NUMERO: 1729A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Analisi I - prof. Pellerey

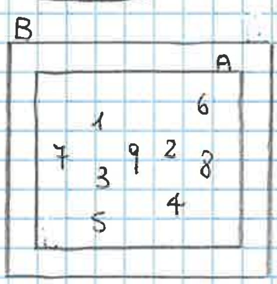
INSIEMISTICA

Un insieme è una collezione non ordinata di oggetti.
Un sottoinsieme A di X è un insieme i cui elementi sono anche elementi di X. Quindi se ammettiamo che il sottinsieme A possa coincidere con X scriveremo allora $A \subseteq X$ ('A contenuto in X'); oppure se A è un sottinsieme proprio di X, cioè non contiene tutti gli elementi di X scriveremo allora $A \subset X$ ('A contenuto propriamente in X').

- NOTAZIONE

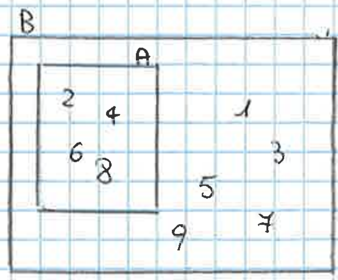
1) X, Y, A, B → nome insiemi
2) a, b, c, d → oggetti dell'insieme
3) $\in$ → appartenenza [es: $x \in A$]
4) $\notin$ → non appartenenza [es: $x \notin A$]
5) $\subseteq$ → sottoinsieme, contenuto impropriamente, inclusione
   [es: $A \subseteq B$ tutti gli oggetti di A si trovano anche in B]
   ⇒ A è sottinsieme improprio di B
   - ogni insieme è un sottoinsieme improprio di se stesso.
6) $\subset$ → sottinsieme proprio, inclusione stretta.
   [es: $A \subset B$ solo alcuni oggetti di A si trovano anche in B]
   ⇒ A è sottinsieme proprio di B
7) $\not\subseteq$ e $\not\subset$ → non è sottinsieme
8) $\emptyset$ → insieme vuoto, insieme che non contiene elementi

$A \subseteq B$



Sotto insieme improprio

$A \subset B$



→ sottoinsieme proprio

- CARDINALITÀ

La cardinalità di un insieme indica il numero di oggetti presenti all'interno dell'insieme stesso, e si indica con $\# A$.

es: $A = \{1, 2, 3, 4, a\}$

$\# A = 5$ $\quad\quad$ $\# \mathcal{P}(A) = 2^5 =$

→ in generale: se $\boxed{\begin{array}{l}\# A = n \\ \# \mathcal{P}(A) = 2^n\end{array}}$ → disposizione con ripetizione

Se un insieme finito ha cardinalità n, il suo insieme delle parti ha cardinalità 2^n

- COMPLEMENTARE

Se A è un sottinsieme di X, si definisce complementare di A in X il sottoinsieme $\bar{A}$ (oppure $\complement A$) costituito da tutti gli elementi di X che non appartengono ad A.

$$\bar{A} = \complement A = X - A = \{x \in X : x \notin A\}$$

- PROPRIETÀ:

$\boxed{\bar{X} = \emptyset}$ $\quad$ $\boxed{\bar{\emptyset} = X}$ $\quad$ $\boxed{\bar{\bar{A}} = \complement(\complement A) = A}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 304

3ª) **PROPRIETÀ ASSOCIATIVA** (L'intersezione (o l'unione) di tre o più insiemi non cambia se al posto di alcuni di essi si sostituisce la loro intersezione (o l'unione))

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4ª) **PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA**

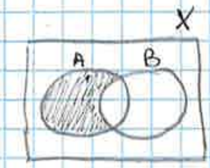
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

5ª) **LEGGI DI DE MORGAN**

- 1ª legge: $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}}$
- 2ª legge: $\boxed{\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$

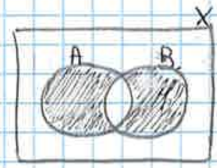
6ª) **DIFFERENZA NON SIMMETRICA**

$A \setminus B = \{ x \in A : x \notin B \} = A \cap \overline{B}$



7ª) **DIFFERENZA SIMMETRICA**

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 304

3ª) DISGIUNZIONE LOGICA ($\vee$) [$\rightsquigarrow$ max. si legge "o"]

Date due preposizioni logiche p e q, si indica con $p \vee q$ la preposizione logica la cui veridicità dipende da p e q. È vera se almeno una tra p e q è vera, è falsa quando sono entrambe false.

es: p = Torino è in Italia = V = 1 | p = Torino è in Francia = F = 0
q = Milano è in Francia = F = 0 | q = Milano è in Svizzera = F = 0
$p \vee q$ è vera poichè almeno una è vera | $p \vee q$ è falsa poichè entrambe false

4ª) IMPLICAZIONE LOGICA ($\Rightarrow$) [si legge $p \Rightarrow q$, p implica q]

Date due preposizioni logiche p e q, si indica con $p \Rightarrow q$ la preposizione logica la cui veridicità dipende da p e q. È sempre vera tranne nel caso in cui p è vera e q è falsa. In altri termini esclude che da una premessa vera si possa giungere ad una conclusione falsa, mentre non esclude che la conclusione sia vera anche se la premessa è falsa. $p \Rightarrow q$ ha gli stessi valori di veridicità di $\neg p \vee q$. ($\Rightarrow \rightsquigarrow \neg ; \vee$).

5ª) EQUIVALENZA LOGICA ($\Leftrightarrow$) [si legge $p \Leftrightarrow q$, p "è equivalente" a q, o "se e solo se"]

Date due preposizioni logiche p e q, si indica con $p \Leftrightarrow q$ la preposizione logica la cui veridicità dipende da p e q. È vera se entrambe vere o entrambe false, mentre falsa nei rimanenti casi, cioè se p e q hanno gradi di veridicità diversi. $p \Leftrightarrow q$ ha gli stessi valori di veridicità di $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. ($\Leftrightarrow \longrightarrow \neg ; \wedge$).

$$\boxed{(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \underbrace{(\neg q \Rightarrow \neg p)}_{\text{proposizione contronominale}}}$$

es: p = "X è un essere umano"
q = "X ha una madre"

$\neg p$ = X non ha avuto una madre $\Rightarrow$ $\neg q$ = X non è un essere umano

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 304

TABELLA DI VERITÀ

coincidono

min max

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
min ← 0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	1
max ← 1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1

- PREDICATO LOGICO

Il predicato logico è un enunciato $p(x, \dots)$ dipendente da uno o più argomenti $x, \dots$ variabili in opportuni insiemi, il quale diventa una proposizione logica (cioè assume valori V o F) tutte le volte che fissiamo i suoi argomenti.

- NOTAZIONE

$p(x)$, $q(x)$, $p(x,y)$ es: $p(x)$: "x è pari" → è un predicato e valgono le stesse operazioni delle proposizioni.

$$A = \{x \in X : p(x)\}$$
$$A \cap B = \{x \in X : p(x) \wedge q(x)\}$$
$$A \cup B = \{x \in X : p(x) \vee q(x)\}$$
$$\bar{A} = \{x \in X : \neg p(x)\}$$

→ PROPRIETÀ

- ALTRI QUANTIFICATORI NON BOOLEANI*

Se $E(i)$ è un espressione aritmetica con variabile libera i, allora l'espressione $\sum_{i=1}^{m} E(i)$ abbrevia la somma $E(1)+E(2)+\ldots+E(m)$. Σ è il simbolo di sommatoria.

es: si consideri la somma dei quadrati dei primi m numeri:

$1+4+9+16+25+\ldots+m^2$, questa può essere espressa come: $\sum_{i=1}^{m} i^2$

L'espressione $\prod_{i=1}^{m} E(i)$, abbrevia l'espressione $E(1)\cdot E(2)\cdot\ldots\cdot E(m)$ e Π è detto simbolo di produttoria.

es: si consideri il prodotto dei primi m numeri:

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot m$, questa può essere espressa come

$$\prod_{i=1}^{m} i$$

$\mathbb{Q}$ numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ 1,5 \; ; \; 3,\overline{5} \; ; \; -\frac{3}{2} \; , \; -\frac{2}{3} \; , \; \frac{1}{4} \right\}$$

Un numero razionale è il quoziente di due interi relativi il cui denominatore è diverso da 0, e la frazione è ridotta ai minimi termini cioè z e n non abbiano fattori comuni.

$$r = \frac{z}{n} \qquad \text{con } z \in \mathbb{Z} \quad \text{e } n \in \mathbb{N}^+$$

L'insieme $\mathbb{Z}$ è identificabile con il sottoinsieme dei razionali il cui denominatore è 1. Oltre alle frazioni appartengono all'insieme $\mathbb{Q}$ i decimali limitati (es: 0,9), e i decimali illimitati periodici (es: $1,\overline{55}$)

! → **N.B.** La rappresentazione decimale di certi numeri razionali non è unica. Se un numero ammette una rappresentazione decimale limitata, esso ammette anche la rappresentazione decimale illimitata periodica: ottenuta diminuendo di una unità la cifra decimale non nulla che si trova più a destra e aggiungendo il periodo 9.

Es: $0,\overline{9} = 1$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{9} \cdot 0,\overline{9} = \frac{(10-1)\cdot 0,\overline{9}}{9} = \frac{10 \cdot 0,\overline{9} - 0,\overline{9}}{9} = \frac{9,\overline{9} - 0,\overline{9}}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

In esso sono definite le operazioni di SOMMA, PRODOTTO, DIFFERENZA e QUOZIENTE che godono delle proprietà:
- COMMUTATIVA
- ASSOCIATIVA
- DISSOCIATIVA
- DISTRIBUTIVA
- INVARIANTIVA

Se questo è vero, posso sostituire: $(2k)^2 = 2m^2$; $\cancel{4}^{2}k^2 = \cancel{2}m^2$;

$2k^2 = m^2$.

$\to m^2$ è pari, ciò equivale a dire che m è pari. Allora sono m, n, entrambi divisibili per 2. Quindi $\frac{m}{n}$ non è irriducibile.
Ma ciò risulta essere assurdo perchè avevamo posto per ipotesi che $\frac{m}{n}$ era irriducibile. Pertanto $\frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{2}$ non può essere espresso come razionale.

Anche la lunghezza della circonferenza con il diametro non possono essere legati da un fattore di proporzionalità razionale, bensì da un irrazionale:

$\pi = 3,1415....$

Questi numeri così definiti non razionali, appartengono all'insieme $\mathbb{R}$. Esso costituisce una estensione dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. Inoltre fornisce un modello matematico della retta, cioè ogni punto P della retta è associato a uno e un solo numero reale x, detto ascissa di P, e viceversa.

$\to \mathbb{R} \begin{cases} \mathbb{Q} \\ \text{irrazionali (numeri non esprimibili per frazione)} \end{cases}$

Gli irrazionali sono caratterizzati da una rappresentazione decimale illimitata non periodica, come:

$\sqrt{2} = 1,4142.....$

$\pi = 3,1415.....$

$e = 2,7182$

$0,93457.....$

Avremo quindi: $\sqrt{2} < \frac{m}{n} - \frac{1}{N} < \frac{m}{n}$. Ma ciò porta ad una contraddizione: essa sta nel fatto che nei numeri razionali $\mathbb{Q}$ esiste un sup(A).

La proprietà di completezza di $\mathbb{R}$ è alla base della possibilità di risolvere in $\mathbb{R}$ le equazioni algebriche del tipo: $\boxed{x^n = a}$, con $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$.

$x^n = a$

- Sia $n = 0$. Allora $a = 1$ sempre $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Sia $n \in \mathbb{N}^+$ dispari. Allora $\forall a \in \mathbb{R}$ l'equazione ha in $\mathbb{R}$ esattamente una soluzione: $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to$ è detta radice n-esima di a.
- Sia $n \in \mathbb{N}^+$ pari. Allora $\forall a > 0$, l'equazione ha in $\mathbb{R}$ esattamente due soluzioni, di uguale valore assoluto ma di segno opposto; per $a = 0 \to x = 0$, per $a < 0 \to \nexists$ soluzioni in $\mathbb{R}$. La soluzione ≥ 0 dell'equazione viene indicata con $x = \pm\sqrt[n]{a} = \pm a^{\frac{1}{n}} \to$ è detta radice n-esima aritmetica di a.

4°) L'ordinamento $x < y$ dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ si estende ad $\mathbb{R}$. (cioè tutti i numeri reali sono confrontabili). I numeri reali $\neq 0$ si dividono in numeri positivi e numeri negativi.

$\mathbb{R}^+$ = numeri reali strettamente positivi; $x \in \mathbb{R}^+ \iff x > 0$

$\mathbb{R}^-$ = numeri reali strettamente negativi

$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \to$ partizione di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}^* = \{0\} \cup \mathbb{R}^+ \to$ numeri positivi o nulli; $x \in \mathbb{R}^* \iff x \geq 0$

Possiamo ora definire un ordinamento tra numeri reali ponendo:

$$\boxed{x < y \iff y - x > 0}$$

L'ordinamento è totale, cioè presi comunque due numeri reali x e y distinti, è sempre vera una e una sola delle due condizioni $x < y$ oppure $y < x$. Inoltre:

$$\boxed{x \leq y \iff (x < y) \vee (x = y)}$$

La relazione di ordine interagisce con le operazioni algebriche di somma e prodotto nel modo seguente: se $x \leq y$ e $z \in \mathbb{R}$ allora:

$$\boxed{x + z \leq y + z} \qquad \boxed{\text{se } x \leq y \text{ e se } \begin{cases} z \geq 0, \text{ allora } xz \leq yz \\ z < 0, \text{ allora } xz > yz \end{cases}}$$

- $|x-a| = b \iff x-a = \pm b \quad \forall b \geq 0$
- $|x^{2n}| = x^{2n}$ ⟶ potenze pari
- $|x^{2n+1}| = \begin{cases} x^{2n+1} & \text{se } x > 0 \\ -x^{2n+1} & \text{se } x < 0 \end{cases}$ ⟶ potenze dispari
- $x^2 = a \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow x = |a|$
- $a < |x - x_0| < b$

  senza ≤ ⇒ non comprende x_0 ⟶ quindi è un intorno bucato di x_0

- $|x+5| + |x| = 7$

$|x| \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ +x & x \geq 0 \end{cases} \qquad |x+5| \begin{cases} -x-5 & x \leq -5 \\ x+5 & x \geq -5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -x-5-x = 7 & \text{per } x \leq -5 \\ x+5-x = 7 & \text{per } -5 \leq x \leq 0 \\ x+5+x = 7 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$

- $\boxed{\sqrt{+x^2} = |x| = \pm x}$
- $\sqrt[2n]{+x^{2n}} = |x| = \pm x$
- $\sqrt[2n+1]{\pm x^{2n+1}} = \pm x$

INSIEMI LIMITATI

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, A è limitato superiormente se esiste un numero reale b tale che:

$$\boxed{\exists b \in \mathbb{R} : b \geq x \quad \forall x \in A}$$

Ogni b che soddisfa tale relazione viene detto **maggiorante di A.**

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, A è limitato inferiormente se esiste un numero reale b tale che:

$$\boxed{\exists b \in \mathbb{R} : b \leq x \quad \forall x \in A}$$

Ogni b che soddisfa tale relazione viene detto **minorante di A.**

Si dice che A è limitato se è contemporaneamente limitato sia superiormente sia inferiormente.

In generale:
- A (sottoinsieme di $\mathbb{R}$) è superiormente limitato se è contenuto in un intervallo del tipo $(-\infty, b]$ per $b \in \mathbb{R}$
- A (sottoinsieme di $\mathbb{R}$) è inferiormente limitato se è contenuto in un intervallo del tipo $[b, +\infty)$ per $b \in \mathbb{R}$
- A (sottoinsieme di $\mathbb{R}$) è limitato se è contenuto in un intervallo del tipo $[a ; b]$ per $a, b \in \mathbb{R}$

A è limitato se e solo se: $\boxed{\exists c \in \mathbb{R}^+ : |x| \leq c \quad \forall x \in A}$

Es: Sia dato $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$

$\mathbb{N}$ è un insieme limitato inferiormente perchè $\exists b \in \mathbb{R} : b \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

b = minorante di $\mathbb{N}$: $b = -3, -2, 0, -5{,}5$

$\mathbb{N}$ non è superiormente limitato, infatti vale la PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE:

$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+ : a > 0 \Rightarrow \exists n > a}$ Per ogni numero reale > 0, esiste un intero n tale che $n > b$.

- Le seguenti 2 condizioni, sono quelle da verificare per far vedere che un numero è l'estremo superiore (inferiore) di un insieme. Detto $s = \sup(A)$

I) $\forall x \in A, \quad x \leq s$
II) $\forall r \in \mathbb{R}: \quad r < s, \exists\, x \in A : x > r$

Detto $i = \inf(A)$

I) $\forall x \in A, \quad x \geq i$
II) $\forall r \in \mathbb{R}: \; r > i, \exists\, x \in A : x < r$

→ Se un insieme A non è superiormente limitato, diciamo che il suo estremo superiore è $+\infty$, ovvero poniamo per definizione:

$$A\,(a;+\infty) \Rightarrow \boxed{\sup(A) = +\infty}$$

→ Se un insieme A non è inferiormente limitato, diciamo che il suo estremo inferiore è $-\infty$, ovvero poniamo per definizione:

$$A\,(-\infty;a) \Rightarrow \boxed{\inf(A) = -\infty}$$

- COEFFICIENTE BINOMIALE

Dati due interi n e k che $0 \leq k \leq n$, definiamo il coefficiente binomiale di indici n e k la quantità:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

PROPRIETÀ

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad ; \quad \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$$

per ogni $n \geq 1$ e per ogni $0 < k < n$ vale:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}}$$

→ MODO RICORSIVO, cioè calcolare i coefficienti di indice n, dopo che noti quelli di indice $n-1$

FORMULA DI STIFEL

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$(a+b)^n$

$(a+b)^0 = 1$ $\qquad \binom{0}{0}$

$(a+b)^1 = 1 \quad 1$ $\qquad \binom{1}{0} \binom{1}{1}$

$(a+b)^2 = 1 \quad 2 \quad 1$ $\qquad \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$

$(a+b)^3 = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$ $\qquad \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$

$(a+b)^4 = 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$ $\qquad \binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$

$(a+b)^5 = 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$ $\qquad \binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$

ogni coefficiente di indice n, ad eccezione del primo e dell'ultimo, si trova al di sotto dei 2 coefficienti di indice $n-1$ che lo generano

N.B. I coefficienti binomiali sono tutti numeri interi!

N.B. $(a+b)^n$ → somma coefficienti binomiali $= 2^n$

N.B. $3n! \neq (3n)! \Rightarrow a_n = (4n)!$, $a_{n-1} = (4n-4)!$

Es. $P(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

1) per $n = 1$ è vera

2) se $n = n+1$

$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2$

$\Rightarrow 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + \underbrace{(2n+1)} = n^2 \underbrace{+2n+1}$

per $n = n+1$ è vera $\Rightarrow$ la proposizione $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

DIMOSTRAZIONE FORMULA BINOMIO DI NEWTON $\forall n \geq 0$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \forall n \geq 0$$

Per $n = 0$ si ha:

$$(a+b)^0 = 1 \quad e \quad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{0} a^0 b^0 = a^0 b^0 = 1$$ quindi $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$

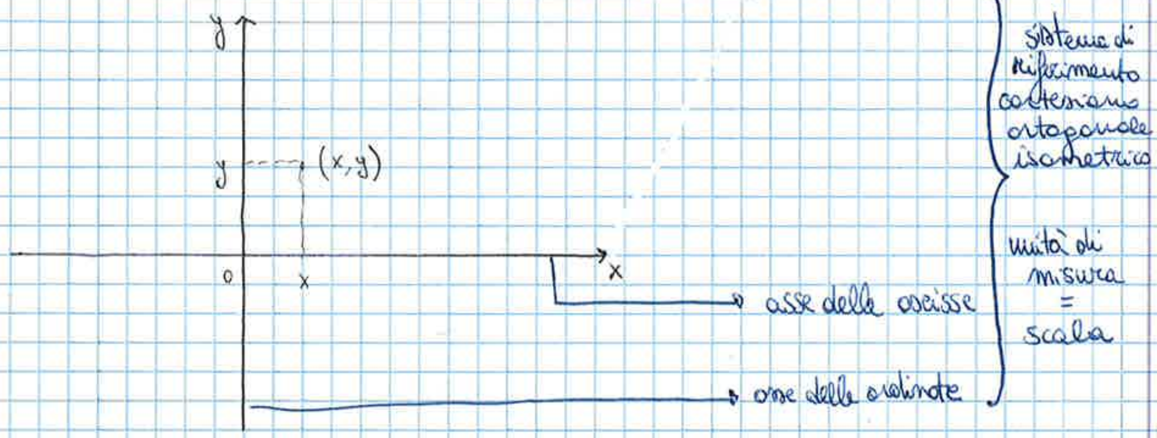
Per $n = n+1$

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = a^{n+1-k} b^k$$

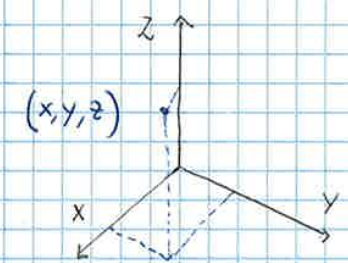
$$(a+b)(a+b)^n = (a+b) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k}$$

Vera $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ quindi $P(n)$ è vera anche quando $n = n+1$ $\Rightarrow$ $P(n+1)$ è anch'essa vera

Come l'insieme $\mathbb{R}$ costituisce un modello matematico della retta il prodotto cartesiano $X \times Y$ con $X = Y = \mathbb{R}$ costituisce $\mathbb{R}^2$ che rappresenta un modello matematico del piano. In tal modo associamo univocamente a ogni punto P del piano una coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e viceversa.



Se $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = X$, poniamo $X \times X \times \ldots \times X = X^n$. In particolare $\mathbb{R}^3$ è l'insieme delle terne (x, y, z) a componenti reali $x, y, z \in \mathbb{R}$ che costituisce un modello matematico dello spazio tridimensionale.



Ogni sottoinsieme non vuoto R di $\mathbb{R}^2$ definisce una relazione tra numeri reali: diciamo che x è in relazione con y attraverso R se la coppia ordinata $(x, y) \in R$.
Il grafico della relazione è l'insieme dei punti del piano cui coordinate stanno in R

LA RETTA: equazione retta generica $ax + by = c$

1) se $b = 0 \Rightarrow$ retta parallela a y
2) se $a = 0 \Rightarrow$ retta parallela a x
3) se $b \neq 0 \Rightarrow$ $y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{m} x + \underbrace{\frac{c}{b}}_{q}$

coefficiente angolare

$y = mx + q$

4) se $c = 0 \Rightarrow$ retta passante per l'origine ($q = 0$)

Un equazione può essere:

equazione →
- determinata: $\exists$ 1 o un numero finito di soluzioni
- indeterminata: $\exists$ infinità di possibili soluzioni di x
- impossibile: $\nexists$ x che soddisfa $f(x) = g(x)$

- **Disequazioni**

Espressioni che contengono l'incognita x aventi la seguente scrittura del tipo:

$$f(x) \geq [\leq, >, <]\ g(x)$$

Una disequazione può essere:

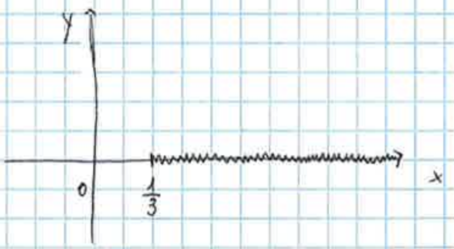
disequazione →
- determinata: $\exists$ 1 o un numero finito di soluzioni
- indeterminata: $\exists$ infinità di possibili soluzioni di x
- impossibile: $\nexists$ x che soddisfa $f(x) \geq [\leq, >, <]\ g(x)$

- disequazioni di 1° grado

$3x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{3}$

$x \in \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$



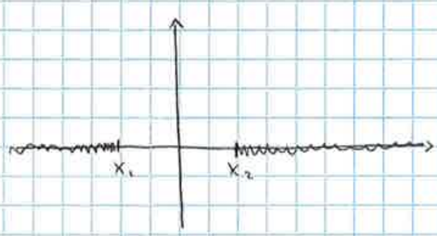
- disequazioni di 2° grado

$-2x^2 + 5x + 5 \leq 0$

$2x^2 - 5x - 5 \geq 0$

$\Delta = 25 + 40 = 65$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{65}}{4} \Rightarrow x \leq \frac{5 - \sqrt{65}}{4} \vee x \geq \frac{5 + \sqrt{65}}{4}$



REGOLA del DI CE

DI → discordi interni

CE → concordi esterni

Δ	Concordi	Discordi
$\Delta < 0$	$\forall x \in \mathbb{R}$	$\nexists x \in \mathbb{R}$
$\Delta > 0$	esterni	interni

- disequazioni irrazionali

$\sqrt[m]{a(x)} \gtrless b(x) \longrightarrow$ se m è dispari: $\left(\sqrt[m]{a(x)}\right)^m \gtrless \left(b(x)\right)^m$

se m è pari $\begin{cases} 1° \text{ caso} & \leq \\ 2° \text{ caso} & \geq \end{cases}$

1° caso: $\boxed{\leq}$

$\sqrt[m]{a(x)} \leq b(x)$

$$\boxed{\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt[m]{a(x)}\right)^m \leq \left(b(x)\right)^m \end{cases}}$$

Es: $\sqrt{16+x^2} < x-3$

$$\begin{cases} 16+x^2 > 0 \\ x-3 > 0 \\ 16+x^2 < (x-3)^2 \end{cases}$$

2° caso: $\boxed{\geq}$

$\sqrt[m]{a(x)} \geq b(x)$

$$\boxed{\begin{cases} a(x) \geq 0 \\ b(x) \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ \left(\sqrt[m]{a(x)}\right)^m \geq \left(b(x)\right)^m \end{cases}}$$

Es: $\sqrt{16+x^2} > x-3$

$$\begin{cases} 16+x^2 > 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-3 > 0 \\ 16+x^2 > (x-3)^2 \end{cases}$$

Funzione f: Siano X e Y due insiemi. Una funzione f definita in X a valori in Y è una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in X$ al più un elemento $y \in Y$.

$$f : X \to Y$$

Dominio: L'insieme degli $x \in X$ a cui f associa un elemento Y forma il dominio di f. Esso è dunque un sottoinsieme di X, che indicheremo con: D, C.E. (campo d'esistenza), $\mathrm{dom} f$, in cui varia la variabile indipendente:

$$\boxed{f : \mathrm{dom} f \subseteq X \to Y}$$

Se $\mathrm{dom} f = X$, diremo che f è definita su X ($f : X \to Y$)

DOMINIO DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

FUNZIONE	DOMINIO
x^m, $m \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^m}$, $m \in \mathbb{N}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$\sqrt[m]{x}$, $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$	$\begin{cases} [0; +\infty) & \text{se } m \text{ è pari} \\ \mathbb{R} & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$
x^q, $q \in \mathbb{Q}$, $q \notin \mathbb{Z}$	$\begin{cases} [0; +\infty) & \text{se } q > 0 \\ (0; +\infty) & \text{se } q < 0 \end{cases}$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$	$(0; +\infty)$
a^x, $a > 0$	$\mathbb{R}$
$\log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$	$(0; +\infty)$
$\mathrm{sen}\, x / \cos x$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\, x = \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}$	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\, x}$	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$

Controimmagine Sia poi y un generico elemento di Y, la **controimmagine** di y attraverso f è l'insieme:

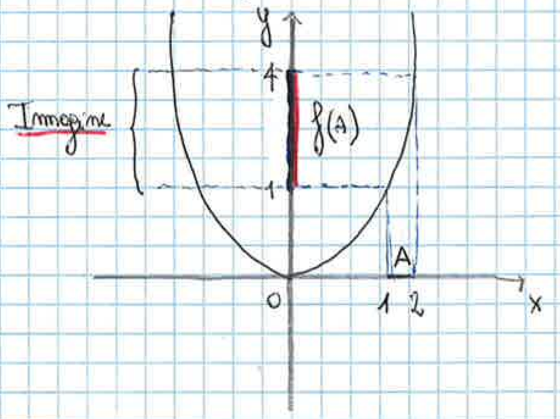
$$\boxed{f^{-1}(y) = \{ x \in \operatorname{dom} f : f(x) = y \}}$$

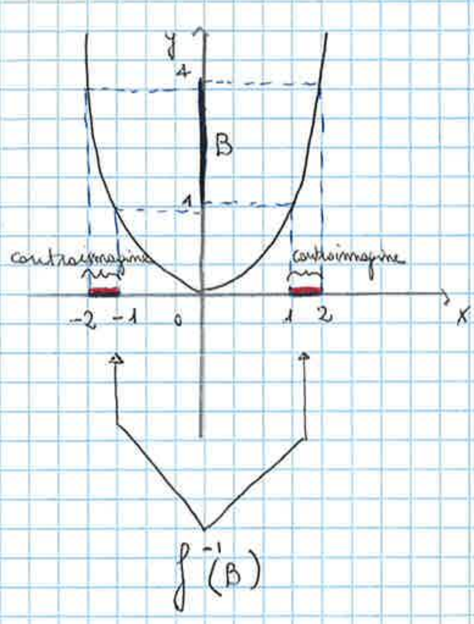
degli elementi di X che hanno come immagine y. Tale insieme è vuoto se e solo se y non sta nell'immagine di f. Se B è un sottoinsieme di Y, la **controimmagine di B attraverso** f è l'insieme unione di tutte le controimmagini degli elementi di B:

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{ x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in B \}}$$

- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ $\forall$ sottoinsieme A di $\operatorname{dom} f$
- $f(f^{-1}(B)) = B \cap \operatorname{im} f \subseteq B$ $\forall$ sottoinsieme B di Y

Es: $f(x) = x^2$





Intersezione con gli assi: Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'intersezione con gli assi si calcola risolvendo i due sistemi d'equazione:

$$\begin{cases} x = 0 \\ f(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ f(x) \end{cases}$$

Max e min: Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel suo dom f e avente im f. Diciamo che f è limitata superiormente se im f è limitata superiormente, cioè se

$$\boxed{\sup f(x) < +\infty} \qquad \boxed{\begin{array}{l} M(x_M; f(x_M)) \\ f(x) \leq M \end{array}}$$

Se $\sup f(x)$ è finito, allora esso è il massimo per f.

→ Il punto di max è il valore $x \in$ dom f : $f(x)$ è il MAX di f.

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita nel suo dom f e avente im f. Diciamo che f è limitata inferiormente se im f è limitata inferiormente, cioè se

$$\boxed{\inf f(x) > -\infty} \qquad \boxed{\begin{array}{l} m(x_m; f(x_m)) \\ f(x) \geq m \end{array}}$$

Se $\inf f(x)$ è finito, allora esso è il minimo per f

→ Il punto di min è il valore $x \in$ dom f : $f(x)$ è il min di f.

INTORNO DI UN PUNTO: Dato un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$, è detto intorno di x_0 (I_{x_0}), un qualunque intervallo aperto che contiene x_0

Es: $\quad x_0 = 3 \qquad I_{x_0}(-2; +5)$

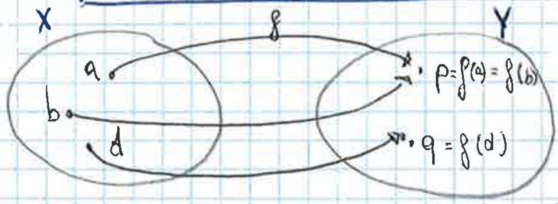
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 304

Funzione Suriettiva: Data $f: X \to Y$, f dicesi suriettiva su Y se $\boxed{\operatorname{im} f = Y}$

Cioè:

$\boxed{\forall y \in Y \text{ è immagine di almeno un elemento } x \in X}$

[c.s. affinché una funzione sia suriettiva è che $\operatorname{im} f = \mathbb{R}$]



[in una funzione suriettiva non vi sono elementi di B su cui non finiscono frecce]

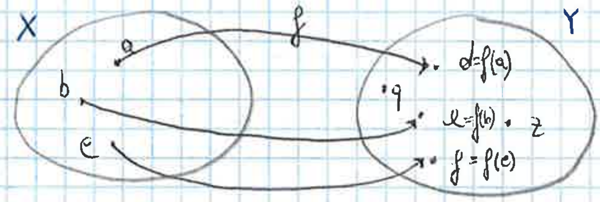
Funzione Iniettiva: Data $f: X \to Y$, f dicesi iniettiva se $\boxed{\forall y \in \operatorname{im} f}$ $\boxed{\text{è immagine di un solo elemento } x \in X}$ cioè quando $\nexists$ due valori di x cui corrisponde la stessa immagine.

[c.s. affinché f sia iniettiva è che sia strettamente monotona]

[c.s. affinché f NON sia iniettiva è che sia pari]

[c.s. affinché f NON sia iniettiva è che sia periodica]

Una funzione è iniettiva se collega elementi distinti di A con elementi distinti di B, cioè se presi $\boxed{x_1, x_2 \in X,}$ $\boxed{\text{con } x_1 \neq x_2, \text{ risulta } f(x_1) \neq f(x_2)}$.



[in una funzione iniettiva non vi sono mai due frecce che finiscono sullo stesso elemento di B]

Funzione Inversa: Se una funzione f è iniettiva, possiamo associare ad ogni elemento y dell'immagine l'unico elemento x del dominio tale che $f(x) = y$. Tale corrispondenza determina una funzione definita in Y a valori in X che viene detta funzione inversa di f ed è indicata con il simbolo f^{-1}.

[c.n.s. affinché f sia invertibile è che sia iniettiva]

[c.s. affinché f sia invertibile è che sia biettiva]

[c.s. affinché f sia invertibile è che sia strettamente monotona e continua nel suo dom]

$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

La funzione f^{-1} ha come $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{im} f$ e come $\operatorname{im} f^{-1} = \operatorname{dom} f$

N.B. Una funzione iniettiva è dunque invertibile, i due concetti coincidono.

$[f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1}]$ (identità: $f^{-1} \circ f$ infatti preso x $f^{-1}(f(x)) = x$)

NOTE: 1) Se f è $\boxed{\text{suriettiva}}$, vuol dire che il problema ha almeno una soluzione $\forall y \in Y$

2) Se f è $\boxed{\text{iniettiva}}$, vuol dire che il problema ha una soluzione unica (se esiste)

3) Se f è $\boxed{\text{biettiva}}$, vuol dire che $\forall y \in Y$ esiste una e una sola soluzione $x \in Y$

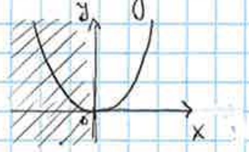
4) Se f non è iniettiva su tutto il suo dominio, lo può essere su un sottoinsieme $A \subseteq \text{dom} f$ e dunque risulta essere invertibile: (restrizione di f ad A)

$f: X \to Y$ non iniettiva $\Rightarrow A \subseteq X \quad [X \equiv \text{dom} f]$

$\boxed{f_{|A}: A \to Y \;:\; f(x) = f_{|A}(x) \;\; \forall x \in A}$ è iniettiva quindi invertibile

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 \;\to$ non iniettiva perchè pari nel suo dom$f$

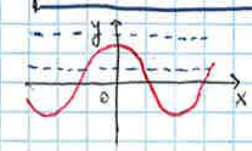
$\Rightarrow$ restringiamo all'intervallo $A[0\,;\,+\infty) \Rightarrow$ è iniettiva

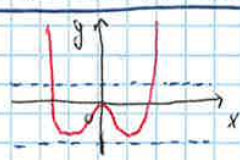


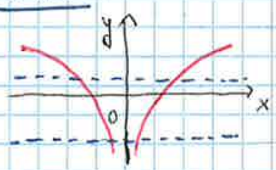
$f: A \to \mathbb{R}$

6) Esistono funzioni $\boxed{\text{non biettive}}$ (e quindi non contemporaneamente iniettive e suriettive) che sono $\boxed{\text{invertibili}}$ perchè iniettive.

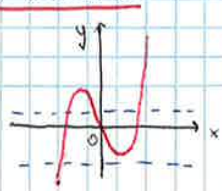
7) Tutte le funzioni $\boxed{\text{PARI}}$ NON sono INIETTIVE, NON sono BIIETTIVE, ma possono ESSERE o NON ESSERE SURIETTIVE.

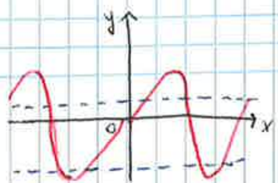






8) Tutte le funzioni $\boxed{\text{DISPARI}}$ possono ESSERE o NON ESSERE INIETTIVE, SURIETTIVE, BIIETTIVE





Conseguenze: Se f è strettamente monotona nel suo dom f, allora f è iniettiva, quindi esiste la funzione inversa f^{-1}, che risulta essere anch'essa strettamente monotona, in modo concorde con f (cioè entrambe strettamente crescenti / strettamente decrescenti).

[strettamente monotona
f
iniettiva — invertibile]

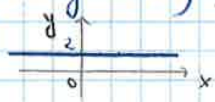
Dim. Supponiamo che f è strettamente crescente. Presi due numeri $x_1, x_2 \in \text{dom} f$ con $x_1 \neq x_2$, distinguiamo due casi:

- Se $x_1 < x_2$, otteniamo che $f(x_1) < f(x_2)$ e quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Se $x_2 < x_1$, otteniamo che $f(x_2) < f(x_1)$ e quindi $f(x_1) \neq f(x_2)$ ∎

N.B. L'implicazione logica: f strettamente monotona nel suo dom $\Rightarrow$ f è iniettiva non può essere rovesciata! Cioè una f può essere iniettiva senza essere strettamente monotona sul suo dominio.

N.B. La somma di f monotone concordi (cioè entrambe $\nearrow$ o $\searrow$) è ancora una funzione dello stesso tipo, ed è strettamente monotona se almeno una delle due f lo è.

N.B. Una funzione costante (es. $f(x) = 2$) è sia crescente che decrescente, ma non strettamente.



Es: $f(x) = \dfrac{3x^2+5x+2}{\sqrt{x}}$ $\qquad g(x) = \dfrac{\log x}{x^2-1}$

$h = f \circ g = ? = f(g(x))$ $\Rightarrow$ $\text{dom}(g(x))$: $x^2-1 \neq 0 \ \cup \ x>0$

dom g: $(0;+1) \cup (+1;+\infty)$

$\Rightarrow$ $\text{dom}(f(x))$: $\sqrt{x} > 0$

dom f: $(0;+\infty)$

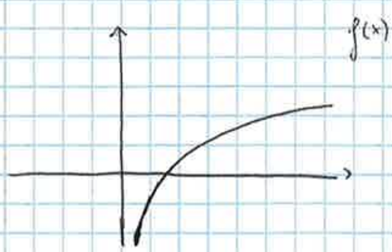
$\boxed{\text{adesso poichè } f(g(x)) \text{ , } g(x) = \text{img } g \in \text{dom } f(x)}$

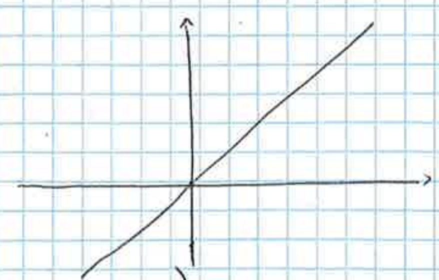
$\text{img } g = (0;+\infty) \cap \text{dom } f(x) \Rightarrow \underbrace{\text{dom}(f \circ g) = (0;1) \cup (1;+\infty)}_{\text{per } x \in \text{dom } g \ \cup \ g(x) \in \text{dom } f(x)}$

$$\Rightarrow f(g(x)) = f \circ g = \frac{3\left(\frac{\log x}{x^2-1}\right)^2 + 5\left(\frac{\log x}{x^2-1}\right) + 2}{\sqrt{\frac{\log x}{x^2-1}}}$$

Es: $f(x) = \log x$ $\qquad g(x) = x$

$h = f \circ g = ? = f(g(x))$





$\text{dom}(f \circ g) = \text{dom } g \cap (\text{img } g \cap \text{dom } f)$

$= \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap (0;+\infty) \Rightarrow \text{dom}(f \circ g) = (0;+\infty)$

$f \circ g = f(g(x)) = \log(x)$

⑥ Se f è una funzione iniettiva (e dunque $\exists\, f^{-1}$) si ha

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}\circ f(x) &= f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in \text{dom} f \\ f\circ f^{-1}(y) &= f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in \text{img} f \end{aligned}}$$

Quindi definiamo funzione identità su un insieme X la funzione $id_X : X \to X$ tale che $id(x) = x \ \forall\, x \in X$ si ha quindi

$$\boxed{f^{-1}\circ f = id_{\text{dom}f} \text{ e } f\circ f^{-1} = id_{\text{img}f}}$$

⑦ Se f e g sono funzioni reali di variabile reale (ovvero $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$) entrambe monotone anche $f\circ g = f(g(x))$ sarà monotona.
In particolare monotona crescente ($\nearrow$) se sia f che g monotone crescenti oppure entrambe monotone decrescenti. $f(g(x))$ sarà monotona decrescente ($\searrow$) negli altri casi.

f	g	$f\circ g$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

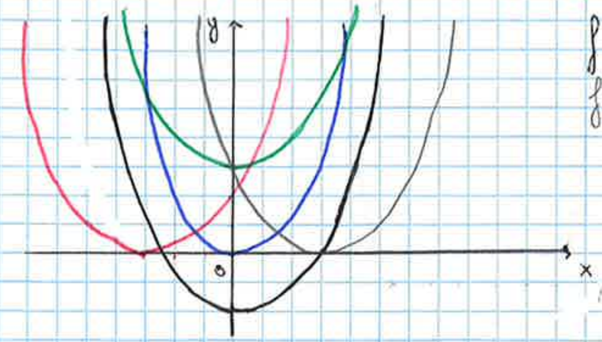
come per + e − → (per memorizzarlo)

a	b	a×b
+	+	+
−	−	+
+	−	−
−	+	−

⑧ Se f è strettamente monotona, $f(g(x))$ mantiene gli intervalli di monotonia della più interna: $g(x)$.

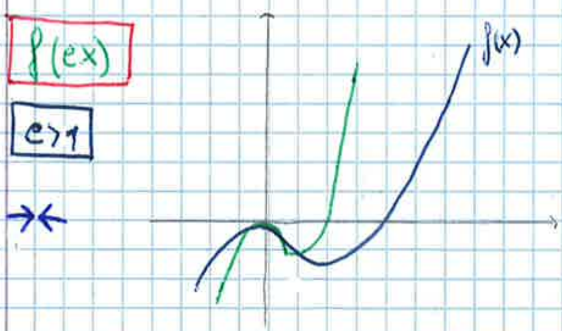
Es: $f(x) = x^2$ $\quad f(x+c) = (x+3)^2 \quad f(x)+c = x^2+6$ $[c>0]$

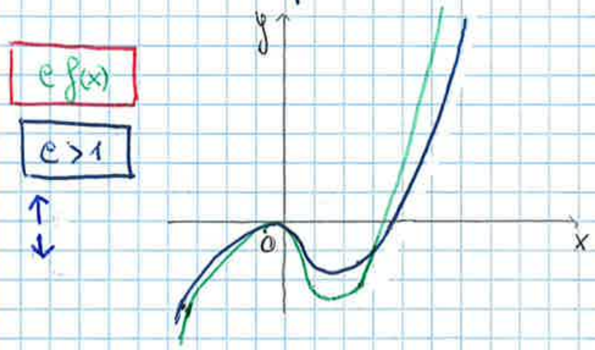
$f(x)+c = x^2-3$, $f(x+c) = (x-3)^2$ $[c<0]$

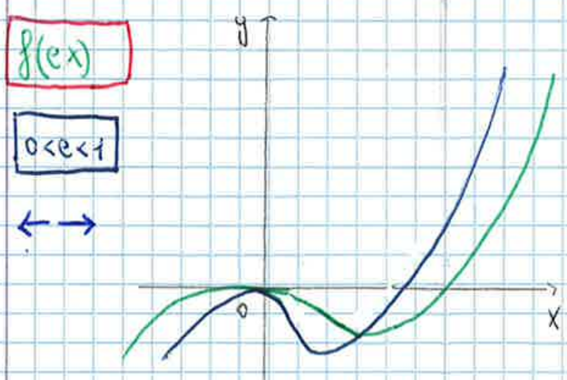


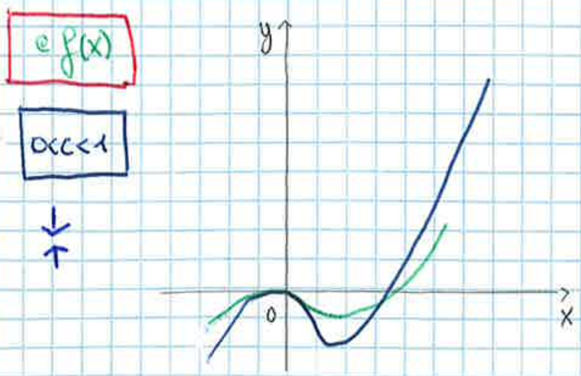
- Cambiamenti di scala: [si indicano con Sc]

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Fissato un numero reale $c>0$ $(c \in \mathbb{R}^+)$. Indichiamo con $g(x)$ la funzione $g(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = cx$, $g: x \longmapsto cx$. La composizione di f con g ha l'effetto di un cambiamento di scala nel grafico di f. Se $c>1$ $f \circ g = h = \boxed{f(cx)}$ si comprime orizzontalmente rispetto al grafico di f, se $0<c<1$, il grafico si dilata orizzontalmente. Similmente, il grafico di $g \circ f = l = \boxed{c f(x)}$ se $c>1$ si dilata verticalmente, se $0<c<1$ si comprime verticalmente.



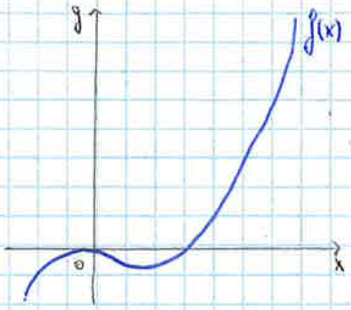


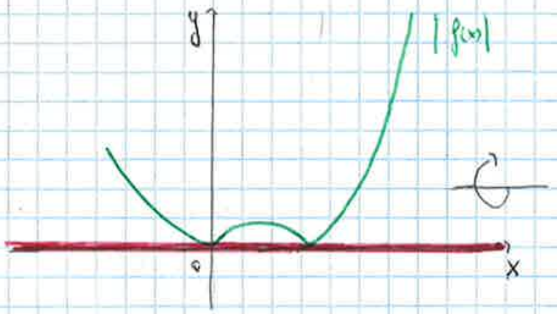




Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il grafico della funzione $\boxed{|f(x)|}$ coincide con quello di f dove $f(x) \geq 0$, mentre si ottiene dal grafico di f per riflessione speculare rispetto all'asse x dove $f(x) < 0$.

$\boxed{|f(x)|}$

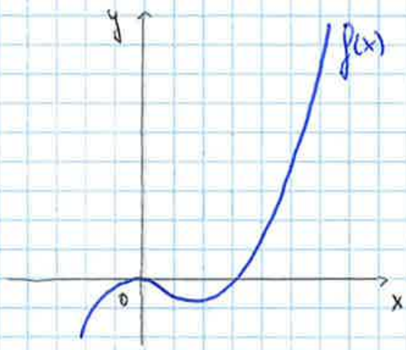


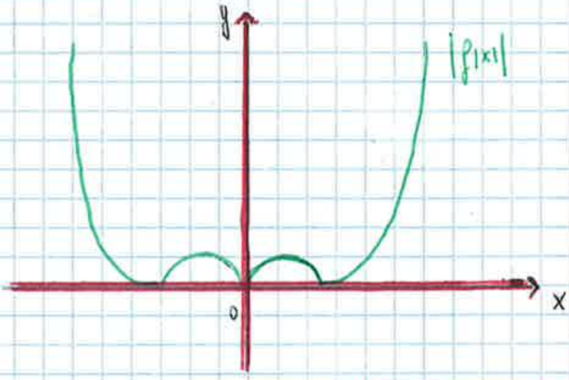


Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il grafico della funzione $|f(|x|)|$ coincide con quello di f dove $f(x) \geq 0$, mentre si ottiene dal grafico di f per riflessione speculare rispetto all'asse x dove $f(x) < 0$ (per $x \geq 0$), per $x < 0$ il grafico si ottiene per riflessione speculare rispetto all'asse y

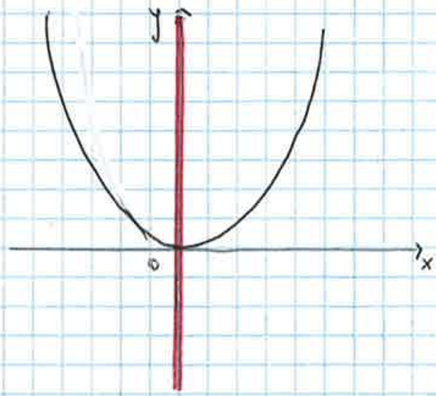
$\boxed{|f(|x|)|}$

$\text{img} f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$



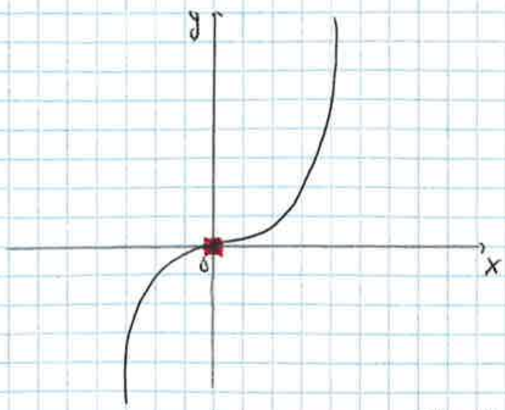


$\boxed{\text{PARI}}$ $\boxed{f(-x) = f(x)}$



Simmetrica rispetto all'asse y

$\boxed{\text{DISPARI}}$ $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

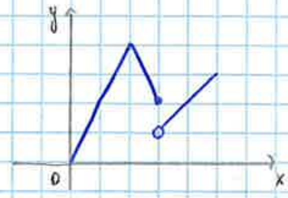


Simmetrica rispetto all'origine

- FUNZIONI DEFINITE A TRATTI: (Valore assoluto, segno, parte intera, mantissa)

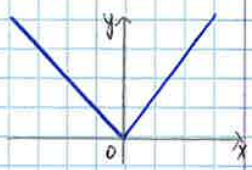
Le funzioni reali a variabile reale possono essere definite a tratti, ossia attraverso espressioni diverse su intervalli diversi. [NOTA: si è solito esprimere delle funzioni non continue, attraverso una f^* definita a tratti dove essa risulta essere continua].

Es:
$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ x-1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$



- VALORE ASSOLUTO*:

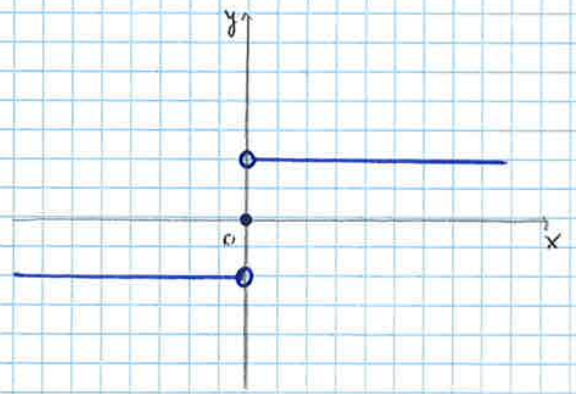
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$



(dom f: $\forall x \in \mathbb{R}$; img $f = \mathbb{R}^+$)

- SEGNO (sign(x))

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad f(x) = \boxed{\text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$



$$\underbrace{12}_{\text{parte intera}},\underbrace{3073}_{\text{mantissa}}$$

(dom f: $\mathbb{R}$; img f $[1 ; -1]$)

- **MANTISSA** (funzione che toglie tutte le cifre prima della virgola) $(M(x))$

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \boxed{M(x) = x - [x]}$$

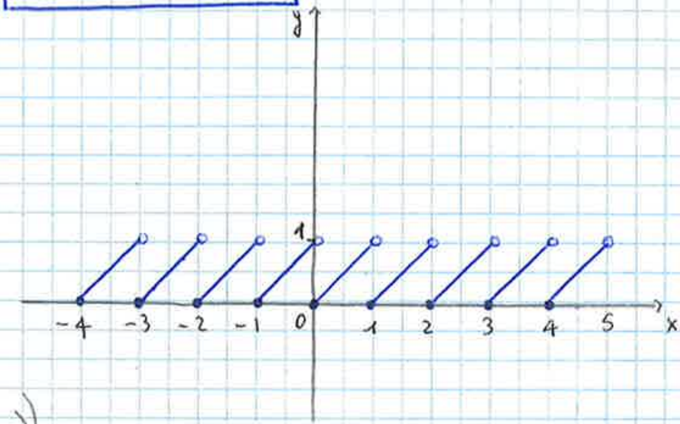
Es: $M(0) = 0$

$M(1) = 0$

$M(1,49) = 0,49$

$M(-2) = 0$

$M(-3,49) = -0,49$



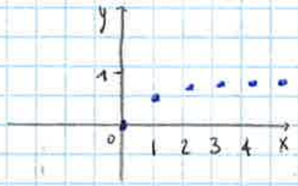
(dom f: $\mathbb{R}$, imm f $[0; 1)$)

N.B. Si ha $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{0 \leq M(x) < 1}$

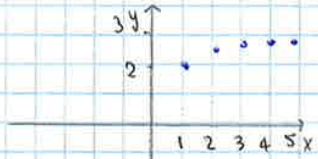
- **SUCCESSIONI**

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

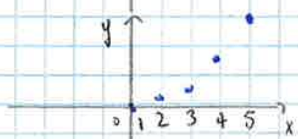
Es: $\boxed{a_n = \frac{n}{n+1}}$



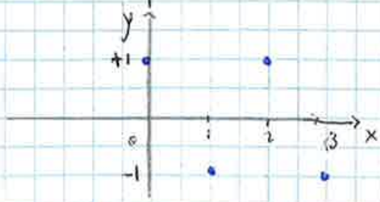
$\boxed{a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$



$\boxed{a_n = n!}$



$(n \geq 0)$ $\boxed{a_n = (-1)^n = \begin{cases} +1 & n \text{ è pari} \\ -1 & n \text{ è dispari} \end{cases}}$



- FUNZIONI RAZIONALI INTERE (POLINOMIALI)

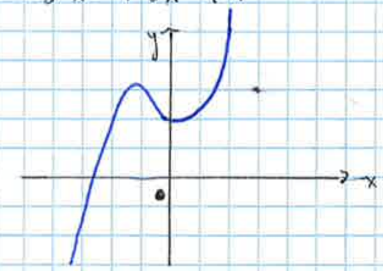
Le espressioni analitiche delle funzioni razionali intere sono i polinomi.
Un polinomio nella variabile x è un'espressione del tipo:

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$ con $a_n \neq 0$, $a_n \in \mathbb{R}$

$(\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R})$

Il più grande degli esponenti (n nella formula) al quale compare elevata la variabile x si chiama grado del polinomio. La somma il prodotto di due o più polinomi sono ancora polinomi.

Es: $f(x) = 3x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 1$ $\qquad \mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$



N.B. le funzioni polinomiali sono definite su tutto $\mathbb{R}$. La funzione è pari se e solo se tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli. La funzione è dispari se e solo se tutti i coefficienti di indice pari sono nulli (0 è un numero pari).

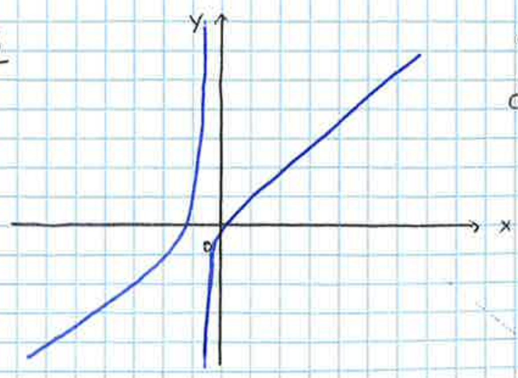
- FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

Possono essere sempre espresse come rapporto di due polinomi:

$f: x \to \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ $\qquad \boxed{f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}}$ $\qquad \left(\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \cup Q(x) \neq 0\right)$

Se P e Q non hanno fattori comuni il dominio della funzione sarà $\mathbb{R} - \{Q(x) = 0\}$.

Es: $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$



dom f $x^2 - 1 \neq 0$
dom f $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

- FUNZIONI ELEVAMENTO A POTENZA

$\boxed{f(x) = x^{\alpha}}$ $\qquad f: x \to x^{\alpha}$

- Se $\alpha = 0 \Rightarrow y = x^0 = 1$

In generale per $\alpha = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ con $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$ privi di fattori comuni la funzione $y = x^{\frac{n}{m}}$ è definita come $y = (x^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x^n}$

- α pari $\quad y = x^{\alpha} \to$ grafico pari simmetrico rispetto all'asse y. $[\text{dom} f = \text{img} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}]$
- α dispari $\quad y = x^{\alpha} \to$ grafico dispari simmetrico rispetto O. $[\text{dom} f = \text{img} = \mathbb{R}]$

Definiamo adesso la potenza a^{α} partendo dalle potenze a esponente razionale e facendo uso della densità dei numeri razionali in $\mathbb{R}$:

$$a^{\alpha} \quad \text{con} \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{\mathbb{Q}\}$$

Se $a \geq 1$ possiamo porre $\quad a^{\alpha} = \sup \left\{ a^{\frac{n}{m}} : \frac{n}{m} \leq \alpha \right\}$

se $0 \leq a < 1$ poniamo $\quad a^{\alpha} = \inf \left\{ a^{\frac{n}{m}} : \frac{n}{m} \leq \alpha \right\}$

Pertanto la funzione $y = x^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \{\mathbb{Q}\}$ risulta definita su $[0, +\infty)$ e strettamente crescente su questo intervallo, con immagine in $[0; +\infty)$

N.B. Le funzioni $y = x^{\alpha}$ per ogni valore di $\alpha > 0$. Esse sono tutte almeno definite su $[0; +\infty)$ e strettamente crescenti su tale intervallo. Inoltre tutte soddisfano $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

N.B. Se $\alpha < \beta$ si ha: $\quad 0 < x^{\beta} < x^{\alpha} < 1 \quad$ per $0 < x < 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x^{\alpha} < x^{\beta} < 1 \quad$ per $x > 1$

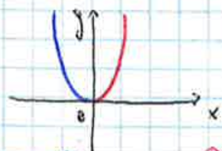
$f: x \longrightarrow x^r$

Se $r \in \mathbb{N} \longrightarrow \text{dom} f \equiv \mathbb{R}$

Se $r \in \mathbb{Q} \longrightarrow x^r = x^{\frac{n}{m}}$
- se m dispari $\text{dom} f \equiv \mathbb{R}$
- se m pari $x^n \geq 0$ $\text{dom} f \equiv \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

se $r \in \mathbb{R}$
- $\longrightarrow \text{dom} f \equiv \mathbb{R}^+$ se la base $x \geq 0$
- $\longrightarrow \text{dom} f \equiv \mathbb{R}^-$ se la base $x \leq 0$

Es:



$f(x) = (-x)^{\pi}$ $\quad f(x) = x^{\pi}$

- FUNZIONI ESPONENZIALI (suriettiva e iniettiva => biunivoca => invertibile)

$\boxed{f(x) = a^x}$ con $a \in \mathbb{R}^+$

(dom f: $\forall x \in \mathbb{R}$) → img f $(0; +\infty)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (dom → img)

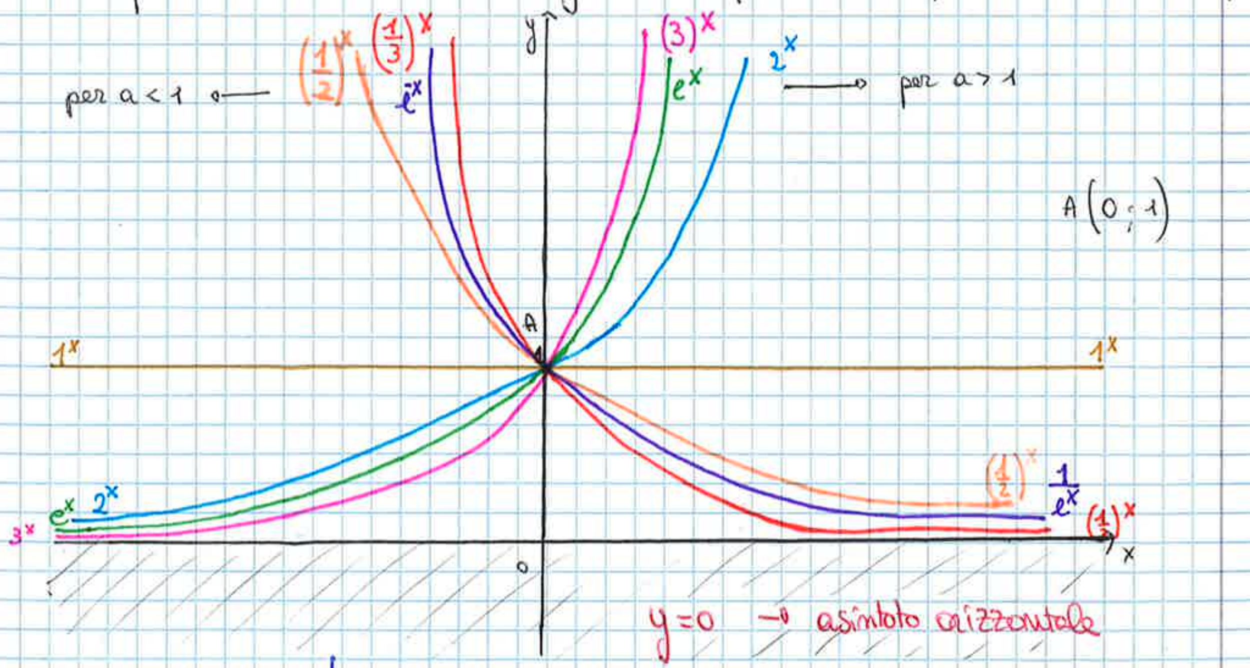
$f: x \rightarrow a^x$

Essa soddisfa $y(0) = a^0 = 1$

- se $\boxed{a > 1}$ → f è strettamente crescente (img f $(0; +\infty)$) ↗
- se $\boxed{a = 1}$ → f è costante ed è uguale a 1 —
- se $\boxed{a < 1}$ → f è strettamente decrescente (img f $(0; +\infty)$) ↘
- se $\boxed{a \neq 1}$ → f è $\boxed{\text{strettamente monotona su } \mathbb{R}}$ dunque $\boxed{\text{invertibile}}$ → $\log x$

Se a^x con $x_1 < x_2$ $\begin{cases} a^{x_1} < a^{x_2} & \text{se } a > 1 \\ a^{x_1} > a^{x_2} & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

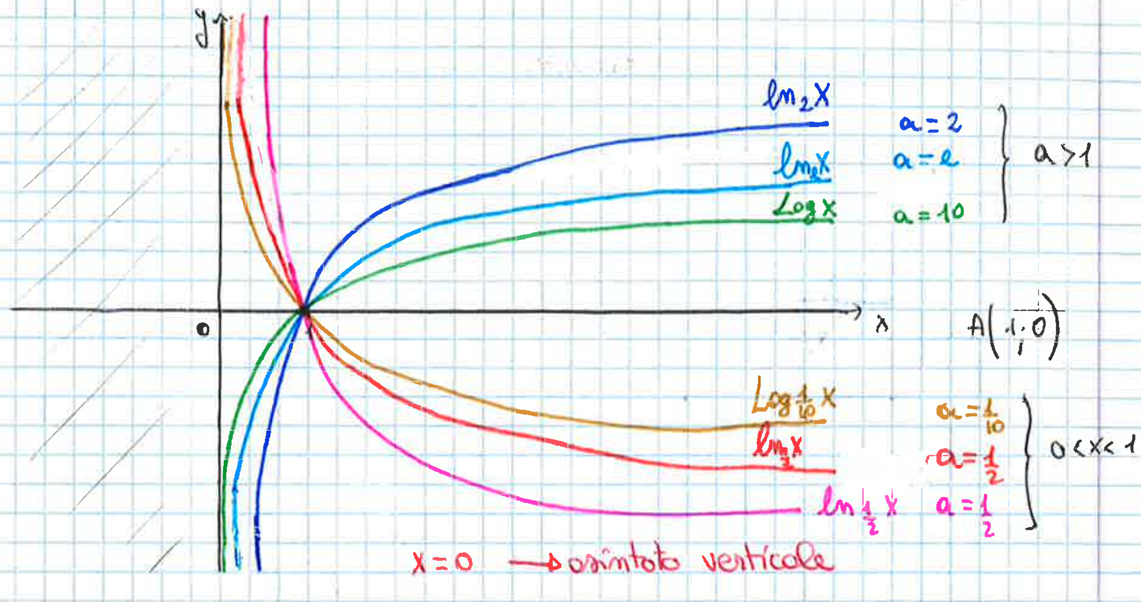
* caso particolare: $a \equiv e$ => $f(x) = e^x$ (dove $e = 2{,}71828\ldots$ = numero di Nepero => si ha l'esponenziale naturale ($y = \exp(x)$))



N.B. Se $a < 1$ ↘

Se $a > 1$ ↗

se $a > 1$
dopo lo 0 i valori di a maggiori crescono più rapidamente
prima dello 0 i valori di a maggiori crescono più lentamente
viceversa se $a < 1$



N.B. $\log_a b$: → se $a=e \Rightarrow \ln b$ → logaritmo naturale
: → se $a=10 \Rightarrow \log_{10} b \equiv \operatorname{Log} b$ → logaritmo in base 10.

N.B. Se $\log_a b$, per valori + piccoli di a, la curva logaritmica cresce più rapidamente dopo l'1. Cresce più lentamente prima dell'1.

N.B.
- $\log 2^2 = 2 \log 2$
- $\log x^3 = 3 \log x$
- $\boxed{\log x^2 = 2 \log |x|}$
- $\log [\underbrace{(x-2)(x+3)}] = \log (x-2) + \log (x+2)$

prima di separarlo come somma imponi il dominio

infatti $\log[(-3)(-2)] = \log 6 = \log(-3) + \log(-2)$

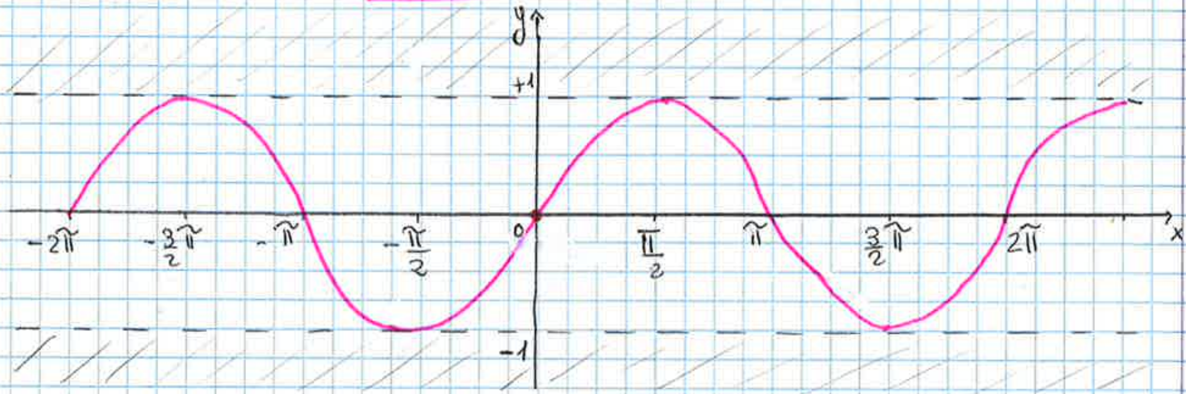
$\nexists \qquad \nexists$

Se incrementiamo o decrementiamo di 2π la lunghezza x compiamo un intero giro della circonferenza rispettivamente in senso orario o antiorario ritornando allo stesso P(x). Quindi vale la relazione di periodicità.

$$\boxed{P(x \pm 2\pi) = P(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

- FUNZIONE SENO:

$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$ $\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $(\operatorname{dom} f: \mathbb{R},\ \operatorname{img} f\ [-1, 1])$



N.B.

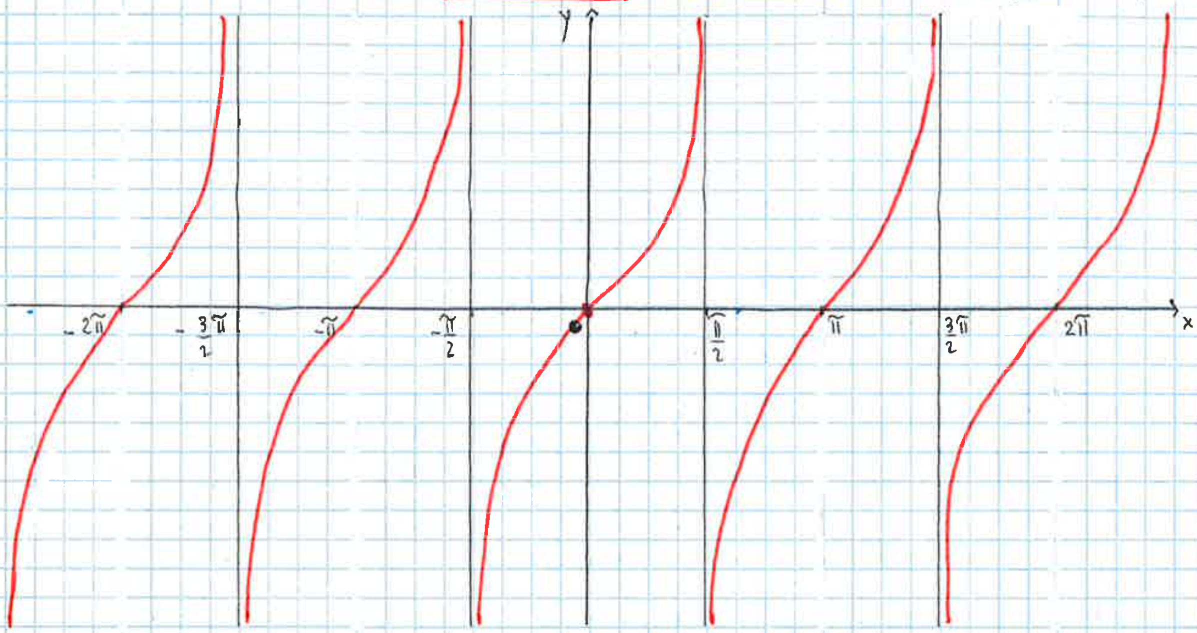
- La funzione seno è dispari $\Rightarrow$ $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ (simmetrica rispetto all'origine)
- La funzione seno è definita in $\mathbb{R}$ e ha come img f $[-1, 1]$ quindi limitata sia superiormente che inferiormente.
- La funzione seno è una funzione periodica di periodo minimo 2π
- La funzione seno è **SURIETTIVA**, cioè assume tutti i valori compresi tra -1 e 1.
- La funzione seno **NON è INIETTIVA**: ciascun valore viene assunto infatti almeno una volta in ogni periodo.
  $\Rightarrow$ non invertibile nel suo dom(f).

N.B.

- La funzione seno **DIVENTA INIETTIVA**, quindi **INVERTIBILE** se la consideriamo solo nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

MONOTONIA $\rightarrow$ $f(x) = \operatorname{sen} x$ è $\begin{cases} \text{strettamente crescente in } \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ \text{strettamente decrescente in } \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right] \end{cases}$

- **FUNZIONE TANGENTE:** $\boxed{f(x) = tg\,x}$ $\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $\left(dom\, f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, \; img(f) = \mathbb{R}\right)$



$\boxed{f(x) = tg\,x} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}}$

N.B.
- La tangente è una funzione definita in $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ e ha come immagine $\mathbb{R}$ quindi non è una funzione limitata
- La tangente è periodica di π
- La tangente ha asintoti verticali in $\frac{\pi}{2} + k\pi$
- La funzione tangente è dispari (simmetrica rispetto all'Origine)
- La funzione tangente è $\boxed{\text{SURIETTIVA}}$, cioè assume tutti i valori dell'img(f).
- La funzione tangente $\boxed{\text{NON è INIETTIVA}}$ cioè ciascun valore infatti viene assunto almeno una volta in ogni periodo.
  $\Rightarrow$ non invertibile nel suo dom(f)

N.B.
- La funzione tangente $\boxed{\text{DIVENTA INIETTIVA}}$, quindi $\boxed{\text{INVERTIBILE}}$ se la consideriamo solo nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$

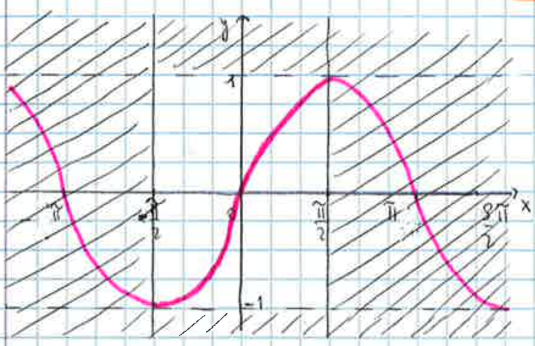
$\boxed{\text{MONOTONIA}} \rightarrow$ $\boxed{f(x) = tg\,x \text{ è } \left\{ \text{sempre strettamente crescente su ogni } \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right.}$

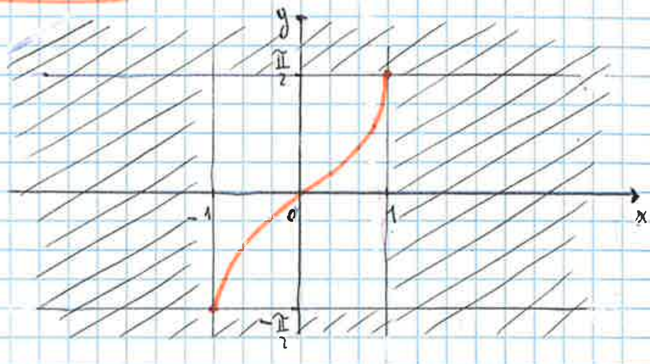
- FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE:

Le funzioni trigonometriche, in quanto periodiche, non sono ovviamente invertibili su tutto il loro dominio. Per effettuarne l'inversione esse vengono ristrette ad un intervallo massimale di monotonia stretta; per ciascuna funzione si sceglie un intervallo principale di invertibilità.

- FUNZIONE ARCOSENO

$\boxed{f(x) = \arcsin x}$ $\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $\left(\text{dom} f \left[-1; 1\right];\ \text{img} f \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]\right)$



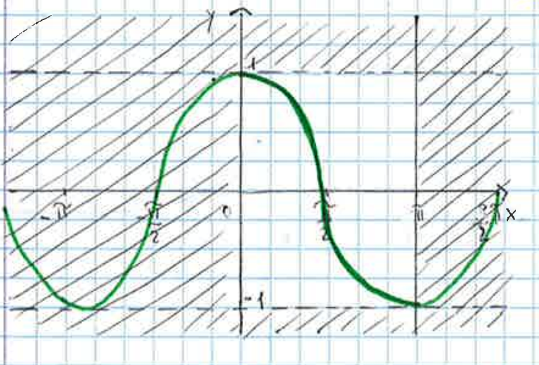


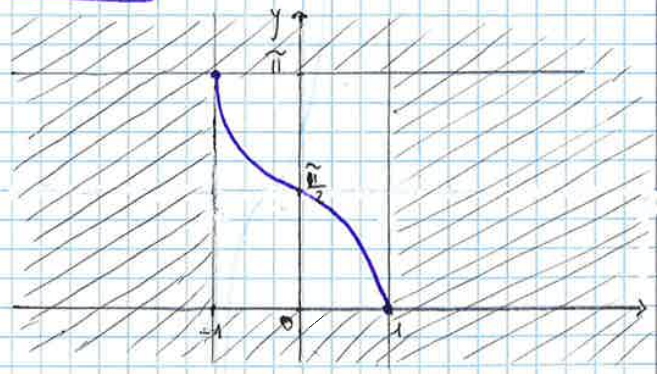
INVERSA
1° ↻
2° specchio

funzione seno → SURIETTIVA sempre
→ INIETTIVA solo in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
⇓
INVERTIBILE

- FUNZIONE ARCOCOSENO

$\boxed{f(x) = \arccos x}$ $\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $\left(\text{dom} f \left[-1; 1\right];\ \text{img} \left[0; \pi\right]\right)$





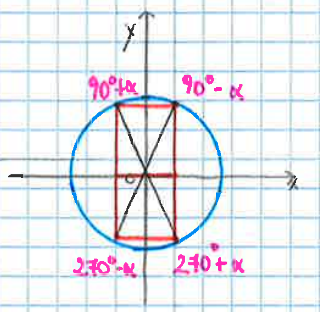
funzione coseno → SURIETTIVA sempre
→ INIETTIVA solo in $\left[0; \pi\right]$
⇓
INVERTIBILE

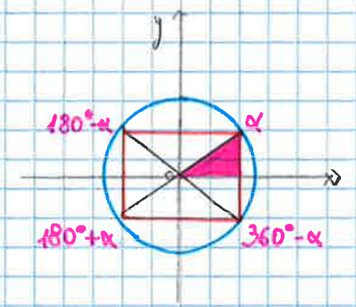
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 304

- VALORI NOTEVOLI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE:

GRADI	RAD	SEN	COS	TAN	COTAN
$0°$ ($\equiv 360°$)	0	0	1	0	$\nexists\ (\to +\infty)$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists\ (\to +\infty)$	0
$180°$	π	0	-1	0	$\nexists\ (\to -\infty)$
$270°$	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\nexists\ (\to -\infty)$	0

SEGNO	SEN	COS	TAN	COTAN
1° quadr.	+	+	+	+
2° quadr.	+	−	−	−
3° quadr.	−	−	+	+
4° quadr.	−	+	−	−





$\cos(90° + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$

$\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}(270° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{cotg}(90° + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

$\downarrow$

$$\operatorname{cotg}(90°+\alpha) = \frac{\cos(90°+\alpha)}{\operatorname{sen}(90°+\alpha)} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$$

- triplicazione

$$\boxed{\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen}\alpha - 4 \operatorname{sen}^3\alpha}$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

- bisezione

$$\boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \begin{cases} \dfrac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \\ \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \end{cases}}$$

- parametriche

Condizione $\longrightarrow$ $\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

- di PROSTAFERESI

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

- riconducibili : $\boxed{a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \cdot (1)}$

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c\cos^2 x - d \sin^2 x - d \cos^2 x = 0$$

$$\frac{(a-d)\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b \sin x \cancel{\cos x}}{\cos^{\cancel{2}} x} + \frac{(c-d)\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0$$

$$(a-d)\,tg^2 x + b\, tg x + (c-d) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4(a-d)(c-d)$$

$$tg x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2(a-d)} \Rightarrow x = arctg\left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2(a-d)}\right)$$

3°) lineari : $\boxed{a \sin x + b \cos x = c}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{con } t = tg\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a\frac{2t}{1+t^2} + b\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = c$$

$$\Rightarrow t = d \Rightarrow tg\frac{x}{2} = \quad \frac{x}{2} = arctg\, d$$

- DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

1°) omogenee

$\boxed{\sin x + \cos x > 0}$ — dove : $\mathbb{R} - \{\cos x = 0\}$ ← !!!

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 1 > 0 \Rightarrow tg x > -1$$

$$x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{4}, 2\pi\right]$$

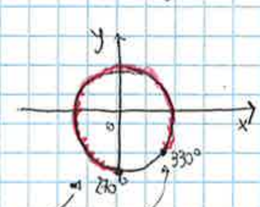
2°) lineari

$\boxed{\sqrt{3}\cos x - \sin x + \sqrt{3} > 0}$ ⟶ $\cos x = x$, $\sin x = y$

$$\begin{cases} \sqrt{3}x - y + \sqrt{3} \quad 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \nearrow 330° \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

270°



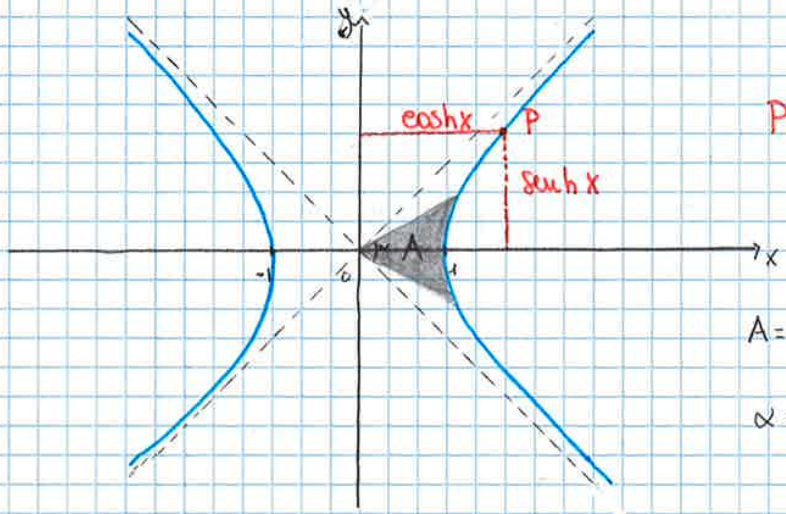
- Se il segno è positivo > (si prende la parte maggiore di arco)
- Se il segno è negativo < (si prende la parte minore dell'arco)

!!!

- FUNZIONI IPERBOLICHE

Le funzioni iperboliche sono particolari combinazioni di esponenziali che si incontrano spesso nella soluzione di equazioni differenziali. Esse per esempio descrivono la forma della catenaria, (cioè la forma di una fune sospesa alle due estremità ◡). Tali funzioni presentano numerose analogie con le funzioni trigonometriche. Esse, $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$, derivano dallo sviluppo di Taylor delle funzioni $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. Graficamente e analiticamente, $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ rappresentano le coordinate dei punti di una iperbole equilatera unitaria, ovvero con a e $b = 1$, centrata con gli assi sugli assi cartesiani. L'ascissa di un generico punto $P \in \gamma$ (γ = iperbole) ha come ascissa $= \cosh x$, e come ordinata $= \operatorname{senh} x$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \text{ iperbole equilatera unitaria } \underset{a=1 \,\cup\, b=1}{} \quad \Rightarrow f(x) = x^2 - y^2 = 1$$



$P(\cosh x ; \operatorname{senh} x)$

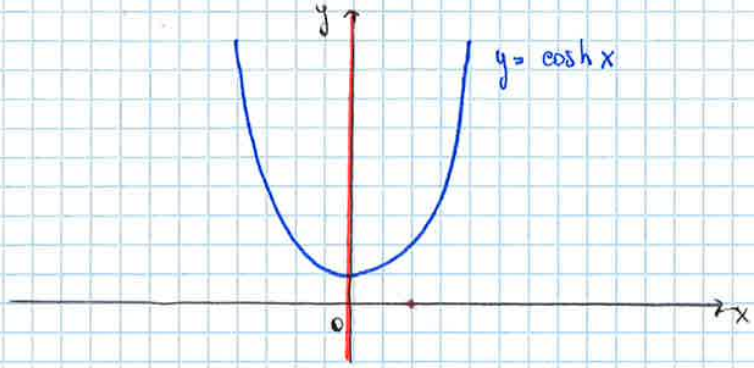
A = settore iperbolico di area $\frac{\alpha}{2}$

α = angolo

vale la relazione ⟶ $\boxed{\cosh^2 - \operatorname{sen}^2 h = 1}$

- COSENO IPERBOLICO ($\cosh x$) (catenaria)

$\boxed{f(x) = \cosh x}$ $\boxed{\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$ $\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ (dom: $\mathbb{R}$ → img: $\mathbb{R}$)

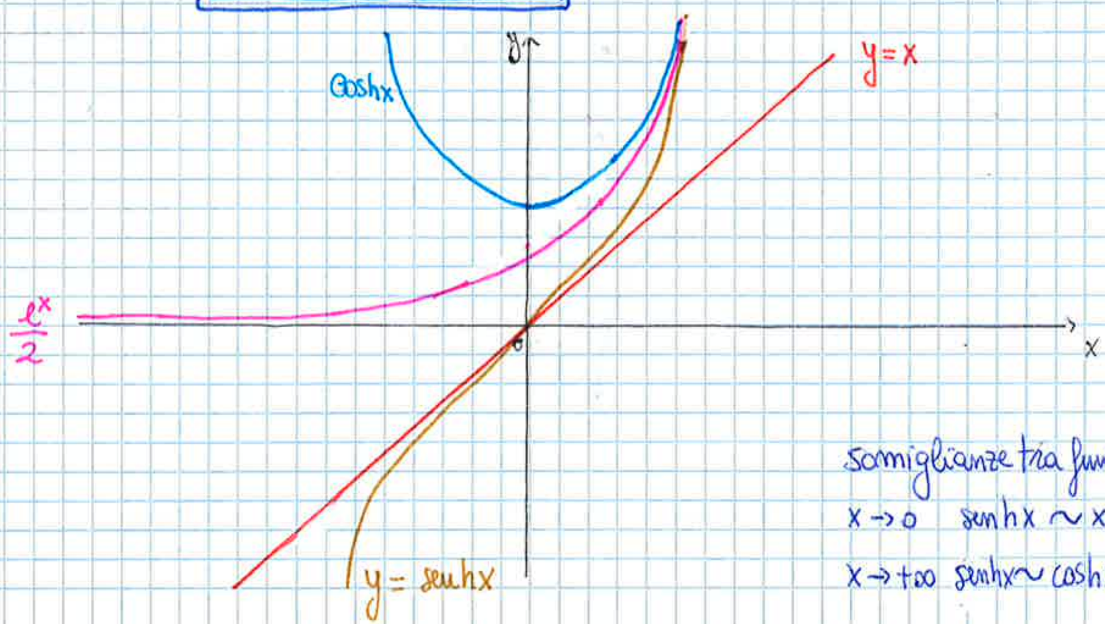


N.B.
- funzione NON LIMITATA
- funzione NON PERIODICA
- funzione PARI (simmetrica rispetto y) (NON INVERTIBILE NEL SUO DOM)
- per valori alti di x (per $x \to +\infty$) la funzione $\cosh x$ e $\operatorname{senh} x$ tendono a coincidere e somigliano alla funzione $\boxed{\frac{1}{2} e^x}$

→ Sviluppo di Taylor

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\boxed{\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$



somiglianze tra funzioni:

$x \to 0$ $\operatorname{senh} x \sim x$

$x \to +\infty$ $\operatorname{senh} x \sim \cosh x \sim \frac{e^x}{2}$

- RELAZIONI IPERBOLICHE FONDAMENTALI

1. $\boxed{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1}$

2. $\boxed{\operatorname{senh} x + \cosh x = e^x}$

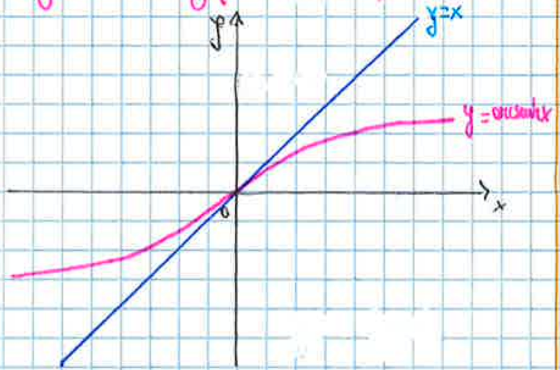
3. $\boxed{\tanh x \cdot \operatorname{cotgh} x = 1}$

4. $\boxed{\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}}$

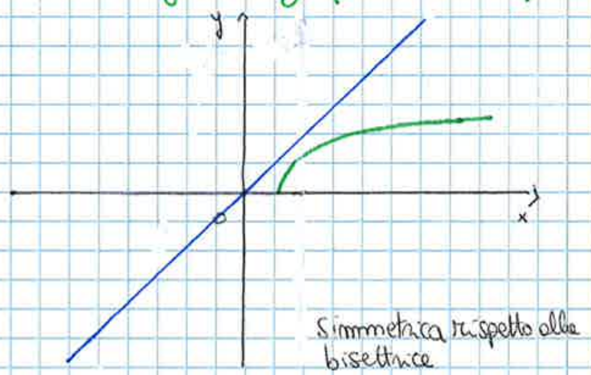
5. $\boxed{\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}}$

- FUNZIONI IPERBOLICHE INVERSE (f^{-1}) (arcsenhx - arccoshx - arctghx - arccotghx)

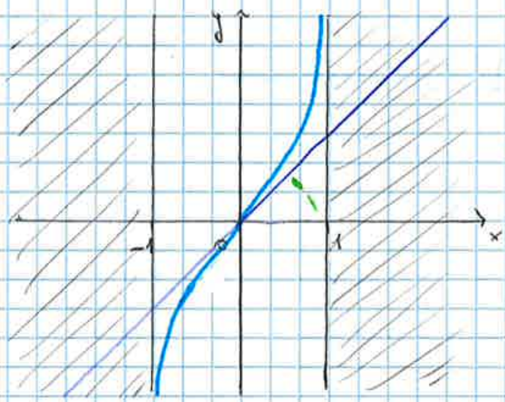
senhx $\rightarrow f^{-1}(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$



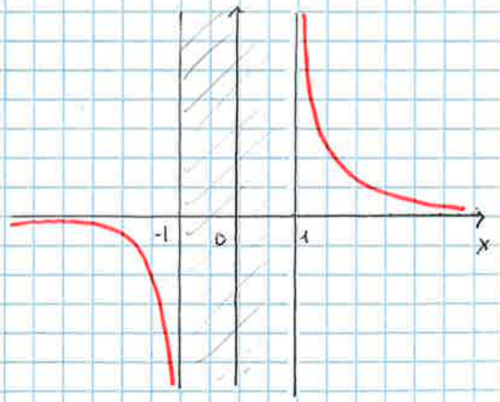
$f(x)^{-1} = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \leftarrow$ coshx



tanhx $\rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

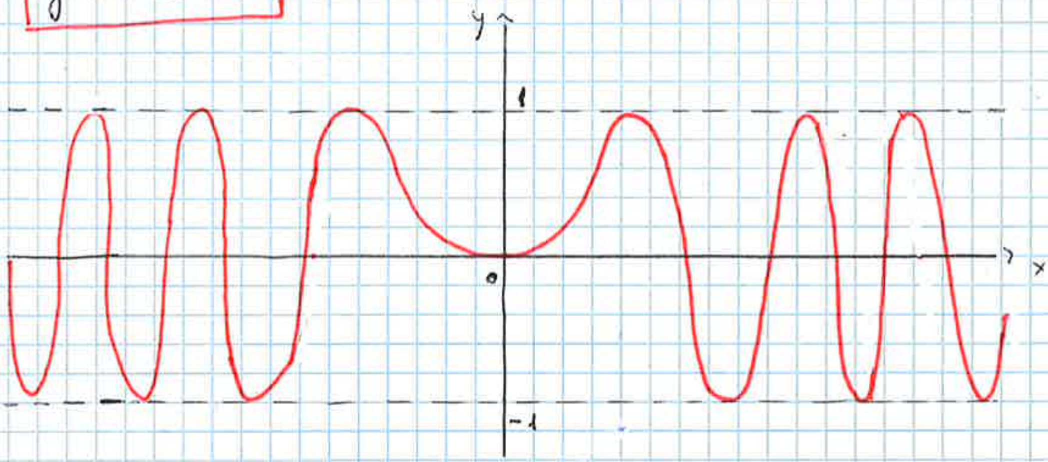


$f(x)^{-1} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \leftarrow$ cotghx

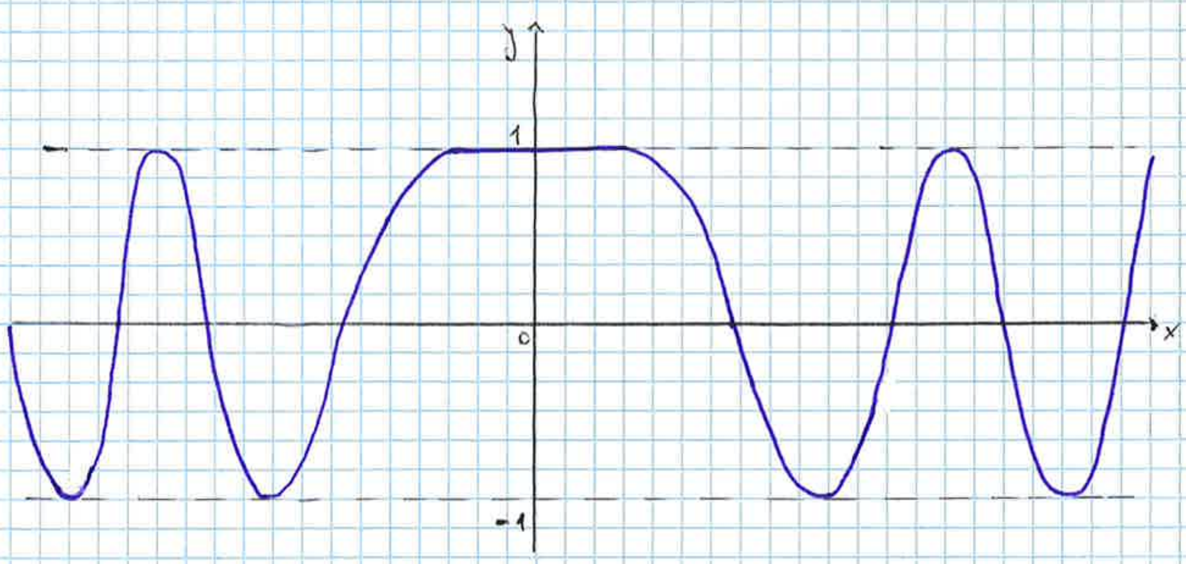


- FUNZIONI DI FRESNEL($\text{sen}\,x^2$, $\cos x^2$)

$$\boxed{f(x) = \text{sen}\,x^2}$$



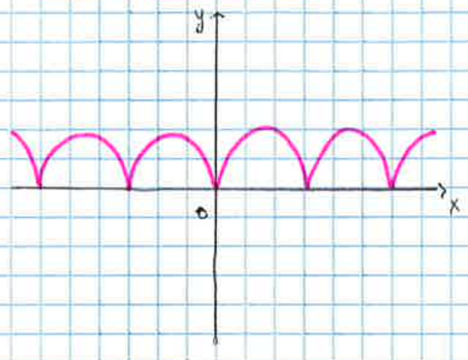
$$\boxed{f(x) = \cos x^2}$$



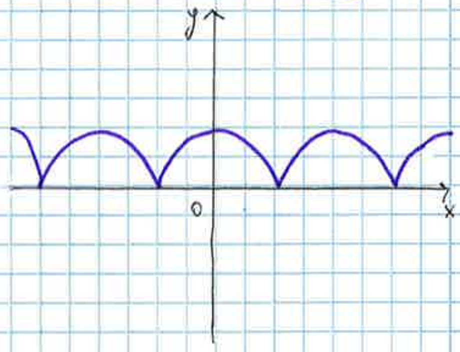
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 304

- ALCUNI GRAFICI DI FUNZIONI IMPORTANTI

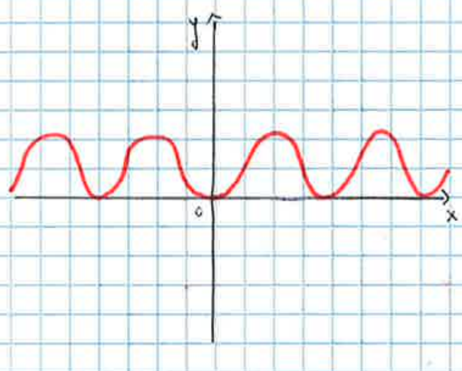
$$\boxed{f(x) = |\operatorname{sen} x|}$$



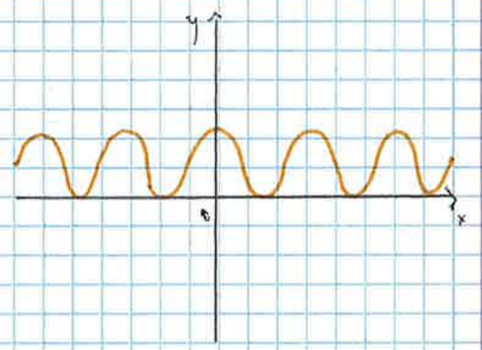
$$\boxed{f(x) = |\cos x|}$$



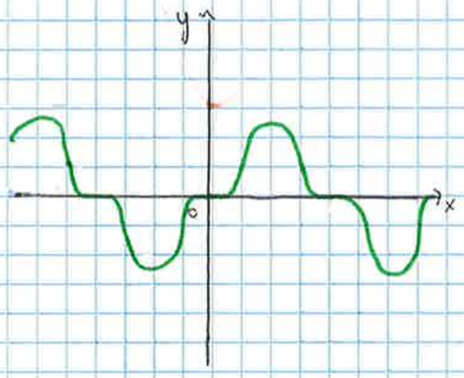
$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen}^2 x}$$



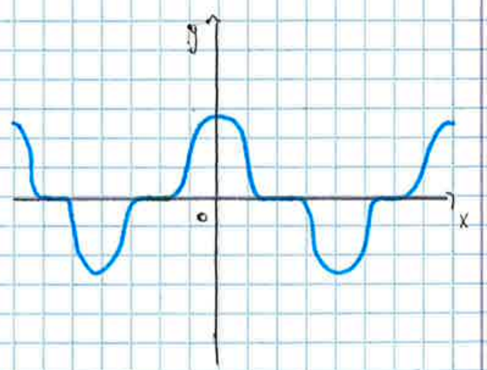
$$\boxed{f(x) = \cos^2 x}$$



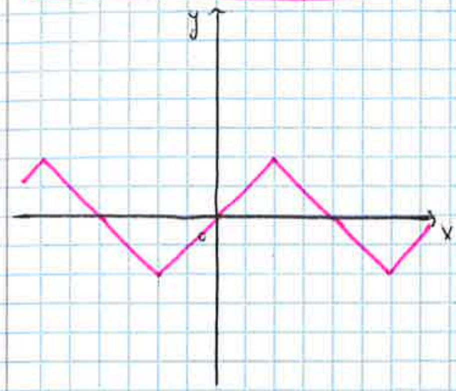
$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen}^3 x}$$



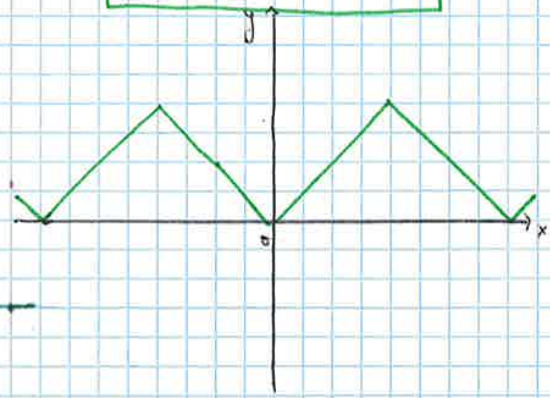
$$\boxed{f(x) = \cos^3 x}$$



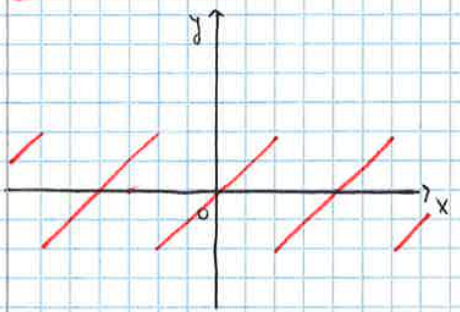
$f(x) = \text{arcsen}(\text{sen}\,x)$



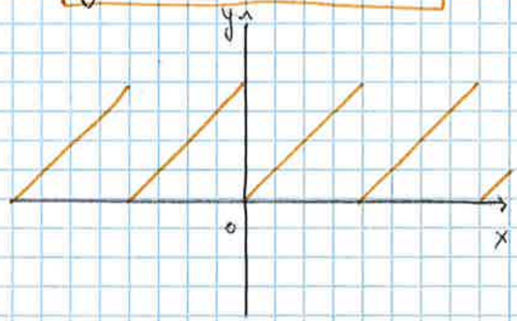
$f(x) = \arccos(\cos x)$



$f(x) = \text{arctan}(\tan x)$



$f(x) = \text{arccotan}(\text{cotan}\,x)$



→ Composizione di funzioni

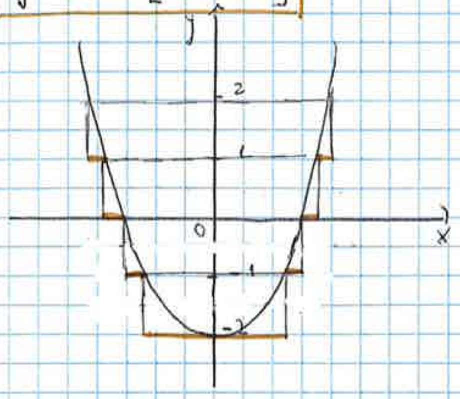
1) PRODOTTO
- f pari · f pari = f pari
- f pari · f dispari = f dispari
- f dispari · f dispari = f. pari

2) SOMMA
- → f pari + f dispari = nè pari nè dispari
- → f pari + f pari = f pari
- → f dispari + f dispari = f dispari

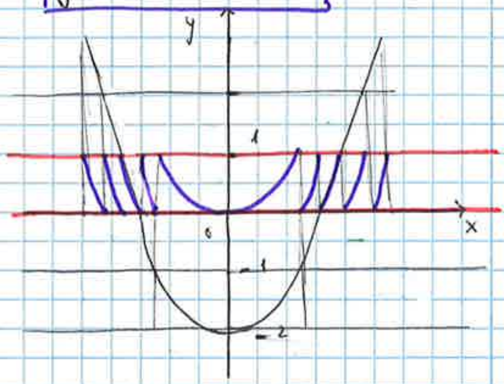
3) DERIVATA
- → f' di f pari è dispari
- → f' di f dispari è pari

4) SERIE DI TAYLOR
- → S. di T. di f pari contiene potenze pari
- → S. di T. di f dispari contiene potenze dispari

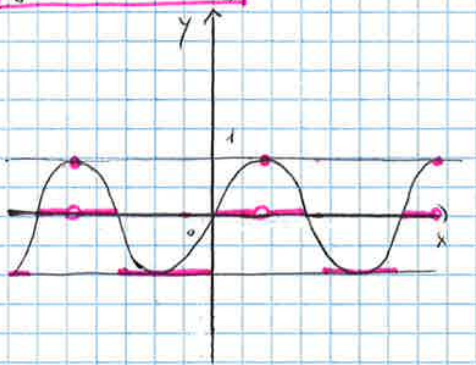
$\boxed{f(x) = [x^2-2]}$ (parte intera)



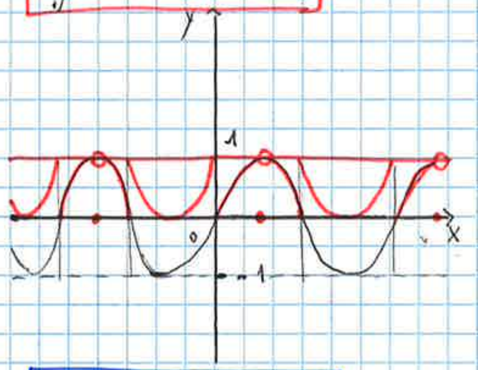
$\boxed{f(x) = M(x^2-2)}$ (mantisse)



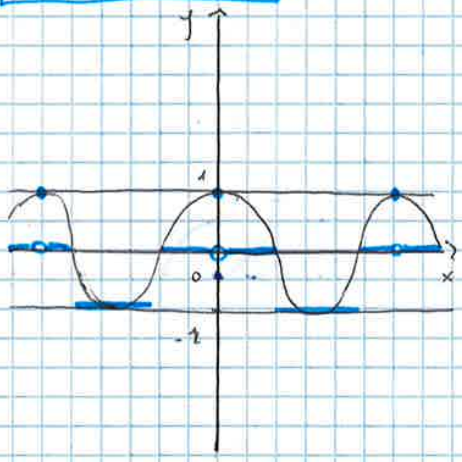
$\boxed{f(x) = [\operatorname{sen} x]}$



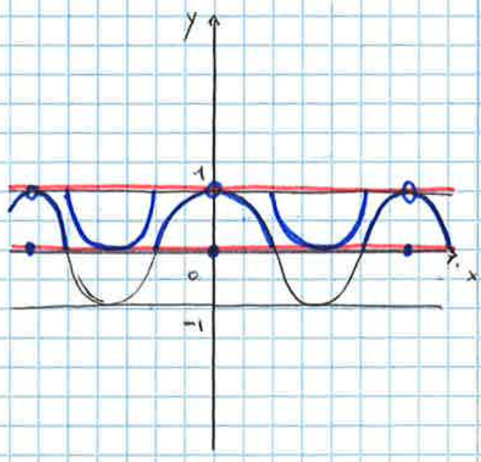
$\boxed{f(x) = M(\operatorname{sen} x)}$



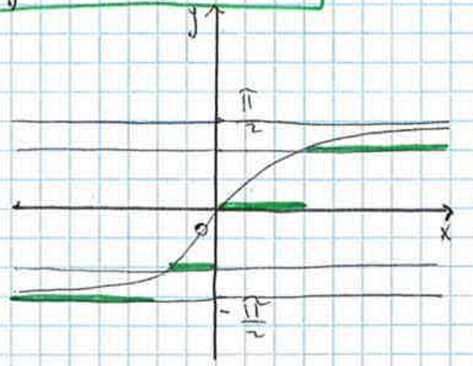
$\boxed{f(x) = [\cos x]}$



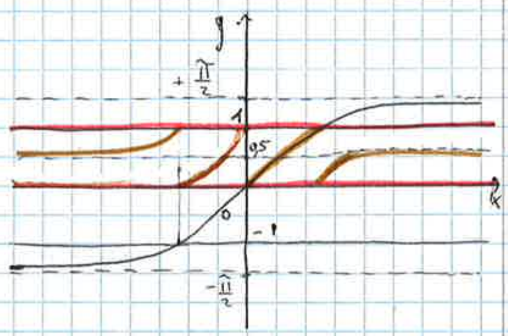
$\boxed{f(x) = M(\cos x)}$



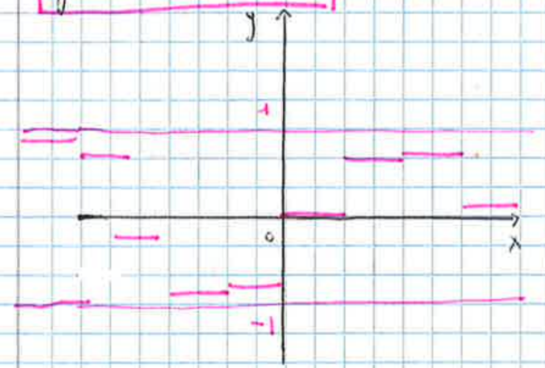
$f(x) = [\arctan x]$



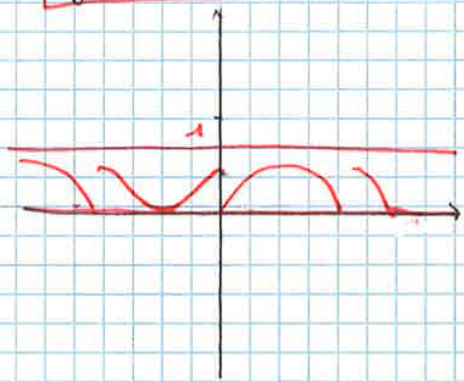
$f(x) = M(\arctan x)$



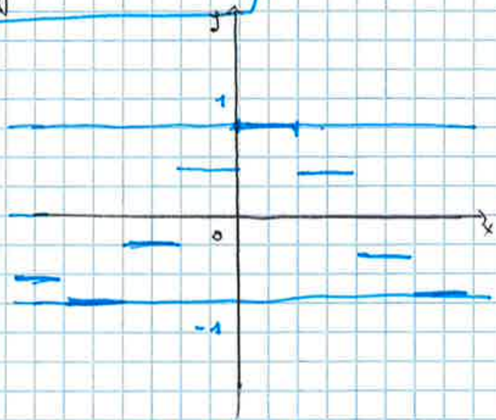
$f(x) = \operatorname{sen}[x]$



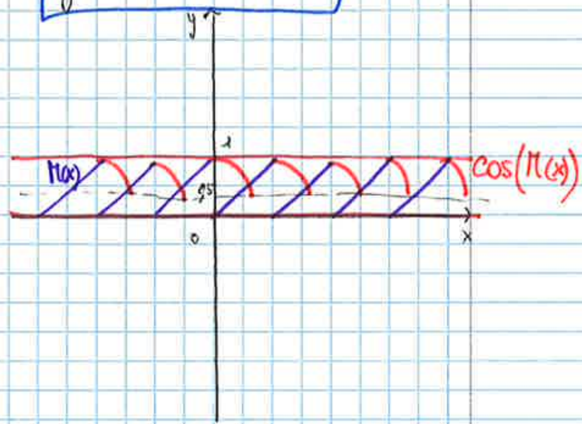
$f(x) = \operatorname{sen} M(x)$



$f(x) = \cos[x]$



$f(x) = \cos M(x)$



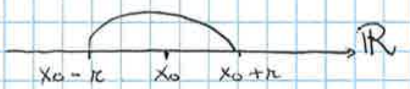
INTORNO

Intorno di un punto: Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto della retta reale, e sia $r>0$ un numero reale $r \in \mathbb{R}$. Chiamiamo intorno di x_0 di raggio r l'intervallo aperto e limitato contenente il valore x_0:

(intorno completo centrato in x_0 e simmetrico)

(intorno CIRCOLARE se la distanza da x_0 a x_0-r e da x_0 a x_0+r è uguale)

$$\boxed{I_r(x_0) = (x_0 - r,\ x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}}$$



PUNTO DI VISTA GEOMETRICO

$|x - x_0|$ → distanza euclidea tra il punto x_0 e x

infatti possiamo dire che $I_r(x_0)$ è formato dai punti della retta reale $\mathbb{R}$ che distano meno di r da x_0 ovvero $|x - x_0| < r$.

PUNTO DI VISTA ALGEBRICO

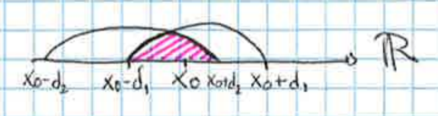
$|x - x_0|$ → Scarto, o errore assoluto con cui il numero x approssima x_0.

infatti possiamo dire che $I_r(x_0)$ è formato da tutti i numeri reali che approssimano x_0 con un errore assoluto minore di r, ovvero $|x - x_0| < r$

N.B. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, variando $r \in \mathbb{R}^+$, otteniamo la famiglia di intorni di x_0.
Ogni intorno è contenuto strettamente in tutti gli intorni aventi raggio più grande, mentre contiene tutti gli intorni di raggio più piccolo.

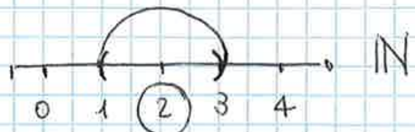
N.B. il concetto di intorno è un caso particolare dell'analogo concetto per un punto appartenente al prodotto cartesiano $\mathbb{R}^d$ (se $d=2$, al piano | se $d=3$, allo spazio).

N.B. l'intersezione di due o più intorni completi è ancora un intorno completo del punto



Punto isolato: Un numero C di un insieme numerico A, $C \in A$, è **isolato** se $\exists\, I(c)$ che non contiene altri punti dell'insieme A.

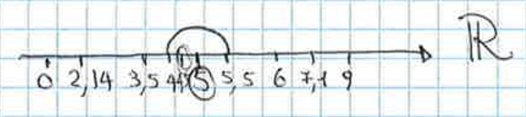
Es: $n \in A$ e $n \in \mathbb{N} \Rightarrow A = \mathbb{N}$



$C = 2$
↓
punto isolato
perchè $\exists\, I_1(c) = (1; 3)$ dove C è l'unico punto dell'insieme $A \equiv \mathbb{N}$

Punto di accumulazione: Si dice che un numero C, che può anche non appartenere all'insieme A, è di **accumulazione per A**, se in ogni intorno di C esiste almeno un elemento di A distinto da C. Come conseguenza, si ha che se C è di accumulazione per A, in un qualsiasi intorno di C vi sono ∞ elementi.

Es: $x \in A$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow A \equiv \mathbb{R}$



$C = 5$
↓
punto di accumulazione
perchè $\exists\, I(c) = (4\,,\,5{,}5)$ dove $4{,}5 \in A$ è incluso in $I(c)$. Infatti in $I(c)$ sono presenti ∞ elementi (ovvero ∞ numeri $x \in \mathbb{R}$)

LIMITI DI SUCCESSIONI

Data una successione definita nell'insieme $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ per un opportuno $n_0 \geq 0$.

- **Convergenza: a un valore finito** Si dice che la successione $a : n \to a_n$ tende al limite $\ell \in \mathbb{R}$ (oppure converge a ℓ, oppure ha limite ℓ) se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un intero n_ε tale che ($\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon$)

$$\forall n \geq n_0 \quad n > n_\varepsilon \Rightarrow \boxed{|a_n - \ell| < \varepsilon}$$

PIAZZA DOCET
$\forall \varepsilon > 0$
$\exists n^* : \forall n > n^*$
$|a_n - \ell| < \varepsilon$

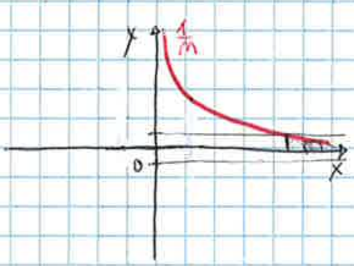
$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \ell}$$

Con la terminologia degli intorni $n > n_\varepsilon$ è riscritta come $n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty)$, mentre la condizione $|a_n - \ell| < \varepsilon$ equivale a $a_n \in I_\varepsilon(\ell)$. Quindi: per ogni intorno $I_\varepsilon(\ell)$ $\exists$ un intorno $I_{n_\varepsilon}(+\infty)$ tale che:

$$\forall n \geq n_0 \quad n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \Rightarrow \boxed{a_n \in I_\varepsilon(\ell)}$$

Es: $S = \left\{ a_n : a_n = \frac{1}{n} \right\}$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$



$I(0) = (-0{,}001, +0{,}001)$

devo trovare un $n_0 : \forall n > n_0$ valga:

$$-\frac{1}{1000} < \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow$$

$$1000 < n < -1000 \Rightarrow \quad n > 1000$$

Se prendo $n_0 = 1001$

è vero che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

TEOREMA SUCCESSIONI MONOTONE Sia $a: n \to a_n$ una successione monotona. Allora essa è convergente oppure divergente. In particolare:

1) Se la successione S è monotona crescente e se è superiormente limitata, cioè se esiste un maggiorante $b \in \mathbb{R}: a_n \leq b \ \forall n \geq n_0$, allora converge verso l'estremo superiore $\sup(S)$ della sua immagine:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = l = \sup\{a_n : n \geq n_0\}}$$

2) Se la successione S è monotona decrescente e se è inferiormente limitata, cioè se esiste un minorante $c \in \mathbb{R}: a_n \geq c \ \forall n \leq n_0$, allora converge verso l'estremo inferiore $\inf(S)$ della sua immagine:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = l = \inf\{a_n : n \leq n_0\}}$$

3) Se la successione S è monotona crescente ed è superiormente illimitata, allora diverge a $+\infty$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty}$$

4) Se la successione S è monotona decrescente ed è inferiormente illimitata allora diverge a $-\infty$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty}$$

Dim. →

- Il numero di Nepero

Data la successione: $\boxed{a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$

1) è strettamente crescente $[a_n < a_{n+1}]$

Dim. usando la formula del binomio di Newton e la formula

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

possiamo scrivere:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n}$$

$$a_n \boxed{= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}$$

→ quindi vale per a_{n+1}

$$a_{n+1} \boxed{= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)}$$

→ OSSERVIAMO che

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

→ quindi: Ogni addendo della sommatoria $_{a_n}$ è minore del corrispondente addendo della sommatoria $_{a_{n+1}}$. Pertanto

$$\boxed{a_n < a_{n+1}} \qquad \forall n$$

e quindi la successione è strettamente crescente.

LIMITI DI FUNZIONI

Sia f una funzione reale a variabile reale, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Descriviamo il comportamento della variabile dipendente $y = f(x)$, quando la variabile x si avvicina a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure ad uno dei due punti all'infinito $-\infty, +\infty$.

* LIMITI ALL'INFINITO

- Limite CONVERGENTE per $x \to +\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = l}$$

Sia f definita nell'intorno di $+\infty$. Si dice che f tende al limite finito $l \in \mathbb{R}$ per $x \to +\infty$ se $\forall$ numero reale $\varepsilon > 0$ $\exists$ un numero reale $B \geq 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \geq 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f, \ \underline{x > B}$$
$$\Rightarrow \boxed{|f(x) - l| < \varepsilon}$$

con gli intorni: $\forall I_\varepsilon(l) \ \exists I_B(+\infty) : \forall x \in \operatorname{dom} f, \ x \in I_B(+\infty)$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \in I_\varepsilon(l)}$$

- Limite CONVERGENTE per $x \to -\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = l}$$

Sia f definita nell'intorno di $-\infty$. Si dice che f tende al limite finito $l \in \mathbb{R}$ per $x \to -\infty$ se $\forall$ numero reale $\varepsilon > 0$ $\exists$ un numero reale $B \geq 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B \geq 0 : \forall x \in \operatorname{dom} f, \ \underline{x < -B}$$
$$\Rightarrow \boxed{|f(x) - l| < \varepsilon}$$

con gli intorni: $\forall I_\varepsilon(l) \ \exists I_B(-\infty) : \forall x \in \operatorname{dom} f, \ x \in I_B(-\infty)$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \in I_\varepsilon(l)}$$

- Limite di funzione CONVERGENTE per $x \to x_0$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

Sia f definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, tranne x_0. Si dice che f ha limite $\ell \in \mathbb{R}$ (o tende a ℓ per $x \to x_0$) se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f, \ 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$\Rightarrow \boxed{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

Con gli intorni: $\forall x \in \text{dom} f, \ \forall I_\varepsilon(\ell) \ \exists \ I_\delta(x_0) : x \in I_\delta(x_0) - \{x_0\}$
$$\Rightarrow \boxed{f(x) \in I_\varepsilon(\ell)}$$

- Limite di funzione DIVERGENTE POSITIVAMENTE per $x \to x_0$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$$

Sia f definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R} - \{x_0\}$. Si dice che f ha limite $+\infty$ (o tende a $+\infty$) per x tendente a x_0 se $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f, \ 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$\Rightarrow \boxed{f(x) > M}$$

Con gli intorni: $\forall I_M(+\infty) \ \exists \ I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom} f, \ x \in I_\delta(x_0) - \{x_0\}$
$$\Rightarrow \boxed{f(x) \in I_M(+\infty)}$$

- Limite di funzione DIVERGENTE NEGATIVAMENTE per $x \to x_0$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty}$$

Sia f definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R} - \{x_0\}$. Si dice che f ha limite $-\infty$ (o tende a $-\infty$) per $x \to x_0$ se $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$\Rightarrow \boxed{f(x) < -M}$$

Con gli intorni: $\forall I_M(-\infty) \ \exists \ I_\delta(x_0) : \forall x \in \text{dom} f, \ x \in I_\delta(x_0) - \{x_0\}$
$$\Rightarrow \boxed{f(x) \in I_M(-\infty)}$$

- Limite SINISTRO

Sia f definita in un intorno sinistro di $x_0 \in \mathbb{R} - \{x_0\}$, si dice che f ha limite destro $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f \quad 0 < x - x_0 < \delta$$

$$\Rightarrow \boxed{|f(x) - \ell| < \varepsilon}$$

Con gli intorni:

$$\forall I_\varepsilon(\ell) \ \exists \ I_\delta^-(x_0) : \forall x \in \text{dom} f, \ x \in I_\delta^-(x_0) - \{x_0\}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) \in I_\varepsilon(\ell)}$$

PROPOSIZIONE

Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R} - \{x_0\}$.
La funzione f ha limite L (finito o infinito) per $x \to x_0$ se e solo se esistono i limiti destro e sinistro per $x \to x_0$ e tali limiti sono coincidenti (ovvero entrambi uguali ad L).

Es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists \quad \text{infatti} \quad \begin{cases} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty = A \\ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty = B \end{cases} \quad A \neq B$$

PROPOSIZIONE Una funzione f definita in un intorno di x_0 è continua in x_0 se e solo se è continua da dx e da sx in x_0.

Def. Sia I un insieme contenuto in dom f. La funzione f dicesi continua su I (o in I), se f è continua in ogni punto di I.

N.B. Tutte le funzioni elementari (polinomi, funzioni razionali, funzioni elevamento a potenza, funzioni trigonometriche, funzioni esponenziali e le loro inverse) sono continue in tutto il loro dominio.

- **DISCONTINUITÀ:** Alcune funzioni non risultano essere continue nel loro dominio. Infatti esse presentano punti singolari, o punti di discontinuità dove appunto la condizione $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ non è soddisfatta. Esistono tre tipi di discontinuità:

Discontinuità
- → Punto di discontinuità eliminabile per f
  - → Prolungato per continuità
- → Punto di discontinuità di prima specie (o di salto)
- → Punto di discontinuità di seconda specie

- PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI PRIMA SPECIE [o DI SALTO]

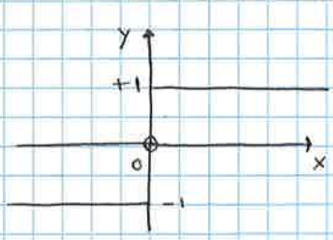
Sia f una funzione definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, $- \{x_0\}$. Se f ha per $x \to x_0$ lim dx e lim sx finiti ma diversi tra loro, diciamo che x_0 è un punto di discontinuità di prima specie (o punto di salto). Il salto di f in x_0 è definito come:

SALTO

$$\boxed{[f]_{x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)}$$

ovvero $\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)}$

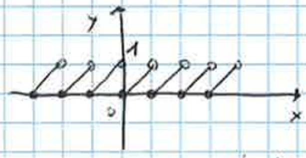
Es: $f(x) = \frac{|x|}{x}$



$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = +1$

$\lim_{x \to 0^-} -\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = -1$ $\Rightarrow [f]_{x_0} = +1 - (-1) = +2$ (= salto)

! N.B. • $\boxed{\text{La funzione Mantissa}}$



• $M(1) = 0$ $\lim_{x \to 1^+} M(x) = M(1)$ (quindi $M(x)$ è continua da dx ma non da sx $\Rightarrow$ non è continua in $x_0 = 1$)

• ha $\boxed{\text{salto} = -1}$ in $x_0 = 1$ e in generale in ogni punto $x_0 = m \in \mathbb{Z}$ ovvero presenta un punto di discontinuità di 1ª specie o salto

• $\boxed{\text{La funzione Parte intera}}$

• $y = [x]$ ha una discontinuità di 1ª specie o salto ogni $x_0 = m \in \mathbb{Z}$ con $\boxed{\text{salto} = 1}$ in quanto $\lim [x] = m$ $\lim_{x \to m^-} [x] = m-1$

• $\boxed{\text{La funzione segno}}$

$y = \text{sign}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

• $y = \text{Sign}(x)$ ha una discontinuità di 1ª specie o salto con $\boxed{\text{salto} = 2}$

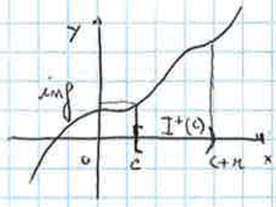
infatti $\lim_{x \to 0^+} \text{Sing}(x) = 1$ $\lim_{x \to 0^-} \text{Sign}(x) = -1$

TEO. LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE

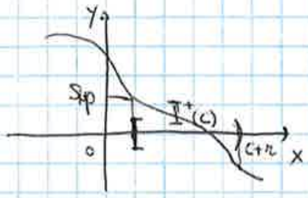
Sia f una funzione definita e monotona in un intorno dx $I^+(c)$ del punto c (dove c può essere $\in \mathbb{R}$ oppure $-\infty$) $-\{c\}$. Allora esiste, finito o infinito, il lim dx per $x \to c$ e si ha:

$$\boxed{\lim_{x \to c^+} f(x) = \begin{cases} \inf \{ f(x) : x \in I^+(c),\ x > c \} & \text{se } f \text{ è crescente } \nearrow \\ \sup \{ f(x) : x \in I^+(c),\ x > c \} & \text{se } f \text{ è decrescente } \searrow \end{cases}}$$

$f: \nearrow$



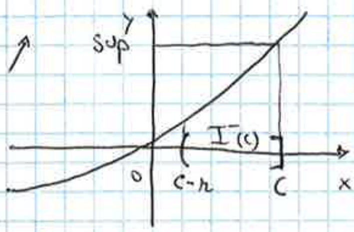
$f: \searrow$



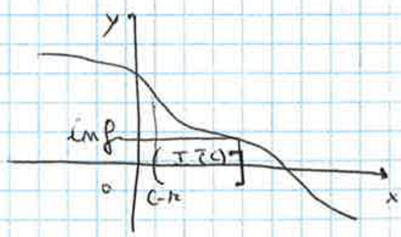
Sia f una funzione definita e monotona in un intorno sx $I^-(c)$ del punto c (dove c può essere $\in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$) $-\{c\}$. Allora esiste, finito o infinito, il lim sx per $x \to c$ e si ha:

$$\boxed{\lim_{x \to c^-} f(x) = \begin{cases} \sup \{ f(x) : x \in I^-(c),\ x < c \} & \text{se } f \text{ è crescente } \nearrow \\ \inf \{ f(x) : x \in I^-(c),\ x < c \} & \text{se } f \text{ è decrescente } \searrow \end{cases}}$$

$f: \nearrow$



$f: \searrow$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 119 di 304

- TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se f ammette limite (infinito, o finito) per $x \to x_0$ esso è unico.

Dim. → per assurdo supponiamo che

allora $\exists\ I(l_1)$ e $I(l_2)$ disgiunti tra loro: $I(l_1) \cap I(l_2) = \emptyset$ {ipotesi}

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2 \quad \boxed{\text{con } l_1 \neq l_2}$$

⇝ se vale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ allora $\exists$ un $I^1(x_0): \forall x \in I^1(x_0)$ $f(x) \in I(l_1)$

⇝ se vale che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$ allora $\exists$ un $I^2(x_0): \forall x \in I^2(x_0)$ $f(x) \in I(l_2)$

Sia ora $I = I^1(x_0) \cap I^2(x_0) \cap \text{dom} f$

Se $x \in I$ vale che

$f(x) \in I(l_1)$ e contemporaneamente $f(x) \in I(l_2)$

⇝ ma questo è impossibile → $f(x) \in I(l_1) \cap I(l_2)$

infatti questo risultato non è accettabile poichè contraddice l'ipotesi di partenza: $I(l_1) \cap I(l_2) = \emptyset$

→ QUINDI IL LIMITE SE ESISTE È UNICO!

- Corollario (inverso della permanenza)

Supponiamo che f ammette limite (finito o infinito) per $x \to x_0$.
Supponiamo che $\exists\, I(x_0) : f(x) \geq 0$ in $I(x_0) - \{x_0\}$
Allora $l \geq 0$ oppure $l = +\infty$. [Allo stesso modo vale per il segno negativo.]

Dim. → per assurdo
Supponiamo che $l = -\infty$, oppure $l < 0$.
Il teorema della permanenza del segno implicherebbe
l'$\exists\, I'(x_0) : f(x) < 0$ in $I'(x_0) - \{x_0\}$
Consideriamo $I^2(x_0) = I(x_0) \cap I^1(x_0)$ si avrebbe
contemporaneamente $\forall x \in I^2(x_0)$ che:
→ $f(x) < 0$ x k è $\in I^1(x_0)$
→ $f(x) \geq 0$ x k è $\in I(x_0)$ {per ipotesi}

⇝ Ciò è ASSURDO! infatti il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ risulta essere positivo.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 123 di 304

Dim. $f(x) \in I^1_\varepsilon(\ell)$ equivale a dire che $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$h(x) \in I^2_\varepsilon(\ell)$ equivale a dire che $\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

$I^3_\varepsilon(\ell) = I(x_0) \cap I^1_\varepsilon(x_0) \cap I^2_\varepsilon(x_0)$ in questo intorno è verificato il teorema della permanenza del segno e i suoi due corollari quindi si ha:

$$\boxed{\ell - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \ell + \varepsilon}$$

cioè $\boxed{g(x) \in I_\varepsilon(\ell)}$ e quindi $\boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell}$

$[\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon]$

Es: $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \to \operatorname{sen}(+\infty) = ?$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \to \frac{\operatorname{sen}(+\infty)}{+\infty} = ?$

nota $\to$ $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

preso $x > 0$ $\to$ $-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$

ovvero $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$\to$ quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0$

allora $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0}$ per il teorema del confronto

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 3\cos x}{x^2} = ?$ poiché $x^2 > 0$, $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-3 \leq 3\cos x \leq 3$

$\Rightarrow -2 \leq 1 + 3\cos x \leq +4$ $\to$ $\underset{\to 0}{\frac{-2}{x^2}} \leq \frac{1+3\cos x}{x^2} \leq \underset{\to 0}{\frac{4}{x^2}}$ $\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1+3\cos x}{x^2} = 0$

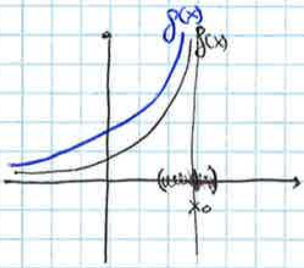
- 2° TEOREMA DEL CONFRONTO [Analogamente per $-\infty$]

CASO INFINITO

Date due funzioni $f(x)$, $g(x)$ e sia:

- $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty}$
- Se $\boxed{\exists\, I(x_0)}$ in cui sono definite f e g $- \{x_0\}$ e:

$$\boxed{f(x) \leq g(x)} \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$$



Allora si ha anche:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty}$$

$\boxed{\text{CASO PRODOTTO}}$ (solo per $\ell, m \in \mathbb{R}^+$)

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ e consideriamo l'intorno:

$\to I_{\frac{\varepsilon}{2m}}(\ell)$

$$\exists\, I^f(x_0) : |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2m} \quad \forall x \in I^f(x_0) - \{x_0\}$$

$\to$ NOTA: se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \ell \in \mathbb{R}$

Allora $\exists\, I(x_0)$ dove f è limitata quindi:

$$\exists\, C : |f(x)| \leq C \quad \forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$$

Consideriamo adesso l'intorno:

$$I_{\frac{\varepsilon}{2C}}(m) \to \exists\, I^g(x_0) : |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2C} \quad \forall x \in I^g(x_0) - \{x_0\}$$

Sia ora $I = \underline{I^f(x_0)} \cap \underline{I^g(x_0)} \cap \underline{I(x_0)}$

$\forall x \in I - \{x_0\}$ si ha:

$$\Rightarrow |f(x)g(x) - \ell m| = |f(x)g(x) - f(x)m + f(x)m - \ell m| =$$

$$= |f(x)(g(x) - m) + m(f(x) - \ell)| \leq |f(x)(g(x) - m)| + |m(f(x) - \ell)|$$

$$= \underbrace{|f(x)|}_{\leq C}\,\underbrace{|g(x) - m|}_{< \frac{\varepsilon}{2C}} + \underbrace{|m|}_{m}\,\underbrace{|f(x) - \ell|}_{< \frac{\varepsilon}{2m}}$$

$$\Rightarrow |f(x)g(x) - \ell m| \leq \cancel{C} \cdot \frac{\varepsilon}{2\cancel{C}} + \cancel{m}\frac{\varepsilon}{2\cancel{m}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Rightarrow |f(x)g(x) - \ell m| \leq \varepsilon$ ovvero $(\ell m) - \varepsilon \leq f(x)g(x) < (\ell m) + \varepsilon$

$\to$ QUINDI $\forall x \in I - \{x_0\}$ vale che $[f(x)g(x)] \in I_\varepsilon(\ell m)$

ALGEBRA DEI LIMITI

(con $a \in \mathbb{R}$) (forme determinate)

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty \pm a = +\infty$

$-\infty \pm a = -\infty$

$\dfrac{\pm\infty}{a} = \pm\infty$

$\dfrac{\pm\infty}{-a} = \mp\infty$

$\pm\infty \cdot a = \pm\infty$

$\pm\infty \cdot (-a) = \mp\infty$

$\dfrac{a}{0} = \pm\infty$

$\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$

$\sqrt{+\infty} = +\infty$

$+\infty \cdot +\infty = +\infty$

$-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$

$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$a^{+\infty}$: $a > 1 = +\infty$; $0 < a < 1 = 0$

$a^{-\infty}$: $a > 1 = 0$; $0 < a < 1 = +\infty$

$\log_a b$:
- $a > 1$ $\begin{cases} b = 0^+ = -\infty \\ b = +\infty = +\infty \end{cases}$
- $0 < a < 1$ $\begin{cases} b = 0^+ = +\infty \\ b = +\infty = -\infty \end{cases}$

N.B. SOMMA ALGEBRICA DI LIMITI $f(x)+g(x)$

- $f(x) + g(x) = \nexists$ limitata $+ \, l = \nexists$
- $f(x) + g(x) = \nexists$ non limitata $+ \, l = \nexists$ ed è ∞
- $f(x) + g(x) = \nexists$ limitata $+ \, 0 = \nexists$
- $f(x) + g(x) = \nexists$ non limitata $+ \, 0 = \nexists$ ed è ∞
- $f(x) + g(x) = \nexists$ limitata $\pm \infty = \pm\infty$
- $f(x) + g(x) = \nexists$ non limitata $\pm\infty = \nexists$ ed è ∞
- $f(x) + g(x) = \nexists$ non limitata $+ \nexists$ non limitata $= \nexists$ ed è ∞

N.B. PRODOTTO ALGEBRA DI LIMITI $f(x) \cdot g(x)$

- $f(x) \cdot g(x) = \nexists$ limitata $\cdot \, l = \nexists$
- $f(x) \cdot g(x) = \nexists$ non limitata $\cdot \, l = \nexists$ ed è ∞
- $f(x) \cdot g(x) = \nexists$ limitata $\cdot \, 0 = \nexists$
- $f(x) \cdot g(x) = \nexists$ limitata $\cdot \, \infty = \infty$
- $f(x) \cdot g(x) = \nexists$ non limitata $\cdot \pm\infty = \nexists$ ed è ∞
- $f(x) \cdot g(x) = \nexists$ non limitata $\cdot \nexists$ non limitata $= \nexists$ ed è $+\infty$
- $f(x) \cdot g(x) = \nexists$ limitata $\cdot \nexists$ non limitata $= \nexists$ ed è $+\infty$

N.B. QUOZIENTE ALGEBRA DI LIMITI $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

- $f(x)/g(x) = \nexists$ limitata $/ \, l = \nexists$
- $f(x)/g(x) = \nexists$ non limit $/ \, l = \nexists$ ed è ∞
- $f(x)/g(x) = \nexists$ limitata $/ \, 0 = \infty$
- $f(x)/g(x) = \nexists$ limitata $/ \pm\infty = 0$
- $f(x)/g(x) = \nexists$ non limitata $/ \, \infty = \nexists$ ed è ∞
- $f(x)/g(x) = \nexists$ non lim $/ \nexists$ lim $= \nexists$

CALCOLO PRATICO DI UN LIMITE

- SOSTITUZIONE DIRETTA DEL VALORE x_0 NELLA FUNZIONE

$$\lim_{x \to 0} 2x+1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \nexists \text{ il limite ma } \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \end{cases}$$

- METTERE IN EVIDENZA LA X (raccogliere la x)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} = ? \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}\left(x+\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2-2x = +\infty - \infty = ? \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x(x-2) = +\infty(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+2x}{x} = \frac{0}{0} = ? \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}} = +2$$

- SCOMPORRE

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{0}{0} = ? \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(|x|\sqrt{x} - 1\right) = +\infty$$

! N.B. Quando porti fuori da 1 radice se $x \to +\infty$ metti $|x|$, se $x \to -\infty$ metti $-x$

- RAZZIONALIZZAZIONE

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{0}{0} = ? \Rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(x-4)} = \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

- POLINOMI

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{ax^n + a_1x^{n-1} + \dots}{bx^m + b_1x^{m-1} + \dots} = \begin{cases} n > m = \infty \\ n = m = \frac{a}{b} \\ n < m = 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \dfrac{0}{0} = ?$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} \cdot 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} \cdot \dfrac{1+\cos x}{1+\cos x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = 1 \cdot 0 = 0$

quindi $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = 1^\infty = ?$ se $a = 1 \longrightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e}$

$y = \dfrac{x}{a}$ se $x \to \infty$ allora $y \to \infty$

$x = a \cdot \infty$

$\lim\limits_{y \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^y\right]^a = \left[\lim\limits_{y \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^y\right]^a \Rightarrow e^a$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = e^a}$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = ?$

$y = \dfrac{1}{x}$ se $\begin{matrix} x \to 0^+ \\ y \to +\infty \end{matrix} \Rightarrow \lim\limits_{y \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{y}\right)^y = e$

$\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 135 di 304

TABELLA LIMITI NOTEVOLI

N.B. $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ $(= 0 \text{ x } x = 0)$

$\cos x \leq \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \leq 1$ per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} m x}{\operatorname{sen} n x} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\log a} \quad (o \log_a e)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log (1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} x \log x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^k \log_a x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log_a x}{\frac{1}{x^k}} = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x-2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = ? = 1^{\infty} = ?$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3-3-1}{x+3}\right)^{x+3-3-2} = \left(\frac{\cancel{x+3}}{\cancel{x+3}} - \frac{4}{x+3}\right)^{x+3-5}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)^{x+3} \cdot \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)^{-5}$$

$$e^{-4} \cdot 1^{-5} = e^{-4}$$

↳ OPPURE divisione

N.B. $\left[P(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right]$

$x - 1$	$x+3$ $Q(x)$
$-x - 3$	1 $P(x)$
$// - 4$ $R(x)$	

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+3} = \left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$$

e poi cambi l'esponente facendo comparire $\underline{\underline{x+3}}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 5} \left(\frac{2x-8}{x-3}\right)^{\frac{1}{x^2-6x+5}} \to \frac{1}{(x-5)(x-1)} = 1^{\infty} = ? \longrightarrow \text{ricondurlo a } \lim_{f(x)\to+\infty} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}$$

$x - 5 = t \Rightarrow t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{2t+2}{t+2}\right)^{\frac{1}{t(t+4)}} \qquad \text{poi aggiungo e tolgo 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 0} \left(\frac{2t+2}{t+2} + 1 - 1\right)^{\frac{1}{t^2+4t}} = \lim_{t \to 0} \left(1 + \frac{t}{t+2}\right)^{\frac{1}{t^2+4t}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{t+2}{t}}\right)^{\frac{t+2}{t} \cdot \frac{\cancel{t}}{(t+2)\cancel{t}(t+4)}}$$

$$= \lim_{t \to 0} e^{\frac{1}{t^2+6t+8}} = \sqrt[8]{e}$$

- TEOREMA DI SOSTITUZIONE O SCAMBIO DEL LIMITE PER FUNZIONI CONTINUE

Supponiamo che $\exists$ il $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (finito o infinito)
Sia poi g una funzione definita in un intorno di $l - \{l\}$:

- se $l \in \mathbb{R}$, g è continua in l
- se $l = \pm\infty$, $\exists$ (finito o infinito) $\lim_{y \to l} g(y)$

$\to$ Allora $\exists \lim_{x \to x_0}$ della funzione composta $g \circ f$ ovvero:

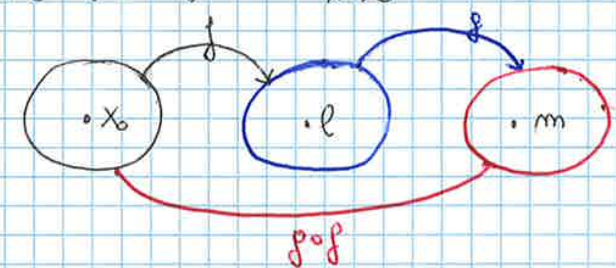
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to l} g(y)} \quad \text{ovvero} \quad \boxed{\left[g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right) \right]}$$

N.B. UNA FUNZIONE CONTINUA COMMUTA (CIOÈ SI SCAMBIA) CON IL SIMBOLO DEL LIMITE

$\to$ Questo teo. ci permette di portare il $\lim_{x \to x_0}$ dentro una funzione:

Es.
- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$
- $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)} = e$

Dim.



LA COMPOSIZIONE DI 2 FUNZIONI CONTINUE È 1 FUNZIONE CONTINUA

Poniamo $m = \lim_{y \to l} g(y)$

1°) Fissato $I(m) \Rightarrow \exists\ I(l) : \forall y \in I(l) \Rightarrow g(y) \in I(m)$

N.B: non escludiamo il valore l perchè g è continua in l e se $l = \pm\infty$ $I(l)$ non contiene $\pm\infty$

2°) Adesso, poichè per Hp sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, sappiamo che esiste $\exists\ I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) \in I(l)$. Ricordando che $x \in \text{dom}\, g \circ f$ ovvero $x \in \text{dom} f$ e $y = f(x) \in \text{dom}\, g$ otteniamo: $\forall x \in \text{dom}\, g \circ f$
$\Rightarrow g(f(x)) \in I(m)$, ciò significa che $\exists \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = m$

- ZERO DI UNA FUNZIONE

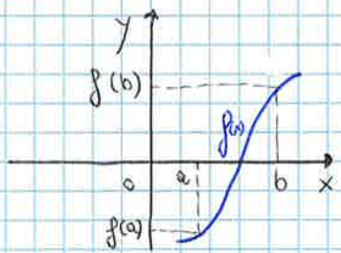
Data una f reale, chiamiamo **zero di funzione** ogni punto $x_0 \in \text{dom} f$ in cui la funzione si annulla.

ovvero $y = f(x) \Rightarrow f(x) = 0$

- TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia f una funzione continua in $[a, b]$. Se $\boxed{f(a)\, f(b) < 0}$ (cioè se f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo), allora $\exists$ uno zero di funzione nell'intervallo $(a; b)$.

Se f inoltre è strettamente monotona in $[a; b]$ allora lo zero è unico nell'intervallo.



Dim. Sia $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$

e calcoliamo il punto medio c_0 di $[a_0, b_0]$

$c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ e calcoliamo $f(c_0)$

$f(c_0)$:
- $= 0 \rightarrow$ allora c_0 è lo zero che cerchiamo
- $> 0 \rightarrow$ poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$
- $< 0 \rightarrow$ poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$

in entrambi i casi costruiamo un nuovo intervallo che è $\subset [a_0; b_0]$

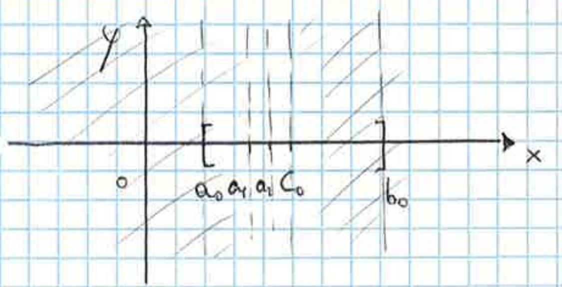
→ adesso ci concentriamo sul nuovo intervallo $[a_1; b_1]$

→ ricalcoliamo il punto medio dell'intervallo $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

→ calcoliamo $f(c_1)$

$f(c_1)$:
- $= 0 \rightarrow c_1$ è lo zero cercato
- $> 0 \rightarrow a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$
- $< 0 \rightarrow a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$

andiamo avanti così iterativamente (così restringiamo l'intervallo)



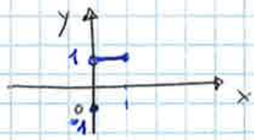
→ per il teorema del confronto e ricordando che $\lim_{n \to \infty} f(a_n) \le 0$ e $\lim_{n \to \infty} f(b_n) \ge 0$ l'unico caso in cui sono uguali a $f(x_0)$ è quando:

$$f\left(\lim_{n \to +\infty} a_n\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{n \to +\infty} b_n\right)$$

⟶ Se f è strettamente monotona in $[a;b]$, allora è iniettiva e dunque lo zero è unico. ($\exists!$ uno zero)

N.B. La CONTINUITÀ è una condizione NECESSARIA, infatti senza l'ipotesi di continuità di f in $[a;b]$ non sarebbe stato possibile dedurre l'esistenza di 1 zero dalla sola condizione $f(a) \cdot f(b) < 0$ (condizione sufficiente e non necessaria)

Es: $f(x) \begin{cases} -1 & \text{per } x = 0 \\ +1 & \text{per } 0 < x \le 1 \end{cases}$



$\nexists$ 1 zero infatti f non continua

N.B. L'algoritmo utilizzato per la dimostrazione del teorema è noto anche nel calcolo numerico come Metodo di bisezione.

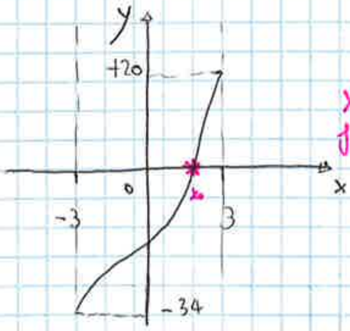
- COROLLARIO Sia f continua in $I[a;b]$. Supponiamo che f ammetta limiti (finiti, o infiniti) $\neq 0$ e di segno opposto per $x \to$ agli estremi dell'intervallo I. Allora f ha uno zero in I; tale zero $\exists!$ se f è strettamente monotona.

Es: $I[-3;+3]$ $\quad f(x) = x^3 - 7$

$\lim_{x \to -3} f(x) = -27 - 7 = -34$

$\lim_{x \to +3} f(x) = +27 - 7 = +20$

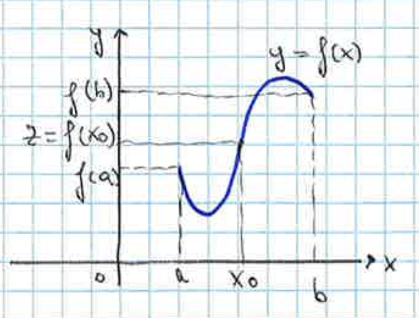
Allora poiché f è continua e i limiti agli estremi sono opposti $\Rightarrow \exists$ uno zero



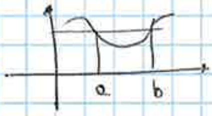
X_0 in cui f si annulla

- TEOREMA VALORI INTERMEDI

Sia f una funzione continua nell'intervallo $I\,[a;b]$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$



Dim. • Sia $f(a) = f(b)$



risultato banale

• Sia $f(a) < f(b)$ e sia z un qualunque valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$ e definiamo la funzione costante $g(x) = z$

dalla disuguaglianza: $f(a) < z < f(b)$ otteniamo:

$$f(a) < g(a) \quad e \quad f(b) > g(b)$$

$\Longrightarrow$ Se applichiamo il corollario precedente otteniamo

$$\exists\ c : g(c) = f(c) = z$$

N.B. Il teorema dei valori intermedi ha tra le sue conseguenze l'importante fatto che una funzione continua TRASFORMA INTERVALLI IN INTERVALLI

SIMBOLI DI LANDAU

Siano f e g due funzioni definite nell'intorno di $x_0 - \{x_0\}$, sia poi $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$ $\forall x \in I(x_0) - \{x_0\}$.

Supponiamo poi che $\exists$ (finito o infinito):

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l}$$

- Se l è finito ($l \in \mathbb{R}$, $l \neq \pm\infty$), diciamo che la funzione f è controllata da g e scriviamo che: (f è un "o grande" di g)

$$\boxed{f = O(g)} \quad \text{per } x \to x_0 \Rightarrow \exists\, C > 0 \text{ (costante)} \to \boxed{|f(x)| \leq C|g(x)|}$$

$\forall x \in 0 < |x - x_0| < \delta$ $(\forall x \in I(x_0))$

⇝ in particolare:

→ se $\boxed{l \in \mathbb{R} - \{0\}, l \neq 0}$ diciamo che f è dello stesso ordine di grandezza di g per $x \to x_0$ e scriviamo:

$$\boxed{f \asymp g} \quad x \to x_0 \qquad \text{ovvero } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{l\, g(x)} = 1$$

che leggiamo f è EQUIGRANDE con g per $x \to x_0$

→ se $l \in \mathbb{R}$, $\boxed{l = 1}$ diciamo che f è EQUIVALENTE a g per $x \to x_0$ e scriviamo:

$$\boxed{f \sim g} \quad x \to x_0 \qquad \text{ovvero } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

→ se $l \in \mathbb{R}$, $\boxed{l = 0}$ diciamo che f è trascurabile rispetto a g per $x \to x_0$ e scriviamo:

$$\boxed{f = o(g)} \quad x \to x_0 \qquad \text{ovvero } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

che leggiamo f è un o PICCOLO di g per $x \to x_0$

• **PROPRIETÀ VARIE**

1° $\boxed{f \overset{\ell}{\sim} g \Rightarrow f \sim \ell g}$ $\left(\ell = \text{limite, ovvero } \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\ell g(x)} = 1\right)$

2° $\boxed{f \sim g \Rightarrow f = g + o(g)}$

infatti se definiamo $h(x) = f(x) - g(x)$

si ha $f(x) = g(x) + h(x)$

poiché $f \sim g \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right] = 0$

$\iff \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - g(x)}{g(x)}\right] \iff \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

quindi $h(x) = o(g)$

$\rightsquigarrow$ quindi $f(x) = g(x) + h(x) = g(x) + o(g)$

3° $\boxed{o(\lambda f) = o(f)}$ $\boxed{\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}}$ → costante qualsiasi

$\boxed{\lambda\, o(f) = o(f)}$

<u>Dim.</u> sia $h = o(f)$, Allora $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ anche la funzione λh è un $o(f)$

infatti $\lim_{x \to x_0} \frac{\lambda h(x)}{f(x)} = \lambda \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{o(f)}{f(x)} = \lambda \cdot 0 = 0$

4° $\boxed{f = o(1)}$ equivale a dire che f tende a 0 per $x \to x_0$

infatti $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$

quindi $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0}$

5° $f = O(1)$ equivale a dire che f tende a $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ (ovvero è limitata)

infatti $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$ quindi f è limitata in un intorno di x_0 $I(x_0)$.

- OPERAZIONI CON GLI o PICCOLO

- $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
- $\boxed{o(x^n) \pm o(x^m) = o(x^p)}$ con p = minimo tra n, m — es: $o(x^2)+o(x^3) = o(x^2)$
- $o(\lambda x^n) = o(x^n)$
- Sia $\varphi(x)$ una funzione limitata in $I(0)$ (si comporta come λ cost.) $\Rightarrow \varphi(x) \cdot o(x^n) = o(x^n)$
- $\boxed{x^m \, o(x^n) = o(x^{n+m})}$
- $\boxed{o(x^m)\, o(x^n) = o(x^{n+m})}$
- $\boxed{[o(x^n)]^k = o(x^{nk})}$
- $\boxed{\frac{o(f)}{g} = o\left(\frac{f}{g}\right)}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ o(o(f(x))) = o(f(x)) \\ \bullet\ o(f(x)) \cdot o(g(x)) = o(f(x)g(x)) \\ \bullet\ [f + o(f)]^p = f^p(x) + o(f^p(x)) \end{array}}$$

→ PROPRIETÀ Si vogliono studiare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) \quad , \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Se $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono funzioni che per $x \to x_0$ risultano essere:

$$\boxed{\tilde{f} \sim f \quad e \quad \tilde{g} \sim g}$$

Allora:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)\, g(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x)\, \tilde{g}(x)}$$

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}}$$

Dim.

Consideriamo $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) \cdot \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{f}(x)} \cdot \frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{g}(x)} =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \cdot \frac{g(x)}{\tilde{g}(x)} \cdot \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$$

poiché $\tilde{f} \sim f$, $\tilde{g} \sim g$: $\quad \frac{f(x)}{\tilde{f}(x)} \to 1, \quad \frac{g(x)}{\tilde{g}(x)} \to 1 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \tilde{f}(x) \cdot \tilde{g}(x)$

LIMITI FONDAMENTALI

$\boxed{\operatorname{sen} x \sim x} \rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = x + o(x)}$ per $x \to 0$

$\boxed{1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2} \rightarrow \boxed{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x)}$ per $x \to 0$

$\boxed{\log(1+x) \sim x} \rightarrow \boxed{\log(1+x) = x + o(x)}$ per $x \to 0$

$\boxed{\log x \sim x-1} \rightarrow \boxed{\log x = x-1+o(x-1)}$ per $x \to 1$

$\boxed{e^x - 1 \sim x} \rightarrow \boxed{e^x = x+1+o(x)}$ per $x \to 0$

$\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x} \rightarrow \boxed{(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)}$ per $x \to 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0$; $x^k = o(a^x)$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^k} = 0$; $\log_a x = o(x^k)$

$\lim_{x\to 0^+} x^k \log_a x = 0$; $\log_a x = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$

$x^2 = o(x)$ per $x \to 0$

$x = o(x^2)$ per $x \to +\infty$

$x^3 = o(x^2)$ per $x \to 0$

$\boxed{\log_a(x+1) = \log_a e \; x + o(x)}$ per $x \to 0$

$\boxed{a^x = 1 + x\log a + o(x)}$ per $x \to 0$

$\boxed{\operatorname{senh} x = x + o(x)}$ per $x \to 0$

$\boxed{x^\alpha = o(e^x)}$ per $x \to +\infty$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{e^x = o(|x|^\alpha)}$ per $x \to -\infty$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{a^x = o\left(\frac{1}{|x|^k}\right)}$ per $x \to -\infty$ $\forall k \in \mathbb{R}_+$ e $a > 1$

$\boxed{a^x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}$ per $x \to +\infty$ $\forall k \in \mathbb{R}_+$ e $0 < a < 1$

$\boxed{\operatorname{senh} x \sim \pm \frac{1}{2} e^{|x|}}$ per $x \to \pm\infty$

$\boxed{\cosh x \sim \frac{1}{2} e^{|x|}}$ per $x \to \pm\infty$

$\boxed{\log x = o(x^\alpha)}$ per $x \to +\infty$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$

$\boxed{\log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)}$ per $x \to 0^+$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$

$\boxed{\operatorname{tg} x \sim x}$

$\boxed{\operatorname{tg} x = x + o(x)}$ per $x \to 0$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1} \right)^{x+3} = 1^{\infty} = ?$

$$\downarrow$$

$$\frac{(x+2)(x+1)}{(x^2-x+1)}$$

oppure dividi $x^2+2x+3 \,|\, x^2-x+1$

$(x+1)^3 = (x+1)(x^2-x+1)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \underbrace{\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-x+1}{3x+2}} \right)^{\frac{x^2-x+1}{3x+2}} \right]}_{\to e}^{x+3 \cdot \frac{3x+2}{x^2-x+1}} = e^3$$

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}+3x} = \frac{\infty}{\infty-\infty} \Rightarrow \frac{x}{-x+3x} = \frac{1}{2}$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} 2 = 2$

! - $\lim_{x\to 1} (x-1)[x] \begin{cases} 1^- & (x-1)[x] = 0 \\ 1^+ & (x-1)[x] = 0 \end{cases}$

- $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x}{x} = 1}$

- $\boxed{\lim_{x\to +\infty} \frac{\pi^x + \cancel{x^2 e^x}}{3^x - \cancel{x^4 2^x}} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x = +\infty}$

- $\lim_{n\to +\infty} \frac{3^n - 4^n}{3^n - \cancel{n^4}} = \left(-\frac{4}{3}\right)^n = -\infty$ xké $3^n = o(-4^n)$

- $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{e^{2x-1}}{\sqrt{x}} = \dfrac{0}{0} = ?$ $\qquad e^{2x-1} \sim 2x$

$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{2\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}} = 0$

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{e^x + x - 1} = \dfrac{0}{0}$ $\qquad \ln(x+1) \sim x$

$e^x - 1 \sim x$

$\lim_{x \to 0} \dfrac{x}{2\cancel{x}} = \dfrac{1}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 159 di 304

[Il confronto locale di 2 funzioni ci suggerisce la velocità con cui le 2 funzioni convergono verso il loro valore limite.]

- ORDINE DI INFINITESIMO

Fissiamo un infinitesimo (o un infinito) φ definito in $I(x_0)$:

⇝ INFINITESIMO CAMPIONE

per

$x \to x_0$	$\varphi(x) = x - x_0$
$x \to x_0^+$	$\varphi(x) = x - x_0$
$x \to x_0^-$	$\varphi(x) = x_0 - x$
$x \to \infty$	$\varphi(x) = \frac{1}{x}$

⇝ INFINITO CAMPIONE

per

$x \to x_0$	$\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0}$
$x \to x_0^+$	$\varphi(x) = \frac{1}{x - x_0}$
$x \to x_0^-$	$\varphi(x) = \frac{1}{x_0 - x}$
$x \to \infty$	$\varphi(x) = x$

Sia f un infinitesimo (o un infinito) in x_0. Se $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$:

$$\boxed{f \sim \varphi^\alpha} \qquad x \to x_0$$

allora α è detto ordine di infinitesimo (o di infinito) di f in x_0 rispetto all'infinitesimo (infinito) campione φ

N.B. $\forall\ \beta > \alpha$ si ha $\varphi^\beta = o(f)$
$\forall\ \beta < \alpha$ si ha $f = o(\varphi^\beta)$

- **ASINTOTI**

N.B. asintotico $\Rightarrow$ equivalente
equivalente $\not\Rightarrow$ asintotico

* ASINTOTO OBLIQUO

Consideriamo f definita in $I(\pm\infty)$. Per $x \to \pm\infty$, una situazione notevole è quella per cui la funzione si comporta approssimativamente come una retta, ovvero di un polinomio di primo grado. Geometricamente il grafico di f tende a confondersi con il grafico di una retta.

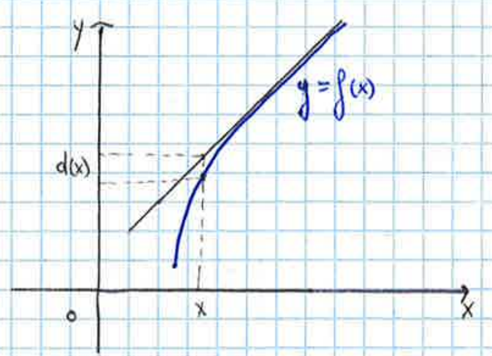
Quindi sia $r)$ $y = mx + q$ tale retta, allora la distanza tra la retta e la funzione è data da:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - (mx+q) \right] = 0} \qquad d(x) = |f(x) - (mx+q)|$$

$\longrightarrow$ Se questo limite risulta essere $= 0$, allora $y = mx + q$ è un asintoto in particolare se:

$m = 0 \leadsto$ asintoto orizzontale

$m \neq 0 \leadsto$ asintoto OBLIQUO



Quindi ogni qual volta troviamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ dobbiamo calcolare m e q per vedere se la f ammette asintoto

$\leadsto$ $\boxed{m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}} = l$, $l \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\leadsto$ $\boxed{q = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]} = t$, $t \in \mathbb{R} \cup \{0\}$

Quindi trovato m e q $\Rightarrow$ $\boxed{y = mx + q}$ è l'asintoto obliquo della funzione

N.B. Se f ammette asintoto obliquo, $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ ci dice che f è UN INFINITO DI ORDINE 1 rispetto all'infinito campione $\varphi(x) = x$ per $x \to \pm\infty$

- ALTRE PROPRIETÀ DELLE SUCCESSIONI

I teoremi generali sui limiti delle funzioni valgono anche per le successioni che sono particolari funzioni definite sugli interi, ovvero $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

- **TEOREMA DI ESISTENZA DEL LIMITE DELLE SUCCESSIONI MONOTONE**

Una successione definitivamente monotona, se è limitata allora è CONVERGENTE, se non è limitata allora è DIVERGENTE ($a +\infty$ se è $\nearrow$, $a -\infty$ se è $\searrow$)

- **TEOREMA DEL CRITERIO DEL RAPPORTO**

Sia $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$: $a_n \geq 0$ definitivamente. Supponiamo che $\exists$ (finito o infinito)

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$$

Se:

$$\boxed{\begin{cases} q < 1 & \text{allora } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \\ q = 1 & \text{allora } \rightsquigarrow ? \\ q > 1 & \text{allora } \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \end{cases}}$$

- **TEOREMA DEL CRITERIO DELLA RADICE**

Sia $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$, supponiamo che $\exists$ (finito o infinito), con $a_n \geq 0$ definitivamente

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = q}$$

Se:

$$\boxed{\begin{cases} q < 1 & \text{allora } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \\ q = 1 & \text{allora } \lim_{n \to +\infty} a_n \rightsquigarrow ? \\ q > 1 & \text{allora } \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \end{cases}}$$

- ALCUNE SUCCESSIONI NOTEVOLI

- $\lim_{n\to\infty} q^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad (q>0) \qquad [\text{se } q=0 \leadsto 0]$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = q^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad q>0$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

  ↳ dim. $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = e^{\log n^{\frac{1}{n}}} = e^{\frac{1}{n}\log n} = e^{\frac{\log n}{n}} = e^{0} = 1$

- INFINITI

Ciascuna delle seguenti funzioni è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE rispetto alla precedente.

$$\boxed{\log n < \sqrt{n} < n^{\alpha} < q^{n} < n! < n^{n}}$$

con α e $q>0$ e per $n \to +\infty$ (tendono tutte a $+\infty$ ma con diverse velocità)

CALCOLO DIFFERENZIALE

Data $f: \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ovvero funzione reale di variabile reale.
Sia $x_0 \in \text{dom} f$, e supponiamo che f sia definita in un $I(x_0)$

$\boxed{\Delta x = x - x_0}$ ⟶ INCREMENTO DELLA VARIABILE INDIPENDENTE tra x_0 e x

$\boxed{\Delta f = f(x) - f(x_0)}$ ⟶ INCREMENTO DELLA VARIABILE DIPENDENTE

quindi ⟶ $x = \Delta x + x_0$

$f(x) = \Delta f + f(x_0)$

Consideriamo adesso il quoziente tra Δf e Δx

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x + x_0 - x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$ ⟶ RAPPORTO INCREMENTALE DELLA f tra x_0 e x (rappresenta il tasso di incremento)

dove Δf è l'INCREMENTO ASSOLUTO della variabile dipendente

$\frac{\Delta f}{f}$ è l'INCREMENTO RELATIVO

Se poi moltiplichiamo x 100 (ovvero $\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot 100$) otteniamo il TASSO DI INCREMENTO PERCENTUALE

Es: $\Delta x = 0,2 \Rightarrow \Delta f = 0,06$

avremo un tasso di incremento percentuale pari a

$$\frac{0,06}{0,2} = 0,3 \cdot 100 \Rightarrow 30\%$$

N.B. Spesso Δx viene chiamato $h \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 169 di 304

$\rightsquigarrow$ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in un $I(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Essa dicesi **derivabile in x_0** se $\exists$ finito il limite del rapporto incrementale per $x \to x_0$

con $l \in \mathbb{R}$

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = l}$$

$f'(x_0) = l$ $\rightsquigarrow$ dicesi **derivata prima di f in x_0**

altre notazioni equivalenti sono: $f'(x_0) = y'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0)$

N.B. Se in x_0 il lim del $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ $\nexists$ oppure è ∞, x_0 non è derivabile $\Rightarrow f'(x_0) \nexists$

Dal punto di vista geometrico $\boxed{f'(x_0)}$ è il coefficiente angolare della retta tangente in x_0

retta tangente $\rightsquigarrow$ $\boxed{y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

- **DEFINIZIONE:** Se f è definita in dom f, preso un $I \subseteq \text{dom} f$, diciamo che **f è derivabile su I** se f è derivabile $\forall x \in I$

$\Rightarrow$ $\boxed{f': x_0 \longmapsto f'(x_0)}$ tale f' è detta **funzione derivata 1ª di f**

- **PROPRIETÀ:** Se f è derivabile in x_0, allora essa è continua in x_0.

Dim. $\exists f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

poichè $x - x_0 \to$ anche $f(x) - f(x_0) \to$

allora

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$ si ha $\underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}_{\text{condizione di continuità}}$

! **N.B.** Non tutte le funzioni continue in un punto sono derivabili. QUINDI NON VALE l'implicazione INVERSA ovvero:

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ derivabile} \Rightarrow f \text{ continua} \\ f \text{ continua} \not\Rightarrow f \text{ derivabile} \end{array}}$$

- **DERIVATA DI UNA FUNZIONE COMPOSTA** Sia $f(x)$ una funzione derivabile in x_0. Sia poi $g(y)$ una funzione derivabile in $y_0 = f(x_0)$. Allora tale funzione composta $g \circ f(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0:

$$\boxed{(g \circ f(x))'(x_0) = D[g(f(x))] = f'(x) \cdot g'(f(x))}$$

Dim. $\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h}$

→ utilizziamo la funzione ausiliare $\ell(z) = \frac{g(y+z) - g(y)}{z} - g'(y)$

→ tende a $g' - g'$

→ osserviamo che $\lim_{z \to 0} \ell(z) = 0$ e definiamo $\ell(0) = 0$ così che ℓ sia continua in 0

→ OSSERVIAMO che:

$$g(y+z) - g(y) = z(\ell(z) + g'(y))$$

poi poniamo $y = f(x)$ e $z = f(x+h) - f(x)$

ovvero $f(x+h) = z + f(x) = z + y$

quindi $\lim_{h \to 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(z+y) - g(y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z(\ell(z) + g'(y))}{h}$

poiché $z = f(x+h) - f(x)$ abbiamo che:

$$\lim_{h \to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \cdot \left(\underbrace{\ell(z)}_{\to 0} + g'(f(x))\right)\right] \Rightarrow f'(x) \cdot g'(f(x))$$

Es: $h(x) = \operatorname{sen} x^2$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad g(x) = \operatorname{sen}[f(x)]$

$\Rightarrow h'(x) = 2x \cos x^2$

N.B. Per DERIVATA LOGARITMICA si intende $\boxed{g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}}$

- PROPRIETÀ DELLE DERIVATE DI FUNZIONI PARI E DISPARI

Sia f pari [dispari], derivabile in dom f. Allora f' è una funzione dispari [pari].

Es: $f(x) = f(-x) \rightsquigarrow f(x) = x^2$; $f(-x) = x^2$

$D[f(x)] = x \rightsquigarrow g(x) = x \nearrow g(-x) = -x$

quindi $D[f(x)]$ funzione dispari

Dim. Se f è pari:

$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$

$f(-x) : x \mapsto -x$

$\Rightarrow -f'(-x)$

QUINDI $\quad f'(-x) = -f'(x) \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$

cioè la funzione f' è dispari

$\longrightarrow$ In modo analogo si dimostra se f è dispari.

- DERIVATA DI FUNZIONE ELEVATA A FUNZIONE

$$D\left[(f(x))^{g(x)} \right] = D\left[e^{g(x)\log(f(x))} \right] =$$

$$= \left[g'(x)\log(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \right] \cdot e^{g(x)\log(f(x))} =$$

$$= \left[g'(x)\log(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \right] \cdot e^{\log(f(x))^{g(x)}} =$$

$$= \left[g'(x)\log(f(x)) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} \right] \cdot \left[f(x) \right]^{g(x)} =$$

$$\boxed{D\left[(f(x))^{g(x)} \right] = \left[g'(x)\log(f(x)) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)} \right] \cdot \left[f(x) \right]^{g(x)}}$$

N.B.

- $f(x) = x^x \Rightarrow f(x) = e^{\log x^x} = e^{x\log x}$

  e poi derivi $e^{x\log x}$

- $f(x) = x^{x^x} \Rightarrow f(x) = e^{\log x^{x^x}} = e^{x^x \log x}$

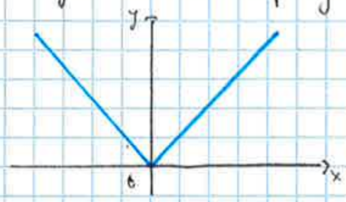
  e poi derivi x^x (come prima) e $\log x$

- PUNTI DI NON DERIVABILITÀ (punto angoloso, flesso a tg verticale, cuspide)

PUNTO ANGOLOSO

$\exists\ f'(x)$ è $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono finite ma diverse tra loro. Allora x_0 prende il nome di punto angoloso. Il termine deriva da una conseguenza geometrica, infatti la tangente a dx e a sx non coincidono, quindi esse si intersecano in x_0 formando un angolo. Inoltre se uno solo tra $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ è infinito diciamo che x_0 è un punto angoloso.

Es: $f(x) = |x|$ $x=0$ p. angoloso



$$f'_+(x_0),\ f'_-(x_0) \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

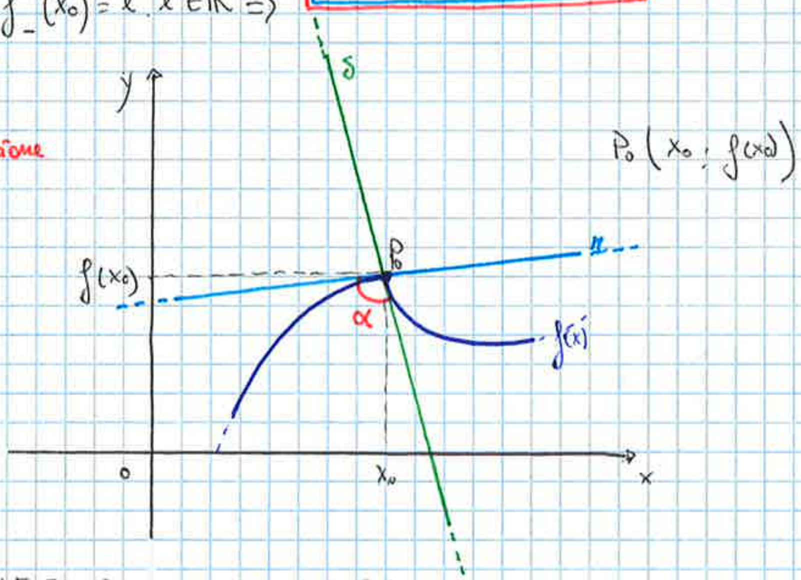
$$\boxed{f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)}$$

$$f'_+(x_0) = \infty,\ f'_-(x_0) = l \quad l \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

α = angolo formatosi dall'intersezione delle tangenti s e r

s = tangente da sx

r = tangente da dx



QUINDI PER CALCOLARE LE EQUAZIONI DELLE TANGENTI:

$s \rightarrow \boxed{y - f(x_0) = f'_-(x_0)(x - x_0)}$

$r \rightarrow \boxed{y - f(x_0) = f'_+(x_0)(x - x_0)}$

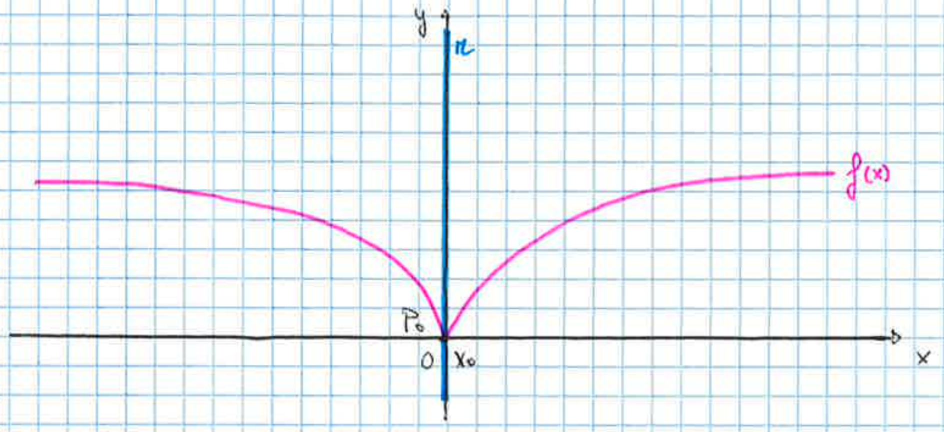
PUNTO DI CUSPIDE

Se $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ sono entrambi infiniti ma di segno discorde, x_0 è detto punto di cuspide

$$\boxed{f'_+(x_0) = \pm\infty \ \wedge \ f'_-(x_0) = \mp\infty \quad \text{con } f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)}$$

Es.: $\boxed{f(x) = \sqrt{|x|}}$

in questo caso $x_0 = 0$

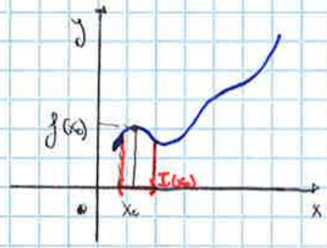


in questo caso la tangente trovata in P_0, sarà **PARALLELA all'asse y**:

r ⟶ $\boxed{x = x_0}$

N.B. Il punto di cuspide può essere considerato un particolare caso del punto angoloso

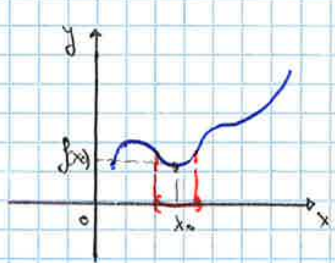
- PUNTI DI ESTREMO



Sia $x_0 \in \text{dom} f$. Si dice che x_0 è un punto di max relativo (o locale) per f se $\exists$ un $I(x_0)$:

$$\forall x \in I(x_0) \cap \text{dom} f \Rightarrow \boxed{f(x) \leq f(x_0)}$$

$f(x_0)$ è detto massimo relativo di f



Sia $x_0 \in \text{dom} f$. Si dice che x_0 è un punto di min relativo (o locale) per f se $\exists$ un $I(x_0)$:

$$\forall x \in I(x_0) \cap \text{dom} f \Rightarrow \boxed{f(x) \geq f(x_0)}$$

$f(x_0)$ è detto min relativo di f

N.B. Se al posto di considerare un intorno di x_0, consideriamo tutto il dom$f$ avremo massimi [minimi] assoluti di f

$\rightsquigarrow$ $\forall x \in \text{dom} f$ $\quad \boxed{f(x) \leq f(x_0)}$

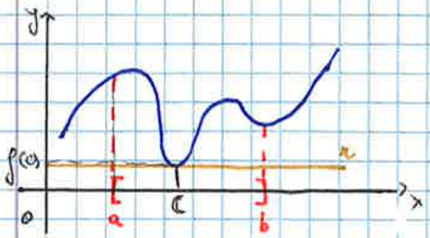
$f(x_0)$ è detto MAX assoluto di f

$\rightsquigarrow$ $\forall x \in \text{dom} f$ $\quad \boxed{f(x) \geq f(x_0)}$

$f(x_0)$ è detto MIN ASSOLUTO DI f

N.B. Un punto di minimo o di massimo verrà indicato generalmente come punto di estremo per f.

- **TEOREMA DI FERMAT**



Sia f definita in un intervallo chiuso $[a;b]$. Sia $c \in (a,b)$, e sia c un punto di max o minimo locale (o assoluto) per f. Se $\exists\, f'(c)$ deve essere necessariamente (f anche derivabile)

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

r = tg orizzontale xkè $f'(c) = 0$

Dim.: Sia c (per esempio) un punto di min. Allora consideriamo:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

dovendo essere uguali i due limiti si ha: $\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$ ovvero $f'(c) = 0$

N.B. Il Teo di Fermat garantisce che i punti di estremi interni vanno ricercati tra i punti stazionari della funzione. Tuttavia una funzione può avere punti stazionari che non sono punti di estremo ⟶ Es: $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3x^2$ $f'(x) = 0$ quando $x = 0$, ma non è un minimo perchè f risulta essere crescente in $\mathbb{R}^+$, quindi troveremo un flesso a tg orizzontale

Inoltre una f può avere punti di estremo che non sono punti stazionari, CIÒ ACCADE QUANDO UN PUNTO DI ESTREMO INTERNO AL DOMINIO NON È DERIVABILE, oppure QUANDO UN PUNTO DI ESTREMO (NON) $\notin$ al dom f.

⟶ Es: $f(x) = |x|$ dom f: $\mathbb{R}$ ⟶ punto angoloso in $x_0 = 0$
quindi $f'(0) \nexists$ ma comunque $x_0 = 0$ è un minimo perchè $\in$ dom f

QUINDI I PUNTI DI ESTREMO VANNO RICERCATI TRA:

!

1 ⟶ i PUNTI CRITICI
2 ⟶ i PUNTI DI NON DERIVABILITÀ
3 ⟶ gli ESTREMI DEL DOM di f

TEOREMA DI CAUCHY

Siano f e g due funzioni definite e continue su $[a;b]$ e siano derivabili in $(a;b)$. Sia poi $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$. Allora $\exists\, c \in (a;b)$:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$Hp \begin{cases} g(x), f(x) & \text{continue in } [a;b] \\ g(x), f(x) & \text{derivabili in } (a,b) \\ g'(x) \neq 0 & \end{cases} \Rightarrow Th \begin{cases} \exists\, c \in (a;b): \boxed{\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}} \end{cases}$$

Dim. Consideriamo una funzione ausiliaria $h(x)$:

$$\boxed{h(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(x)}$$

calcoliamo $h(a)$ e $h(b)$

$$h(a) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g(a) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(a)$$

$$= f(b)\,g(a) - \cancel{f(a)\,g(a)} - g(b)\,f(a) + \cancel{g(a)\,f(a)}$$

$$h(a) = f(b)\,g(a) - g(b)\,f(a)$$

$$h(b) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g(b) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f(b)$$

$$= \cancel{f(b)\,g(b)} - g(b)\,f(a) - \cancel{f(b)\,g(b)} + g(a)\,f(b)$$

$$= f(b)\,g(a) - g(b)\,f(a)$$

$\Rightarrow h(a) = h(b) \Rightarrow$ APPLICO ROLLE $\Rightarrow \exists\, c \in (a;b): h'(c) = 0$

$$h'(c) = \big(f(b)-f(a)\big)\, g'(c) - \big(g(b)-g(a)\big)\, f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(c)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

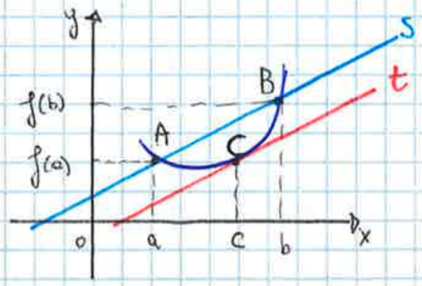
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 187 di 304

TEOREMA DI LAGRANGE (o valor medio)

Sia f continua in $[a;b]$ e derivabile in $(a;b)$, allo $\exists\, c \in (a;b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

N.B. [$\exists$ almeno un c, potrebbero essercene degli altri]

Hp $\begin{cases} f(x) \text{ continua in } [a;b] \\ f(x) \text{ derivabile in } (a;b) \end{cases}$ $\Rightarrow$ Th $\left\{ \exists\, c \in (a;b): \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)} \right.$



geometricamente questo rapporto incrementale rappresenta il coefficiente angolare della secante congiungente i due estremi. Il teorema implica l'$\exists$ di almeno un punto C attraverso il quale passa la tangente alla funzione in C avente stesso coefficiente angolare della secante.

Dim. Per dimostrare la veridicità del teorema, introduciamo l'utilizzo di una funzione ausiliaria $h(x)$ tale per cui:

eq. della retta S secante

$$\boxed{h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$$

con $h(x)$ continua e derivabile

Calcoliamo $h(a)$ e $h(b)$ $\rightsquigarrow$ $h(a) = f(a)$, $h(b) = f(a)$

poiché $h(a) = h(b)$ $\Rightarrow$ applichiamo ROLLE $\Rightarrow \exists\, c \in (a;b)$: $h'(c) = 0$

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

- PRIMA FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

Sia f derivabile in $x_0 \in \text{dom} f$. Per definizione di derivata si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0 \ ; \quad \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right] = 0$$

applicando Landau:

$$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0$$

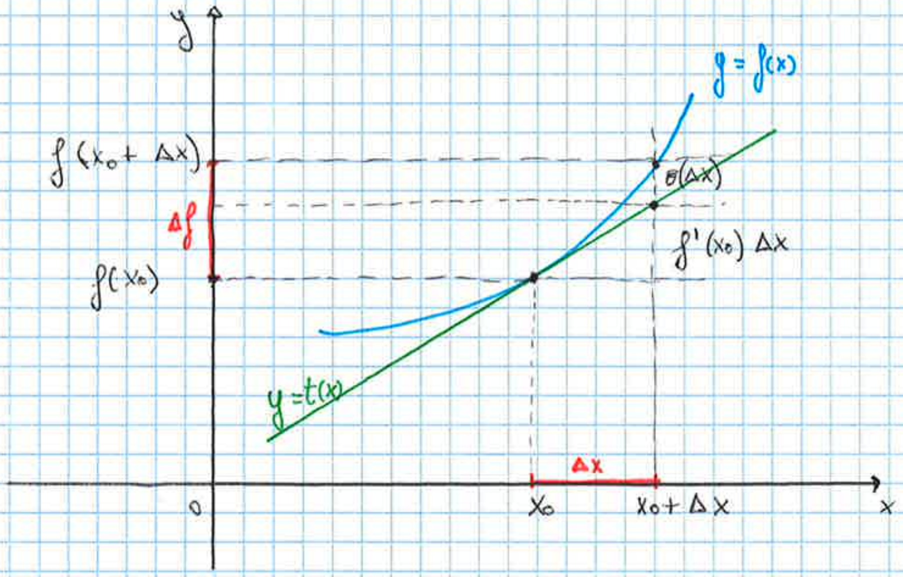
quindi $\boxed{\Delta f(x) = f'(x_0) \, \Delta x + o(\Delta x)}$ 1° formula dell'incremento finito

[per Δx abbastanza piccolo, siamo autorizzati a confondere Δf con $f'(x_0) \Delta x$]

(→ questa formula può essere facilmente ricavata dal Teo di Lagrange infatti:

$\exists c \in I : \quad f'(c) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ovvero $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$

$\Delta f = f'(c) \, \Delta x$) → 2° formula



INTERVALLI DI MONOTONIA DI UNA FUNZIONE

Sia f derivabile in $I \in \mathbb{R}$, allora vale:

→
- Se f è ↗ su I, allora $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$
- Se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$, allora f è ↗ su I
- Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, allora f è strettamente crescente ↗ su I

N.B. [Non è possibile rovesciare l'ultima implicazione, cioè dedurre che f sia strettamente crescente dal fatto che $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, es: $f(x) = x^3$, strettamente crescente in dom f ma $f'(x) = 0$ in $x = 0$!!!]

Sia f derivabile in $I \in \mathbb{R}$, allora vale:

→
- se f è ↘ su I, allora $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$
- se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$, allora f è ↘ su I
- se $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, allora f è strettamente decrescente ↘ su I

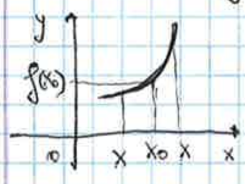
Dim per il Teo di Lagrange:

- $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}_{>0}}_{f'(c)(x-x_0) = h(x) > 0}$$ $\boxed{\text{sia } x > x_0}$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + h(x) \geq f(x_0)$$

- $$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\underbrace{f'(c)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)}_{<0}}_{f'(c)(x-x_0) = l(x) < 0}$$ $\boxed{\text{sia } x < x_0}$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + l(x) \leq f(x_0)$$



Quindi per studiare la monotonia, bisogna studiare il segno della derivata di f:
$f' \geq 0 \longrightarrow f$ monotona ↗
$f' \leq 0 \longrightarrow f$ monotona ↘

- DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

Sia f derivabile in un $I(x_0)$. Sia f' la funzione derivata di f.
Se f' è derivabile in x_0, si dice che f è derivabile due volte in x_0.
La funzione derivata seconda di f (f''), associa a x il valore $f''(x)$, ove questo sia definito

ALTRE NOTAZIONI : $f''_{(x_0)} = y''_{(x_0)} = \dfrac{d^2 f(x)}{d^2 x(x_0)} = D^2 f(x_0)$

IN GENERALE : per $k \geq 1$, la derivata di ordine k (o derivata k-esima) di f in x_0 è, se $\exists$, la derivata prima della funzione derivata $(k-1)$-esima di f in x_0, ovvero :

$$\boxed{f^{(k)}(x_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0)}$$

→ PER DEFINIZIONE : $\boxed{f^{(0)}_{(x_0)} = f(x_0)}$

- CLASSE DI UNA FUNZIONE

Una funzione f dicesi di classe C^k, con $k \geq 0$, su $I \in \mathbb{R}$, se essa è derivabile k volte in ogni punto di I. L'insieme delle funzioni di classe C^k su I viene indicato con $C^k(I)$

Una funzione f dicesi di classe C^∞ su $I \in \mathbb{R}$, se essa è derivabile un numero arbitrario di volte $\forall x \in I$. L'insieme delle funzioni di classe C^∞ su I viene indicato con $C^\infty(I)$

N.B. Tutte le funzioni elementari sono derivabili un numero arbitrario di volte, OVVERO : → FUNZIONI ELEMENTARI $\in C^\infty$, in tutti i loro punti interni al dom(f).

⇝ STUDIO DELLA CONVESSITÀ

Sia f derivabile 2 volte su I

- $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ è convessa su I (f' è crescente su I, $f' \geq 0$)
- $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente convessa su I (ma! il rovescio)
- $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \iff f$ è concava su I (f' è decrescente su I, $f' \leq 0$)
- $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente concava su I (ma! il rovescio)
- se $f'(x)$ è strettamente crescente su I, allora f è strettamente convessa su I
- se $f'(x)$ è strettamente decrescente su I, allora f è strettamente concava su I

⊛ PUNTO DI FLESSO A TANGENTE OBLIQUA

(sono punti in cui f cambia la CONCAVITÀ !!!)

Il punto x_0 dicesi punto di flesso a tangente obliqua di f se $\exists$ un $I(x_0) \subseteq \text{dom} f$ tale per cui vale:

$$\forall x \in I(x_0) \begin{cases} \text{se } x < x_0 & f(x) \leq t(x) \\ \text{se } x > x_0 & f(x) \geq t(x) \end{cases}$$

⇝ ascendente

⇝ discendente

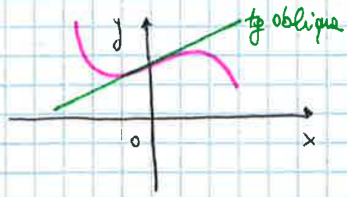
OVVERO: x_0 è un punto di flesso, se in sua corrispondenza, se $\exists f''$:

$$\boxed{f''(x_0) = 0} \quad \text{con} \quad \boxed{f'(x) \neq 0} \ !!! \ e \in \mathbb{R}$$

In particolare se f'' è di segno diverso a dx e a sx e più precisamente

$f''(x) \geq 0$: $-$ $+$ ⇒ ascendente

$+$ $-$ ⇒ discendente



N.B. $f''(x_0) = 0$ non è sufficiente a garantire che x_0 sia un punto di flesso. Se a dx e sx di x_0 f'' non cambia di segno allora tale punto non è di flesso a tg obliqua:

ES: $f(x) = x^4 \quad f''(x) = 12x^2$

$f''(x) = 0$ in $x = 0$ ⇝ No flesso perché $f''(x) \geq 0$ $+ \; 0 \; +$

Quindi se $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ è flesso a tg obliqua

NON è detto !!!

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Applicando il Teo di sostituzione si ottiene che

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

$\Rightarrow$ Tesi verificata

N.B. Il Teo di De L'Hopital fornisce 1 condizione sufficiente all'esistenza dell'limite. Infatti il $\lim_{\text{derivate}}$ può $\nexists$ $\left(\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \nexists\right)$ ma $\exists$ quello delle funzioni !!!

Es: $\lim_{x \to +\infty} \boxed{\frac{x + \operatorname{sen} x}{2x + \cos x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + o(x)}{2x + o(x)} = \frac{1}{2}$ $\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \nexists\right)$

VARI CASI NELL'UTILIZZO DI DE L'HOPITAL

① FORMA $\boxed{\frac{0}{0} \circ \frac{\infty}{\infty}}$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ \frac{\infty}{\infty} \end{cases} \overset{DH}{=} \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$

② FORMA $\boxed{\infty \cdot 0}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty \cdot 0 = \begin{cases} \boxed{\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = \frac{0}{0} \\ \boxed{\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}} = \frac{\infty}{\infty} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} = L}$ $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'} = L}$

(riconducibili alla 1° forma)

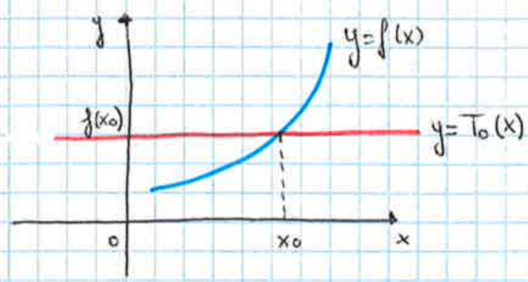
③ FORMA $\boxed{\infty - \infty}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = \infty - \infty \Rightarrow \frac{0}{0} \overset{DH}{=} \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{g(x) \cdot f(x)}\right)'} = L}$

(riconducibili alla 1° forma)

④ FORMA $\boxed{\infty^0}$ $\lim_{x \to x_0} \left[\underset{\frac{1}{\infty}}{f(x)}\right]^{g(x) \to 0} = \boxed{e^{\lim_{x \to x_0} g(x) \log(f(x))}} \begin{cases} \frac{\infty}{\infty} \\ \frac{0}{0} \end{cases} \overset{DH}{\Rightarrow}$

(Riconducibili alla 1° forma)

1° CASO : polinomio grado 0 (costante, $\boxed{n=0}$)



Sia f continua in x_0. Il polinomio costante di Taylor di grado 0 è:

$$\boxed{T_0(x) = f(x_0)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(altra notazione $Tf_0(x, x_0)$ / $Tf_{0,x_0}(x)$)

possiamo riscrivere la formula come ⇝ $\boxed{f(x) = T_0(x) + o(1)}$ per $x \to x_0$

ovvero possiamo approssimare la funzione f, in $I(x_0)$, con un polinomio di grado 0 in modo tale che la differenza tra:

$\boxed{R_0(x) = f(x) - T_0(x) = o(1)}$ ⇝ ERRORE DI APPROSSIMAZIONE o RESTO $\{R_0(x)\}$ sia un infinitesimo in $x = x_0$

$\boxed{R_0(x) = o(1)}$ ⟶ RESTO nella forma di PEANO

Se supponiamo che la f sia derivabile in $I(x_0)$ con x_0 compreso, per il Teorema di Lagrange avremo che: $\exists\, c \in I(x_0)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) \qquad \text{con } c \in (x_0; x)$$

da cui ⇝ $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$.

$$\Rightarrow f(x) = T_0(x) + f'(c)(x - x_0)$$

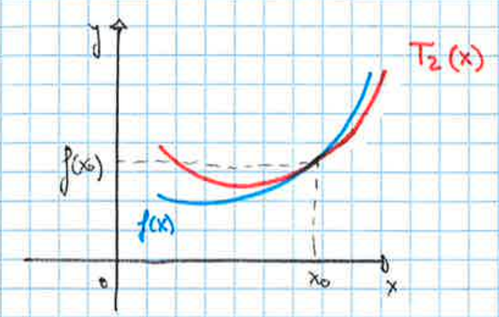
$$\Rightarrow R_0(x) = f(x) - T_0(x) = f'(c)(x - x_0)$$

Quindi:

$\boxed{R_0(x) = f'(c)(x - x_0)}$ ⇝ resto nella forma di LAGRANGE

con $c \in (x_0, x)$

3° CASO: polinomio di grado 2 (parabola, $\boxed{n=2}$).



Sia f continua in x_0. E sia derivabile 2 volte, ovvero $\exists\, f''(x_0)$. Il polinomio di grado 2 di Taylor è la parabola passante per x_0:

$$\boxed{T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + a(x-x_0)^2}$$

possiamo riscrivere la formula (funzione) come: $\boxed{f(x) = T_2(x) + o(x-x_0)^2}$ per $x \to x_0$

Quindi

$\boxed{R_2(x) = o(x-x_0)^2}$ → resto nella forma di PEANO (l'errore tende a 0 al ^{2}) ovvero approssimazione più precisa

quanto vale $a = ?$

$$R_2(x) = f(x) - T_2(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - a(x-x_0)^2$$

$$\frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{f(x)-T_2(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_2(x)}{(x-x_0)^2} = 0 \quad \text{quindi} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)(x-x_0)-a(x-x_0)^2}{(x-x_0)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{DH}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)\cdot 1 - 2a\underset{\to 0}{(x-x_0)}}{2\underset{\to 0}{(x-x_0)}} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{DH}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - 0 - 2a}{2}$$ poiché voglio che sia $= 0$ pongo:

$$f''(x) - 0 - 2a = 0 \Rightarrow \frac{f''(x)}{2} = a \Rightarrow \text{ponendo } a = \frac{f''(x)}{2} \text{ otteniamo}$$

$$\boxed{T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}$$

N.B. Il procedimento può essere reiterato al fine di costruire approssimazioni polinomiali di f di ordine via via crescente. Ne segue dunque il teorema: →

SVILUPPI NOTEVOLI DI TAYLOR

PREMESSA: se $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ è possibile costruire sviluppi centrati in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ e di ordine arbitrario

FUNZIONE ESPONENZIALE $\quad \boxed{x_0 \to 0}$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \qquad f^{(k)}(x) = e^x$

$f(x_0) = 1 \qquad f'(x_0) = 1 \qquad f''(x_0) = 1 \qquad f^{(k)}(x_0) = 1$

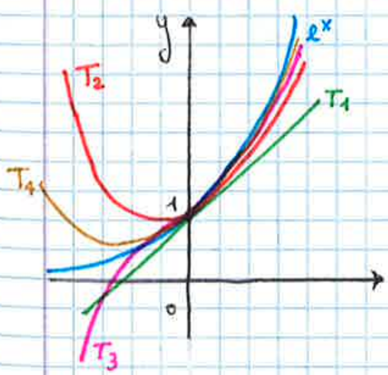
$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

per e^x con $x_0 = 0 \rightsquigarrow T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$$

SVILUPPO DI MACLAURIN DI ORDINE n CON RESTO DI PEANO PER $f(x) = e^x$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + o(x^n)} \rightsquigarrow \text{SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR}$$



Es: Trova un valore approssimato di e? $e = e^1 \sim T_n(1)$

di grado $n=3 \rightsquigarrow T_3(1) = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} = 2,67$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - \underbrace{x_0}_{\to 0})^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

Dim. utilizzando il criterio del rapporto otteniamo che:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)} = \frac{e^{c_1} \cdot \cancel{x^{n+2}} \cdot \cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cancel{!} \cdot \cancel{x^{n+1}} \cdot e^{c_2}} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{e^{c_1}}{e^{c_2}}\right)}_{\text{numero}} \underbrace{\left(\frac{x}{n+2}\right)}_{\to 0} = 0$$

FUNZIONE SENO $\quad x_0 \to 0 \quad$ N.B. SENO f dispari $\Rightarrow$ SVILUPPO MAC DISPARI!

$f(x) = \operatorname{sen} x \quad f'(x) = \cos x \quad \cancel{f''(x) = -\operatorname{sen} x} \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{(2m+1)}(x) = (-1)^m \cos x$

$f(x_0) = 0 \quad f'(x_0) = 1 \quad \cancel{f''(x_0) = 0} \quad f'''(x_0) = -1 \quad f^{(2m+1)}(x) = (-1)^m \cdot 1$

xké pari (è viene sempre 0)

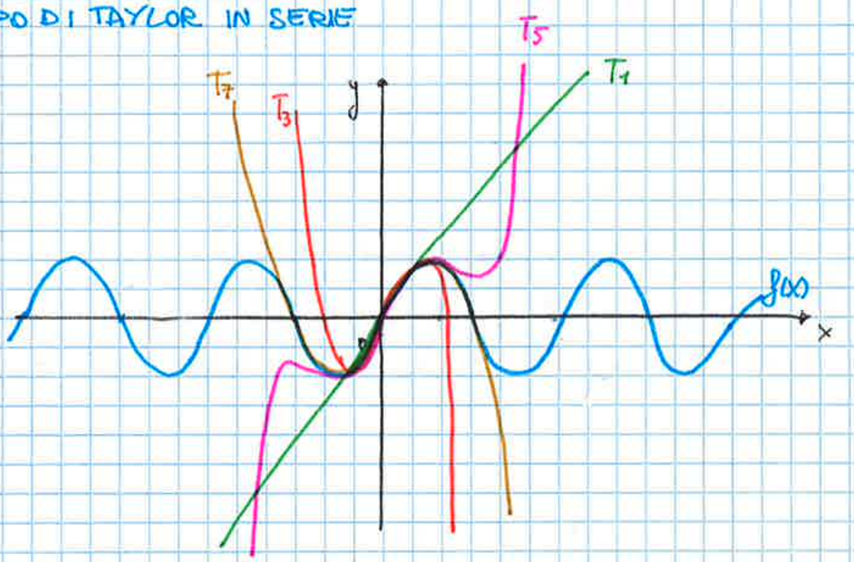
per sen x con $x_0 \to 0 \leadsto T_m(x) = 0 + 1x + 0 + (-1)\frac{x^3}{3!} + 0 + (1)\frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^m \cdot \frac{x^{(2m+1)}}{(2m+1)!} + o\left(x^{2m+2}\right)}$$

SVILUPPO DI MACLAURIN DI GRADO m con resto di PEANO per $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{(2m+1)}}{2m+1} + o\left(x^{2m+2}\right)}$$

SVILUPPO DI TAYLOR IN SERIE



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 207 di 304

(*) FUNZIONE ELEVAMENTO POTENZA $x_0 \to 0$ $(\alpha > 0)$

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $\quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$ $\quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ $\quad f^{m}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f(x_0) = 1^{\alpha} = 1$ $\quad f'(x_0) = \alpha \cdot 1^{\alpha-1} = \alpha$ $\quad f''(x_0) = \alpha(\alpha-1)1^{\alpha-2} = \alpha(\alpha-1)$ $\quad f^{m}(x_0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\cdot 1^{\alpha-k} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$

$$\Rightarrow T_m(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{m}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$$

$$T_m(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-\ +1)}{m!}x^m$$

poiché $\binom{\alpha}{0} = 1$ $\quad \binom{\alpha}{1} = \alpha$ $\quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}$

$$\binom{\alpha}{m} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!}$$ } coefficiente binomiale

Quindi

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{m}x^m + o(x^m)$$

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{m}x^m + o(x^m)}$$

SVILUPPO DI MACLAURIN

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{m}x^m + o(x^m)}$$ SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

e se fosse $\alpha = \frac{1}{2}$? $\Rightarrow \sqrt{x+1}$

⊛ FUNZIONI SENO E COSENO IPERBOLICO

Le funzioni seno e coseno iperbolico sono delle particolari funzioni che si ricavano dagli sviluppi di seno e coseno.

$$\operatorname{sen} x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

cosh x e senh x sono le due grandezze che soddisfano l'eguaglianza:

$$\boxed{\cos^2 h x - \operatorname{sen} h^2 x = 1} \qquad \boxed{\operatorname{sen} h\, x + \cosh x = e^x}$$

Dim. poichè $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\operatorname{sen} h x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = 1$$

$$\frac{\cancel{e^{2x}} + \cancel{e^{-2x}} + 2 - \cancel{e^{2x}} - \cancel{e^{-2x}} + 2}{4} = 1 \implies 1 = 1$$

Sviluppando $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ otteniamo che

$$\boxed{\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(2m)!}x^{2m} + o(x^{2m+1})}$$

Sviluppo cosx con tutti i termini positivi

$$\boxed{\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{2m} + o(x^{2m+1})}$$

x k è la derivata non cambia di segno
$(\operatorname{sen}hx)' = \cosh x$
$(\cosh x)' = \operatorname{sen}hx$

$$\boxed{\operatorname{sen} h x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{1}{(2m+1)!}x^{(2m+1)} + o(x^{2m+2})}$$

Sviluppo senx con tutti i termini positivi

$$\boxed{\operatorname{sen} h x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} x^{(2m+1)} + o(x^{2m+2})}$$

- OPERAZIONI SUGLI SVILUPPI DI TAYLOR

TEOREMA UNICITA' POLINOMIO DI TAYLOR

Sia f definita in $(a;b)$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile n volte in $x_0\in(a;b)$, $f\in C^n(a;b)$.

Se $\exists$ un polinomio P_n di grado $\leq n$:

$$\boxed{f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)} \quad \text{per } x\to x_0$$

Allora P_n coincide con il polinomio di Taylor di ordine n generato da f in x_0; ovvero:

$$\boxed{P_n(x)=T_n(x)}$$

Supponiamo da ora in avanti che $\boxed{x_0=0}$. A questa condizione si ci può sempre ricondurre ponendo

$$t=x-x_0 \qquad \text{e} \qquad \boxed{x\to t}$$

Adesso definiamo due funzioni:

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+o(x^n)=P_f(x)+o(x^n)$$

$$g(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n+o(x^n)=P_g(x)+o(x^n)$$

→ Supponiamo di avere $h(x) = f(x) \pm g(x)$

con $P_f(x) + o(x^m) = f(x)$

$P_g(x) + o(x^m) = g(x)$

$h(x) = P_f(x) \pm P_g(x) + o(x^m)$

Es: $h(x) = e^x - \sqrt{1+2x}$ $\qquad f(x) = e^x \quad g(x) = \sqrt{1+2x} \quad x \to 0$

$h(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} - \cancel{x} + o(x)$

$h(x) = o(x)$ ⟹ Risultato non è sufficientemente informativo

⟹ QUINDI aggiungo 1 termine a tutti e 2 i polinomi

N.B. Nello sviluppare la differenza $f-g$, si può incorrere nella CANCELLAZIONE DI TUTTE LE POTENZE DI X DI ESPONENTE $\leq m$ se ciascuna di queste compare nei due sviluppi con lo stesso coefficiente.

⟹ Per ottenere la prima potenza di x con coefficiente non nullo, è necessario allora partire da sviluppi di f e di g di ordine $m' > m$. (In generale non si può dire a priori quale sia il valore minimo di m', ma si procede a tentativi).

→ Se gli sviluppi sono + corti del necessario si perviene a risultati NON SIGNIFICATIVI, o peggio ERRATI.

PERDONO SEMPRE I PEZZI !!!

⟹ Se la funzione si presenta come somma (differenza) tutti gli addendi devono essere approssimati con la stessa precisione!

⟹ $h(x) = \cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$h(x) = x^2 + o(x^2)$

3 QUOZIENTE DI SVILUPPI

Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano sviluppate in $x_0 = 0$ e $\boxed{g(x) \neq 0}$

$$f(x) = P_f(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = P_g(x) + o(x^n)$$

$$\boxed{h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}} \Rightarrow \boxed{h(x)\, g(x) = f(x)}$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{3!} - \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} - \dots}$$

NON È UN POLINOMIO!

$$\boxed{P_f(x) + o(x^n) = P_h(x) \cdot P_g(x) + o(x^n)}$$

definito $P_h(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + o(x^n)$

Possiamo ricavare i coefficienti c_k di $P_h(x)$ mediante la divisione:

$$\begin{array}{l|l}
a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + o(x^n) & b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + o(b^n) \\
\hline
a_0 + a'_1 x + a'_2 x^2 + \dots + a'_n x^n + o(x^n) & c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n + o(x^n) \\
\hline
0 + \tilde{a}_1 x + \tilde{a}_2 x^2 + \dots + \tilde{a}_n x^n + o(x^n) & \\
\vdots & \\
\hline
0 + o(x^n) &
\end{array}$$

$$\left(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$C_0 - C_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x - \frac{C_1 x^3}{2} + C_2 x^2 - \cancel{\frac{C_2 x^4}{2}} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Applico l' identità tra polinomi:

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ C_1 = 1 \\ C_2 - \frac{C_0}{2} = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad h(x) = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

⇝ oppure la divisione:

$$\begin{array}{l|l} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) & 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \hline -x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) & x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ \hline // \quad \frac{x^3}{3} + o(x^3) & \\ \quad -\frac{x^3}{3} + o(x^3) & \\ \hline // \quad + o(x^3) & \end{array}$$

$$\Rightarrow h(x) = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

N.B. Es: $h(x) = e^{\cos x}$ sviluppo in $x_0 = 0$

$$h(x) = P_f(P_g(x)) + o(x^n)$$ ⇝ Non applicabile

perchè il coseno non è infinitesimo per $x \to 0$ infatti $\cos 0 = 1$!

⇒ ALLORA!

$$\boxed{h(x) = e^{\cos x}}$$
$$= \boxed{e\left[e^{\cos x - 1}\right]}$$
$$\left(e^{\cos x + 1 - 1}\right)$$

pongo $\cos x - 1 = t$

quindi se $x \to 0$ $\cos 0 - 1 = t$

$0 = t$

quindi $t \to 0$

allora $h(x) = e\left[e^{\cos x - 1}\right]$ si può sviluppare

$h(x) = \ell(x) \cdot e$ dove $\ell(x) = e^{\cos x - 1}$

$$\ell(x) = P_f(P_g(x)) + o(x^n)$$
$$P_f(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)$$
$$P_g(x) = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \cancel{-1}$$

OPPURE

$h(x) = e^{\cos x}$

1ª) prima sviluppo il $\cos x$

⇒ $e^{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}$

2º) riscrivo come:

$\boxed{e^1 \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}} \to 0$ per $x \to 0$ infinitesimo

3º) Adesso posso sviluppare l'esponenziale e^y

$$\Rightarrow \ell(x) = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2$$

$$\ell(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^2) \quad \text{per } t \to 0$$

$$h(x) = e\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^2)$$

$$h(x) = e - e\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

VERIFICARE POLINOMIO

$h(0) = \lim_{x \to 0} h(x)$; $e^{\cos 0} = e \Rightarrow e = e \to$ OK!

N.B. Dal polinomio di Taylor (o di Mac) possiamo risalire alle derivate f', f'', infatti

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\, x + \frac{f''(x_0)}{2!}\, x^2 + \dots + \frac{f^m(x_0)}{m!}\, x^m + o(x^m) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= a + b\,x + c\,x^2 + \dots + f\,x^m + o(x^m)$$

⇒ • se $a = 0$, $f(x_0) = 0$, la funzione è infinitesima di ordine $m \geq 1$

• se $a = 0$, $b \neq 0$ ⇒ PARTE PRINCIPALE è $\boxed{p(x) = b(x)}$ → $\boxed{p(x) = a_m (x - x_0)^m}$ IN GENERALE

→ • se $b > 0$, $f'(x_0) > 0$ ⇒ f è strettamente crescente in $I(x_0)$

→ • se $b < 0$, $f'(x_0) < 0$ ⇒ f è strettamente decrescente in $I(x_0)$

• se $b = 0$, $f'(x_0) = 0$ ⇒ f è infinitesima con ordine che dipende dal 1° coeff. non nullo.

→ • se $c > 0$, $f''(x_0) > 0$ ⇒ f è convessa in $x = 0$

→ • se $c < 0$, $f''(x_0) < 0$ ⇒ f è concava in $x = 0$

→ • se $c = 0$, $f''(x_0) = 0$ ⇒ f potrebbe avere un flesso a tg obliqua

→ • se $b = 0$, $f'(x_0) = 0$ ⇒ f potrebbe avere (max e min) punto critico o di stazionarietà

N.B. → calcolo valore derivata ennesima

se $c = 3$, ⇒ $\frac{f''(x_0)}{2!} = 3$ quindi $\boxed{f''(x_0) = 3 \cdot 2!}$

→ IN GENERALE

$$\boxed{f^{(m)}(x_0) = K \cdot m!}$$

Es: infatti se abbiamo uno sviluppo

$$f(x) = \dots + 78\,x^{18} + \dots$$

sappiamo che $\frac{f^{(18)}(x_0)}{18!} = 78$

$$\Rightarrow f^{(18)}(x_0) = 78 \cdot 18!$$

② Se la funzione è composta conviene: $P_f(P_g(x)) \rightarrow f(g(x))$

1) Sviluppare $g(x)$, la + interna, fissando un ordine basso (ma non troppo)
[ma deve essere infinitesima per $x \to 0$]

2) Sviluppare la più esterna fino alla potenza $-n$ = a quella di $g(x)$

3) Ricordo i doppi prodotti!

N.B. • per sviluppare l'esponenziale deve avere come esponente un infinitesimo

$$f(x) = e^{2+x+o(x)} \quad x \to 0 \quad e^{2} \text{ non infinitesimo} \Rightarrow$$

$$f(x) = e^{2} \cdot e^{x+o(x)} \quad x \to 0 \quad e^{0} \text{ infinitesimo} \Rightarrow \text{sviluppo}$$

• il log per essere sviluppato deve avere come argomento $(1+x)$!

$$f(x) = \log(a+x)$$

$$= \log\left[a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right] = \log a + \log\left(1+\frac{x}{a}\right)$$

Pippo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 227 di 304

STUDIO DI FUNZIONE

Sia f una funzione, se ne calcoli:

1) Dominio ed eventuali simmetrie

- determinare il dom(f) [ovvero dove la funzione esiste]
- determinare l'eventuale periodicità
- determinare se la funzione è pari ($f(-x) = f(x)$) simmetria rispetto a y
  dispari ($f(-x) = -f(x)$) simmetria rispetto a O
- determinare eventuali altre simmetrie (oltre agli assi cartesiani) rispetto a rette

2) Eventuali zeri della funzione

- determinare le intersezioni di f con gli assi cartesiani

3) Segno o positività

- porre la funzione $f \geq 0$, e vedere in quali intervalli f è positiva o negativa

4) Limiti agli estremi del dom(f) e gli eventuali asintoti

- determinare i limiti agli estremi del dom(f)
- calcolare gli eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

5) Continuità e gli eventuali punti di discontinuità

- determinare la continuità in particolari punti ponendo $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- determinare gli eventuali punti di discontinuità:
  - punti a discontinuità eliminabile (e prolungare la continuità se richiesto)
  - salti
  - punti di discontinuità di seconda sp.

- N.B. [la composizione di funzioni continue è continua
  se la funzione è data con una legge a tratti, nei punti dove cambia la legge potrebbero esserci dei salti o altre discontinuità]

INTEGRALI

CALCOLO INTEGRALE

INTEGRAZIONE INDEFINITA

Troviamo tutte le funzioni che hanno come derivata una funzione ivi assegnata. Si tratta cioè dell'operazione inversa della derivazione, chiamata appunto integrazione indefinita.

RISULTATO

un insieme infinito di funzioni primitive

(ovvero un insieme di funzioni che differiscono tra loro solo per una costante additiva)

INTEGRAZIONE DEFINITA

Definiamo e calcoliamo l'area di una regione piana delimitata superiormente e inferiormente dai grafici di funzioni assegnate su un intervallo chiuso e limitato, ovvero eseguiamo una integrazione definita.

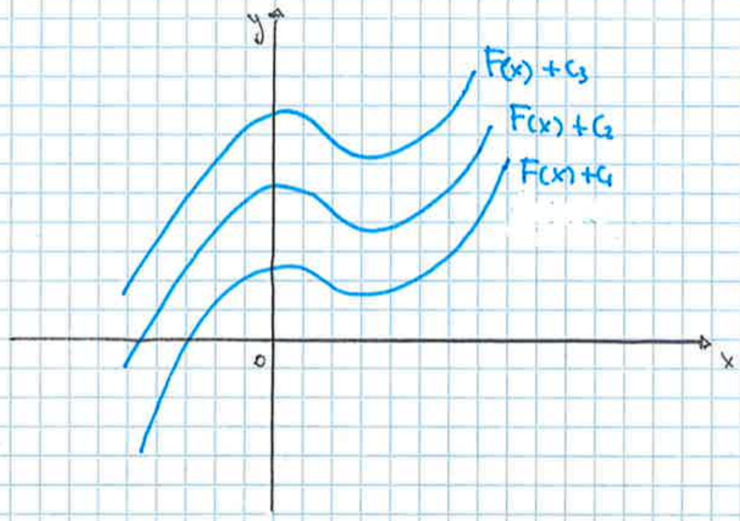
RISULTATO

un numero che rappresenta l'area della regione trovata.

- TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DELL'INSIEME DELLE PRIMITIVE di f

Sia f una funzione integrabile (in senso indefinito) su I e sia F una sua primitiva. Allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni $F(x) + c$ al variare di c in $\mathbb{R}$.

N.B. Dal punto di vista geometrico, il Teo. afferma che i grafici di tutte le primitive di una f integrabile si ottengono per traslazione verticale.



Dato il concetto di primitiva possiamo definire il concetto d'integrale indefinito.

- INTEGRALI IMMEDIATI

$$\int 1 \cdot dx = x + c$$

$$\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \text{con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + c$$

$$\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$$

$$\int a^{x}\, dx = \frac{a^{x}}{\log a} + c$$

$$\int e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \quad \text{con } \alpha \neq 0$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int (1 + \tan^2 x)\, dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\, dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\log|\cos x| + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c$$

$$\int -\frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arccotg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$$

$$\int \log x\, dx = x(\log x - 1) + c$$

$$\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + c$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x \cos x) + c$$

$$\int \operatorname{sen}^2 h x\, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{senh} x \cosh x - x) + c$$

$$\int \cos^2 h x\, dx = \frac{1}{2}(\operatorname{senh} x \cosh x + x) + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sqrt{1+x^2} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c = \operatorname{settsinh} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c = \operatorname{settcosh} x + c$$

- REGOLE DI INTEGRAZIONE INDEFINITA

A partire dagli integrali indefiniti delle funzioni elementari è possibile ottenere gli integrali indefiniti di altre funzioni seguendo le regole di integrazione seguenti:

METODI RISOLUTIVI INTEGRALI

- DECOMPOSIZIONE
- PER SOSTITUZIONE
- PER PARTI

① DECOMPOSIZIONE

- TEOREMA DI LINEARITÀ DELL'INTEGRALE:
(Proprietà)

Siano $f(x)$ e $g(x)$ funzioni integrabili in I. Allora, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la funzione $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile in I:

$$\boxed{\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx}$$

② SOSTITUZIONE

Sia $f(x)$ una funzione integrabile su un intervallo J e sia $F(x)$ una sua primitiva. Sia poi $g(t)$ una funzione derivabile, definita in $I \subseteq J$. Allora $f(g(t)) \cdot g'(t)$ è integrabile in I e si ha:

$$\boxed{\int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt = F\left(g(t)\right) + c = \int f(x)\, dx}$$

Es: $\int \frac{1}{x+1}\, dx = ?$ derivo $x + 1 = t$, $\boxed{dx = dt}$ da calcolare!

sostituisco

$\int \frac{1}{t}\, dt = \log|t| + c$ risostituisco

$\log|x+1| + c$

$\boxed{\int \arcsin x\, dx}$ $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t$ ← **ALCUNE POSIZIONI UTILI** → $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\boxed{\int \frac{a}{b + \operatorname{sen} x}\, dx}$ ricordando che $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Es: $\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cdot \cos x \cdot dx$ lo risolvo per parti

$f = \cos x \qquad g' = \cos x$

$f' = -\operatorname{sen} x \qquad g = \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ risolvo $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$ per parti

$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x \, dx$

$f = \operatorname{sen} x \quad g' = \operatorname{sen} x$

$f' = \cos x \quad g = -\cos x$

$\Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \cancel{\cos x \operatorname{sen} x} - \cancel{\cos x \operatorname{sen} x} + \int \cos^2 x \, dx \rightsquigarrow$ Punto morto **RICORSIONE**

$0 = 0$

ma se penso il $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \, dx$ otteniamo:

$\int \cos^2 x \, dx = \cos x \operatorname{sen} x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$

$\int \cos^2 x \, dx = \cos x \operatorname{sen} x + x - \int \cos^2 x \, dx$

$\Rightarrow 2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \operatorname{sen} x + x$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos x + x}{2} + c$$

- TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Sia $Q(x)$ un polinomio di grado m. Allora può essere sempre fattorizzato così: (ovvero si può riscrivere così:)

$$\boxed{Q(x) = K \underbrace{(x-\alpha_1)^{\overset{\text{molteplicità}}{m_1}} \cdot (x-\alpha_2)^{m_2}}_{\text{radici reali}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{m_1} \cdot \ldots (x^2+\beta_2 x+\gamma_2)^{m_1}}_{\text{radici immaginarie}}}$$

$m_1 + m_2 + \ldots \quad m_1 + m_2 + \ldots = m$ ⟶ grado stesso del polinomio

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha_1)} + \frac{A_2}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{C_1 x + D_1}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)} + \ldots}$$

$\int f(x) = \log t + c$

$\int f(x)^{-2} = \ldots$

se $C = 0$

$\int \frac{1}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c$

se $C \neq 0$

$\int f(x) = \log t + c$

- PRINCIPIO DI IDENTITÀ di polinomi

Due polinomi di grado $m-1$ coincidono

a) se e solo se hanno ordinatamente uguali i coefficienti di ciascuna potenza della variabile indipendente

Es: $\quad ax^2 + bx + c = x^2 - 5$

$$\begin{cases} a x^2 = x^2 \\ bx = 0 \\ c = -5 \end{cases}$$

$\boxed{2° \text{ CASO}} \rightsquigarrow \boxed{\Delta = 0} \rightsquigarrow Q(x) =$ quadrato di binomio

$$\int \frac{k \, dx}{ax^2+bx+c} = \boxed{k \int \left(\sqrt{a}x + \sqrt{c}\right)^{-2}} \rightsquigarrow \text{numeratore è costante}$$

$$\boxed{\int \left(f(x)\right)^m \cdot f'(x)}$$

Es: $\displaystyle\int \frac{3}{4x^2-4x+1} dx = 3\int \frac{1}{(2x-1)^2} dx = \frac{3}{2}\int 2(2x-1)^{-2} dx = \frac{3}{2}(2x-1)^{-1} + c$

$$\boxed{\int \frac{ax-b}{ax^2+bx+c} = \int \left(\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{(x-x_1)^2}\right) dx}$$

numeratore polinomio

Se fosse stato $Q(x) = ax^3 \pm bx^2 \pm ...$

$\Rightarrow \dfrac{A}{(x-x_1)} + \dfrac{B}{(x-x_1)^2} + \dfrac{C}{(x-x_1)^3}$

Es $\displaystyle\int \frac{2x-1}{9x^2-6x+1} dx \Rightarrow \frac{2x-1}{(3x-1)^2} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{(3x-1)^2}$

$\Rightarrow$

$$2x-1 = A(9x^2-6x+1) + B$$

$$2x-1 = 9Ax^2 - 6Ax + A + B$$

$$\begin{cases} A = 5 \\ B = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \frac{5}{(3x-1)} dx + \int \frac{6}{(3x-1)^2} dx$$

Es: $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+x+11}\,dx \qquad \Delta_{Q(x)} < 0 \;!$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot 3\left(x+\frac{5}{3}\right)}{x^2+x+11}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1+\frac{10}{3}}{x^2+x+11}\,dx =$$

$$\frac{3}{2}\left[\log|x^2+x+11| + \frac{7}{3}\int \frac{1}{x^2+x+11}\,dx\right]$$

$$\int \frac{1}{x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+11}\,dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{43}{4}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{43}{4}}\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{43}{4}}\left[\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{43}{4}}}\right)^2+1\right]}\,dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{43}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{43}}{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{43}}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{43}\,(2x+1)}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}\log|x^2+x+11| + \frac{7}{\sqrt{43}}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{\sqrt{43}\,(2x+1)}{4}\right] + c$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 245 di 304

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\log|x^2+x+1| - 21\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{4}\right)\right] + c =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| - \frac{1}{6}\log|x^2+x+1| + 7\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{4} + c$$

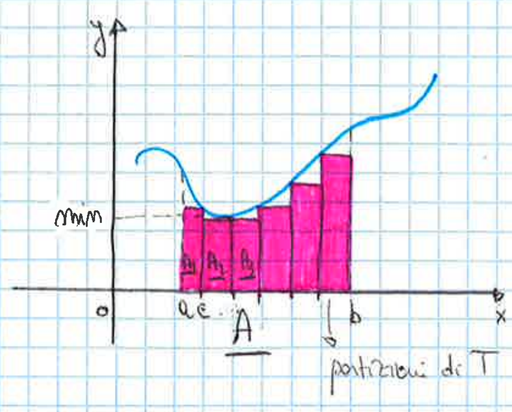
ALCUNE POSIZIONI FREQUENTI

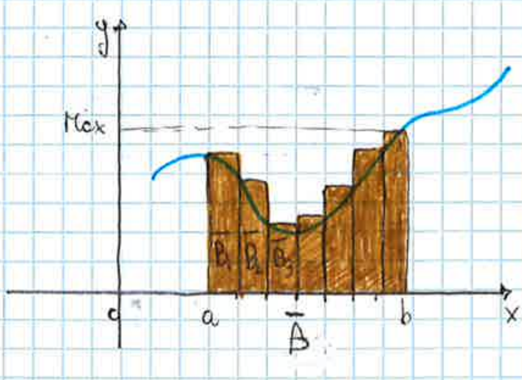
a) se $\int$ è f. razionale di $\sqrt[m]{x-a}$ $\qquad \boxed{t = \sqrt[m]{x-a}}$

b) se $\int$ è f. razionale di $e^{\alpha x}$ $\qquad \boxed{t = e^{\alpha x}}$

c) se $\int$ è f. razionale di $\boxed{\sin x \text{ e/o } \cos x}$ $\qquad \boxed{t = \tan\frac{x}{2}}$ $\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

d) se $\int$ è f. razionale di $\boxed{\sin^2 x \text{ e/o } \cos^2 x}$ $\qquad \boxed{t = \tan x}$ $\quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$





$\underline{A} < T$ $\qquad\qquad$ $\overline{B} > T$

$\Rightarrow \underline{A} < T < \overline{A}$ $\rightsquigarrow$ $(b-a)\,m \leq T \leq (b-a)\,M$

$\underline{A_1}$ = area contenuta nell'area sottesa ad f limitatamente in $[a;c]$
$\underline{A_2}$ = " " " " " " " " " $[c;d]$
$\overline{B_1}$ = area che contiene l'area sottesa ad f limitatamente in $[a;c]$
$\overline{B_2}$ = " " " " " " " " " $[c;d]$

$\underline{A_1} + \underline{A_2} \leq \overline{B_1} + \overline{B_2}$ $\rightsquigarrow$ conveniamo che maggiore è il numero degli intervalli maggiore sarà l'approssimazione del valore dell'area.

$\rightsquigarrow$ Sia ora I_i un qualsiasi sotto intervallo $\in [a;b]$
detta Δx l'ampiezza dell'intervallo I_i, e n il numero di sotto intervalli

$$\underline{A_i} = \Delta x \cdot \underset{\text{min di } f}{\underline{f_i}} \quad ; \quad \overline{B_i} = \Delta x\, \overset{\text{max di } f}{\overline{f_i}}$$

$\Rightarrow \underline{A_i} \leq A \leq \overline{B_i}$ $\qquad$ Sapendo che:

$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \underline{A_i}}_{\underline{S}(P)} \leq A \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \overline{B_i}}_{\overline{S}(P)}}$$

chiamiamo $\underline{S}(P)$ $\qquad$ $\overline{S}(P)$

dove P (partizione) fa riferimento alla partizione scelta $\{I_1, I_2 \dots I_n\}$

$\underline{S} = \sup\{\underline{S}(P),\ P \in \mathcal{P}\}$
$\overline{S} = \inf\{\overline{S}(P),\ P \in \mathcal{P}\}$

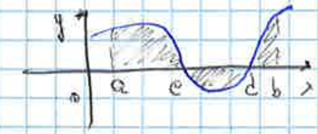
$\mathcal{P}$ = insieme di tutte le partizioni

- PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI DEFINITI

1) $$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$$

2) $$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

3) $$\int_a^c f(x)\,dx - \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$



4) PROPRIETÀ ADDITIVA rispetto al dominio di integrazione

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

5) PROPRIETÀ DI LINEARITÀ dell'integrale definito

$$\boxed{\int_a^b \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx}$$

6) PROPRIETÀ DELLA POSITIVITÀ dell'integrale definito con $a < b$, se $f(x) \geq 0$ in $[a;b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \geq 0}$$

7) PROPRIETÀ CONFRONTO TRA integrali definiti

Siano $a, b \in I$ con $a < b$, se:

$$\boxed{f \leq g \text{ in } [a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx}$$

8) PROPRIETÀ MAGGIORAZIONE dell'integrale definito

con $a < b$

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

Es: data $f(x) = \sqrt{x}$ e $I\,[0;9]$ calcola C.

- $dom(f): x \geq 0 \Rightarrow$ continua in I
- $f(c) = \dfrac{\int_0^9 \sqrt{x}\,dx}{9} = \dfrac{\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9}{9}$

$\mu = \frac{1}{\cancel{9}} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{27} = 2$

$f(c) = \mu = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2 = \sqrt{x} \end{cases} \begin{cases} y = 2 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow C(4;2)$

poichè $C \in [0;9]$ è soluzione accettabile.

TEOREMA di TORRICELLI - BARROW (o di Newton-Leibniz) [corollario del Teo. fond. C.I]

Sia f continua su $[a;b]$, Sia F una sua primitiva qualsiasi.
Allora:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b}$$ o anche $F(x)\Big|_a^b$

Dim. Se F è una primitive allora $F(x) = A(x) + K$

$$F(b) - F(a) = A(b) \cancel{+K} - A(a) \cancel{-K}$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \underbrace{\int_a^a f(x)\,dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow F(b)-F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$$

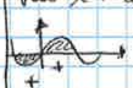
→ alcune considerazioni

$F'(x) = f(x) \Rightarrow$ se $f(x)>0$ $F(x)$ è crescente (infatti $F'(x)>0$)
se $f(x)<0$ $F(x)$ è decrescente ($F'(x)<0$)
se $f(x)=0$ $F(x)$ ha un punto critico ($F'(x)=0$)

Sia $\boxed{f \text{ pari}} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ e $F(x)$ è dispari

Sia $\boxed{f \text{ dispari}} \Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
↳ e $F(x)$ è pari

→ [Ma l'Area no! infatti



$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}x\,dx = 0$

ma $A = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}x\,dx = 4$]

⚠ **NOTA:** Negli integrali definiti calcolati col metodo di sostituzione devi stare attento!:

→ ① o calcoli l'indefinito $\int \frac{1}{t}\,dt = \log t$, sostituisci x e lo calcoli $[\log x]_0^3$

② oppure devi cambiare gli estremi $\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx$ $\quad x+1=t$

$\Rightarrow$ se $x=0 \rightarrow t=1$
se $x=1 \rightarrow t=2$

quindi $\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$

INTEGRALI IMPROPRI

Il concetto di integrale improprio, permette ad esempio di estendere il calcolo delle aree al caso di regioni non limitate del piano.

INTEGRALI IMPROPRI del 1° TIPO

↓

INTERVALLI ILLIMITATI

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \qquad I_1\ [a;+\infty) \quad \text{o} \quad I_2\ (-\infty;a]$$

INTEGRALI IMPROPRI del 2° TIPO

↓

FUNZIONE NON FINITA IN $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad I_1\ [a;b) \quad \text{o} \quad I_2\ (a;b] \quad \text{o} \quad I_3\ (a;b)$$

⇝ Denotiamo:

$\boxed{\mathcal{R}([a;+\infty))}$ = l'insieme delle funzioni integrabili su $[a;+\infty)$, ma con integrale improprio convergente

$\boxed{\mathcal{R}_{loc}([a;+\infty))}$ (locale) = l'insieme delle funzioni integrabili su ogni intervallo $[a;c]$ con $[a;c] \subseteq [a;+\infty)$, viene detto: insieme delle f localmente integrabili

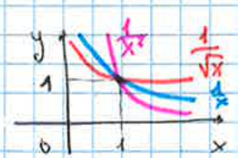
Es: $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 0$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = ?$

se $\alpha = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \log c = +\infty \Rightarrow$ diverge

se $\alpha \neq 1 \longrightarrow \displaystyle\int_1^c x^{-\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^c = \frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$

$= \displaystyle\lim_{c \to +\infty} h(c) = \begin{cases} \text{se } \alpha > 1 \Rightarrow \text{converge} \\ \text{se } \alpha < 1 \Rightarrow \text{diverge} \end{cases}$

- $$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$



N.B. Data $f \in \mathcal{R}_{loc}([a;+\infty))$ non sempre è possibile stabilire la sua integrabilità su $[a;+\infty)$ facendo uso della definizione poiché può accadere che la sua funzione integrale $F(c)$ non sia calcolabile esplicitamente
$\Rightarrow$ Si applicano i Teo. del confronto (semplice o assoluto)

(a volte $|\overset{\text{diverge}}{g(x)} < f(x) < \overset{\text{converge}}{h(x)}|$ e allora?)

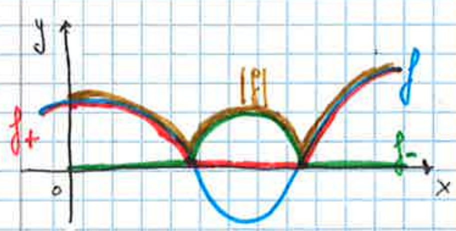
- TEOREMA CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Sia $f \in \mathcal{R}_{loc}([a;+\infty)) : |f| \in \mathcal{R}([a;+\infty))$. Allora $f \in \mathcal{R}([a;+\infty))$ e:

$$\boxed{\left| \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx}$$

Dim. Definiamo due nuove funzioni: $\boxed{f_+(x) = \max\{f(x), 0\}}$

$\boxed{f_-(x) = \min\{-f(x), 0\}}$



Nota: $\begin{cases} f(x) = f_+(x) - f_-(x) \\ |f(x)| = f_+(x) + f_-(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_+(x) = \dfrac{f(x) + |f(x)|}{2} \\ f_-(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2} \end{cases}$$

$h(c) = \int_a^c f(x)\, dx \longrightarrow \exists$ perché $f \in \mathcal{R}_{loc}([a;+\infty))$

$$\int_a^c f_+(x)\, dx \longrightarrow \frac{1}{2}\left[\int_a^c f(x)\, dx + \int_a^c |f(x)|\, dx \right]$$

assume per Hp valore finito

$\Rightarrow \int_a^c f_+(x)\, dx$ è una quantità finita $\Rightarrow f_+(x) \in \mathcal{R}_{loc}([a;+\infty))$

$\rightsquigarrow$ Similmente vale per $f_-(x)$

- TEOREMA CRITERIO ASINTOTICO

(si basa sullo studio dell'ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$ della f integranda)

Sia $f \in \mathcal{R}_{loc}([a;+\infty))$ e sia poi infinitesimo per $x \longmapsto +\infty$, con ordine di infinitesimo α rispetto all'infinitesimo campione $\varphi(x) = \frac{1}{x}$

Allora se:

- $\boxed{\alpha > 1} \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a;+\infty))$ [Converge a $\ell \in \mathbb{R}$]
- $\boxed{\alpha \leq 1} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge

Es:

- $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ diverge
- $\int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^2+1}\,dx$ $\qquad f(x) \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty \Rightarrow \alpha = 1$
  $\Rightarrow$ diverge
- $\int_{18}^{+\infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x^3 + \log x}\,dx$ $\qquad f(x) \sim \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$ per $x \to +\infty \Rightarrow \alpha = 2$
  $\Rightarrow$ converge

• Es: $\boxed{\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx \quad \begin{cases} \text{Converge} & \text{se } \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}}$

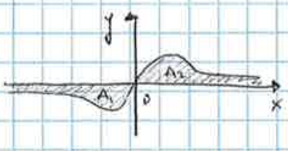
⇝ In generale valgono le stesse proprietà per gli integrali di 1° Tipo.

- TEOREMA CRITERIO ASINTOTICO

Sia $f \in \mathcal{R}_{loc}([a;b))$, con ordine di infinito α per $x \to b$ rispetto all'infinito campione $g(x) = \frac{1}{b-x}$

Allora se $\begin{cases} \alpha < 1 & \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a;b)) \rightsquigarrow \text{converge} \\ \alpha \geq 1 & \Rightarrow f \text{ integrale diverge} \end{cases}$

N.B. Es: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx}$



→ f dispari simmetrica $A_1 = A_2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0 \quad \text{perchè opposte}$$

ma $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ ⇝ integrali non convergenti

$\Rightarrow$ entrambi divergenti $-\infty + \infty$? $\Rightarrow$ $\boxed{\text{integrale non definito}}$

⇝ discutere ≠ calcolare

RAPPRESENTAZIONI DEL PIANO

- RAPPRESENTAZIONI DI PUNTI SUL PIANO

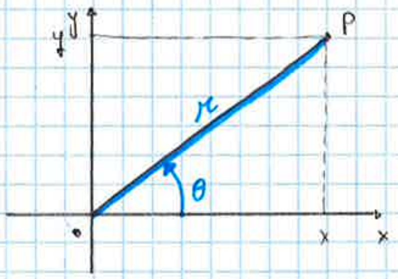
Un punto P del piano cartesiano, di coordinate cartesiane (x, y) può anche essere individuato mediante le sue **COORDINATE POLARI** (r, θ).

Indichiamo con r = distanza di P dall'origine O

θ = angolo in radianti, formato dal semiasse positivo di x e della semiretta uscente dall'origine e passante per P.

(di solito θ è scelto nell'I $(-\pi; \pi]$ o in $[0; 2\pi)$)

NOTA se $r = 0$, $P \equiv O$ e θ può assumere un qualunque valore.



PASSAGGIO COORDINATE CARTESIANE - POLARI

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}}$$

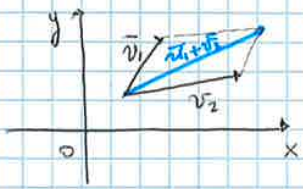
→ Scelto l'intervallo $(-\pi; \pi]$ abbiamo la seguente trasformazione inversa:

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \begin{cases} \mathrm{arctang}\,\dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0 \ \vee \ x > 0\ y < 0 \\ \mathrm{arctang}\,\dfrac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0\ y \geq 0 \\ \mathrm{arctang}\,\dfrac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0\ y < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0\ y > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0\ y < 0 \end{cases}}$$

r = modulo (o distanza) $\qquad \theta$ = argomento (o angolo)

- OPERAZIONI SUI VETTORI

SOMMA DI VETTORI



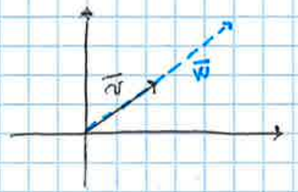
$\rightsquigarrow \bar{v}_1(x_1; y_1)$ e $\bar{v}_2(x_2; y_2)$

$$\boxed{\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)}$$

(regola del parallelogramma)

PRODOTTO SCALARE

: ovvero è il prodotto di un numero reale λ (detto scalare) per il vettore.



$\bar{v}(x_1; x_2)$

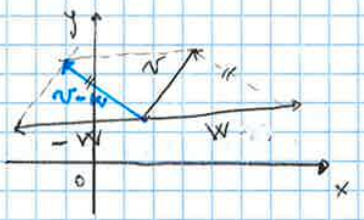
$\bar{W} = \lambda \cdot \bar{v}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{W} = \lambda \cdot v \equiv (\lambda x_1, \lambda y_1)}$$

N.B. • il vettore $(-1)\,v$ viene indicato con $-v$ ed è detto l'opposto di v

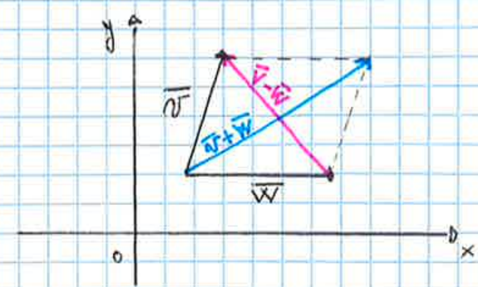
• la differenza $v - w$ è uguale alla soma di v per l'opposto di w ovvero:

$$\boxed{v + (-w) = v - w}$$



IN GENERALE: $\rightsquigarrow$

Vale la regola del parallelogramma



N.B. L'insieme V dei vettori del piano o dello spazio su cui sono definite queste operazioni viene detto SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{R}$. Il vettore $\bar{v} = \lambda\bar{v}_1 + \mu\bar{v}_2$ con $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall \lambda, \mu \in V$ viene detto COMBINAZIONE LINEARE dei vettori v_1 e v_2.

NUMERI COMPLESSI

Non tutte le equazioni algebriche $p(x)=0$ (con $p(x)$ = polinomio di grado n) ammettono soluzioni in $\mathbb{R}$. Esempio è $x^2+1=0$, $x^2=-1$. Generalizzando non ammettono soluzioni in $\mathbb{R}$ tutte le equazioni del tipo $ax^2+bx+c=0$ con $\Delta<0$. Quindi possiamo ampliare l'insieme $\mathbb{R}$ così da garantire in $\mathbb{C}$ (insieme dei numeri complessi) la risolubilità di ogni equazione algebrica.

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=-1$ non ammette soluzioni in $\mathbb{R}$

Definiamo però i = numero immaginario puro o unità immaginaria : $\boxed{i^2=-1}$

quindi $-x^2=1 \rightarrow \sqrt{-x^2}=1$, $\sqrt{i^2x^2}=1$,

$i|x|=1$

Definiamo dunque numero complesso z l'espressione algebrica della forma

$$\boxed{z = x + iy}$$ FORMA CARTESIANA o ALGEBRICA

dove $(x, y) \in \mathbb{R}$ e $i : i^2=-1$, quindi $i \notin \mathbb{R}$ ma $i \in \mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{ x+iy,\ x,y \in \mathbb{R},\ i : i^2=-1 \}$$

$$\rightarrow \boxed{z = \underbrace{x}_{\text{parte reale}} + i\underbrace{y}_{\text{parte immaginaria}}}$$

$x = Re(z)$ $y = Im(z)$

N.B. L'insieme dei numeri complessi della forma $z = x$, quindi con $Im(z)=0$, può essere identificato con l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, quindi $\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$

Numeri complessi della forma $z = iy$, quindi con $Re(z)=0$, vengono detti *immaginari puri*.

⊛ DIFFERENZA (o sottrazione)

Chiamiamo opposto di z il numero $-z$: $z+(-z)=0$: ovvero

$$\boxed{-z = -x - iy}$$

Dim. $z+(-z)=0$

$\cancel{x}+\cancel{iy}-\cancel{x}-\cancel{iy}=0$

$0=0$

Definito ciò possiamo definire la sottrazione $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)}$$

$$z_1 - z_2 = x_1 + iy_1 + (-x_2 - iy_2)$$

$$\boxed{z_1 - z_2 = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{Re(z_1 - z_2)} + i\underbrace{(y_1 - y_2)}_{Im(z_1 - z_2)}}$$

⊛ PRODOTTO

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + \overset{=-1}{i^2}y_1y_2$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

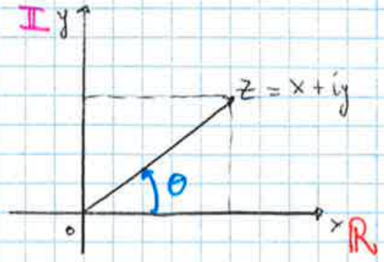
$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{Re(z_1 \cdot z_2)} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{Im(z_1 \cdot z_2)}}$$

⇝ $\boxed{\text{reciproco di } z}$ (con $z \neq 0$)

$\frac{1}{z}$ oppure z^{-1} Dim. $z \cdot z^{-1} = 1$ ⇝ unità reale

$$\boxed{z^{-1} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{Re\left(\frac{1}{z}\right)} - i\underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{Im\left(\frac{1}{z}\right)}}$$

≡ FORMA TRIGONOMETRICA o POLARE



$x = r\cos\theta$

$y = r\operatorname{sen}\theta$

$\Rightarrow \quad z = x + iy = r\cos\theta + i\,r\operatorname{sen}\theta$

$\boxed{z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)}$ ⇝ forma polare $\quad r = |z|$

θ = argomento di z

$\theta = \arg z$ è qualsiasi angolo formatosi dall'asse reale e la retta z

Chiamiamo VALORE PRINCIPALE di $\arg z$ ⇝ $\operatorname{Arg} z$ quell'unico valore di $\arg z$ tale che $-\pi < \theta \leq \pi$

N.B. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ sono uguali se r_1 e r_2 sono uguali $[r_1 = r_2]$ e θ_1 e θ_2 differiscono per un multiplo intero di 2π.

OPERAZIONI

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)\right]}$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]}$$

Es: dato $z = 1 - i$ ⇝ calcola z^2 nella forma cartesiana e polare: $(z \cdot z)$

F. CARTESIANA: $z^2 = (1-i)(1-i) = \cancel{1} - i - i \cancel{+ i^2} = -2i$

F. POLARE: $r = \sqrt{x+y} \Rightarrow r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 2i$

– POTENZE E RADICI

→ Potenze

se z^m con $m \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{z^m = r^m e^{im\theta}}$

→ Caso particolare se $r = 1$

$\Rightarrow$ $z^m = e^{im\theta}$ poiché $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

otteniamo la FORMULA DI DE MOIVRE

$$\boxed{(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^m = \cos m\theta + i \operatorname{sen} m\theta}$$

→ Radici

Sia $m \geq 1$ e sia $w = \rho e^{i\varphi}$

Vogliamo trovare i numeri complessi tali che $\boxed{z^m = w}$

$$\boxed{z^m = r^m e^{im\theta} = \rho e^{i\varphi} = w}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} r = \sqrt[m]{\rho} \\ \theta = \dfrac{\varphi}{m} + \dfrac{2k\pi}{m} \end{cases}}$$

per $k = 0, 1, \dots, m-1$
con $k \in \mathbb{Z}$

N.B. $\Rightarrow$ non necessariamente troviamo i valori principali degli argomenti delle radici!

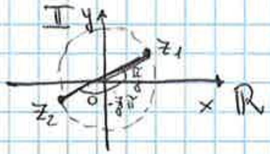
Es: $w = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt[2]{w} = ?$ $\longrightarrow$ $z = r e^{i\theta}$ $\Rightarrow$ $r = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{8} \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{2\pi}{2} = \dfrac{9}{8}\pi \longrightarrow -\dfrac{7}{8}\pi \end{cases}$$

quindi troviamo 2 radici:

→ $z_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$ $\vee$ $z_2 = \sqrt[4]{2} \cdot e^{-i\frac{7}{8}\pi}$ con $z_1, z_2 \in$ circonferenza



$\Rightarrow$ raggio $= \sqrt[4]{2}$

- EQUAZIONI ALGEBRICHE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac < 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)|\Delta|}}{2a} = \boxed{\frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}$$

2 soluzioni dell'equazione

N.B. Le eq. algebriche di 3° grado e 4° grado ammettono rispettivamente 3 e 4 soluzioni. Non esiste un'espressione analitica per le soluzioni di equazioni di ordine superiore al quarto. Il Teo. fondamentale dell'Algebra ci garantisce però ogni equazione $p(x) = 0$, dove $p(x)$ è un polinomio di grado m, ammette esattamente m soluzioni in $\mathbb{C}$.

- TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Sia $p(z)$ un polinomio in z di grado m, ovvero:

$\rightarrow p(z) = a_n z^m + a_{n-1} z^{m-1} + \dots + a_0$ con $a_m \neq 0$

Allora $\exists$ $m \leq m$ numeri complessi $z_1 \dots z_m$, distinti tra loro a cui corrispondono m numeri interi $k_1 \dots k_m$, con $k_1 + \dots + k_m = m$ tali che $p(z)$ si fattorizza come:

$$\boxed{p(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m}}$$

dove z_i = radici polinomi (ovvero le uniche soluzioni di $p(z) = 0$

k_i = molteplicità di ogni radice z_i

N.B. Una radice si dice semplice se la sua molteplicità è 1, doppia se la sua molteplicità è 2, e così via...

N.B.
- Se il grado m di $p(z)$ è dispari $p(z) = 0$ ammette almeno una radice in $\mathbb{R}$
- Se m è pari, $p(z) = 0$ può anche non avere soluzioni in $\mathbb{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 279 di 304

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Per **equazione differenziale ordinaria** intendiamo una relazione tra una variabile indipendente reale x, una funzione incognita $y = f(x)$, e le sue derivate $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ .... fino ad un certo ordine n: $y^n = f^n(x)$. Tale relazione viene scritta come:

$$\boxed{F(x, y, y', \dots, y^n) = 0} \rightsquigarrow \text{FORMA IMPLICITA}$$

Diremo che l'equazione differenziale è di ordine n, se n è l'ordine più alto delle derivate di y. È possibile esplicitare la derivata di ordine massimo y^n, cosicché possiamo riscrivere tale relazione come:

$$\boxed{y^n = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})} \rightsquigarrow \text{FORMA NORMALE}$$

N.B. Se la F, o la f non dipendono dalla variabile indipendente x, diremo che l'equazione differenziale è **autonoma**.

N.B. per risolvere un'equazione differenziale facciamo uso degli integrali. Ciò implica che la soluzione di una eq. differenziale è una funzione e non un numero, in particolare la soluzione non è unica, ma infinite tutte dipendenti da $c \in \mathbb{R}$. Quindi scriveremo la soluzione nella forma $\rightarrow y = y(x, c)$.

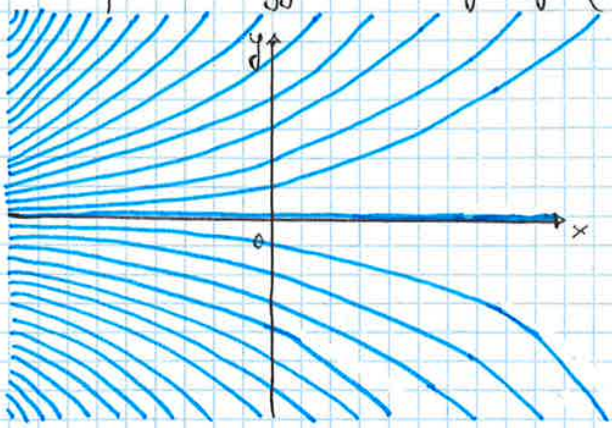
$\rightarrow$ è detto **INTEGRALE GENERALE o SOLUZIONE GENERALE** dell'equazione differenziale, la funzione reale $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ con c generica $c \in \mathbb{R}$, che sostituita nell'eq. diff. la trasforma in una identità:

$$\boxed{y = y(x, c)}$$

Es: $y(x) = c \cdot e^{kx}$ $\quad c \in \mathbb{R}$

N.B. Per la verifica di una soluzione, basta derivare la funzione y e sostituire le derivate all'equazione differenziale di partenza.

Es: grafico dell'equazione differenziale $y' = y$ (solo $e^x = e^x$)



EQUAZIONI DIFFERENZIALI → ORDINE SUPERIORE

I° ORDINE

- a variabili separabili
- lineari
  - omogenee
  - non omogenee
- omogenee
- del 2° ordine riconducibili al I

II° ORDINE

- lineari a coefficienti costanti
  - omogenee
    - $\Delta > 0$
    - $\Delta = 0$
    - $\Delta < 0$
  - non omogenee
    - polinomio
    - f trigonometrica
    - f esponenziale

$\rightsquigarrow$ [PRATICAMENTE] In ogni intervallo J in cui $h(y) \neq 0$, otteniamo l'integrale generale:

$$\boxed{\frac{y'}{h(y)} = g(x)}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

$$\xrightarrow{\text{integrando}} \quad \boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx}$$

$$= \boxed{H(y) = G(x) + c} \longrightarrow y = H^{-1}(G(x) + c)$$

Es: $y' = ky \qquad y' = g(x) \cdot h(y) \quad$ dove $\quad g(x) = k \quad h(y) = y$

1°) INTEGRALI SINGOLARI $(h(y) = 0)$

$$h(\tilde{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = 0$$

$y(x) = \tilde{y} \rightsquigarrow \boxed{y(x) = 0}$ è soluzione singolare

2°) INTEGRALI GENERALI $(h(y) \neq 0)$

$$\frac{y'}{y} = k \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{y} = k\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = k \int dx \quad \Rightarrow \quad \log|y| = kx + c$$

$$e^{\log|y|} = e^{kx} \cdot e^{c} \rightarrow = C$$

$|y| = C^* e^{kx} \qquad$ con $C^* \in \mathbb{R}$

$\boxed{y(x) = C^* e^{kx}}$ è soluzione generale

2 EQUAZIONI LINEARI

omogenee se $b(x) = 0$
non omogenee se $b(x) \neq 0$

$$\boxed{y' + a(x)\, y = b(x)}$$

con a, b funzioni continue su I

→ **OMOGENEE** $[b(x) = 0]$

$$y' + a(x)\, y = 0$$

$$\boxed{y' = -a(x)\, y}$$

→ particolare equazione a variabili separabili
$[\, y' = g(x)\, h(y) \quad \text{dove } g(x) = -a(x) \text{ e } h(y) = y \,]$

$\Rightarrow$ 1°) INTEGRALI SINGOLARI $(h(y) = 0)$

$$y(x) = 0$$

2°) INTEGRALI GENERALI

quindi $A'(x) = a(x)$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\, dx \qquad \text{posto } \int a(x)\, dx = A(x) + c$$

$$\log|y| = -A(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$e^{\log|y|} = c^* e^{-A(x)}$$

$$y_0(x) = c^* e^{-A(x)}$$

y_0 → omogenea

ovvero

$$\boxed{y_0(x) = c\; e^{-\int a(x)\, dx}}$$ → INTEGRALE GENERALE

Es: $y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = x^3 \rightsquigarrow y' + a(x) = b(x)$ dove $a(x) = \frac{1}{x}$

$b(x) = x^3$

1°) EQUAZIONE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA (con $b(x) = 0$)

$y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = 0 \xrightarrow{\text{o applichi formula}} y(x) = C e^{-\int a(x)\,dx}$

$y(x) = C e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}$

$y(x) = C e^{-\log x}$

$\boxed{y(x) = \frac{C}{x}}$ → è soluzione generale della omogenea assoc

↓ o tratti come eq. a variab. sep.

$\frac{y'}{y} = \left(-\frac{1}{x}\right) dx$

→ 1) INTEGRALE SINGOLARE ($h(y) = 0$)

$\boxed{y(x) = 0}$ è soluzione singolare

2) INTEGRALE GENERALE ($h(y) \neq 0$)

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x}\,dx$

$\log|y| = -\log|x| + c$

$y = C e^{-\log|x|}$

INGLOBATA

$\boxed{y(x) = \frac{C}{x}}$ è soluzione generale della omogenea assoc.

2°) EQUAZIONE NON OMOGENEA

$y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = x^3 \qquad a(x) = \frac{1}{x}, \quad b(x) = x^3$

$\Rightarrow y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} \int e^{\int a(x)\,dx}\, b(x)\,dx$

$y(x) = e^{-\int \frac{1}{x}\,dx} \int e^{\int \frac{1}{x}\,dx}\, x^3\,dx$

$y(x) = \frac{1}{x} \cdot \int x \cdot x^3\,dx \rightarrow y(x) = \frac{C_1}{x} \cdot C_2 \int x^4\,dx$

$y(x) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^5}{5} + C\right) \rightsquigarrow \boxed{y(x) = \frac{x^4}{5} + \frac{C}{x}}$ con $c \in \mathbb{R}$

→ è soluzione generale della non omogenea

3 EQUAZIONI OMOGENEE

$$\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)}$$

→ poniamo $\boxed{z = \frac{y}{x}}$ (z è una funzione di x quindi da intendersi come $z(x) = \frac{y(x)}{x}$) Si ha dunque $\varphi = \varphi(z)$ (ovvero una funzione continua della variabile z)

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx \rightarrow y' = z'x + z \cdot 1$$

$$\varphi(z) = z'x + z \cdot 1 \rightarrow z'x = \varphi(z) - z$$

$$\boxed{z' = \frac{\varphi(z) - z}{x}}$$ → adesso è un'equazione a variabili separabili

1) INTEGRALI SINGOLARI $(h(x) = 0)$

$$z' = [\varphi(z) - z] \cdot \frac{1}{x}$$ dove $g(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = \varphi(z) - z$

$$\varphi(\tilde{z}) - \tilde{z} = 0 \Rightarrow \varphi(\tilde{z}) = \tilde{z}$$

ovvero $z(x) = \tilde{z}$ ($\Rightarrow z'(x) = 0$ verifica)

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow \tilde{z}x = y(x) \rightarrow \boxed{y(x) = \tilde{z}x}$$ → soluzioni singolari tutte le rette

2) INTEGRALI GENERALI $(h(x) \neq 0)$

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{1}{x}\,dx$$

↓

$$H(z) = \log|x| + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = x\,H^{-1}(\log|x| + c)}$$ → soluzione generale

4) EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE RICONDUCIBILI AL I°

$$\boxed{y'' = f(x, y')}$$

[N.B. NON compare y !]

⤳ sostituiamo $\boxed{z = y'}$, $\boxed{z' = y''}$

così che $y'' = f(x, y') \xrightarrow{\text{diventa}} \boxed{z' = f(x, z)}$ ⤳ eq. I° ordine

N.B. $z(x) = z(x, c_1)$ con $c_1 \in \mathbb{R}$

$y'(x) = z(x) \longrightarrow \boxed{y(x) = \int z(x, c_1)\, dx} = Z(x, c_1, c_2)$
con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

↳ soluzione generale

Es: $y'' - 2x \dfrac{y'}{x^2 - 1} = 0$ (per $x > 1$) N.B. non compare y ⇒ riconducibile

$z = y'$, $z' = y''$ ⇒ $z' = \dfrac{2x}{x^2-1} \cdot z$ ⤳ eq. a variabili separabili

1) INTEGRALI SINGOLARI $(h(y) = 0)$

$z = 0$ ma $z = y'$ ⇒ $y' = 0$ quindi $y(x) = \text{costante}$
sono tutte delle soluzioni singolari ⇒ $\boxed{y(x) = k}$ con $k \in \mathbb{R}$

2) INTEGRALI GENERALI $(h(y) \neq 0)$

$\displaystyle\int \frac{dz}{z} = \int \frac{2x}{x^2-1}\, dx \Rightarrow \log|z| = \log|x^2-1| + c$

$z = c^*(x^2-1)$ con $c^* \in \mathbb{R}$; $z = y'$ ⇒ $y' = c^*(x^2-1)$

$y(x) = c^* \displaystyle\int (x^2-1)\, dx \Rightarrow \boxed{y(x) = c^*\left(\frac{x^3}{3} - x + c_2\right)}$ con $c^*, c_2 \in \mathbb{R}$

↳ soluzione generale

N.B. Compaiono due costanti diverse $c^* \neq c_2$

[2° CASO] $\boxed{\Delta = 0}$

↳ l'equazione caratteristica ha due radici reali coincidenti

$$\lambda \equiv \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

allora l'integrale generale è dato da:

$$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}} \rightarrow \text{INTEGRALE GENERALE}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

[3° CASO] $\boxed{\Delta < 0}$

↳ l'equazione non ha radici reali

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$$\Delta < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm i\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\rightarrow \quad \lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{a}{2} - i\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\operatorname{Re}(\lambda) = \gamma \qquad \operatorname{Im}(\lambda) = \mu \quad \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \gamma + i\mu \\ \lambda_2 = \gamma - i\mu \end{cases}$$

allora l'integrale generale è dato da:

$$\text{INTEGRALE GENERALE} \leftarrow \boxed{y_0(x) = e^{\gamma x}\left(C_1 \operatorname{sen}\mu x + C_2 \cos\mu x\right)} \rightsquigarrow \text{soluzione reale!}$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

→ NON OMOGENEE $(g(x) \neq 0)$

$$\boxed{y'' + a y' + b y = g(x)}$$

→ ALGORITMO RISOLUTIVO:

1) trovo la soluzione dell'omogenea associata $y_0(x)$ (ovvero $y''+ay'+y=0$)

2) cerco una soluzione particolare della non omogenea $y_p(x)$

3) Scrivo l'integrale generale della non omogenea come somma di $y_0(x)$ e $y_p(x)$:

$$\boxed{\underbrace{y_G}_{\text{generale}}(x) = y_0(x) + y_p(x)}$$

Si verificano i seguenti casi al variare di $g(x)$:

[1° CASO] $\boxed{g(x) = \text{polinomio di grado } m}$

con $g(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^m$

1°) calcolo l'equazione omogenea associata

2°) Una possibile soluzione particolare di $y'' + a y' + by = g(x)$ sarà necessariamente un polinomio dello stesso grado di $g(x)$

3°) applico la tecnica di sostituzione

4°) $y_G(x) = y_0(x) + y_p(x)$

N.B.
- se $\boxed{b=0}$ $\Rightarrow$ $y'' + a y' = g(x)$, la soluzione particolare $y_p(x)$ è un polinomio di grado $m+1$ rispetto a $g(x)$
- se $\boxed{a=0} \wedge \boxed{b=0}$ $\Rightarrow$ $y'' = g(x)$, la soluzione particolare $y_p(x)$ è un polinomio di grado $m+2$ rispetto a $g(x)$

[2° CASO] $\boxed{g(x) = \text{funzione trigonometrica}}$

con $g(x) = K_1 \operatorname{sen}(\omega x) + K_2 \cos(\omega x)$ con $K_1, K_2, \omega \in \mathbb{R}$

1°) Calcolo l'omogenea associata

2°) cerco una soluzione particolare $y_p = a \operatorname{sen}(\omega x) + b \cos(\omega x)$

[NOTA ω deve essere lo stesso!]

3°) applico la tecnica di sostituzione

4°) $y_G(x) = y_0(x) + y_p(x)$

N.B. - se ω non è radice caratteristica dell'equazione caratteristica (radice immaginaria!)

$\to y_p = a \operatorname{sen}(\omega x) + b \cos(\omega x)$

risonanza ← - se ω è radice caratteristica dell'equazione caratteristica (radice immaginaria!)

$\to y_p = x\left(a \operatorname{sen}(\omega x) + b \cos(\omega x)\right)$

[teoricamente $\omega = \mu$ di prima, $\lambda = \gamma + i(\ldots)$, $= \omega$ parte immag...]

Es: $y'' - 3y' + 2y = \cos x \quad \to (\omega = 1)$

1) EQ. OMOGENEA ASSOCIATA

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \qquad \lambda_1 = +2, \ \lambda_2 = 1$

$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}}$ → soluzione omogenea associata

2) INTEGRALE PARTICOLARE

$y_p = b \cos(\omega x) + a \operatorname{sen}(\omega x) \to \omega = 1$

$y_p' = a \cos x - b \operatorname{sen} x$

$y_p'' = + a \operatorname{sen} x - b \cos x$

→ sostituisco: $2a \operatorname{sen} x + 2b \cos x - 3a \cos x + 3b \cos x + a \operatorname{sen} x - b \cos x = \cos x$

$3a \operatorname{sen} x + 5b \cos x - 3a \cos x - b \cos x = \cos x$

$\cos x (4b - 3a) + 3a \operatorname{sen} x = \cos x \to \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \to \boxed{y_p = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x}$

3) INTEGRALE GENERALE

$y_G = y_0(x) + y_p(x) \Rightarrow \boxed{y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x}$

$$\boxed{y_P = \frac{1}{6} e^{4x}}$$

3) INTEGRALE GENERALE

$$y_G(x) = y_0(x) + y_P(x) \rightsquigarrow \boxed{y_G(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \frac{1}{6} e^{4x}}$$

Esempi di eq. differenziabili con risonanze:

Es: $y'' - y = e^x$ $\quad \omega = 1$

1) EQ. OMOGENEA ASSOCIATA $\Rightarrow$ ω è radice semplice $\to$ risonanze

$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$$\boxed{y_0(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}}$$

2) INTEGRALE PARTICOLARE

$y_P = a e^x$ Non lo posso prendere perchè lo posso includere nella soluzione dell'eq. omogenea associata

$\Rightarrow y_P = x a e^x$

. . . .

. . . .

Es: $y'' + 4y = \cos 2x$ $\quad \omega = 2$

1) EQ. OMOGENEA ASSOCIATA $\Rightarrow$ ω è radice $\to$ risonanze

$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i$

$$\boxed{y_0(x) = C_1 \operatorname{sen} 2x + C_2 \cos 2x}$$

2) INTEGRALE PARTICOLARE

$y_P = a \cos 2x + b \operatorname{sen} 2x$ Non lo posso prendere perchè lo posso inglobare in $y_0(x)$

$\Rightarrow y_P = x(a \cos 2x + b \operatorname{sen} 2x)$

. . . .

. . . .

(Alcune domande per il test)

① Sia $y' = \log y$. Ammette soluzioni costanti?

$y' = 0 \Rightarrow \log y = 0 \quad y = 1$

↳ SI

② Sia $y' = \log x$. Ammette soluzioni costanti?

Non compare la y $\Rightarrow$ dipende da x soltanto

↳ NO

③ Sia $y'' - y' = 0$. Ammette soluzioni costanti? Quante?

se $y = c \Rightarrow y' = 0 \rightarrow y'' = 0 \Rightarrow 0 = 0$

↳ SI - infinite

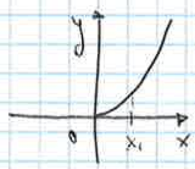
④ Sia $y(x)$ una soluzione di $\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

è vero che il punto $x = 0$ è un minimo?

$y'(0) = 0 + 1 \Rightarrow y'(0) = 1 \quad y'(0) > 0 \Rightarrow f$ cresce

↳ No

⑤ Descrivi il comportamento di $y(x)$ soluzione di $\begin{cases} y' = y + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$



$y'(0) = 1 \quad y' > 0 \Rightarrow$ crescente

Se poi prendo x_1 e così noto che $y'(x_1)$ aumenta sempre di $+1$ $\Rightarrow$ convessa

↳ f crescente convessa