in cui avverrà il raccordo

la φ_r serve per regolarizzare i segnali; sono dei filtri: eliminano le oscillazioni e discontinuità che avvengono in bande ristrette

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 174

$\langle T(x), \langle S(t), \varphi(x+t)\rangle\rangle$ ha senso se $x \mapsto \langle S(t), \varphi(x+t)\rangle$ è in $\mathcal{D}$ | è una funzione test ?

$\langle S(t), \varphi(x+t)\rangle$ è una funzione test se
- è C^∞
- è a supporto compatto.

Per la teoria (difficile da dimostrare), è sempre C^∞
È a supporto compatto se S è a supporto compatto

T qualunque, S a supporto compatto, allora ha senso $T*S$

$$\boxed{T*S = \langle T(x), \langle S(t), \varphi(x+t)\rangle\rangle}$$

Vale chiaramente ~~che~~ anche se S è qualunque, T è a supporto compatto

~~vale anche la proprietà~~:

- Proprietà

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ (S*T)*V = S*(T*V) \\ 2)\ (S*T)' = S'*T = S*T' \end{array}}$$

- esempio:

$$\delta_{x_0} * T \Rightarrow \langle \delta_{x_0} * T, \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0}, \langle T(t), \varphi(x+t)\rangle\rangle = \langle T(t), \varphi(x_0+t)\rangle =$$
$$= \langle T(t-x_0), \varphi(t)\rangle$$

$\Rightarrow$ fare la convoluzione con la δ_{x_0} è come traslare di x_0 la distribuzione T.

$$\delta_{x_0} * T = T * \delta_{x_0} = T(x-x_0)$$

$$\delta_0 * T = T * \delta_0 = T$$ (δ_0 è l'unità algebrica della convoluzione, così come la sua trasformata di Fourier (1) è l'unità algebrica della moltiplicazione)

$\Updownarrow$

le due strutture algebriche sono isomorfe tramite la trasformata di Fourier

TEOREMI, FORMULE E PROPOSIZIONI DIMOSTRATI:

1) condizioni di C-R
2) f olomorfa $\Rightarrow u, v$ armoniche
3) u e v sono l'una il completamento armonico dell'altra $\Rightarrow u$ e v sono funzioni costanti
4) th di C-G
5) conseguenze del th di C-G (estensione + osservazione)
6) th di Cauchy
7) maggiorazione dell'integrale ($ML(\gamma)$)
8) formula della media
9) formula di Cauchy generalizzata per le derivate
10) $\sum |f_n|$ converge $\Rightarrow \sum f_n$ converge
11) f olomorfa $\Rightarrow f(z) = \sum_n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$
12) th dei residui
13) principio degli argomenti
14) derivata distribuzionale
15) $\mathcal{F}(f')(\omega) = 2\pi i\omega \mathcal{F}(f)(\omega)$
16) $\mathcal{F}(f)'(\omega) = -2\pi i \mathcal{F}(f)(\omega)$
17) $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$
18) $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0^+)$
19) $\mathcal{L}(f)'(s) = -\mathcal{L}(xf(x))(s)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 174

P*   04 · 03 · 15

- Statistica { descrittiva = metodi di sintesi su dati relativi ad una popolazione (tutti)
  inferenziale = metodi utilizzati per dedurre informazioni su una popolazione facendo uso di un campione (sottoinsieme ristretto di individui)

calcolo delle probabilità = disciplina matematica per descrivere il comportamento di fenomeni esperimenti il cui esito non è noto a priori (casuali, stocastici)
es: lancio del dado.

~~- COMBINATORICA~~

- COMBINATORICA (1)

- $n! = n(n-1)(n-2)\cdot \; \cdot 2 \cdot 1$, $n \in \mathbb{N}$
  Per def $0! = 1$

- es: esperimento con k passi   → grafo:

  n_1 = # di possibili scelte del 1° passo
  ⋮
  n_k = # di possibili scelte del k° passo

Sia x = n° totale di possibili esiti
$x = n_1 n_2 \cdot \; \cdot n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$ → principio fondamentale (generalizzato) del calcolo combinatorio
↓
- es. 4 camicie x = n° di possibili abbigliamenti
  2 cravatte $x = 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$
  3 pantaloni
  3 scarpe

Generalizzando:
Suppongo n diversi oggetti e ne voglio estrarre k, tenendo anche conto dell'ordine in cui sono stati estratti. $(k \leq n)$
Sia x = n° di possibili estrazioni in sequenza
$x = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)$ estraggo il primo ⇒ n possibili scelte
estraggo il secondo ⇒ $n-1$ possibili scelte
estraggo il k-esimo ⇒ $n-k+1$ possibili scelte
↓
disposizioni di k su n = $D_{n,k}$
↓
$x = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \boxed{\frac{n!}{(n-k)!} = D_{n,k}}$ → disposizioni di k su n

→ caso particolare $n=k$
$D_{n,n} = n(n-1) \; \cdot 2 \cdot 1 = n!$ → in questo caso si parla di permutazioni $D_{n,n} = P_n$
$P_n = D_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

- es: 10 partecipanti ad una gara
  x_1 = n° di possibili ordini di arrivo
  x_2 = n° di possibili podi

$x_1 = 10!$
$x_2 = D_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = \cancel{720}\ 720$

Se non sono interessato all'ordine. x_3 = n° di possibili podi, ma senza tener conto dell'ordine *

$x_3 = \binom{10}{3} = \frac{D_{10,3}}{3!}$

- combinazioni = $C_{n,k}$ = n° di sottoinsiemi di cardinalità k a partire da un insieme di cardinalità n

$\boxed{C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$ = coeff binomiale → combinazioni

$\# = \binom{20}{4}\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} =$ $\left(\binom{n}{n}=1 \rightarrow \text{scelta obbligata}\right)$

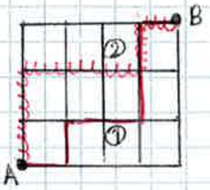
1° uff ... 5° ufficio

$= \frac{20!}{4!\,16!}\cdot\frac{16!}{4!\,12!}\cdot\frac{12!}{4!\,8!}\cdot\frac{8!}{4!\,4!}\cdot\frac{4!}{4!\,0!} = \frac{20!}{(4!)^5} = \binom{20}{4,4,4,4,4}$

Se non interessa l'ordine degli uffici, occorre dividere per 5! *

- 10 maschi vs comitato $\begin{cases} 3 \text{ maschi} \\ 2 \text{ femmine} \end{cases}$
  7 femmine

~~tot possibili comitati~~ tot possibili comitati $= \binom{10}{3}\binom{7}{2}$

- 

possibili movimenti: dx, alto

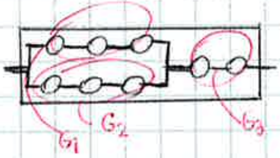
NECESSARIAMENTE devo fare 4 spostamenti vs dx = D
3 spostamenti vs alto = A

① DADDAAD
② AADDDAD

parola AAADDDD
(3) (4)

anagrammi = n° possibili traiettorie $= \frac{7!}{3!\,4!} = 35$

- sistema elettrico



8 componenti distinguibili
#possibili disposizioni $= \binom{8}{3,3,2} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = 280$
$n_1 = 3$
$n_2 = 3$
$n_3 = 2$
I gruppi sono distinti quindi non faccio nessuna divisione
se G_1 e G_2 sono indistinguibili allora divido per 2!

- th multinomiale

Dati $(a+b)$
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ → th del binomio

$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b) = (a^2+ab+ba+b^2)(a+b)\cdots(a+b) = \cdots = a^n + \cdots + b^n$ → 2^n addendi
$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ → spiega perché

Osservazione: $a=1$, $b=1$ ⇒ $\boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}}$ = totale dei possibili sottoinsiemi che posso estrarre da un insieme di n elementi

Generalizzando:
$$(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1,\ldots,n_r)\in\mathbb{N}^r \\ n_1+n_2+\ldots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,\ldots,n_r}x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r} \qquad (n_1+\ldots+n_r=n)$$
→ th multinomiale

- numero di soluzioni intere di eq: $x_1+\ldots+x_r=n$ $\quad r\le n$ *

vincolo $x_i>0$
es: $x_1+x_2=4$

x_1	x_2
1	3
2	2
3	1

$x_i>0$

Considero n individui: $A_1 / \ldots A_n$

- concezione soggettivista (De Finetti, ~1930)
  $P(A)$ = misura del grado di fiducia che un individuo COERENTE attribuisce al verificarsi di A

→ grado di fiducia = cifra che è disposto a scommettere per ricevere 1 se A si verifica
→ individuo coerente = disposto ad essere sia lo scommettitore che bookmaker

- concezione assiomatica (

11.03.2015

la probabilità è una particolare funzione che gode di par. proprietà
Ho un esperimento e uno spazio campione Ω
Sia $A \subseteq \Omega$, chiamo A = evento (es nel lancio del dado $A = \{$esce un numero pari$\}$

→ evento elementare = contiene un solo oggetto
→ eventi composti = più oggetti
→ eventi incompatibili = dati due eventi A e B, A e B sono incompatibili $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
$A \cap B \neq \emptyset$ significa che ~~può~~ possono verificarsi contemporaneamente A e B

~~- algebra di Boole~~

ALGEBRA DI BOOLE
Sia dato Ω.
Sia $\mathcal{Q} = \{A_i, i \in I, A_i \subseteq \Omega\}$. $\mathcal{Q}$ è un'algebra di Boole se gode delle seg. proprietà:

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \Omega \in \mathcal{Q} \\ 2)\ A \in \mathcal{Q} \Rightarrow A^c \in \mathcal{Q} \quad (A^c = \bar{A}) \\ 3)\ A, B \in \mathcal{Q} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q} \end{array}}$$

in questo caso non si ~~chiama~~ parla più di ~~s~~ sottoinsieme ma di EVENTI

esempio: $\Omega = \{A, B, C, D\}$
$\mathcal{Q} = \{\{A, B\}, \{C\}, \{D\}, \Omega, \emptyset\}$
$\mathcal{Q}$ non è un'algebra, infatti:
1) $\Omega \in \mathcal{Q}$ verificata
2) non è verificato infatti $\overline{\{A, B\}} = \{C, D\} \notin \mathcal{Q}$ $A = \{a, b\}$, $\bar{A} = \{c, d\} \notin \mathcal{Q}$

esempio: $\Omega = \{a, b, c, d\}$
$\Omega = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \Omega\}$
$\mathcal{Q}$ non è un'algebra, infatti:
1) verificato
2) non è verificato infatti $A = \Omega$, $\bar{A} = \emptyset \notin \mathcal{Q}$

esempio: $\Omega = \{a, b, c, d\}$
$\mathcal{Q} = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \Omega, \emptyset\}$
$\mathcal{Q}$ è un algebra infatti:
1) verificato
2) verificato
3) verificato

NOTA: dato Ω con cardinalità finita, $\mathcal{Q} = \{\Omega, \emptyset\}$ ~~è un'algebra di Boole~~.
$\mathcal{Q} = P(\Omega) = 2^{\Omega}$ = insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di Ω = insieme delle parti

$\mathcal{Q}$ è sicuramente un'algebra di Boole.

le algebre possono essere definite in maniera alternativa come segue:
$\mathcal{Q}$ è un algebra se:
1) $\Omega \in \mathcal{Q}$
2) $A \in \mathcal{Q} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{Q}$
3) $A, B \in \mathcal{Q} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Q}$ (equivalente a $A, B \in \mathcal{Q} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{Q}$)

Posso ora definire la probabilità

Dato un esperimento, con spazio campione Ω, su cui è definita un'algebra (o σ-algebra) $\mathcal{A}$ è detta probabilità un'applicazione $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ *

$A \in \mathcal{A} \mapsto P(A) \in \mathbb{R}$

che gode delle seguenti proprietà:

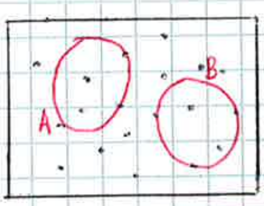
1) $\forall A$, $P(A) \in \mathbb{R}^+$, $P(A) \geq 0$
2) $P(\Omega) = 1$ (definita su Ω perché $\Omega \in \mathcal{A}$ per def di algebra) → def di probabilità
3) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ tali che $A \cap B = \emptyset$ (incompatibili) $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

assicurato da def di algebra

Penso la probabilità come QUANTITÀ DI MASSA DISPERSA SU Ω

Sia dato Ω:
- considero una massa unitaria
- disperdo questa massa su Ω.

$\Rightarrow$ definisco probabilità $P(A)$ la quantità di massa presente (raccolta) su A.



Formalismo matematico (approccio matematico)

$P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ è detta misura

Se vale la proprietà 3 si parla di MISURE ADDITIVE

Se vale la proprietà 2 e 3 si parla di PROBABILITÀ

$\Rightarrow$ la probabilità è una misura additiva tale che $P(\Omega) = 1$

- spazio di probabilità (terna di probabilità) = $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Talvolta, la proprietà 3 viene sostituita dalla proprietà 3' seguente

3') data la famiglia di eventi $\{A_n, n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{A}\}$ incompatibili, allora $P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

$\Rightarrow$ si parla di σ-additività

la prop. 3' viene presa in considerazione se si ha a che fare con una σ-algebra perché l'unione infinita deve appartenere all'algebra.

esempi:

1) urna con una palla rossa, una blu, una verde

$\Omega = \{R, B, V\}$

$\mathcal{A} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{R\}, \{B\}, \{V\}, \dots, \Omega\}$ → ogni volta che $\#\Omega < \infty$ ha senso considerare $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$

A	P(A)	
$\{R\}$	$1/2$	→ non necessariamente deve essere uguale alle altre. Ad esempio se la palla rossa è più grande delle altre è questo comporta una probabilità maggiore a $P(\{R\})$
$\{B\}$	$1/4$	
$\{V\}$	$1/4$	
$\{R, V\}$	$3/4$	
$\vdots$	$\vdots$	
Ω	1	
$\emptyset$	0	→ per la validità della prop. 2, infatti: $P(\{R\}) = P(\{R\} \cup \emptyset) = P(\{R\}) + P(\emptyset) = 1/2 + 0$

P soddisfa dunque le tre proprietà della probabilità

2) urna con componenti indistinguibili esternamente con un elemento guasto e 2 funzionanti g_1, f_1, f_2

esperimento = estrarre un componente a caso e verificarne il funzionamento

* A differenza tra le funzioni viste in analisi I e la probabilità è che la probabilità ha come argomento non un numero reale, ma un sottoinsieme di possibili esiti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 174

esempi:

1) esperimento = lancio del dado

$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$

$\mathcal{Q} = 2^{\Omega}$

$P(\{1\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$ (dado equilibrato = ogni faccia ha un numero da 1 a 6 diverso)

pag 35

$\Omega \rightarrow$ Questo è un esempio di spazio campionario con esiti equiprobabili:

Ω deve essere un insieme finito $\#\Omega = N$

$\Rightarrow P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{N\})$

ciò implica che $P(\{i\}) = \frac{1}{N}$, $i = 1, \ldots N$

Infatti $P(\Omega) = 1$ (assioma 2) e inoltre deve valere $P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{N} \{i\}) = \sum_{i=1}^{N} P(\{i\}) = N \cdot P(\{i\})$

$\Rightarrow P(\{i\}) = \frac{1}{N} \Rightarrow$ esiti equiprobabili

Per l'assioma 3 avremo perciò che $\forall A \subseteq \Omega$

$$P(A) = \frac{\text{numero di elementi di } A}{\text{numero di elementi di } \Omega} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

- $A = \{1, 2\}$
  $\Rightarrow P(A) = P(\{1, 2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = \frac{1}{3}$

- $B = \{$esce un multiplo di 3$\} = \{3, 6\}$
  $\Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$

- $C = \{$esce un numero non multiplo di 3$\} = \{1, 2, 4, 5\}$
  $\Rightarrow P(C) = \frac{2}{3} = 1 - P(B) = 1 - P(\overline{C}) = \frac{2}{3}$

- $D = \{$esce un numero pari$\}$
  $\Rightarrow P(D) = \frac{1}{2}$

- $E = \{$esce un numero $\leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
  $\Rightarrow P(E) = \frac{1}{2}$

- $F = D \cup E$
  $\Rightarrow P(F) = P(D \cup E) = P(D) + P(E) - P(D \cap E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ essendo $P(D \cap E) = P(\{2\})$

2) esperimento = urna con 5 componenti indistinguibili con 3 funzionanti e 2 guasti
estrazione senza reimbussolamento di 2 componenti

$\Omega = \{(g, g), (g, f), (f, g), (f, f)\}$

$\rightarrow$ NON È UNA SCELTA OPPORTUNA perché in questo caso $P(\{g, g\}) = P(\{f, f\})$ ma deve essere $P(\{f, f\}) > P(\{g, g\})$

Definisco Ω così:

$\Omega = \{(g_1, g_2), (g_1, f_1), (g_1, f_2), (g_1, f_3), (g_2, g_1), (g_2, f_1), (g_2, f_2), (g_2, f_3), \ldots\}$

$\#\Omega = D_{5,2} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ perché ho 5 diversi oggetti e ne voglio estrarre 2, tenendo anche conto dell'ordine in cui sono stati estratti

Definisco P assegnando valore $\frac{1}{20}$ ad ogni evento elementare, contenente una sola coppia.

- $A = \{$estraggo due guasti$\}$
  $\Rightarrow P(A) = P(\{g_1, g_2\}, \{g_2, g_1\}) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$

- $B = \{$estraggo almeno 1 funzionante$\} = \overline{A}$
  $\Rightarrow P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{9}{10}$

- $C = \{$estraggo esattamente 1 funzionante$\}$
  $\Rightarrow P(C) =$

$\rightarrow$ Considero il reimbussolamento

$\Omega = \{(g_1, g_2) \ldots\}$

$\#\Omega = D^{(R)}_{n,k} = 5^2 = 25$ perché calcolo delle disposizioni di 2 su 5 con ripetizioni

Definisco in questo caso P assegnando valore $\frac{1}{25}$ ad ogni evento elementare