NUMERO: 1725A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Meccanica razionale - prof. Delitala

INDICE:

1. MECCANICA RAZIONALE — pag. 1
2. MODELLISTICA E FISICA MATEMATICA — pag. 11
3. CINEMATICA DEL PUNTO — pag. 25
4. CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO — pag. 40
5. GEOMETRIA DELLE MASSE — pag. 75-95
6. MOTI RELATIVI — pag. 82

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

→ è detto **INTEGRALE GENERALE o SOLUZIONE GENERALE** la funzione Reale che sostituita nell'equazione differenziale la trasforma in una identità.

→ è detto **INTEGRALE PARTICOLARE o SOLUZIONE PARTICOLARE** la funzione Reale in cui la costante c viene fissata in base a delle condizioni particolari: dette condizioni iniziali o condizioni al contorno.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL II ORDINE

- omogenee
- non omogenee

$$\boxed{a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $f(t)$ continua

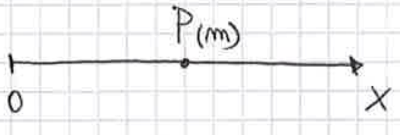
t = variabile indipendente (tempo)

x = variabile dipendente dal tempo t

$x = x(t) \rightarrow$ POSIZIONE

- RAPPRESENTAZIONE MECCANICA di una equazione del II ORDINE

P = punto materiale mobile di massa m



$a = m$

Se porto $b\dot{x}$ al secondo membro $\Rightarrow -b\dot{x}$ = forza che si oppone alla velocità v

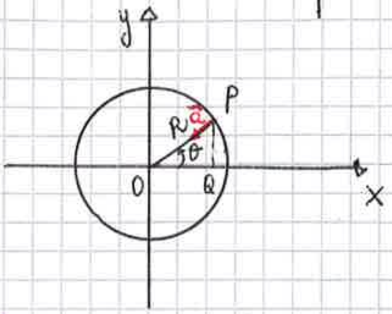
" " cx " " $\Rightarrow -cx$ = forza opposizionale (tipo molla)

$$\Rightarrow F = m \cdot a \Rightarrow f(t) - b\underbrace{\dot{x}}_{\text{velocità}} - cx = a\underbrace{x''}_{\text{accelerazione}}$$

MOTO ARMONICO

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Considero un punto materiale P che si muove sulla circonferenza



Il moto è dato dalla proiezione Q di P su x.

COMPONENTI $\overrightarrow{OP}$
$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OP}}{dt} \Rightarrow$$

COMPONENTI VELOCITÀ $\vec{v}$ — perchè derivo rispetto al tempo
$$\begin{cases} \dot{x} = -R\,\text{sen}\,\theta \cdot \dot{\theta} \\ \dot{y} = R\cos\theta\cdot\dot{\theta} \end{cases}$$

il moto è UNIFORME $\Leftrightarrow$ $\boxed{|\vec{v}| = \text{cost}}$

quindi: $|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{R^2\,\text{sen}^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 + R^2\cos^2\theta\cdot\dot{\theta}^2}$

$$= R\,|\dot{\theta}|\,\sqrt{\underbrace{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_{=1}}$$

$$|\vec{v}| = R\,|\dot{\theta}| = \text{cost}$$

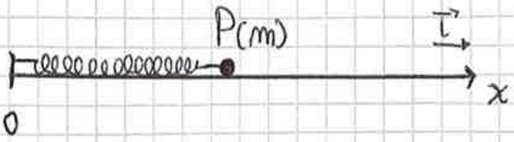
$\Rightarrow |\dot{\theta}| = \text{cost}$ poichè R è cost

$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}\,t}$ LEGGE ORARIA

$\Rightarrow \boxed{T = \dfrac{2\pi}{\dot{\theta}}}$ PERIODO

$\Rightarrow \boxed{\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\dot{\theta}}{2\pi}}$ FREQUENZA

Es: $\boxed{\text{SISTEMA MASSA - MOLLA}}$



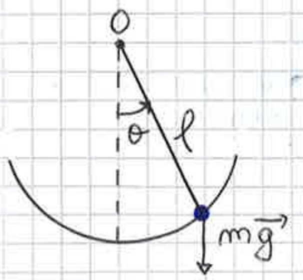
$$\vec{F}_{elastica} = -K x \vec{i} \qquad \text{con } K > 0 \text{ , costante di elasticità}$$
$$\parallel$$
$$m \cdot \vec{a}$$
$$\parallel$$
$$\boxed{m \cdot \ddot{x} + K x = 0}$$ EQUAZIONE MOTO (moto armonico

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \rightarrow \text{pulsazione}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \rightarrow \text{periodo}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Es: $\boxed{\text{PICCOLE OSCILLAZIONI DI UN PENDOLO}}$

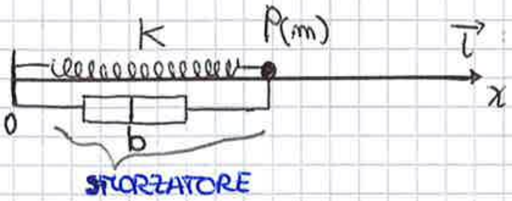


per $\theta = \theta_0 = 0 \rightarrow$ EQUILIBRIO STATICO

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0}$$ EQUAZIONE MOTO

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

◆ Es: MASSA-MOLLA E SMORZAMENTO



$$\vec{F}_{elastica} = -kx\vec{i}$$

$$\vec{F}_{attrito} = -b\dot{x}\vec{i}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

[ovvero considero l'omogenea associata e calcolo $b^2 > 4ac$]

1° CASO : $\boxed{b^2 > 4mk}$

si ha uno smorzamento su 0 senza oscillazioni

2° CASO : $\boxed{b^2 = 4mk}$

si ha uno smorzamento più rapido su 0 senza oscillazioni

3° CASO : $\boxed{b^2 < 4mk}$

il punto P raggiunge 0 dopo aver subito oscillazioni

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 238

2° CASO: $f(t) = A\cos\Omega t$ (forzante oscillatoria moto armonico)

$$\boxed{a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = A\cos\Omega t}$$

Es: **MASSA-MOLLA CON FORZANTE OSCILLATORIA**

$$m\ddot{x} + Kx = A\cos\Omega t$$

→ l'integrale particolare è

$$x_p(t) = C\cos\Omega t$$

$$\dot{x}_p(t) = -C\,\text{sen}\,\Omega t \cdot \Omega$$

$$\ddot{x}_p(t) = -C\cos\Omega t \cdot \Omega^2$$

⇓

$$-mC\cancel{\cos\Omega t}\,\Omega^2 + KC\cancel{\cos\Omega t} = A\cancel{\cos\Omega t}$$

$$C(K - m\Omega^2) = A$$

$$C = \frac{A}{K - m\Omega^2} \longrightarrow \text{Ampiezza oscillazione}$$

poiché $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$x_p(t) = \frac{A}{m}\cdot\frac{1}{\frac{K}{m} - \Omega^2} = \frac{A}{m}\cdot\frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}$$

N.B. Se scelgo un valore di Ω prossimo a ω la forzante diventa molto grande ($f(t) \to +\infty$)

↳ si ha **RISONANZA** ($\omega \cong \Omega$)

$$\boxed{x_p(t) = \frac{A}{m}\,\frac{1}{\omega^2 - \Omega^2}}$$

◆ Es: Costruiamo un **MODELLO di DINAMICA** di una popolazione isolata (modello matematico)

1°) SEMPLIFICAZIONE / RIDUZIONE COMPLESSITÀ

a) Assumiamo di tener conto solo di due fattori

- TASSO NATALITÀ N
- TASSO MORTALITÀ M

b) Vogliamo definire un modello matematico, ovvero un'equazione di evoluzione del n° di individui

$$p = p(t) \quad \rightarrow (\text{n° di individui})$$

VARIAZIONE n° INDIVIDUI
$$\frac{dp}{dt} = \underbrace{N \cdot p}_{\text{FATTORE DI CRESCITA}} - \underbrace{M \cdot p}_{\text{FATTORE DI DECRESCITA}}$$

$$\frac{dp}{dt} = \underbrace{(N-M)}_{\alpha} \, p$$

α = TASSO DI NASCITA NETTO

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = \alpha \cdot p} \rightarrow \text{LEGGE DI MALTHUS}$$

(si risolve per separazione delle variabili)

→ Con la regola di Leibnitz

$$\frac{dp}{p} = \alpha \, dt$$

→ integrando

$$p(t) = Ke^{(N-M)t} = Ke^{\alpha t}$$

N.B. Se $N > M$ ho una crescita esponenziale

COSTRUZIONE MODELLO MATEMATICO (processo deduttivo a passi diversi)

1) RIDUZIONE COMPLESSITÀ / IPOTESI SEMPLIFICATIVE

2) INDIVIDUAZIONE VARIABILI IN GIOCO

- VARIABILI DIPENDENTI (variabili di stato che caratterizzano il fenomeno che voglio studiare)
- VARIABILI INDIPENDENTI (t oppure spazio)

3) INDIVIDUAZIONE RELAZIONI COSTITUTIVE (Es: leggi fisiche ($F = m \cdot a$) o leggi fenomenologiche ($N_p - M_p$))

4) IDENTIFICAZIONE DEI PARAMETRI E DERIVAZIONE MODELLO

5) FORMULAZIONE PROBLEMA MATEMATICO ED ANALISI QUALITATIVA

- Analitica (matematica)
- Numerica (computazionale)

OSSERVAZIONI:

- Il modello deve essere CONSISTENTE ($n°$ incognite $= n°$ equaz. indipendenti)
- a priori della costruzione di un modello vi è la scelta della SCALA DI RAPPRESENTAZIONE (ovvero il livello di dettaglio che voglio ottenere):
  - a) SCALA MICROSCOPICA (oggetti considerati individualmente)
  - b) SCALA MESOSCOPICA (statistica per sistemi con gran $n°$ di individui)
  - c) SCALA MACROSCOPICA (faccio medie e considero la densità)
- il modello deve essere DIMENSIONALMENTE COERENTE

$$\left(\text{Es: } \frac{dp}{dt} = N \cdot p \quad \frac{\#}{[t]} = N \cdot \underset{\substack{\text{numero}\\ \text{(adimensionale)}}}{\#} \Rightarrow N = \frac{1}{[t]} = \text{rate di natalità (frequenza)} \right)$$

MODELLI ALLE DERIVATE ORDINARIE

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \bar{f}(t, \bar{u})}$$ → MODELLO ALLE ODE (scritto in forma vettoriale)

$\bar{u}$ variabile di stato

t variabile indipendente

$\bar{f}$ campo vettoriale

se $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, \dots, u_N) \\ \dots \\ \dfrac{du_N}{dt} = f_N(t, u_1, \dots, u_N) \end{cases}$$ → sistema di N equazioni alle derivate ordinarie del I ORDINE

Un'altra classe di modelli è descritta da **EQUAZIONI SCALARI DI ORDINE ELEVATO**

$$\frac{d^N u}{dt^N} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}\right)$$

EQUAZIONE DI ORDINE N (ovvero max grado della derivata della variabile di stato)

Scritta in FORMA NORMALE perchè ho isolato la derivata di ordine max

Le EQUAZIONI SCALARI DI ORDINE ELEVATO possono essere riscritte come un sistema di N equazioni del I ORDINE in N incognite

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 238

CLASSIFICAZIONE MODELLI

1° CASO: MODELLO LINEARE

$$\boxed{\bar{f}(t,\bar{u}) = \underline{\underline{A}}(t)\,\bar{u} + \bar{b}(t)}$$

$\underline{\underline{A}}$: matrice $N \times N$

$\bar{b}(t)$: vettore ad N componenti

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = a_{11}(t)u_1 + \dots + a_{1N}(t)u_N + b_1(t) \\ \vdots \\ \dfrac{du_N}{dt} = a_{N1}(t)u_1 + \dots + a_{NN}(t)u_N + b_N(t) \end{cases}$$

2° CASO: MODELLO LINEARE ED OMOGENEO

se $\boxed{\bar{b}(t) = 0} \Rightarrow \dfrac{d\bar{u}}{dt} = \underline{\underline{A}}(t)\,\bar{u}$

$$\boxed{\bar{f}(t,\bar{u}) = \underline{\underline{A}}(t)\,\bar{u}}$$

3° CASO: MODELLO LINEARE ED A COEFFICIENTI COSTANTI

se $\boxed{\underline{\underline{A}} \text{ e } \bar{b} \text{ NON DIPENDONO DAL TEMPO } t}$

$$\boxed{\bar{f}(t,\bar{u}) = \underline{\underline{A}}\,\bar{u} + \bar{b}}$$

FORMULAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO

Con l'assegnazione di condizioni iniziali ed ai limiti per l'assegnazione del modello al caso specifico

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\bar{u}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{u}) \\ \bar{u}(t_0) = \bar{u}_0 \end{cases}}$$

→ PROBLEMA AL VALORE INIZIALE (IVP) (initial value problem)

→ N condizioni iniziali (1 per ogni variabile di stato)

INPUT → MODELLO MATEMATICO → OUTPUT

FEEDBACK / VARIAZIONE CON IL DATO SPERIMENTALE

→ PROBLEMA AL VALORE INIZIALE E AI LIMITI

Si assegnano $\boxed{p < N}$ condizioni iniziali

$$u_i(t_0) = u_{i0} \qquad \text{con } i = 1, \dots, p$$

ed $\boxed{N - p}$ condizioni ai limiti (tempo finale d'osservazione)

$$u_i(t) = u_{i1} \qquad \text{con } i = p+1, \dots, N$$

⇒ allora il problema matematico è definito associando al modello (equazione di evoluzione) le condizioni iniziali ai limiti.

* Tale problema si dice **BEN FORMULATO** se il n° di condizioni (iniziali ed ai limiti) è completo

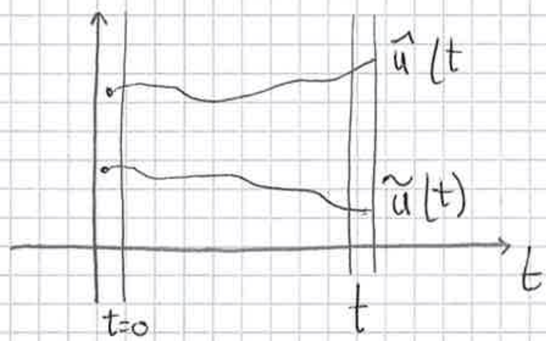
* Tale problema si dice **BEN POSTO** se la soluzione ∃! e dipende con continuità dal dato iniziale

TEOREMA DI DIPENDENZA DAL DATO INIZIALE

Se f è continuo e soddisfa la condizione di LIPSCHITZ

$$\boxed{\|\hat{u}(t) - \tilde{u}(t)\| \leq \|\hat{u}_0 - \tilde{u}_0\| \cdot e^{L(t-t_0)}}$$

L → cost di LIPSHITZ

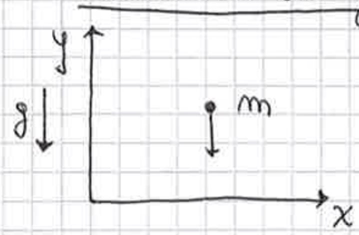


N.B. più passa il tempo più risultano essere distanti

SOLUZIONE DEI MODELLI ALLE DERIVATE ORDINARIE

Es: $\dot{x}(t) = 0 \xrightarrow{\text{integro}} x(t) = \underbrace{\cos t}_{\text{infinite soluzioni}}$

Es: caduta di un grave senza attrito



$$m\ddot{x}(t) = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

↓ integro

$$\frac{dx}{dt} = -gt + A$$

integro ↙

$$\boxed{x(t) = -g\frac{t^2}{2} + At + B}$$

SOLUZIONE GENERALE con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 238

◆ Es: caduta di un grave con attrito

(quindi tengo conto della viscosità dell'aria che cambia la velocità)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - \mu \frac{dx}{dt}$$

μ → viscosità dell'aria che si oppone al moto in funzione della velocità

Si può risolvere considerando l'ODE del 1° ORDINE sulla velocità

$$\frac{dv}{dt} = -g - kv \qquad k = \frac{\mu}{m}$$

⇒ verificando ad esempio di una velocità limite di caduta di un grave.

FINE PARTE INTRODUTTIVA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 238

b) VELOCITÀ DI P

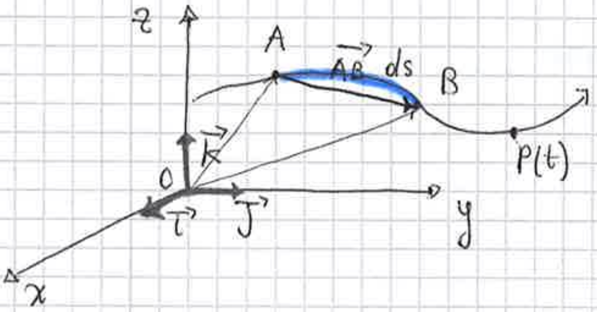
$$\vec{v}_P(t) = \dot{P}(t) = \frac{dP}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

c) ACCELERAZIONE DI P

$$\vec{a}_P(t) = \ddot{P}(t) = \frac{d^2P}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$$

d) SPOSTAMENTO INFINITESIMO DI P

$$dP = \vec{v}_P\, dt = \left(\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}\right) dt$$



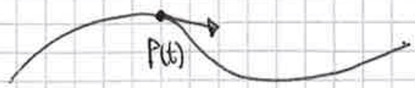
$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

$$\frac{d\,AB}{dt} = \frac{d\,(OB - OA)}{dt} = \underbrace{\frac{d\,OB}{dt}}_{= \bar{v}_B} - \underbrace{\frac{d\,OA}{dt}}_{= \bar{v}_A}$$

$$\Rightarrow \frac{d\,AB}{dt} = \bar{v}_B - \bar{v}_A$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 238

COORDINATE INTRINSECHE



Considero la tangente alla traiettoria definendo il versore tangente

$$\boxed{\bar{t}(s) = \frac{d\hat{P}}{ds}}$$

Esso ha la proprietà che:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} \perp \vec{t} \quad \text{ovvero} \longrightarrow \quad \boxed{t \cdot \frac{dt}{ds} = 0}$$

ci da informazioni su quanto rapidamente varia la direzione della tangente alla traiettoria da cui definisco la:

CURVATURA $\longrightarrow$ $\boxed{c = \left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{1}{\rho}}$ con ρ = raggio di curvatura

N.B. [$c = 0$ se $\rho = \infty$]

Quindi posso definire il versore NORMALE PRINCIPALE

$$\boxed{\bar{n} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{1}{c}} \quad \text{con} \quad \bar{n} \perp t$$

Quindi posso definire il versore BINORMALE (prodotto esterno di t e n)

$$\boxed{\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \bar{b} \perp \bar{n} \\ \bar{b} \perp \bar{t} \end{array}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 238

✦ Es: calcolo accelerazione centripeta a_c in un moto circolare uniforme

moto uniforme $\Rightarrow$ $\dot{s} = cost$ $\Rightarrow$ $\ddot{s} = 0$

$$\vec{a} = c\,\dot{s}^2\,\vec{n} = \frac{1}{\rho}\,\dot{s}^2\,\vec{n}$$

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{t}\cdot 1 = \dot{s}\,\vec{t} \quad v\cdot v = v^2 = \underbrace{\dot{s}\,t\cdot\dot{s}\,t}_{} = \dot{s}\,1$$

con $\rho = R$

ovvero $a_c = \frac{1}{R}\,v^2\,\vec{n} = \frac{v^2}{R}\,\vec{n}$

$$e_r = \cos\theta(t)\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta(t)\,\vec{j}$$

derivando

$$\dot{e}_r = \underbrace{-\operatorname{sen}\theta \cdot \dot{\theta}\,\vec{i} + \cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{j}}_{= e_\theta \cdot \dot{\theta}}$$

$$\rightarrow \dot{e}_r = e_\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{a = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta}$$

CASI PARTICOLARI DI CINEMATICA DEL PUNTO

- moto rettilineo uniforme $\begin{cases} v = cost \\ a = 0 \end{cases}$

- moto rettilineo uniformemente accelerato $\begin{cases} v = Var\!a \\ a = cost \end{cases}$

- moto circolare (in coordinate polari)

$$\begin{cases} r = cost \\ v = r\,\omega\,\vec{e_\theta} \\ a = r\,\alpha\,\vec{e_\theta} - r\,\omega^2 e_r \end{cases}$$

α: accelerazione angolare; ω: velocità angolare

$r = cost \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$$\Rightarrow v = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} = r\,\omega\,\vec{e_\theta}$$

$$a = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + r\,\ddot{\theta}\,e_\theta$$

$$= r\,\dot{\omega}\,\vec{e_\theta} - r\,\omega^2\,\vec{e_r}$$

con $\dot{\omega} = \alpha$

$$\Rightarrow \ \vec{OP^*} = R\vec{\lambda} = R\cos\vartheta\,\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\vec{j}$$

$$\vec{P^*P} = \widehat{P_0P^*}\,\mathrm{tg}\,\alpha = R\vartheta\,\mathrm{tg}\alpha\,\vec{K}$$

$$\vec{OP^*} = R\cos\vartheta\,\vec{i} + R\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\vec{j} + \underbrace{R\vartheta\,\mathrm{tg}\alpha}_{h\vartheta}\,\vec{K}$$

$\boxed{h = R\,\mathrm{tg}\,\alpha}$ → PASSO RIDOTTO DELLA SPIRA

$\boxed{2\pi h = 2\pi R\,\mathrm{tg}\,\alpha}$ → PASSO DELLA SPIRA

→ derivo rispetto al tempo per trovare la velocità

$$\vec{v} = \underbrace{-R\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\dot\vartheta\,\vec{i} + R\cos\vartheta\,\dot\vartheta\,\vec{j}} + h\dot\vartheta\,\vec{K}$$

$$\vec{v} = R\,\dot\vartheta\,\vec{\mu} + h\,\dot\vartheta\,\vec{K}$$

→ l'ascisse curvilinea s è l'ipotenusa del triangolo $\widehat{P_0PP^*}$

$$s = \sqrt{R^2+h^2}\,\vartheta$$

$$\dot s = \sqrt{R^2+h^2}\,\dot\vartheta \quad \Rightarrow \quad \dot\vartheta = \frac{\dot s}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$\ddot s = \sqrt{R^2+h^2}\,\ddot\vartheta \quad \Rightarrow \quad \ddot\vartheta = \frac{\ddot s}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

quindi:

$$\vec{v} = \frac{\dot s}{\sqrt{R^2+h^2}}\,R\,\vec{\mu} + \frac{\dot s}{\sqrt{R^2+h^2}}\,h\,\vec{K}$$

$$\vec{v} = \frac{\dot s}{\sqrt{R^2+h^2}}\left(R\vec{\mu} + h\vec{K}\right)$$ → vettore il cui modulo è a denominatore

$$\boxed{v = \dot s\,\vec{t}}$$

MOTO AD ACCELERAZIONE COSTANTE (moto del proiettile)

INTEGRANDO

$\vec{a} = \vec{a}_0 = \text{costante}$

$\vec{v} = \vec{a}_0 t + \vec{v}_0$

$\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{OP}_0$ (se $\vec{OP}_0 = 0 \Rightarrow O \equiv P_0$)

direzione costante

$\vec{a}_0$ e $\vec{v}_0$ individuano il piano del moto

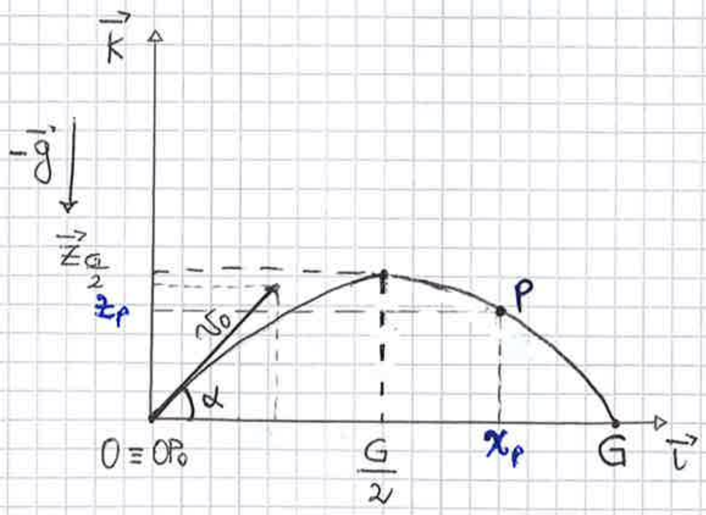
$\Rightarrow$ **MOTO PIANO** per P_0, $\vec{a}_0$, $\vec{v}_0$ (si individua quindi un unico piano)

Se $\vec{a}_0 // \vec{v}_0$ si ha moto rettilineo con vettori passanti per P_0 e con direzione uguale a $\vec{a}_0 // \vec{v}_0$

Es: ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ

$\vec{a}_0 \equiv \vec{g} = -g\vec{k}$

$\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t$



con $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$

N.B. (se $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ o $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ si ha moto rettilineo)

◆ **ALTEZZA DI TIRO** $\vec{z}_{\frac{G}{2}}$

$$\frac{G}{2} = \frac{v_0^2 \, \text{sen}\, 2\alpha}{2g}$$

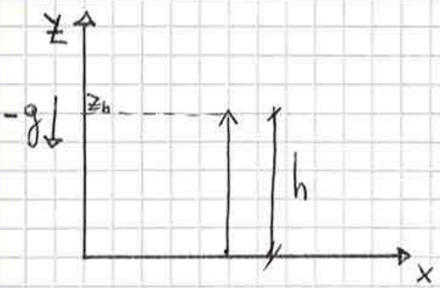
→ sostituisco nella parabola

$$z_{\frac{G}{2}} = -\frac{\cancel{g}}{2} \frac{v_0^{\cancel{4}\,2} \, \cancel{4}\, \text{sen}^2\alpha \, \cancel{\cos^2\alpha}}{\cancel{2v_0^2} \, \cancel{\cos^2\alpha} \, 4 \, g^{\cancel{2}}} + \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} \frac{v_0^2 \, 2\,\text{sen}\,\alpha \, \cancel{\cos\alpha}}{2g}$$

$$z_{\frac{G}{2}} = -\frac{v_0^2 \, \text{sen}^2\alpha}{2g} + \frac{\cancel{2}\,\text{sen}^2\alpha \, v_0}{\cancel{2}g}$$

$$\boxed{z_{\frac{G}{2}} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \, \text{sen}^2\alpha}{g}} \longrightarrow \text{ALTEZZA DI TIRO}$$

◆ **Es:** Se lancio il sasso verso l'alto posso calcolare la velocità iniziale e finale, il tempo di lancio e lo spazio percorso sapendo soltanto il tempo di ricaduta Δt



Δt = tempo di ricaduta

$$\Delta t = t_f - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{t_0} = t_f$$

Trova: 1) $v_i = ?$ $(\dot{z}_0 = ?)$ $v_f = ?$ $(\dot{z}_f = ?)$

2) z_h = quota = ?

CINEMATICA del CORPO RIGIDO

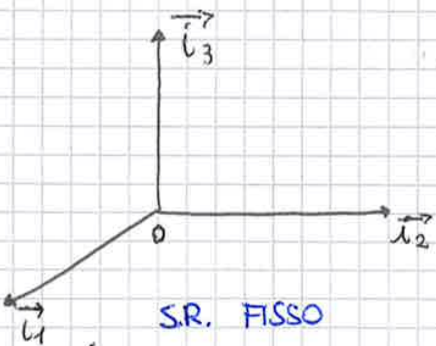
Sfruttando l'ipotesi di rigidità del corpo (ovvero che la distanza tra coppie generiche di punti del corpo rimanga invariata, quindi costante) per calcolare la cinematica, ovvero per calcolare la posizione, la velocità e l'accelerazione del corpo rigido senza dover calcolare la cinematica di ogni punto.

SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE:

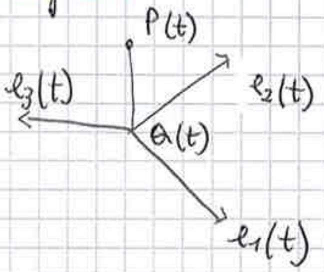
I punti del corpo rigido mantengono inalterate le coordinate in questo sistema di riferimento.

N.B. la scelta del S.R. non è univoca! ∃ infiniti S.R. solidali

Il moto del corpo rigido è completamente determinato quando si conosce il moto della terna solidale rispetto ad un sistema di riferimento fisso



S.R. FISSO (indipendente dal tempo)



S.R. SOLIDALE (dipendente dal tempo)

ovvero equivalentemente posso affermare che

$$\boxed{e_h(t) = \underline{\underline{R}}(t) \cdot \vec{i}_h} \qquad [2]$$

$\underline{\underline{R}}$ → MATRICE DI TRASFORMAZIONE ORTOGONALE

- $R^T \cdot R = R R^T = \mathbb{I}$ → MATRICE IDENTITÀ
- $\det R = 1$

→ Riprendiamo [1]

$$Q P(t) = P(t) - Q(t) = OP - OQ$$

$$P(t) = Q(t) + y_1 \vec{e}_1(t) + y_2 \vec{e}_2(t) + y_3 \vec{e}_3(t)$$

$$= Q(t) + \sum_{h=1}^{3} y_h \vec{e}_h$$

→ per la [2]

$$= Q(t) + \underline{\underline{R}}(t) \underbrace{\sum_h y_h \vec{i}_h}$$

$\vec{i}_h$ → versori terna fissa

dipende da y_h (ovvero dalle coordinate fisse)

è costante nel tempo ⇒ posso indicarlo con un vettore costante $\tilde{p}$

$$= Q(t) + \underline{\underline{R}}(t)\, \tilde{p}$$

$Q(t)$ → origine sistema di riferimento solidale

$\underline{\underline{R}}(t)$ → matrice di rotazione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 238

In definitiva nell'intervallo di tempo in cui $i_3 \wedge e_3 \neq 0$, il moto del corpo rigido può essere assegnato dando **6 quantità**:

- 3 dell'origine del S.R. $(x_\Omega(t), y_\Omega(t), z_\Omega(t))$
- 3 di orientazione (angoli di EULERO) $\underbrace{(\psi(t), \theta(t), \phi(t))}_{\text{ci permettono di costruire la } \underline{\underline{R}} \text{ di } [3]}$

ovvero **6 quantità**: $\boxed{\{x_\Omega(t), y_\Omega(t), z_\Omega(t), \psi(t), \theta(t), \phi(t)\}}$

Quindi, in generale, un corpo rigido libero ha **6 gradi di libertà** che corrispondono al n° di parametri necessari ed indipendenti a descrivere la posizione del corpo rigido libero nello spazio.

OSSERVAZIONE

In effetti per conoscere la posizione di un corpo rigido nello spazio mi basta conoscere la posizione dei suoi 3 punti

$\longrightarrow \underset{\text{punti}}{3} \times 3$ (coordinate x, y, z) $= 9$ quantità

D'altra parte l'ipotesi di rigidità mi individua tre relazioni (distanze reciproche dei punti)

$\Rightarrow 9 - 3 = 6$ quantità necessarie per descrivere la posizione del corpo rigido nello spazio

<u>Dim.</u> per dimostrare la legge delle velocità del C.R. possiamo utilizzare due vie:

→ [I VIA] basata sulla validità delle FORMULE DI POISSON

$$\boxed{\dot{e}_h = \left(\frac{1}{2}\sum_k e_k \wedge \dot{e}_k\right) \wedge e_h}$$

E indipendentemente dal S.R. solidale scelto, $\dot{e}_h$ è definito come:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{2}\sum_k e_k \wedge \dot{e}_k}$$

$$\boxed{\dot{e}_h = \omega \wedge e_h}$$

In generale si può mostrare che qualunque vettore $\vec{w}$ solidale al C.R. soddisfa la relazione

$$\boxed{\dot{w} = \vec{\omega} \wedge \vec{w}}$$

→ [II VIA] legata all'utilizzo di matrici di rotazione, attraverso la quale si può mostrare che la formula fondamentale delle velocità per cui

→ condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema rigido è che

$$v_P(t) = v_Q(t) + \omega \wedge QP$$

con Q, P generici punti solidali al C.R.

Questa relazione ci permette di ricavare la velocità di un punto in funzione di quella di un altro conoscendo la velocità angolare.

MOTI RIGIDI

LEGGE DELLE VELOCITÀ

$$v_P(t) = v_Q(t) + \omega \wedge QP \qquad \forall\ P, Q \in C.R.$$

LEGGE DELLE ACCELERAZIONI

$$a_P(t) = a_Q(t) + \dot{\omega} \wedge QP + \omega \wedge (\omega \wedge QP) \qquad \forall\ P, Q \in C.R.$$

→ se ad un dato istante $t = t^*$ $(\omega(t^*) = 0)$

$$\Rightarrow \underbrace{\boxed{v_P(t^*) = v_Q(t^*)}}$$

ATTO DI MOTO TRASLATORIO

poichè $v_P = v_Q$, ovvero
tutti i punti hanno la stessa velocità
ma in generale le accelerazioni
sono diverse (perchè $\dot{\omega} = 0$ non è detto che)

→ se per $t = t^*$ con $v_Q = 0$

$$\underbrace{\boxed{v_P(t^*) = \omega \wedge QP}}$$

ATTO DI MOTO ROTATORIO

attraverso un asse
passante per Q // a $\omega(t^*)$
detto asse istantaneo di rotazione

La matrice di rotazione che trasforma la terna fissa in quella mobile è la matrice identità

$$\underline{\underline{R}} = \mathbb{I} \quad \text{ed} \quad \underbrace{e_k = i_k}_{\text{rimangono costanti}} \quad \forall\, t \in [t_1, t_2] \text{ in cui } \omega = 0 \quad \forall\, k \in [1,3]$$

Quindi per caratterizzare un moto traslatorio necessito di 3 parametri per fissare la posizione di tutti i punti del corpo rigido (ovvero le coordinate dell'origine $Q(t)$ del S.R. mobile) per questo si parla di 3 gradi di libertà di un corpo rigido in moto traslatorio

Dalla legge delle velocità

$$v_P(t) = v_Q(t) \qquad \forall\, P, Q \in C.R.$$

ovvero tutti i punti hanno la stessa velocità (ma che potrebbe essere diversa istante per istante a meno che il moto non sia uniforme e rettilineo)

N.B. In effetti si può descrivere la posizione e la velocità del corpo rigido dando posizione e velocità di uno dei suoi punti (es. il baricentro)

Quindi devo definire 3 componenti del punto prescelto $\Rightarrow$ ritroviamo i 3 gradi di libertà (il moto del C.R. è univocamente determinato dal moto di un suo punto) derivando $\Rightarrow$ $\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{\theta}\, e_2 \\ \dot{e}_2 = -\dot{\theta}\, e_1 \\ \dot{e}_3 = 0 \end{cases}$

Quindi per POISSON

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_k e_k \wedge \dot{e}_k = \frac{1}{2}\left(e_1 \wedge \dot{e}_1 + e_2 \wedge \dot{e}_2 + e_3 \wedge \dot{e}_3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e_1 \wedge \dot{\theta}\, e_2 + e_2 \wedge (-\dot{\theta})\, e_1 + \cancel{e_3 \wedge 0}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\theta}\left(e_1 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_1\right) =$$

$$= \dot{\theta}\, e_1 \wedge e_2 = \dot{\theta}\, \underset{\overset{\parallel}{i_3}}{e_3}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\omega = \dot{\theta}\, i_3}$ (diretto lungo la direzione che rimane costante)

LEGGE DELLE VELOCITÀ (CASO ROTOTRASLATORIO)

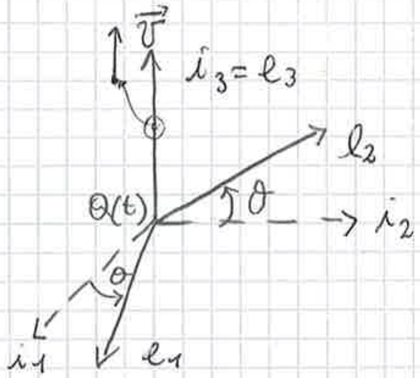
$$\boxed{v_P(t) = v_Q(t) + \dot{\theta}\, i_3 \wedge QP}$$

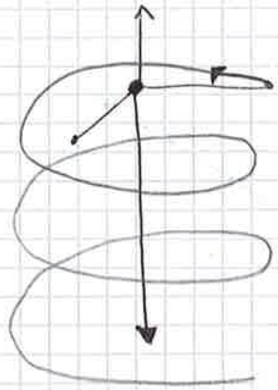
$\Rightarrow$ NECESSITO di 4 PARAMETRI $\begin{cases} 3 \text{ dell'origine mobile } Q(t) \\ 1 \text{ dell'orientazione del S.R. mobile rispetto a quello fisso } (\theta) \end{cases}$

[$\theta \rightarrow$ identifica i versori solidali]

◊ MOTO ELICOIDALE

Esiste una (direzione) retta // alla direzione privilegiata in cui i punti hanno velocità parallele alla retta stessa





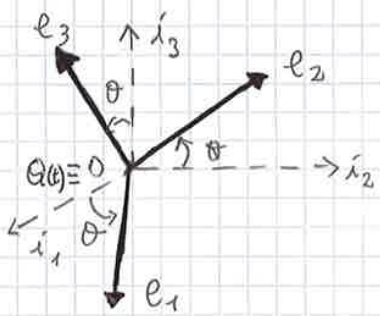
Necessito di $\boxed{\text{2 parametri}}$ $\{ z_Q \ ; \ \theta \}$

z_Q → quota originale; θ → angolo di rotazione

$\left[\underbrace{(x_Q, y_Q)}_{\text{sono cost}} \right]$

◊ MOTO POLARE

con 1 punto fisso e rotazione del C.R.
(punto $\equiv O$)



$O \equiv Q(t)$ → punto fisso

Il C.R. è in rotazione attorno l'asse istantaneo di rotazione

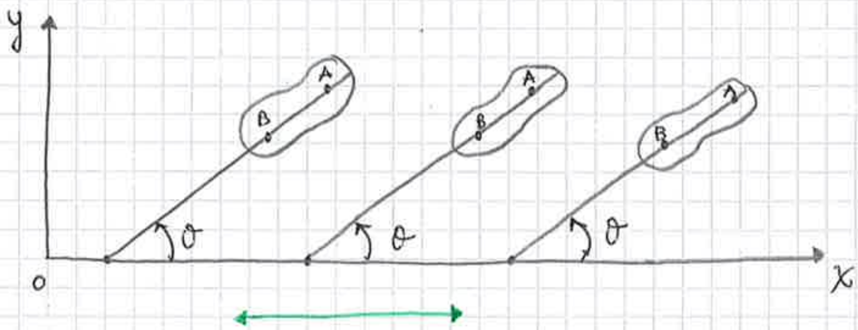
(perché varia nel tempo ovvero direzione variabile)

Avrò bisogno di $\boxed{\text{3 parametri}}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ad es. i 3 angoli di EULERO} \\ \text{per definire il moto polare} \end{array} \right\}$

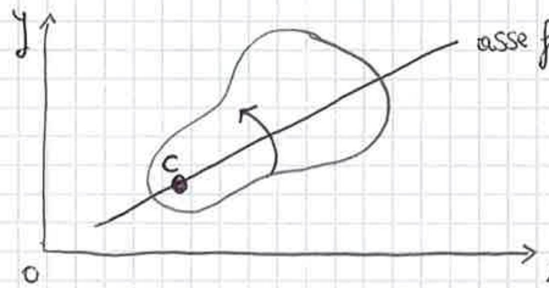
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 238

→ Classificazione dei moti rigidi piani (CASI PARTICOLARI)

a) MOTO PIANO TRASLATORIO

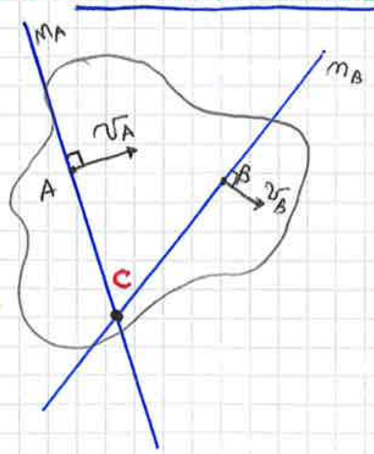


b) MOTO PIANO ROTATORIO INTORNO AD UN ASSE FISSO



L'intersezione tra il piano direttore π e l'asse istantaneo di rotazione definisce un punto detto CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE C. Esso si determina attraverso il teorema di CHASLES

→ TEOREMA DI CHASLES : Tracciando la normale alla traiettoria di 2 qualsiasi punti del sistema, trovo un punto di intersezione C (interno o esterno al C.R.) definito come CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE



$$\vec{a_A} = \underset{\overset{\parallel}{0}}{\vec{a_0}} + \ddot{\vartheta}\, \underbrace{i_3 \wedge \vec{OA}}_{\overset{\parallel}{l_2}} - \dot{\vartheta}\, \vec{OA}$$

$$\boxed{\vec{a_A} = \ddot{\vartheta}\, l\, \vec{e_2} - l\dot{\vartheta}^2\, \vec{e_1}}$$

→ Se considero G (il baricentro $= \frac{l}{2}$)

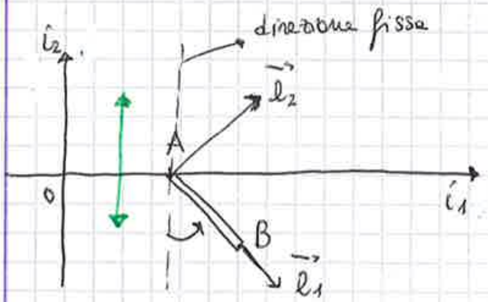
$$\begin{cases} \vec{v_G} = \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\,\vec{e_2} \\ \vec{a_G} = \frac{l}{2}\ddot{\vartheta}\,\vec{e_2} - \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\,\vec{e_1} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{aligned} v_G &= v_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AG} \\ &= l\dot{\vartheta}\,\vec{e_2} + \dot{\vartheta}\, i_3 \wedge \left(-\frac{l}{2}\vec{e_1}\right) \\ &= l\dot{\vartheta}\,\vec{e_2} - \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\,\vec{e_2} = \frac{l}{2}\dot{\vartheta}\,\vec{e_2} \end{aligned}}$$

⇒ qualsiasi coppia di punti scelgo, le formule sono universali

---

Es: ASTA RIGIDA DI MASSA m e lunghezza l (senza punto fisso)

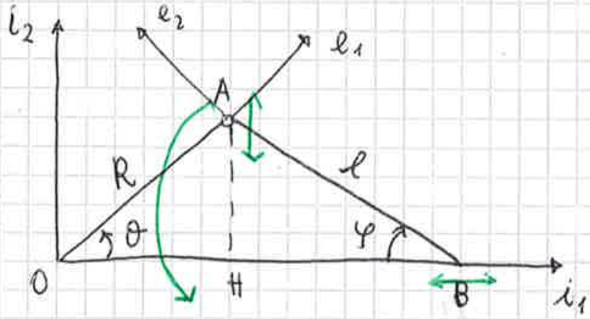


A vincolato a scorrere sulla direzione fissa

$$\vec{v_A} = \dot{x}\,\vec{i_1}$$
$$\vec{a_A} = \ddot{x}\,\vec{i_1}$$

con x = coordinata sul piano

Es: MANOVELLISMO (2 ASTE RIGIDE — CINEMATICA NOTEVOLE)



- O punto fisso
- moto rotatorio (moto azionato dall'andi e rivieni del piede della biella B)

1° ASTA) $\overline{OA}$ di lunghezza R → manovella
2° ASTA) $\overline{AB}$ di lunghezza ℓ → biella

} si muovono entrambe di moto piano

biella ↓ anche moto oscillatorio ⟷

Si suppone che $\boxed{R \ll \ell}$

→ il punto A è il **BOTTONE DI MANOVELLA**
→ il punto B è il **PIEDE DI BIELLA**

- $\vec{\omega}_1$ = velocità angolare manovella con $\boxed{\underbrace{\vec{\omega}_1 = \dot{\theta}\,\vec{i}_3}_{\text{MOTO ROTATORIO}}}$

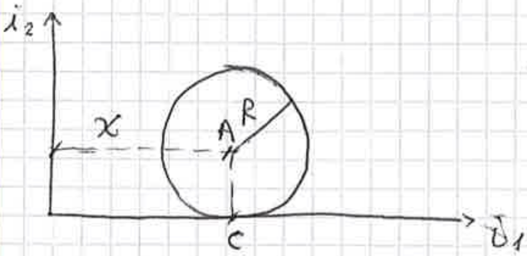
- $\vec{\omega}_2$ = velocità angolare biella con $\boxed{\vec{\omega}_2 = -\dot{\varphi}\,\vec{i}_3}$

Xkè senso orario

$$AH = R \operatorname{sen}\theta = \ell \operatorname{sen}\varphi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 238

Es: DISCO CHE ROTOLA SENZA STRISCIARE (PURO ROTOLAMENTO)



C = punto di contatto

$\boxed{\vec{v}_C = 0}$ per essere di puro rotolamento

$$\vec{v}_A = \dot{x}\,\vec{i}_1 = \underbrace{\vec{v}_C}_{=0} + \vec{\omega} \wedge \underbrace{\vec{AC}}_{=R\vec{i}_2}$$

$$\boxed{\vec{v}_A} = \dot{\theta}\,\vec{i}_3 \wedge R\,\vec{i}_2 = \boxed{-R\dot{\theta}\,\vec{i}_1} \qquad \dot{x} = -R\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{R}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R}\,\vec{i}_3} \qquad (\vec{\omega} \perp \text{ al piano})$$

→ x diminuisce se sono in senso orario

→ x aumenta se sono in senso antiorario

$$\boxed{\dot{x} = -R\dot{\theta}}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{R}}$$

$\omega > 0$	↺	ANTIORARIO
$\omega < 0$	↻	ORARIO

$$\vec{a}_A = \ddot{x}\,\vec{i}_1 = \ddot{\theta}\,\vec{i}_3 \wedge R\,\vec{i}_2 - \dot{\theta}^2 R\,\vec{i}_2 + \vec{a}_C$$

$$\boxed{a_A = -R\ddot{\theta}\,\vec{i}_1}$$

$$\vec{0} = \vec{a}_C - R\dot{\theta}^2\,\vec{i}_2$$

$$\boxed{\vec{a}_C = +R\dot{\theta}^2\,\vec{i}_2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 238

$$\boxed{\overline{OG}\left(s(t), \theta(t)\right) = S + \frac{l}{2}\cos\theta\,\vec{\imath} + \frac{l}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\vec{\jmath}}$$

↓ punto medio asta

↳ Da cui calcolo la velocità di G

$$S = s(t) \qquad \theta = \theta(t)$$

$$v_G = \frac{d\,G(s,\theta)}{dt} = \frac{\partial G}{\partial s}\underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{\frac{ds}{dt} = \dot{s}} + \frac{\partial G}{\partial \theta}\underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial t}}_{\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}}$$

derivate funzioni composte

$$= \frac{\partial G}{\partial s}\,\dot{s} + \frac{\partial G}{\partial \theta}\,\dot{\theta}$$

→ derivando OG ottengo:

$$\dot{OG} = \left(\dot{s} - \frac{l}{2}\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\theta}\right)\vec{\imath} + \frac{1}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{\jmath}$$

⇒ (s, θ) = parametri indipendenti ed essenziali per la descrizione del moto

impongo → $q_1 = s \qquad q_2 = \theta$

e si ha che la velocità di un generico punto P è:

$$v_P = \frac{\partial P}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}\,\dot{q}_2 = \sum_{k=1}^{2}\frac{\partial P}{\partial q_k}\,\dot{q}_k$$

Considerando le VELOCITÀ VIRTUALI queste sono tutte tangenti alla guida (congelamento del sistema).
Mentre le VELOCITÀ EFFETTIVE (guida che ruota) hanno anche una componente perpendicolare

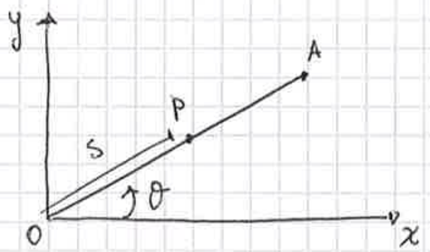
Tra le infinite velocità virtuali in questo caso non si trovano le velocità effettive

$$v_P = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

pezzo che compare perchè il vincolo è mobile e che si annulla se considero le velocità virtuali in cui si congela il sistema

derivazione funzione composta $p(s,t) = p(s(t), t)$

Es: PUNTO VINCOLATO SU UNA GUIDA MOBILE



- asta vincolata in O
- $\theta = \omega t$
- asta in moto rotatorio uniforme con $\omega = cost$

La posizione di P è determinata dalla coordinata libera s.
Il vincolo è mobile e compare $\underbrace{\text{esplicitamente}}$ il tempo

prima con vincoli fissi il tempo compariva attraverso le coordinate libere

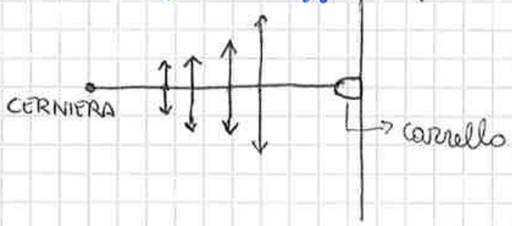
$$OP(s, t) = s\cos(\omega t)\,\vec{i} + s\,\text{sen}(\omega t)\,\vec{j}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 238

- Se considero un punto che si muove lungo una guida mobile la v_P è tangente alla guida. Gli spostamenti sono legati alle velocità virtuali che sono tangenti alla guida. ⇒ Escluso agli estremi dell'asta verifico la reversibilità.

Se la velocità effettiva opposta non esiste ⇒ ho irreversibilità

N.B. In linea di massima gli spostamenti virtuali sono ≠ da quelli effettivi (non solo nel caso di vincoli mobili)



Le velocità virtuali sono ⊥ all'asta e sono quelle compatibili con i vincoli ad un dato istante, ma non hanno nulla a che vedere con le velocità effettive, infatti il sistema non si può muovere.

- Nel caso di un C.R. si può utilizzare la formula fondamentale delle velocità

$$dP = dQ + \underbrace{\omega\, dt}_{\text{vettore di rotazione infinitesima}} \wedge QP$$

dP ↓ spostamenti effettivi

$$\delta P = \delta Q + \omega' dt \wedge QP$$

δP ↓ spostamento virtuale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 238

COORDINATE LIBERE O LAGRANGIANE (essenziali, indipendenti)

COORDINATE DI UN PUNTO P

$$\boxed{P(q_1, q_2, \dots q_N; t)}$$

VELOCITÀ DEL PUNTO (EFFETTIVE)

$$\boxed{v_P = \frac{dP}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P}{\partial t}}$$

per la mobilità del vincolo (si annulla se considero v virtuali)

SPOSTAMENTO EFFETTIVO

spostamenti effettivi delle coordinate lagrangiane

$$\boxed{dP = v_P\, dt = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial P}{\partial t} dt}$$

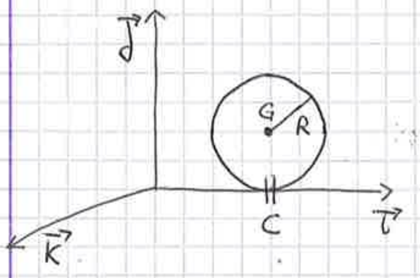
SPOSTAMENTO VIRTUALE (congelo il vincolo)

$$\boxed{\delta P = v_P'\, dt = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial q_k} \delta q_k}$$

VELOCITÀ VIRTUALE

spostamenti virtuali delle coordinate lagrangiane

Es: DISCO DI RAGGIO R SU UN PIANO



C = Punto d' contatto
R = raggio del disco

Per avere puro rotolamento devo imporre che le velocità nel punto di contatto (quella del disco e del piano) siano uguali.

$\Rightarrow \boxed{v_C = 0}$

$\Rightarrow$ [equivale a dire che il disco ha un ATTO DI MOTO ROTATORIO intorno a C.]

[ovvero, istantaneamente, ho un atto di moto rotatorio intorno al punto di contatto C (C = CENTRO ISTANTANEO DI ROTAZIONE)]

→ Applicando la legge di distribuzione delle velocità del C.R.:

$$\boxed{\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_C}_{=0} + \underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}} \wedge \overrightarrow{CG}} \quad \overrightarrow{CG} = R\vec{j}$$

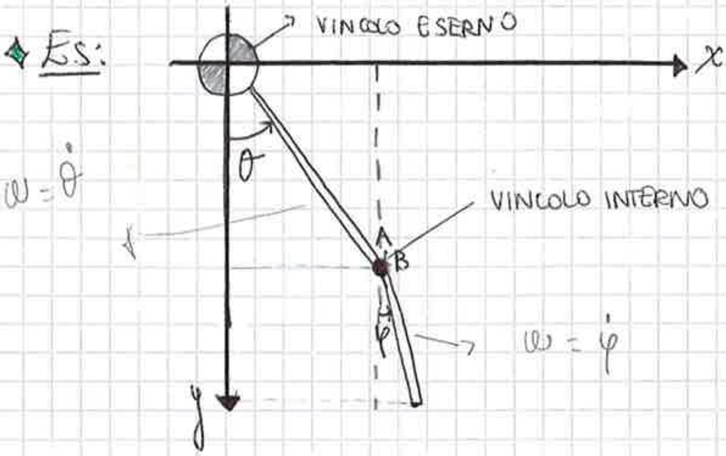
perchè il verso è orario

$$v_G = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} = R\dot{\theta}\vec{i}$$

quindi:

$$\boxed{v_G = R\dot{\theta}\vec{i}}$$

Es:



VINCOLO ESTERNO $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

VINCOLO INTERNO $\begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases}$

$$\boxed{\text{n° gradi di libertà}} = \underbrace{3 + 3}_{\text{2 C.R. liberi nel piano}} - \underset{\uparrow \text{INT}}{2} - \underset{\uparrow \text{EXT}}{2} = 2 \rightarrow \boxed{\{\theta, \varphi\}}$$

doppio vincolo

→ Se invece consideriamo M $\boxed{\text{VINCOLI DI PURA MOBILITÀ}}$, allora le velocità che posso assegnare liberamente sono $N - M$ e il n° di gradi di libertà deve essere definito in funzione degli spostamenti virtuali ammissibili

---

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 238

BARICENTRO

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{OP_i}}{m_{TOT}}} \longrightarrow \text{CASO PARTICELLARE}$$

$$\boxed{\vec{OG} = \frac{\int_\beta \vec{OP} \rho \, d\tau}{m_{TOT}}} \longrightarrow \text{CASO CONTINUO}$$

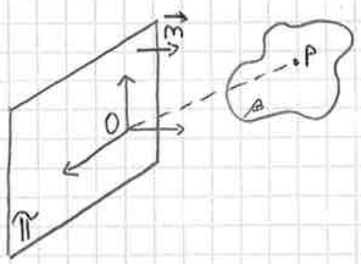
La definizione di baricentro non dipende dall'origine O.
Infatti supponiamo che $O' \neq O$.

$$\vec{O'P_i} = \vec{O'O} + \vec{OP_i}$$

$$\vec{O'G'} = \frac{\sum_i m_i \vec{O'P_i}}{m_{TOT}} = \overbrace{\vec{O'O}}^{\text{lo porto fuori xké cost}} + \underbrace{\frac{\sum_i \vec{OP_i}}{m_{TOT}}}_{\vec{OG}} = \vec{O'O} + \vec{OG} = \vec{O'G}$$

quindi $G' \equiv G$

→ IN COMPONENTI



$$\vec{m} \perp \pi \quad ; \quad O \in \pi$$

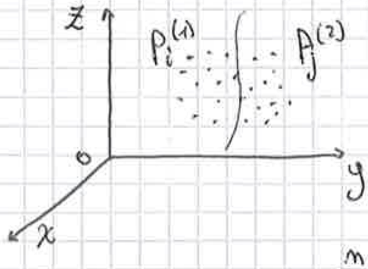
$$x_G = \frac{\sum_i m_i x_i}{m_{TOT}} = \frac{\int_\beta x \rho \, d\tau}{m_{TOT}}$$

per calcolarlo è indifferente l'utilizzo di tutte le masse o solo del baricentro G

$\vec{OP} \cdot \vec{m} = \delta \rightarrow$ distanza con segno di P da π

$$\Rightarrow m \vec{OG} = \int_\beta \vec{OP} \rho \, d\tau$$

Es:



$P_i(m_i)$

$P_i^{(1)} \quad i = 1, \dots, m$
$P_j^{(2)} \quad j = m+1, \dots, n$

} divido il sistema in 2 parti

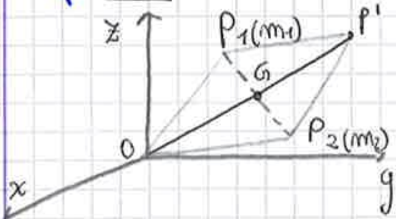
$$m_{TOT}\, \overrightarrow{OG}_{TOT} = \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} m_i \overrightarrow{OP_i} + \sum_{i=m+1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}$$ ← per la proprietà distributiva

$$= m^{(1)} \overrightarrow{OG}^{(1)} + m^{(2)} \overrightarrow{OG}^{(2)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OG}_{TOT} = \frac{m^{(1)} \overrightarrow{OG}^{(1)} + m^{(2)} \overrightarrow{OG}^{(2)}}{m_{TOT}}}$$ → BARICENTRO TOTALE

Es:



SUPPONGO
$m_1 = m_2 = m$
con $m_{TOT} = 2m$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\cancel{m}\left(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}\right)}{\underset{\substack{\parallel \\ 2\cancel{m}}}{m_{TOT}}} = \frac{\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}}{2}$$

il baricentro è la metà di $\overrightarrow{OP'}$

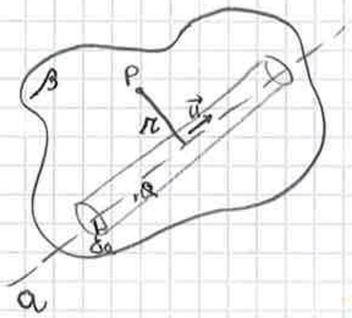
$G \in \overrightarrow{P_1P_2}$ e dimezza il segmento $\overrightarrow{P_1P_2}$

MOMENTO DI INERZIA

Si definisce **momento di inerzia** di un punto materiale rispetto ad un asse a, lo scalare:

$$\boxed{I_a = m r^2} \longrightarrow \text{Per un PUNTO MATERIALE}$$

PER UN CORPO CONTINUO



asse a definito dal versore $\vec{u}$

$r = dist(P, a)$

$$\boxed{I_a = \int_\beta r^2 \rho \, d\tau} \longrightarrow \text{MOMENTO DI INERZIA CASO CONTINUO}$$

$$\boxed{I_a = \sum_{i=1}^{m} m_i r_i^2} \longrightarrow \text{MOMENTO DI INERZIA CASO PARTICELLARE}$$

≥ 0 per def. $(= 0 \Leftrightarrow \in a)$

$$I_a = m \, \delta_a^2$$

$$\boxed{\delta_a = \sqrt{\frac{I_a}{m}}} \longrightarrow \text{RAGGIO DI GIRAZIONE}$$

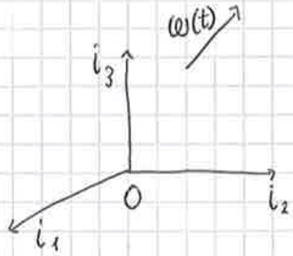
[distanza dall'asse a a cui si deve piazzare una massa m per ottenere il medesimo momento di inerzia]

$$\boxed{Q : m \, \delta_a^2 = I_a} \longrightarrow \text{PUNTO GIRATORE}$$

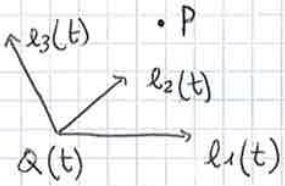
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 238

MOTI RELATIVI

Le velocità e le accelerazioni e la velocità angolare di un corpo rigido non sono quantità assolute, ma relative all'osservatore che descrive il moto.



S.R. FISSO



S.R. MOBILE

$$x_P = \sum_{j=1}^{3} x_j(t)\,\vec{i}_j \qquad \text{ove} \qquad x_j = \overbrace{(x, y, z)}^{\text{le 3 coordinate nel S.R. fisso}}$$

$$x_P = \sum_{j=1}^{3} x'_j(t)\,\vec{e}_j \qquad \text{ove} \qquad x'_j = \underbrace{(x', y', z')}_{\text{le 3 coordinate nel S.R. mobile}}$$

TEOREMA DI COMPOSIZIONE DELLE VELOCITÀ (LEGGE DI GALILEO)

$$\boxed{v_a = v_r + v_\tau}$$

v_a = velocità assoluta (nel SR fisso)

v_r = velocità relativa (nel SR mobile)

v_τ = velocità di trascinamento (velocità propria del S.R mobile rispetto quello fisso)

dove:

$$\boxed{v_\tau = v_Q + \omega \wedge QP}$$

Se il punto non si muove nel S.R. mobile allora $\boxed{v_r = 0}$

quindi:

$$v_a = v_\tau$$

$$v_a = v_Q + \omega \wedge QP$$

$$\boxed{v_a = v_Q + \omega \wedge (x_P - x_Q)} \longrightarrow \text{FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 238

TEOREMA DI CORIOLIS

(LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE ACCELERAZIONI)

$$\boxed{a_a = a_r + a_\tau + a_c}$$

a_a = accelerazione assoluta

a_r = accelerazione relativa

a_τ = accelerazione di trascinamento

a_c = accelerazione di CORIOLIS

ω = velocità angolare del S.R. mobile

$$\boxed{a_c = 2\,\omega \wedge v_r}$$

ω: rotazione S.R mobile rispetto quello fisso

dim. $v_P = v_Q + \sum_{j=1}^{3} x'_j(t)\, e_j(t) + \omega \wedge (x_P - x_Q)$

$$a_a = a_P = a_Q + \sum_{j=1}^{3} \ddot{x}_j(t)\, e_j(t) + \sum_{j=1}^{3} \dot{x}_j\, \omega \wedge e_j +$$
$$+ \dot{\omega} \wedge (x_P - x_Q) + \omega \wedge \left(\sum_{j=1}^{3} \dot{x}'_j e_j + \sum_{j=1}^{3} x'_j\, \omega \wedge e_j \right)$$
$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \ddot{x}_j\, e_j}_{a_r} + \underbrace{2\,\omega \wedge \sum_{j=1}^{3} \dot{x}'_j e_j}_{a_c} +$$
$$\underbrace{+ a_Q + \dot{\omega} \wedge (x_P - x_Q) + \omega \wedge \omega \wedge (x_P - x_Q)}_{a_\tau}$$

$\Rightarrow a_a = a_r + a_\tau + a_c$

N.B $\longrightarrow$ Si ha MOTO TRASLATORIO $\Leftrightarrow$ $\boxed{\omega = 0}$

quindi $\boxed{a_c = 0}$

$\Rightarrow a_a = a_Q + a_r$

1ª LEGGE DELLA DINAMICA

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_a$$
$$= m\,(a_Q + a_r)$$

$$\Rightarrow \boxed{m\,a_r = F - m\,a_Q}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 238

l'oscillatore armonico è descritto da

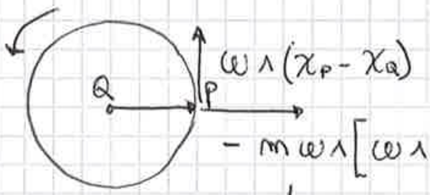
$$I_Q \ddot{\vartheta} + h\vartheta = 0 \qquad \text{con } \vartheta = \vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$I_Q \ddot{\vartheta} + h\vartheta - mgl \operatorname{sen}\vartheta = 0$$

se $\boxed{h > mgl}$ → posizione stabile

$$I_Q \ddot{\vartheta} + h\vartheta - mgl \operatorname{sen}\vartheta - mA \operatorname{sen}\omega t \, l \operatorname{sen}\vartheta = 0$$

MOTO ROTATORIO $\omega \neq 0$

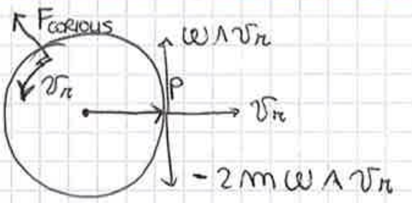


$$-m\omega \wedge \underbrace{[\omega \wedge (x_P - x_Q)]}_{\parallel}$$

$$\underbrace{\cancel{[\omega (x_P - x_Q)]\omega}}_{=0} - [\omega \cdot \omega](x_P - x_Q) = \omega^2 (x_P - x_Q)$$

$$\boxed{F_{CENTRIFUGA} = m\omega^2 (x_P - x_Q)}$$

$$\boxed{F_{CORIOLIS} = 2m\omega \wedge v_r}$$



Se mi muovo verso il bordo del disco tendo a spostarmi a dx

$$\boxed{F_{CORIOLIS} \perp \text{ a } v_r \Rightarrow \text{lavoro nullo!}}$$

La soluzione di ⊛ è di tipo esponenziale

$$\begin{cases} x = A e^{\lambda t} \\ y = B e^{\lambda t} \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$ oppure $\mathbb{I}$

Se calcolo $\dot{x}$ e $\dot{y}$, $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$

$$\begin{cases} \dot{x} = A\lambda e^{\lambda t} \\ \dot{y} = B\lambda e^{\lambda t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t} \\ \ddot{y} = B\lambda^2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) A \cancel{e^{\lambda t}} - 2\omega B \cancel{e^{\lambda t}} = 0 \\ B\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) B \cancel{e^{\lambda t}} + 2\omega A \lambda \cancel{e^{\lambda t}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{k}{m} - \omega^2 + \lambda^2\right) A - 2\omega\lambda B = 0 \\ 2\omega\lambda A + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 + \lambda^2\right) B = 0 \end{cases} \longrightarrow$$

SISTEMA DI EQ. DIFF. A COEFFICIENTI COSTANTI OMOGENEI

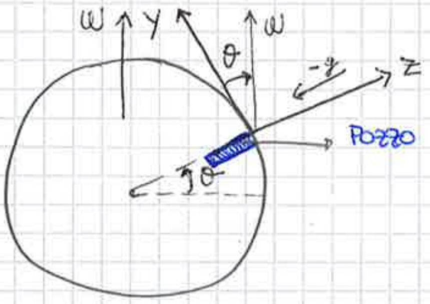
(soluzione banale $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$)

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 + \lambda^2 & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \frac{k}{m} - \omega^2 + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0$$

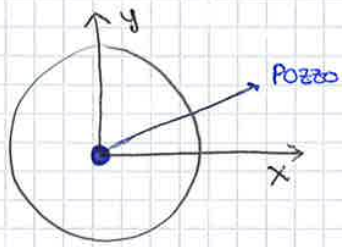
$$\Rightarrow \left(\frac{k}{m} - \omega^2 + \lambda^2\right)^2 + 4\omega^2\lambda^2 = 0$$

$$\lambda^4 + 2\left(\frac{k}{m} + \omega^2\right)\lambda^2 + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 = 0$$

Es: <u>GRAVE IN UN POZZO VUOTO</u> (trascuro la resistenza dell'aria)



TERRA



TERRA VISTA DALL'ALTO

EQUAZIONI DEL MOTO

$$m\vec{a}_r = \vec{F} - \overbrace{2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r}^{F_{CORIOLIS}}$$

$$\vec{F} = \underbrace{mg}_{\text{include la F centrifuga}}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}\cos\theta\,\vec{j} + \vec{\omega}\,\text{sen}\,\theta\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_r = \vec{v}_x\,\vec{i} + \vec{v}_y\,\vec{j} + \vec{v}_z\,\vec{k}$$

$$\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & \omega\cos\theta & \omega\,\text{sen}\,\theta \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega\cos\theta\, v_z - \omega\,\text{sen}\,\theta\, v_y)\,i + \omega\,\text{sen}\,\theta\, v_x\,\vec{j} - \omega\cos\theta\, v_x\,\vec{k}$$

con $mg = -mg\,\vec{k}$

CONDIZIONI INIZIALI $\quad$ a $t=0$ $\quad$ $v(t=0)=0$

$$\Downarrow$$

$$\dot{v}_x(t=0)=0$$

$$\begin{cases} v_x(t=0) = B + \dfrac{g}{2\omega}\cos\theta = 0 \\ \dot{v}_x(t=0) = A\,2\omega = 0 \end{cases}$$

quindi $\begin{cases} A=0 \\ B = -\dfrac{g}{2\omega}\cos\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{v_x = \frac{g}{2\omega}\cos\theta\left(1-\cos(2\omega t)\right)} = \dot{x}$$

$$\dot{v}_y = -2\omega\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{g}{2\omega}\cos\theta\left(1-\cos 2\omega t\right)$$

$$= -\underbrace{g\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}_{cost}\left(1-\cos 2\omega t\right)$$

$\downarrow$ INTEGRANDO PER t

C = costante di integrazione determinata dalle condizioni iniziali

$$\boxed{v_y = -g\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\left(t-\frac{\mathrm{sen}\,2\omega t}{2\omega}\right)+\cancel{C}} = \dot{y}$$

poichè $v_y(t=0)=0 \Rightarrow C=0$

$$\dot{v}_z = 2\omega\cos\theta\,\frac{g}{2\omega}\cos\theta\left(1-\cos 2\omega t\right)-g$$

$$= g\cos^2\theta\left(1-\cos 2\omega t\right)-g$$

$\downarrow$ INTEGRANDO PER t

$$\boxed{v_z = g\cos^2\theta\left(t-\frac{\mathrm{sen}\,2\omega t}{2\omega}\right)-gt+\cancel{C}} = \dot{z}$$

poiche $v_z(t=0)=0 \Rightarrow C=0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 238

Quando il corpo urta le pareti?

$$R = \frac{g}{3}\,\omega\,\cos\theta\, t^3 \longrightarrow \text{raggio}$$

se $R = 1$ $\quad z = 1280\ m \quad \Rightarrow \quad t = 16\ sec$

se $\underbrace{R = 1 \quad z = 12\ m}_{\text{si scosta dalla verticale di } 1\,mm} \quad \Rightarrow \quad t = 1{,}6\ sec$

[FORMALMENTE la forza centrifuga dipende dalla profondità ma in questo caso è $\approx$ uguale a F_g $\Rightarrow$ le equazioni scritte vanno bene]

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 238

CALCOLO IL TEO. DI H.S. RISPETTO G (baricentro)

$$I_G = I_O - m d^2 \qquad \text{con } d = \frac{l}{2}$$

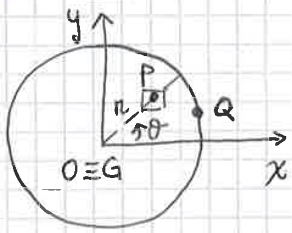
$$\Rightarrow I_G = I_O - m\frac{l^2}{4}$$

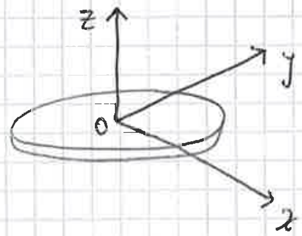
$$I_G = \frac{ml^2}{3} - \frac{ml^2}{4} = \frac{1}{12} ml^2$$

$$\boxed{I_G = \frac{1}{12} m l^2}$$

MOMENTO DI INERZIA DI UN'ASTA RISPETTO A G (baricentro)

Es: DISCO OMOGENEO DI MASSA m e RAGGIO R





ρ = densità

$m = \rho \underbrace{\pi r^2}_{\text{AREA DISCO}}$

COORDINATE POLARI $\{r, \theta\}$

$d\tau = \underbrace{r\, dr\, d\theta}$

FATTORE DI COMPENSAZIONE (perchè passo da 1 sist di coordinate ad un altro)

MOMENTO DI INERZIA RISPETTO Z USCENTE DAL PIANO

$$I_G = \iint \rho r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \cancel{2}\pi \rho \frac{R^4}{\cancel{4}_2} = \underbrace{\rho \pi R^2}_{= m} \cdot \frac{R^2}{2} = m\frac{R^2}{2}$$

$$\boxed{I_G = m\frac{R^2}{2}}$$

MOMENTO DI INERZIA DI UN DISCO RISPETTO G (baricentro)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 99 di 238

$$I_u = \int_{\mathcal{B}} r^2 \rho \, d\tau = \int_{\mathcal{B}} |OP \wedge \vec{u}|^2 \rho \, d\tau$$

$$I_u = \int_{\mathcal{B}} \left[(y\gamma - z\beta)^2 + (x\gamma - z\alpha)^2 + (x\beta - y\alpha)^2 \right] \rho \, d\tau$$

$$= \alpha^2 \int_{\mathcal{B}} (y^2+z^2) \rho \, d\tau + \beta^2 \int_{\mathcal{B}} (x^2+z^2) \rho \, d\tau + \gamma^2 \int_{\mathcal{B}} (x^2+y^2) \rho \, d\tau +$$

$$- 2\alpha\beta \int_{\mathcal{B}} xy \rho \, d\tau - 2\alpha\gamma \int_{\mathcal{B}} xz \rho \, d\tau - 2\beta\gamma \int_{\mathcal{B}} yz \rho \, d\tau$$

$$I_u = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z + 2\alpha\beta I_{xy} + 2\alpha\gamma I_{xz} + 2\beta\gamma I_{yz}$$

$\longrightarrow$ con
$$\boxed{\begin{aligned} I_{xy} &= -\int_{\mathcal{B}} xy \rho \, d\tau \\ I_{xz} &= -\int_{\mathcal{B}} xz \rho \, d\tau \\ I_{yz} &= -\int_{\mathcal{B}} yz \rho \, d\tau \end{aligned}}$$
$\rightarrow$ PRODOTTI DI INERZIA

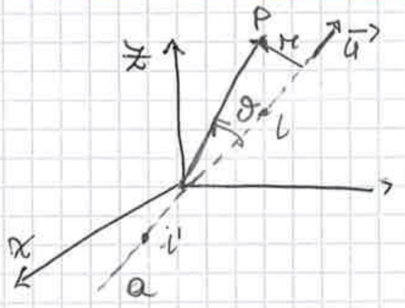
$$\boxed{I_0 = \begin{vmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{vmatrix}}$$
$\rightarrow$ MATRICE D'INERZIA

Introducendo la matrice d'inerzia reale e simmetrica (quindi diagonalizzabile) è possibile scrivere la forma compatta.

$$\boxed{I_u = \vec{u} \cdot (I_0 \vec{u})} \qquad \text{con } \vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

MOMENTO D'INERZIA DI UNA RETTA CONCORRENTE

ELLISSOIDE DI INERZIA



$$\vec{OL} = \frac{1}{\sqrt{I_a}}\,\vec{u} \qquad \text{con } I_a = I_u$$

IN COMPONENTI

$$\begin{cases} x_L = \pm \dfrac{\alpha}{\sqrt{I_a}} \\ y_L = \pm \dfrac{\beta}{\sqrt{I_a}} \\ z_L = \pm \dfrac{\gamma}{\sqrt{I_a}} \end{cases}$$

$$I_a = \underset{I_a x^2}{\underset{\parallel}{\alpha^2 I_x}} + \underset{I_a y^2}{\underset{\parallel}{\beta^2 I_y}} + \underset{I_a z^2}{\underset{\parallel}{\gamma^2 I_z}} + \underset{2 I_a^2 x^2 y^2}{\underset{\parallel}{2\alpha\beta I_{xy}}} + \underset{2 I_a^2 x^2 z^2}{\underset{\parallel}{2\alpha\gamma I_{xz}}} + \underset{2 I_a y^2 z^2}{\underset{\parallel}{2\beta\gamma I_{yz}}}$$

→ Semplifico per I_a

$$\boxed{1 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 + 2 I_{xy}\, xy + 2 I_{xz}\, xz + 2 I_{yz}\, yz}$$

ELLISSOIDE

N.B. l'ellissoide è ROTONDO nel caso giroscopico

N.B. Se $O \equiv G$ l'ELLISSOIDE È CENTRALE DI INERZIA

(assi principali = semiassi ellissoidici) $\Rightarrow$ $\boxed{I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 103 di 238

ELLISSOIDE DI INERZIA

$$\boxed{1 = \underset{\substack{\|\\ 0}}{I_x} x^2 + I_y y^2 + I_z z^2}$$

perchè è un'asta

$$\frac{m\ell^2}{3}\left(y^2+z^2\right) = 1$$

$$|OL| = 2R = \frac{2}{\ell}\sqrt{\frac{3}{m}} = \frac{1}{\sqrt{I_u}}$$

$$I_u = \frac{m\ell^2}{12}$$

con $R = \sqrt{\frac{3}{m}}\ \frac{1}{\ell}$

CILINDRO DI EQUAZIONE: $y^2 + z^2 = \frac{3}{m\ell^2}$

INDICE:

7. FORZE, LAVORO, ENERGIA — pag. 1, 30

8. DINAMICA DEI SISTEMI — pag 12

9. STATICA - TEO E CINETICA — pag 37

10. DINAMICA DEL CORPO RIGIDO — pag 67

11. EQUAZIONI DI LAGRANGE — pag 72

DETERMINISMO MECCANICO

Proiettando $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ sugli assi coordinati otteniamo:

poiché $\vec{a} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$ un' EQ. DIFF. A DERIVATE ORDINARIE VETTORIALE DEL II ORDINE

→ 3 EQUAZIONI SCALARI DEL II ORDINE NELLE INCOGNITE $\{x(t), y(t), z(t)\}$

ASSOCIANDO LE CONDIZIONI INIZIALI

POSIZIONI INIZIALI $\begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ y(t=0) = y_0 \\ z(t=0) = z_0 \end{cases}$ VELOCITÀ INIZIALI $\begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_{0x} \\ \dot{y}(t=0) = v_{0y} \\ \dot{z}(t=0) = v_{0z} \end{cases}$

Per forze sufficientemente regolari il modello meccanico ammette una soluzione unica e si parla di PROBLEMA DI CAUCHY ben posto.

LAVORO

Il lavoro è definito come la quantità scalare:

$$\boxed{dL = \vec{F}\, d\underbrace{P}_{\text{SPOSTAMENTO ELEMENTARE}}} = \underbrace{F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz}$$

differenziale esatto se è definita una funzione che ne rappresenta il differenziale

$$\boxed{dL = dU}$$ per cui: $F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$

$$\boxed{L = \int_{U_1}^{U_2} dU = U_2 - U_1}$$ ⇒ il lavoro di una forza conservativa dipende solo dalle posizioni iniziali e finali

in particolare il L lungo una curva chiusa è NULLO

2

↳ **FORZE CONSERVATIVE** Sono caratterizzate dall'∃ di una funzione potenziale $U(x, y, z)$

$U(x,y,z)$ è continua, con derivate parziali tali che

$$\vec{F} = \nabla U$$

ovvero in componenti

$$\underbrace{F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}}$$

per cui la forma differenziale associata

$(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz)$ è ESATTA in un opportuno dominio se il campo vettoriale delle forze F è IRROTAZIONALE ovvero se il ROTORE DI F è NULLO

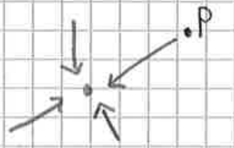
$$\boxed{\text{rot}\,F = 0}$$

$$\Updownarrow$$

Sono soddisfatte le CONDIZIONI DI COMPATIBILITÀ:

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

↳ ✧ **FORZE CENTRALI** : dirette verso un punto fisso O e dipendono da dist (P, O)



$F = F(r)\vec{u}$ con $\vec{u} = \frac{OP}{|OP|}$

$U = \int F(r)\,dr$

↳ ✧ **FORZA GRAVITAZIONALE**

$F = -\gamma \frac{m_P m_O}{r^2}$

γ = cost gravitazione universale

in particolare la FORZA PESO di un punto sulla terra si ha scegliendo

$r = R$ (raggio della terra)

$m_O =$ massa della terra

$\Rightarrow F = mg$ con $g = \frac{\gamma m_O}{R^2} = \text{cost} = 9{,}81\, m/s^2$

$U = \int -mg\,dr = -mgr = -mgz + \text{cost}$

$z = r - R$ = quota P sulla terra

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 113 di 238

SISTEMI DI FORZE

Una forza può essere rappresentata come un vettore applicato $(P, \vec{F})$ (punto di applicazione)
La forza tende a muovere un corpo nella direzione della sua azione.

RETTA DI APPLICAZIONE DEL VETTORE F APPLICATO A P: retta passante per $P // \vec{F}$.

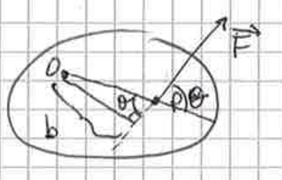
Vale dunque il PRINCIPIO DI TRASMISSIBILITÀ per cui una forza può essere applicata in un qualunque punto della retta di applicazione senza modificare gli effetti risultanti.

MOMENTO DI UNA FORZA

rispetto ad un polo O è:

$$\boxed{M_O = \vec{OP} \wedge \vec{F}}$$

Es: CASO PIANO



$b = OP \operatorname{sen}\theta$

$b =$ braccio del vettore F rispetto O

$b = \vec{OP} \wedge \vec{F} = bF\vec{k}$

versore ⊥ al piano con verso dato dalla regola della mano destra

$$|M_O| = |b||F|$$
$$|b| = |OP|_\perp$$

Il momento tiene conto del fatto che l'applicazione di una forza ad un corpo oltre a spostarlo nella direzione della F può (non sempre) farlo ruotare. Inoltre esso non dipende dal punto di applicazione scelto ma dalla retta di applicazione della F

SISTEMA DI VETTORI EQUILIBRATO: si dice equilibrato se ha vettori caratteristici nulli: ($R=0$; $M_R=0$). Se il sistema è equilibrato rimane tale anche per scelte diverse del polo rispetto a cui si calcola il M

$$R=0,\ M_O=0 \xrightarrow{\text{ma}} M_Q = QO \wedge \underset{\downarrow \atop 0}{R} + \underset{\downarrow \atop 0}{M_O} \Rightarrow M_Q = 0$$

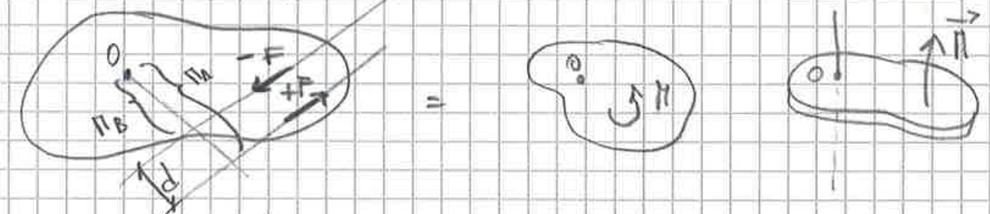
quindi il SISTEMA DELLE F^I è EQUILIBRATO

COPPIA: sistema di due vettori applicati la cui risultante è nulla ($R=0$)

$$\{(P_+, \vec{F})\ (P_-, -\vec{F})\} \qquad \vec{R} = \vec{F} - \vec{F} = 0$$

e, poichè esso è un sistema a $R=0$, il momento risultante è indipendente dal polo.

→ In pratica se consideriamo delle forze uguali ed opposte che siano non allineate ⇒ il loro effetto è quello di tendere a far ruotare il corpo



d = distanza tra le forze

$\vec{M}$ è un vettore libero infatti dipende dalle intensità e dalle distanze delle forze ma non dal polo

$$M_O = r_B \wedge (-F) + r_A \wedge (F)$$
$$= -r_B \wedge F + r_A \wedge F$$
$$= (r_A - r_B) \wedge F = d \wedge \vec{F}$$

10

DINAMICA DEI SISTEMI

(di punti materiali)

II LEGGE DELLA DINAMICA (LEGGE DI NEWTON) PER UN SISTEMA DI PUNTI

$$\sum_{i=1}^{m} m_i a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} F_i}_{R^A = R^{ATTIVE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \phi_i}_{R^V = R^{VINCOLARI}} \qquad [1]$$

$$\boxed{R^A + R^V = R^{EXT} = \sum_i m_i a_i} \qquad [2]$$

N.B. Non compaiono esplicitamente le F^{EXT} perché per il principio di azione e reazione (contributi nulli) sono un SISTEMA EQUILIBRATO (con R e M risultante NULLO)

→ Analogamente moltiplicando [1] per un generico vettore AP_i (con A = polo arbitrario) e sommando

$$\sum_i AP_i \wedge m_i a_i = \underbrace{\sum_i AP_i \wedge F_i}_{M_A^a} + \underbrace{\sum AP_i \wedge \phi_i}_{M_A^V}$$

M_A^a: MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE ATTIVE RISPETTO AL POLO A

M_A^V: MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE VINCOLARI RISPETTO AD A

[3] $$\boxed{\sum_i AP_i \wedge m_i a_i = M_A^a + M_A^V = M_A^{EXT}}$$

M_A^{EXT}: MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AD A

↓ derivando rispetto a t

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d(m v_G)}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = m \frac{d v_G}{dt} = m a_G$$

accelerazione baricentro

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d\left(\sum m_i v_i\right)}{dt} = \sum_i m_i \frac{d v_i}{dt} = \sum m_i a_i$$

↓ ricordando [2]

$$\boxed{R^{EXT} = R^A + R^V = m a_G}$$

1ª EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA

TEOREMA DEL BARICENTRO

definendo un legame causa/effetto il moto traslatorio o equivalentemente il baricentro del sistema si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa del sistema e in esso fossero concentrate tutte le F^{EXT}

estensione della legge di NEWTON al moto di sistemi

- La Q di un sistema isolato non soggetto a F^{EXT} è costante nel tempo (CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO)
- Il baricentro di un sistema isolato si muove di moto rettilineo uniforme o in particolare è in quiete

N.B. Le F^{INT} non compaiono esplicitamente nell'equazione cardinale tuttavia in alcuni casi giocano un ruolo importante

N.B. La 1ª EQ. CARDINALE non permette di determinare il moto del baricentro ma solo in casi particolari (in cui il moto di G è indipendente da F^{INT})

Partendo da:

$$\underbrace{m_i a_i = F^{EXT}}\ = F_i + \phi_i \qquad (1)$$

scegliendo A polo arbitrario allora

$$\underbrace{\sum_i = AP_i \wedge m_i a_i}_{\text{caratterizzazione introducendo il momento delle quantità di moto o momento angolare}} = M_A^{EXT} = M_A^{AT} + M_A^{V} \qquad (3)$$

$$K_A = \sum AP_i \wedge m_i v_i \qquad \text{(sistemi discreti)}$$

$$K_A = \int_{\mathbb{B}} AP \wedge \rho v \, d\tau \qquad \text{(sistemi continui)}$$

Utilizzando K_A otteniamo risolvendo (3) per scelte opportune del polo arbitrario A (o fisso o coincidente col baricentro G):

$$(4) \quad \boxed{M^{EXT} = \frac{dK_A}{dt}} \longrightarrow \text{relazione causa effetto per il moto rotatorio}$$

In particolare K_A assumerà espressione "semplice" per corpi rigidi che per scelte opportune di A (ad es: $A \equiv G$) assume

$$\boxed{K_G = I_G\, \omega} \qquad \text{per } A \equiv G$$

I_G → matrice di inerzia; ω → velocità angolare

Le eq. cardinali sono C.N. per un qualunque sistema (problema di moto) e nel caso di corpi rigidi sono anche C.S. a descrivere il moto. Infatti il n° di gradi di libertà di 1 C.R. è 6 e le eq. cardinali sono 6 eq. scalari indipendenti sufficienti a determinare 1 grado di libertà.

16

quindi:

$$\boxed{M_A^{EXT} = \frac{dK_A}{dt} + v_A \wedge Q}$$

2ª EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA

Valida $\forall$ sistema rigido e $\forall$ polo

disponendo dell'arbitrarietà di A $\Rightarrow$ $A \equiv G$ oppure, se $\exists$ un punto fisso O che si mantiene fisso durante il moto.

si annulla $v_A \wedge Q$

$$\begin{cases} \rightarrow \text{se } A \equiv G & v_A = v_G \quad v_A \wedge Q = v_G \wedge m v_G = 0 \\ \rightarrow \text{se } A \equiv O & v_A = v_O = 0 \quad v_A \wedge Q = 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{M_G^{EXT} = \dfrac{dK_G}{dt}} \\[2ex] \boxed{M_G^{EXT} = \dfrac{dK_O}{dt}} \end{array}\right\} \text{CASI PARTICOLARI}$$

OSSERVAZIONE: Le EQUAZIONI CARDINALI dipendono esclusivamente dai vettori caratteristici del sistema di forze considerato (R^{EXT}, M_A^{EXT}).

$\downarrow$

quindi i sistemi di forze equivalenti forniscono la medesima risposta dinamica.

N.B. Le EQUAZIONI CARDINALI sono sempre NECESSARIE ma NON SUFFICIENTI a determinare il moto di un sistema generico (non compaiono F^{INT} che sono un sistema equilibrato $R^I = M^I = 0$). Invece per i sistemi rigidi le eq. cardinali saranno necessarie e sufficienti a determinare i moti rigidi scegliendo opportunamente il punto solidale A o fisso o $\equiv G$ l'espressione diventa:

$$\boxed{K_A = I_A \, \omega} \longrightarrow \text{per un corpo rigido}$$

↳ prendendo la 2ª EQ. CARDINALE per scelte opportune di A

$$M_A^{EXT} = \frac{dK_A}{dt} = \frac{d(I_A \omega)}{dt} = I_A \frac{d\omega}{dt}$$

→ matrice inerzia: resistenza del corpo alla $\Delta\omega$

cost nel moto considerato

acc angolare

$$\boxed{M_A^{EXT} = I_A \frac{d\omega}{dt}}$$

$$K_A = \sum_{k,l=1}^{3} I_{kl} \, \omega_l \, \vec{e}_k = \underline{\underline{I}}_A \, \vec{\omega}$$

MATRICE DI INERZIA SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA quindi DIAGONALIZZABILE utilizzando una terna di autovettori di I_A detta TERNA PRINCIPALE DI INERZIA se in più calcolati rispetto a G sono detti CENTRALI

OSSERVAZIONE: Nella derivazione della II eq. cardinale abbiamo fatto l'ipotesi che il polo A fosse solidale al C.R. Cosa fare se voglio calcolare K rispetto ad un punto B ($\neq A$) non solidale al C.R. (es: punto di contatto disco)

USO la FORMULA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI ANGOLARI

$$K_B = \sum_h BP_h \wedge m_h v_h$$

$$= BP_h = P_h - B = P_h - A + A - B \quad [\text{con } A \text{ solidale}]$$

$$= AP_h + BA$$

$$= \underbrace{\sum AP_h \wedge m_h v_h}_{= K_A} + BA \wedge \underbrace{\sum_h m_h v_h}_{= Q}$$

$$\boxed{K_B = K_A + \underbrace{BA \wedge Q}_{= 0 \iff BA // v_G}}$$

$Q \to m v_G$

$K_A \to$ punto solidale al C.R.

→ per i corpi rigidi della K_G:

$$K_G = I_G \omega$$

$$\boxed{\dot{K}_G = \frac{dK_G}{dt} = I_G \dot{\omega} + \omega \wedge I_G \omega}$$

derivo:

$$\begin{cases} \dot{x}_G = \dot{x} + \frac{l}{2}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} \\ \dot{y}_G = +\frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta\,\dot{\vartheta} \end{cases}$$

derivo ancora:

$$\begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{x} - \frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{l}{2}\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} \\ \ddot{y}_G = \frac{l}{2}\cos\dot{\vartheta}^2 + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta\,\ddot{\vartheta} \end{cases}$$

Adesso siamo in grado di proiettare le due equazioni sugli assi

$$\begin{cases} G) \quad +kx\frac{l}{2}\cos\vartheta - \Phi_A\frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta = \frac{ml^2\ddot{\vartheta}}{12} \quad (\cdot\vec{k}) \\ \cdot\vec{i}) \quad -kx = m\ddot{x}_G \\ \cdot\vec{j}) \quad -mg + \Phi_A = m\ddot{y}_G \end{cases}$$

Esaminiamo la condizione STATICA

$$-kx\vec{i} - mg\vec{j} + \vec{\Phi}_A\vec{j} = 0$$

$$\begin{cases} G) \quad +kx\frac{l}{2}\cos\vartheta - \Phi_A\frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta = 0 \quad (\cdot\vec{k}) \\ \cdot\vec{i}) \quad -kx = 0 \\ \cdot\vec{j}) \quad -mg + \Phi_A = 0 \end{cases}$$

Cerco le posizioni di equilibrio:

$\Phi_A = mg$

$x = 0, \quad \operatorname{sen}\vartheta = 0$

$\{P_1(x=0, \vartheta=0) \quad P_2(x=0, \vartheta=\pi)\}$

Sono posizioni in cui $A \equiv O$ e l'asta o è diretta verso il basso o è diretta verso l'alto quindi ho 2 posizioni di equilibrio

Quindi alle infinite soluzioni delle altre equazioni ho queste 2 condizioni di equilibrio statico

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 131 di 238

→ Scelgo il polo C (così ottengo un'equazione pura)

$$C) \quad -mgR + M \underbrace{-Ky}_{\text{FORZA}} \cdot \underbrace{R}_{\text{braccio}} = \frac{3}{2} mR^{\cancel{2}} \frac{\ddot{y}}{\cancel{R}}$$

Applico il teo di Huygens-Steiner

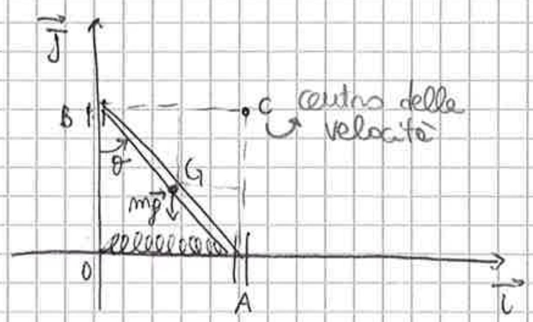
$$I_C = I_G + mR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

$$\begin{cases} \Phi_{cx} = KR \\ \Phi_{cy} = m\ddot{y} + Ky + mg \\ \Phi_c = \Phi_c(y, \dot{y}, t) \end{cases}$$

la reazione vincolare essendo un'incognita per determinarla devo conoscere la posizione, la velocità e il tempo

---

Es: ASTA OMOGENEA DI MASSA m e lunghezza l



Vincoli lisci ⇒ No attriti

⇓

Φ_A → direz. orizzontale

Φ_B → direz. verticale

$$\vec{\Phi}_A = \Phi_A \vec{J}$$

$$\vec{\Phi}_B = \Phi_B \vec{i}$$

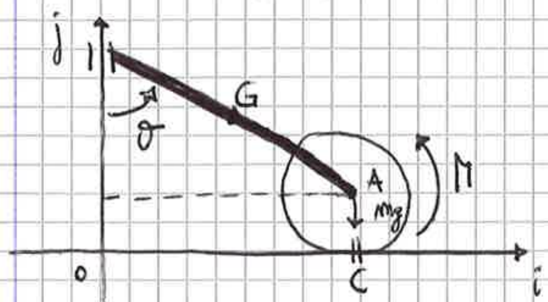
$$\cdot \vec{i}) \quad -Kl \sin\theta + \Phi_B = m\ddot{x}_G$$

$$\cdot \vec{J}) \quad -mg + \Phi_A = m\ddot{y}_G$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 133 di 238

Es: SISTEMA NON RIGIDO costituito da un disco m, R e da un'asta m, l

[quindi devo avere più equazioni globali rispetto a un corpo rigido nel piano che ne ha 3.]



$$\vec{\Phi}_B = \Phi_B \vec{i}$$

$$\vec{\Phi}_C = \Phi_{Cx} \vec{i} + \Phi_{Cy} \vec{j}$$

$$\vec{v}_A = \underset{0}{\underset{\parallel}{v_G}} + \dot{\varphi} \vec{K} \wedge \vec{CA}$$

$$v_A = l \cos\dot{\theta} \vec{i}$$

$$l \cos\theta \dot{\theta} \vec{i} = R \dot{\varphi} \vec{i}$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{l}{R} \cos\theta \dot{\theta}$$

Scrivo le equazioni globali

$\cdot \vec{i})$ $\quad \Phi_B + \Phi_{Cx} = m \ddot{x}_A + m \ddot{x}_G$

$\cdot \vec{j})$ $\quad \Phi_{Cy} - 2mg = m \ddot{y}_G$

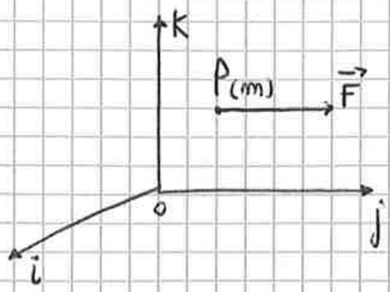
$C\circlearrowleft)$ $\quad M + mg \frac{l}{2} \operatorname{sen}\theta - \Phi_B (R + l\cos\theta) = \left(\frac{ml^2}{3} + mR^2\right)\ddot{\theta} + \frac{3}{2} mR^2 \ddot{\varphi}$

Queste 3 equazioni non ci bastano perché abbiamo 3 equazioni e 4 incognite quindi aggiungo una quarta equazione che è indispensabile perché il corpo non è rigido e considero solo il disco

$A\circlearrowleft)$ (solo disco) $\quad M + \Phi_G R = \frac{mR^2}{2} \ddot{\varphi}$

Con queste 4ª equazione siamo in grado di determinare il moto

ESERCIZI SU CAMPI FORZE CONSERVATIVE



$$\vec{F} = \vec{F}(P) = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

POTENZIALE

$$U(x, y, z)$$

$$\vec{F} = \text{grad } U$$

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

In dominio semplicemente connesso c. s. per $\vec{F}$ conservativo è che:

$$dL = \vec{F} dP = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU$$

→ Se $\vec{F}$ = cost ⇒ non dipende da v, t, spostamento

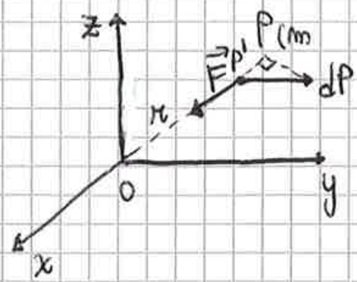
$$\Rightarrow \vec{F} = F_x^{(0)} \vec{i} + F_y^{(0)} \vec{j} + F_z^{(0)} \vec{k}$$

allora ∃ una funzione U il cui ∇ sia $\vec{F}$

$$U(x, y, z) = F_x^{(0)} x + F_y^{(0)} y + F_z^{(0)} z + \text{cost}$$

↳ funzioni U che vanno bene sono ∞

FORZE CENTRALI (conservative)



$\vec{F} = \Psi(r)\, \vec{u}$

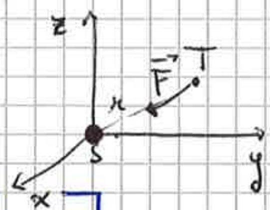
$\vec{u} = \text{vers}\, \vec{OP}$

$dL = \vec{F}\, d\vec{P} = \Psi(r)\vec{u}\, d\vec{P}$

$= \Psi(r)\, \vec{u} \cdot d\vec{PP'} = \Psi(r)\, dr$

$\Rightarrow \boxed{U(r) = \int \Psi(r)\, dr}$

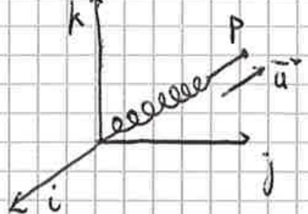
FORZA DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE



$F = -\gamma \dfrac{Mm}{r^2}\, \vec{u}$

$$\boxed{U(r) = \int -\gamma \frac{Mm}{r^2}\, dr + \gamma \frac{Mm}{r} + \text{cost}}$$

FORZA ELASTICA FISSA AD UN PUNTO FISSO



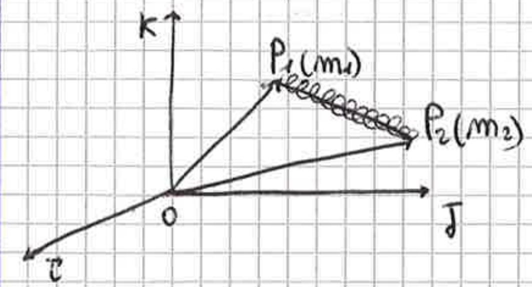
molla ideale con $r_0 = 0$

$F = -K\vec{OP}$ con $K>0$

$F = -K\, r\vec{u}$

$$\boxed{U(r) = \int -K r\, dr = -\frac{K r^2}{2} + \text{cost}}$$

FORZE ELASTICHE TRA PUNTI MOBILI P_1, P_2, del SISTEMA



$$\vec{F_1} = -k\overrightarrow{P_2P_1}$$
$$\vec{F_2} = -k\overrightarrow{P_1P_2}$$

per il principio di azione e reazione che sono uguali e contrarie

NON CONSERVATIVE INDIVIDUALMENTE
solo LA COPPIA è CONSERVATIVA

$$dL = \vec{F_1}\, d\vec{P_1} + \vec{F_2} \cdot d\vec{P_2} = -k\overrightarrow{P_2P_1} \cdot d\vec{P_1} - k\overrightarrow{P_1P_2}\, d\vec{P_2}$$
$$= -k\, \overrightarrow{P_2P_1}\left(d\vec{P_1} - d\vec{P_2}\right)$$

$d\vec{P_1}$ = differenziale di OP_1

$d\vec{P_2}$ = differenziale di OP_2

$OP_1 - OP_2 = P_1P_2$

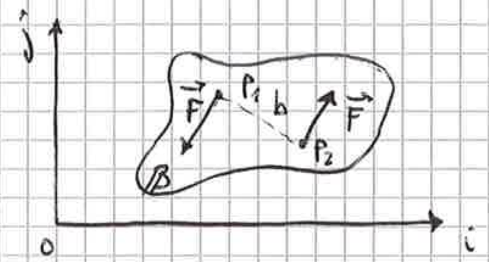
$$\Rightarrow dL = -k\,\overrightarrow{P_2P_1} \cdot d(\overrightarrow{P_2P_1}) = -k r\, dr$$

$$\boxed{U = -\frac{k}{2} r^2 + cost}$$

ES: sistema rigido piano a cui è applicata una coppia (esempio di conservatività)

$M > 0$ momento cost $\Rightarrow M = cost$

applico una coppia antioraria



θ = angolo di rotazione

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{K}$$

$$dL = \vec{F}\,d\vec{P_1} - \vec{F}\,d\vec{P_2}$$

$$= F \cdot (\vec{v_1} - \vec{v_2})\,dt$$

$$= F \cdot (\cancel{v_1} - \cancel{v_1} - \omega \wedge P_1P_2)\,dt$$

$$= F \cdot (-\dot{\theta}\vec{K} \wedge \vec{P_1P_2})\,dt = +\underbrace{F b}_{M}\,\underbrace{\dot{\theta}\,dt}_{d\theta} = M d\theta$$

$$\Rightarrow dL = M d\theta \Rightarrow$$

$$U = \int M d\theta = M\theta + cost$$

N.B. se coppia non cost

ovvero $M = M(\theta)$

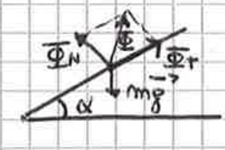
$$\boxed{U = \int M\theta\, d\theta}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 238

VINCOLI IDEALI → LAVORO EFFETTIVO $\delta L = \sum_i F_i \cdot dP_i$ → SPOST EFFETTIVO

→ LAVORO VIRTUALE $\delta L = \sum_i F_i \cdot \delta P_i$ → SPOST VIRTUALE

Es: considero un piano inclinato α



Φ = reazione vincolare può essere scomposta in
Φ_T = componente tangenziale
Φ_N = componente normale al piano

$$\vec{\Phi} = \Phi_T \vec{t} + \Phi_N \vec{m}$$

Φ_T ↓ ATTRITO; $\vec{t}$ tangente alla superficie

Se in particolare il punto non è vincolato sulla superficie ma sono in presenza di VINCOLO UNILATERO

$$\phi \cdot m = \phi_m \geq 0$$ → contempla la possibilità che il punto si stacchi dalla superficie

Mentre nel caso VINCOLO BILATERO Φ_m può assumere qualsiasi valore (positivo o negativo)

VINOLO LISCIO

Si suppone che il coefficiente d'attrito sia nullo

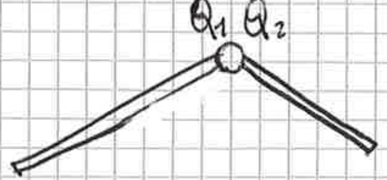
$$\boxed{|\phi_T| = 0}$$

⇒ ovvero la reazione vincolare è normale alla superficie

$$\Phi = \lambda \nabla f \qquad \text{con } f(x,y,z) = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 145 di 238

◊ Es: CERNIERA MOBILE (es: interna a sistemi articolati)



per la definizione di vincolo:

$$\delta Q_1 = \delta Q_2 \longrightarrow \text{spostamento virtuale}$$

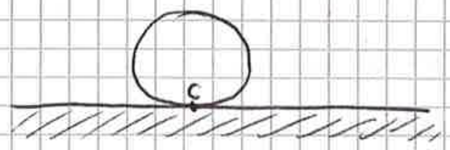
$$\delta L^v = \phi_1 \cdot \delta Q_1 + \phi_2 \cdot \delta Q_2$$

$$= \delta Q_1 \cdot \underbrace{(\phi_1 + \phi_2)}_{\overset{\parallel}{0}}$$

per il principio di azione e reazione

$$\Rightarrow \delta L^v = 0$$

◊ **Es**: VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO



$$v_c = 0$$

$$\delta C = 0$$

$$\delta L^v = \phi \cdot \underset{\overset{\parallel}{0}}{\delta C} = 0$$

$$\delta L^v = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 147 di 238

quindi in questo caso il TEO. dell' E CINETICA diventa:

$$dT = dL^A + \underbrace{dL^V}_{=0}$$

$$\boxed{dT = dL^A}$$

diventa un' equazione pura del moto senza Φ ma solo le F^{ATTIVE}

⇝ ritornando alla statica per cui:

$$F = F(P^*, 0) = 0$$

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

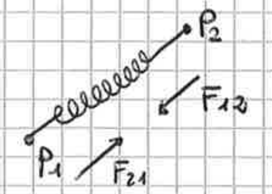
1ª $\boxed{R^{EXT} = 0}$

2ª $\boxed{M_A^{EXT} = 0}$

SISTEMA DELLE F^{INT} EQUILIBRATO

Per un generico sistema tali equazioni non sono sufficienti per l'equilibrio.

✧ Es: MOLLA



$F_{21} = -F_{12}$ pur essendo il sistema di forze equilibrato la molla non è in equilibrio (infatti nulla ci garantisce che in ogni suo punto vi siano forze nulle)

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (P.L.V)

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una configurazione C di un sistema soggetto a vincoli ideali sia di equilibrio è:

RELAZIONE PURA DI EQUILIBRIO
condizione che caratterizza l'equilibrio del sist. in funzione delle F^{ATTIVE} (F^{VIN} = incognite)

$$\boxed{\delta L^A \leq 0} \qquad \forall\, \delta P \in C$$

C → configurazione di equilibrio

in particolare

$$\boxed{\delta L^A = 0} \qquad \forall\, \delta P \text{ rev. a partire da } C$$

LAVORO DI 1 SISTEMA DI FORZE AGENTI SU UN SIST OLONOMO

P_i = sistema n punti con $i = 1, \dots, n$

N = coordinate libere o lagrangiane $(q_1, \dots, q_N)$

LAVORO VIRTUALE

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta P_i$$

δP_i ↑ SPOSTAMENTO VIRTUALE

$$\delta P_i = \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h$$

infatti P_i è esprimibile attraverso le N coordinate lagrangiane

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} F_i \left(\sum_{h=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{N} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{\delta P_i}{\partial q_h} \right)}_{Q_h} \delta q_h$$

Q_h = componente lagrangiana delle FORZE ATTIVE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 151 di 238

STATICA DI SISTEMI OLONOMI SOGGETTI A VINCOLI IDEALI BILATERI

Secondo il PLV.

$$\delta L^A = 0$$ nelle condizioni di equilibrio

$$\delta L^A = \sum_{k=1}^{N} Q_k \, \delta q_k$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} Q_k \, \delta q_k = 0$$

essendo spostamenti arbitrari con la scelta opportuna

$$\boxed{Q_k = 0}$$

P.L.V per un sistema olonomo
Le posizioni di equilibrio sono quelle per cui:

$$\boxed{Q = Q(q) = 0}$$

CONFIGURAZIONI DI VINCOLI UNILATERI E IDEALI

CONFIGURAZIONI ORDINARIE

$$Q(q) = 0$$

(in cui δP virtuali rev. ∈ configurazioni ammissibili costitutite)

CONFIGURAZIONI DI CONFINE

$$\begin{cases} Q_h \leq 0 & \text{se } \delta q_h \geq 0 \\ Q_h \geq 0 & \text{se } \delta q_h \leq 0 \\ Q_h = 0 & \text{se } \delta q_h \gtrless 0 \end{cases}$$ (spostrev

(in cui δP sono rev. perciò PLV $\rightarrow$ $\delta L^A \leq 0$ e almeno una delle coordinate libere ha spostamento virtuale determinato dal vincolo)

SISTEMI OLONOMI SOGGETTI A FORZA PESO

Conv. Fattiva

Potenziale

$$U = -m_{TOT}\, g\, \underbrace{z(G)}_{}$$

quota baricentro

per P.L.V $\quad \delta U = -mg\,\delta z(G) \leq 0$

E dal TEO di STAZIONARIETÀ DEL POTENZIALE si verifica la validità del TEO di TORRICELLI che afferma che le conf. di equilibrio sono tali che la quota del G risulti stazionaria

$$z(G) = \max \text{ o } \min$$

$\Rightarrow$ equilibrio stabile.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 155 di 238

C) $\underset{\text{xké errore}}{-M} + mg\frac{R}{2}\sqrt{3} - \Phi_A R\sqrt{3}$

⇝ per il disco

$$\begin{cases} \vec{K}_c = \frac{3}{2} m R^2 \vec{\omega} \\ \vec{v}_B = \underset{0}{\vec{v}_c} + \omega \vec{k} \wedge \vec{CB} \\ \dot{x}\vec{i} = +R\omega\vec{k}\wedge\vec{j} = -R\omega\vec{i} \\ \vec{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R} \\ \Rightarrow K_c = -\frac{3}{2} m R \dot{x} \end{cases}$$

⇝ per l'asta

$$\begin{cases} \vec{K}_c^{(asta)} = \underset{0 \text{ xké l'asta trasla}}{\vec{K}_G^{(asta)}} + \vec{CG} \wedge m\vec{v}_G \\ \vec{K}_c^{(asta)} = -m\dot{x}\frac{R}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{C) = -2mR\ddot{x} = -\frac{3}{2} mR\ddot{x} - m\frac{R}{2}\ddot{x}}$$

$$\boxed{B)\ (\text{disco}) \quad -M + \Phi_{cx} R = \underset{\text{xké } \omega \text{ negativa}}{-}\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{\ddot{x}}{R}}$$

↳ baricentro

→ separo il sistema globale

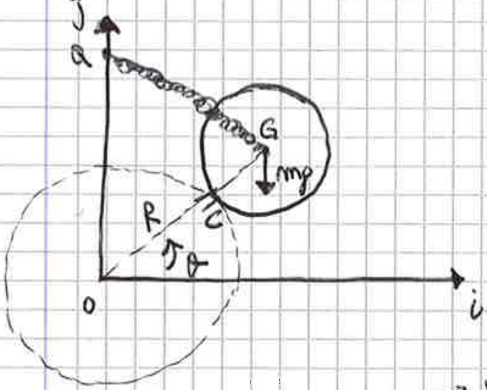
da B) ricavo $\Phi_{cx} = -\frac{m\ddot{x}R}{2}\cdot\frac{1}{R} + \frac{M}{R}$

$$\Phi_{cx} = \frac{M}{R} - \frac{m}{2}\ddot{x}$$

e la inserisco nella C)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 157 di 238

Es: Rotolamento puro di un disco m, r



$\vec{QO} = 2R$

 = vincolo

$$\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_C}_{=0} + \dot{\varphi}\,\vec{K} \wedge \vec{CG}$$

$\dot{\varphi}$ → velocità angolare

$\vec{\tau}$ = versore tangente in cui è orientata la velocità di G

$$v_G = (R+r)\,\dot{\theta}\,\vec{\tau} = -r\dot{\varphi}\,\vec{K} \wedge \vec{m} = r\dot{\varphi}\,\vec{\tau}$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = + \frac{R+r}{r}\,\dot{\theta}}$$

$+$ → entrante

FORZA ELASTICA

$$\vec{F}_K = -K\,\vec{QG}$$
$$= -k(x_G - \underbrace{x_Q}_{=0})\vec{i} - k(y_G - y_Q)\vec{j}$$
$$= -k(R+r)\cos\theta\,\vec{i} + k\left[2R - ((R+r)\operatorname{sen}\theta)\right]\vec{j}$$

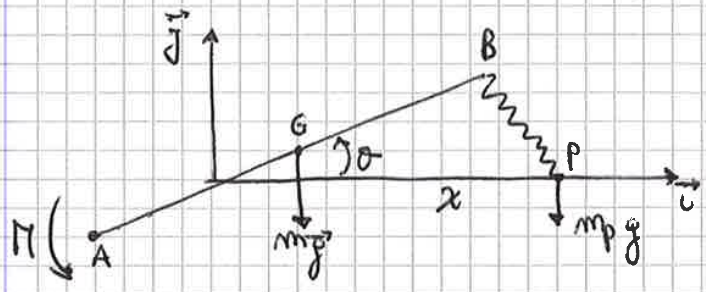
$\vec{i}$) $-K(R+r)\cos\theta + \Phi_{cx} = m\ddot{x}_G$

$\vec{j}$) $+k\left[2R - (R+r)\operatorname{sen}\theta\right]\vec{j} - mg + \Phi_{cy} = m\ddot{y}_G$

↻) $-mg\,r\cos\theta + k\,\cancel{(R+r)}\cos\theta\; r\operatorname{sen}\theta + k\left[2R - \cancel{(R+r)\operatorname{sen}\theta}\right] r\cos\theta = \frac{3}{2} m r^2 \ddot{\varphi}$, $\ddot{\varphi} = \frac{R+r}{r}\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad = \frac{3}{2} m r (R+r)\ddot{\theta}$

Es: SISTEMA NON RIGIDO : asta m, ℓ, punto materiale m_p



$N = 2 \quad \begin{cases} q_1 = \theta \\ q_2 = x \end{cases}$

incognite: $x, \theta, \Phi_{ox}, \Phi_{oy}, \Phi_p$

PUNTO

$\cdot \vec{i} \circlearrowleft \quad F - k\left(x - \frac{2}{3}\ell\cos\theta\right) = m_p \ddot{x}$

$\cdot \vec{j} \circlearrowleft \quad -m_p g + \Phi_p \, k \frac{2}{3} \ell \,\text{sen}\theta = 0$

ASTA

$\cdot \vec{i} \circlearrowleft \quad \Phi_{ox} - k\left(\frac{2}{3}\ell\cos\theta - x\right) = m\ddot{x}_G \qquad x_G = \frac{\ell}{6}\cos\theta$

$\cdot \vec{j} \circlearrowleft \quad \Phi_{oy} - mg - \frac{2}{3} k \ell \,\text{sen}\theta = m\ddot{y}_G$

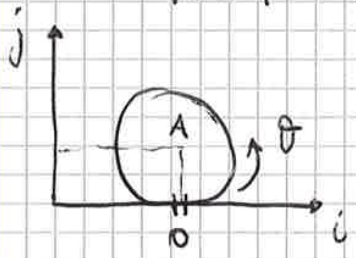
$O \circlearrowleft \quad M - mg\frac{\ell}{6}\cos\theta - k\left(x - \frac{2}{3}\ell\cos\theta\right)\frac{2}{3}\ell\,\text{sen}\theta - \frac{2}{3}k\ell\,\text{sen}\theta \cdot$

$\cdot \frac{2}{3}\ell\cos\theta = \left(m\frac{\ell^2}{12} + m\frac{\ell^2}{36}\right)\ddot{\theta}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 161 di 238

Es: DISCO OMOGENEO m, R puro rotolamento

$N = 1 \quad q_1 = \{\theta\}$



TEOREMA KONIG

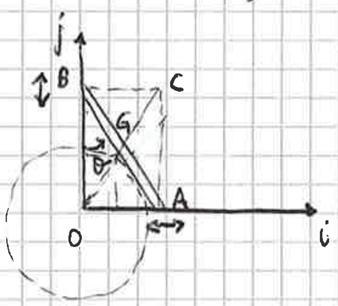
$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$$v_A = \dot{x}_A = \underset{\overset{\parallel}{0}}{v_C} + \underset{\overset{\parallel}{\dot{\theta} K}}{\omega} \wedge \overline{CA} = -\dot{\theta} R \vec{i}$$

$$I_G = \frac{mR^2}{2}$$

Sostituisco $T = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$

Es: asta m, l



$N = 1 \quad q_1 = \theta \quad AB = l \quad \omega = \dot{\theta} \vec{K}$

TEOREMA KONIG

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$v_G^2 = \dot{x} + \dot{y}^2 = \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2$$

Sostituisco

$$T = \frac{1}{2} m \frac{l^2}{3} \dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left\{ m\dot{x}^2 + ml\cos\theta\,\dot{x}\dot{\theta} + \frac{ml^2}{4}\dot{\theta}^2 \right\} + \frac{1}{2}\frac{ml^2}{12}\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left\{ \underbrace{m}_{a_{11}}\dot{x}^2 + \underbrace{ml\cos\theta}_{2a_{12}}\,\dot{x}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{ml^2}{3}}_{2a_{22}}\dot{\theta}^2 \right\}$$

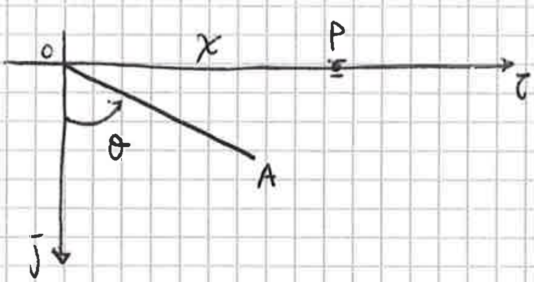
↳ la riscrivo per vincoli olonomi come

$$T = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{N} a_{hk}\,\dot{q}_h\,\dot{q}_k$$

$$\{a_{hk}\} = \begin{vmatrix} m = a_{11} & m\frac{l}{2}\cos\theta = a_{12} \\ m\frac{l}{2}\cos\theta = a_{21} & m\frac{l^2}{3} = a_{22} \end{vmatrix}$$

MATRICE DI MASSA

♦ **Es**: asta m, l punto $P(m_p)$ $N=2$ $\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \theta \end{cases}$

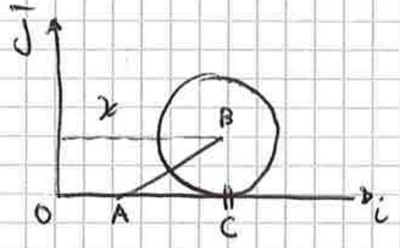


$$T = T^{asta} + T^{punto} = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_p\dot{x}^2$$

MATRICE DI MASSA

$$a_{h,k} = \begin{vmatrix} m_p & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} \end{vmatrix}$$

Es: disco m, R asta $m, 2R$

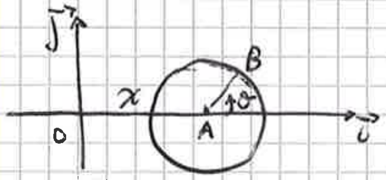


$$\begin{cases} N = 1 \\ q_1 = x \end{cases}$$

$$T = T^{asta} + T^{disco} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \cancel{T^{(R,G)}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T^{TOT} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{2} m \dot{x}^2 = \frac{5}{4} m \dot{x}^2$$

Es: SISTEMA GLOBALMENTE RIGIDO - DISCO m, R non omogeneo con $A \in x$ e $y_A = 0$ (puro rotolamento), $B\ (M)$



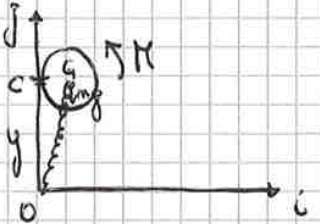
$$T = T^{punto} + T^{disco} = \frac{1}{2} M v_B^2 + \frac{1}{2} m \underset{v_A^2}{\underset{\parallel}{\dot{x}^2}} + \frac{1}{2} I_A \dot{\theta}^2$$

$$\begin{cases} x_B = x + R\cos\theta \\ y_B = R \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_B = \dot{x} - R\operatorname{sen}\theta\, \dot{\theta} \\ \dot{y}_B = R\cos\theta\, \dot{\theta} \end{cases}$$

$$v_B^2 = \dot{x}_B^2 - 2R\operatorname{sen}\theta\, \dot{x}\dot{\theta} + R\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left\{ (m + M)\dot{x}^2 - 2MR\operatorname{sen}\theta\, \dot{x}\dot{\theta} + \left(\frac{m}{2} + M\right) R^2 \dot{\theta}^2 \right\}$$

ES: DISCO m, R $\quad N = 1 \quad q_1 = y$



$$\vec{\omega} = \frac{\dot{y}}{R}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$$

angolo di rotazione $\theta = \frac{y}{R}$

$$U(y) = -mgy - \frac{k}{2}OG^2 + M\underbrace{\theta}_{=\frac{y}{R}} \longrightarrow \text{POTENZIALE COMPLESSIVO}$$

$$U(y) = -mgy - \frac{k}{2}OG^2 + M\underbrace{\theta}_{=\frac{y}{R}}$$

$$\begin{cases} x_G = R \\ y_G = y \end{cases}$$

$$OG^2 = y^2 + R^2$$

$$\Rightarrow U(y) = -mgy - \frac{k}{2}y^2 + M\frac{y}{R} + \text{Cost}$$

$$\frac{dU}{dy} = -mg - ky + \frac{M}{R} \quad \triangleright U = 0$$

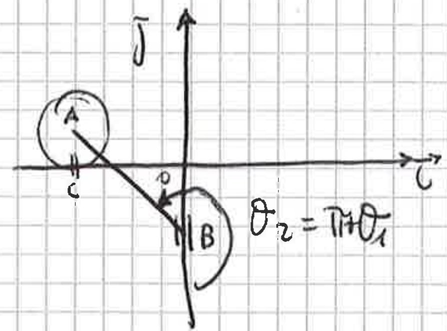
$$y^{\text{equilibrio}} = \frac{M}{kR} - \frac{mg}{k}$$

$\rightarrow$ per la stabilità

$$\frac{d^2U}{dy^2} = -k < 0$$

posizione unica ma instabile

posizione θ_2 $\longrightarrow$



$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} = mg\frac{l}{2}\cos\theta + \frac{Ml}{R}\sin\theta$$

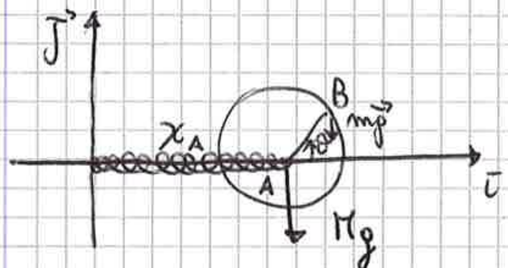
$\longrightarrow$ in θ_1, $\sin\theta$ e $\cos\theta > 0 \Rightarrow$ derivata positiva

quindi θ_1 = INSTABILE

$\longrightarrow$ in θ_2, $\sin\theta$ e $\cos\theta < 0 \Rightarrow$ derivata negativa

quindi θ_2 = STABILE

✧ Es: disco M, R, $y_A = 0$, $B(m)$ $\qquad N=2$ $\begin{cases} q_1 = x_A = x \\ q_2 = \theta \end{cases}$



$$U(x,\theta) = \text{pot disco} - \overbrace{mgR\sin\theta}^{\text{pot. B}} - \overbrace{\frac{k}{2}x^2}^{\text{pot molla}} + c$$

pot disco $= 0$ perché $y_A = 0$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgR\cos\theta \qquad x^2 = 0 \quad \cos^2\theta = 0$$

$P_1\ (x = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2})$
$P_2\ (x = 0,\ \theta = -\frac{\pi}{2})$
posizioni di equilibrio

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 171 di 238

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = -kx - \dfrac{k}{2} l \operatorname{sen}\theta = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = -mg\dfrac{l}{2}\operatorname{sen}\theta - \dfrac{k}{2} l \cancel{x} \cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{eq} = -\dfrac{l}{2}\operatorname{sen}\theta \\ -mg\dfrac{l}{2}\operatorname{sen}\theta - \dfrac{k}{2} l \left(\dfrac{l}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta\left(-mg - \frac{k}{2} l \cos\theta\right) = 0$$

→ se $\operatorname{sen}\theta = 0$

$$\underbrace{P_1(x=0,\ \theta=0) \quad P_2(x=0,\ \theta=\pi)}_{\text{POSIZIONI DI EQUILIBRIO}} \qquad [\exists \text{ sempre}]$$

→ se $\cos\theta = \dfrac{2mg}{Kl}$ N.B. $\cos\theta \leq 1$ $\Rightarrow$ $\underbrace{2mg \leq Kl}_{\text{CONDIZIONE DI } \exists}$

$$P_3 = \left(x = -\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta^*,\ \theta = \theta^*\right)$$

$$P_4 = \left(x = +\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta^*,\ \theta = -\theta^*\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -K$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} = -K\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mg\frac{l}{2}\cos\theta + k\frac{l}{2} x \operatorname{sen}\theta$$

$$\begin{cases} H(P_1) = K\dfrac{l}{2}\left(mg - K\dfrac{l}{2}\right) & \text{STABILE se } mg > \dfrac{Kl}{2} \\ H(P_2) < 0 & \text{NON STABILE} \\ H(P_{3,4}) > 0 & \text{se } \exists \text{ sono STABILI} \end{cases}$$

Casi particolari:

→ **CORPO RIGIDO NELLO SPAZIO** (ha 6° di libertà)

Le eq. cardinali sono 2 equazioni vettoriali ovvero 3+3=6 equazioni scalari

6 parametri liberi $N=6$ e 6 coordinate lagrangiane $\bar{q}=(q_1, ---, q_N)$

EQUAZIONI DI EULERO
$$\begin{cases} R^A + R^V = m\, a_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ M^A + M^V = \dfrac{dK_A}{dt} = \sum_k I_{A_k}\, \dot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \omega(q, \dot{q}) \wedge \underbrace{K_A(q, \dot{q})}_{I_A\, \omega(q, \dot{q})} \end{cases}$$

→ **CORPO RIGIDO NEL PIANO** $(N=3)$

$$\begin{cases} R_x^A + R_x^V = m\, \ddot{x}_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ R_y^A + R_y^V = m\, \ddot{y}_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ M_{A_z}^A + M_{A_z}^V = I_{A_z}\, \dot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{cases}$$

3 eq. scalari per i 3° di libertà

INTEGRALI PRIMI DEL MOTO

Una funzione $F(P_1, P_2, \dots, P_n, V_1, \dots V_n, t)$ è un **integrale primo** se il suo valore è costante nel tempo (F è CONSERVATIVA)

Dalle eq. cardinali possiamo in alcuni casi ottenere degli integrali primi. Il vantaggio è che gli integrali primi possono dare utili informazioni sul moto del sistema.

Dalle F^{EXT} e nulla

$$R^{EXT} \cdot e_J = 0 \longrightarrow \frac{dQ}{dt} e_J = 0$$ ovvero la quantità di moto si conserva

Se $R^{EXT} = 0$ (OVVERO SIST. ISOLATO) la Q si conserva.

Analogamente alla 2ª Eq. cardinale se è nulla la componente del momento risultante delle F^{EXT} rispetto ad A con $A \equiv G$ o $A \equiv O$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} K_A \cdot e_J = 0$$ $\Rightarrow$ si conserva il momento della quantità di moto

EQUAZIONI DI LAGRANGE

Per sistemi olonomi ad $N=1$ utilizzo il TEO dell'Ecinetica per ricavare l'equazione pura del moto.
Se ho più gradi di libertà uso le equazioni di Lagrange che ci permettono di descrivere i sistemi olonomi a N gradi di libertà soggetti a vincoli ideali e bilaterali (sia fissi che mobili) in termini di equazioni pure del moto.

Per un qualunque punto materiale vale la legge della dinamica

$$(A) \quad \vec{F} + \vec{\phi} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} - m\vec{a} + \vec{\phi} = 0$$

Ricordando che in statica un punto materiale è in equilibrio

$$\Leftrightarrow \quad \vec{F} + \vec{\phi} = 0$$

Introducendo la F d'inerzia agente sul punto

$$F_T = -ma \quad \text{(Forza di Trascinamento)}$$

$$(F + F_T) + \phi = 0$$

$$\underbrace{\text{interpreto l'equazione (A) come un'equazione della statica}}$$

PRINCIPIO DI D'ALAMBERT

Esso ci permette di passare da equazioni di equilibrio a quelle dinamiche inserendo tra le F agenti sul sistema tutte le forze di inerzia.

N.B. Le F di inerzia su tutti i punti del sistema non solo sui punti in cui sono applicate le forze.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 179 di 238

Se i vincoli sono bilateri l'eq. simb. della dinamica diventa

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} (F_i - m_i a_i) \cdot \delta P_i = 0}$$

Su un sistema olonomo soggetto a vincoli ideali e bilaterali sono definite N $\{q_1, \dots, q_N\}$ (COORD. LAGRANGIANE) indipendenti tra loro, invece i δP_i (spost. virtuali) sono dipendenti tra loro per effetto dei vincoli. Mentre δq_i sono spostamenti virtuali indipendenti:

δP_i	δq_i
SP. VIRTUALI dei PUNTI MATERIALI	SP. VIRTUALI DELLE COORD. LAGRANGIANE
dipendenti	indipendenti

quindi riscrivo δP_i come:

$$\delta P_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \delta q_k$$

con $\begin{cases} m = \text{punti materiali} \\ N = \text{coordinate libere} \end{cases}$

⇒ l'equazione della dinamica diventa

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} (Q_k - \tau_k) = \delta q_k = 0}$$

con $Q_k = \sum_i^m F_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ → FORZE GENERALIZZATE

con $\tau_k = \sum_i^m m_i a_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$ → componenti lagrangiane dell'opposto della F inerzia

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 181 di 238

Tali equazioni si possono riscrivere esplicitando $\ddot{q}_k$ in FORMA NORMALE per cui il problema di CAUCHY è definito accoppiando le N equazioni di Lagrange con 2N condizioni iniziali per le coordinate libere

FORMA NORMALE

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_k} = Q(q, \dot{q}, t) \\ q_k(t_0) = q_{k0} \\ \dot{q}_k(t_0) = \dot{q}_{k0} \end{cases}}$$

problema ben posto e soluzione ∃!

Le EQ. di LAGRANGE sono DETERMINISTICHE, per cui la conoscenza dell'atto di moto ad un dato istante (configurazione più velocità) permette di determinare il moto agli stati successivi.

Il poter scrivere le eq. di Lagrange in forma normale dipende dalla forma di T per un sistema olonomo soggetto a vincoli fissi:

$$\boxed{T = T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij} \, \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j}$$

$a_{ij}(q)$ elemento di $\underline{\underline{A}}$ = matrice di massa

- simmetrica
- definita positiva
- diagonalizzabile
- invertibile

con $a_{jk} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j} \dfrac{\partial P_i}{\partial q_k}$

$$\underbrace{\ddot{q} = A^{-1}\left[F(q, \dot{q}, t) + Q\right]}_{\text{moto sist. se } F_{\text{attive}} \text{ sono regolari}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 183 di 238

Non è possibile in genere risolvere analiticamente la soluzione delle N eq. di Lagrange. In alcuni casi la sua analisi ci permette di individuare gli integrali primi del moto (facilitando la ricerca della soluzione)

Se la lagrangiana non dipende esplicitamente da una coordinata libera si ha:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

ovvero: $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = cost$

definendo $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = P_k}$ MOMENTO CINETICO

Si ha che se L non dipende da q_k (ovvero $\boxed{q_k \text{ e CICLICA}}$)

Il P_k si conserva (ovvero è un integrale 1° del moto)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 185 di 238

STABILITÀ E ANALISI DEL MOTO

Partendo dalle equazioni di Lagrange scritte in forma normale, ricavando le accelerazioni lagrangiane $\ddot{q}_i(t)$, e identificando un vettore di stato

$$\bar{x} = \{x_j\} = \{q_i, \dot{q}_i\} \quad \text{con} \begin{cases} j = 1, \dots, 2N \\ i = 1, \dots, N \end{cases}$$

posso risolvere le N EQ. DI LAGRANGE (ODE del II ORDINE) come un sistema di 2N equazioni alle derivate ordinarie del I ORDINE

$$\left.\begin{cases} \dot{\bar{x}} = f(t, \bar{x}) \\ x(0) = \bar{x}_0 \leftarrow \text{CONDIZIONE NORMALE} \end{cases}\right\} \text{PROBLEMA DI CAUCHY}$$

→ Se il campo f è sufficientemente regolare (ovvero LIPSCHITZIANO), il problema di CAUCHY ammette soluzione locale unica. (per un t finito trovo un'unica soluzione)

→ In alcuni casi si può prolungare l'intervallo temporale ottenendo una soluzione globale (con $t \to +\infty$)

◆ RICERCA ANALITICA DELLA SOLUZIONE

Si effettua con metodi legati alla struttura del campo f

→ Se f è LINEARE : $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A(t)\bar{x} + \bar{b}(t) \\ \bar{x}(0) \end{cases}$

Si può ottenere la soluzione ESPLICITA

→ Se f è NON LINEARE: non si riesce a trovare la soluzione esplicita ma una soluzione APPROSSIMATA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 187 di 238

STABILITÀ IN SENSO DI LIAPUNOV

Un punto fissato x_e di equilibrio è di equilibrio stabile se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \underbrace{\| x_0 - x_E \|}^{\text{condizione iniziale}} < \delta(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\| x(t) - x_e \|}_{\text{soluzione}} < \varepsilon \qquad \forall t > 0$$

[dove $\| \; \|$ = norma che rappresenta una distanza]

N.B. Se non è così $\Rightarrow$ punto è INSTABILE

Se in più le traiettorie non sono solo confinate in un intorno di x_e ma la soluzione finisce su x_e allora si parla di STABILITÀ ASINTOTICA

ovvero se $\lim_{t \to +\infty} \| x(t) - x_e \| = 0$

Queste definizioni sono applicabili solo conoscendo la soluzione del moto.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 189 di 238

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 191 di 238

Mi permettono di ricavare le equazioni del moto

$$\frac{d}{dt}\left(a(q)\dot{q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(a(q)\dot{q}\right)}_{\substack{\parallel \\ (a'(q)\dot{q})\dot{q} + a(q)\ddot{q}}} - \frac{1}{2}\,a\,a'(q)\dot{q}^2 - U'(q) = 0$$

ho un'equazione del tipo

$$\boxed{\underbrace{a(q)\ddot{q}}_{A} + \underbrace{\frac{1}{2}\,a\,a'(q)\dot{q}^2}_{B} - \underbrace{U'(q)}_{C} = 0}$$

EQUAZIONE DEL MOTO NON LINEARE (non risolvibile)

ricavo da: $q(t) = q_e + \varepsilon\,\eta(t)$

$$\begin{cases} \dot{q} = (q_e \dot{+} \varepsilon\eta) = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\dot{q}_e} + (\varepsilon\dot{\eta}) = \varepsilon\dot{\eta} \quad \text{punto di equilibrio} \\ \ddot{q} = \varepsilon\ddot{\eta} \end{cases}$$

Considero i tre pezzi A, B, C, sostituisco $\dot{q}$ e $\ddot{q}$, sviluppo in serie di Taylor in un intorno di q_e, li metto insieme limitandomi all'ordine ε (lineare) e scrivo l'equazione del moto non lineare come

$$\boxed{a(q_e)\ddot{\eta} = U''(q_e)\,\eta}$$

EQUAZIONE LINEARIZZATA DEL MOTO

2

- $\boxed{U''(q_e) > 0}$ $\Leftrightarrow$ **MOTO APPROSSIMATO IPERBOLICO**

la perturbazione $\eta(t)$ cresce nel tempo quindi l'equazione linearizzata perde di significato perché $\boxed{q - q_e = \varepsilon\eta}$ per cui se $\eta \uparrow \Rightarrow q - q_e \uparrow$ cioè mi allontano da q_e. Per cui salta la validità dello sviluppo di Taylor nell'intorno di q_e

◆ LINEARIZZAZIONE ATTRAVERSO T e U

Si può linearizzare considerando un'approssimazione dell'T e del U (con $q_e = 0$) e sviluppando gli sviluppi di Taylor intorno q_e.

$$U(q) = \underbrace{U(0)}_{\substack{= 0 \\ \text{(potenziale definito a meno di 1 cost)}}} + \underbrace{U'(0)}_{\substack{= 0 \\ \text{(Teo stazionarietà potenziale)}}} q + \frac{1}{2} U''(0) \underbrace{q^2}_{(q - \underbrace{q_e}_{=0})^2 = q^2} + \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{U(q) \sim \frac{1}{2} U''(0)\, q^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T \sim \frac{1}{2} a(0)\, \dot{q}^2}$$

1° termine dello sviluppo di Taylor

- $\boxed{U''(q_e) > 0}$ $\Leftrightarrow$ **MOTO APPROSSIMATO IPERBOLICO**

la perturbazione $\eta(t)$ cresce nel tempo quindi l'equazione linearizzata perde di significato perchè $\boxed{q - q_e = \varepsilon \eta}$ per cui se $\eta \uparrow \Rightarrow q - q_e \uparrow$ cioè mi allontano da q_e. Per cui salta la validità dello sviluppo di Taylor nell'intorno di q_e

---

LINEARIZZAZIONE ATTRAVERSO T e U

Si può linearizzare considerando un'approssimazione dell'T e del U (con $q_e = 0$) e sviluppando gli sviluppi di Taylor intorno q_e.

$$U(q) = \underbrace{U(0)}_{\substack{0 \\ \left(\text{potenziale definito} \atop \text{a meno di 1 cost}\right)}} + \underbrace{U'(0)}_{\substack{0 \\ \left(\text{Teo stazionarietà} \atop \text{potenziale}\right)}} q + \frac{1}{2} U''(0) \underbrace{q^2}_{(q - \underbrace{q_e}_{0})^2 = q^2} + \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{U(q) \sim \frac{1}{2} U''(0) q^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T \sim \frac{1}{2} \underbrace{a(0)}_{1^\circ \text{ termine dello sviluppo di Taylor}} \dot{q}^2}$$

CASO SISTEMI OLONOMI CONSERVATIVI CON VINCOLI FISSI ED IDEALI CON N GRADI DI LIBERTA'

$$q_k(t) = q_k^e + \varepsilon \eta_k(t) \qquad \text{con } k = 1, \dots, N$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sum_{ij} a_{ij}(q^e + \varepsilon \eta) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j$$

poichè

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \varepsilon \dot{\eta}_i \\ \ddot{q}_i = \varepsilon \ddot{\eta}_i \end{cases}$$

$$T = \frac{\varepsilon^2}{2} \dot{\eta} \underset{\downarrow}{\underline{\underline{A}}} (q^e + \varepsilon \eta) \dot{\eta}$$

MATRICE DI MASSA

$$U = U(q) = U(q^e + \varepsilon \eta)$$

calcolo l'equazione di lagrange

$$L = T + U$$

e ottengo che:

vettore di N componenti

$$\boxed{A(q_e) \ddot{\eta} = B(q_e) \eta}$$

SISTEMA DI EQUAZIONI LINEARIZZATE

MATRICE DI MASSA — HESSIANA DI U

$$\left(\text{con coefficienti: } b_{ij}(q_e) = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q_e} \right)$$

ESERCITAZIONE SULLE EQUAZIONI DI LAGRANGE

RICHIAMI TEORICI

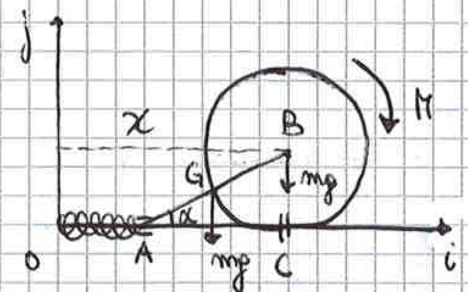
Nelle ipotesi di sistemi olonomi, con N gradi di libertà $\{q_1, \dots, q_N\}$, sistema conservativo considero la funzione di lagrange

$$\boxed{L = T + U}$$

e le equazioni di lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0} \quad \text{con } h = 1, \dots, N$$

Es: DISCO OMOGENEO m, R, asta omogenea $m, 2R$ moto puro rotolamento, vincolato in A e B



$N = 1 \qquad q_1 = x$

$\vec{\omega} = -\frac{\dot{x}}{R}\vec{k}$

$\alpha = \frac{\pi}{6} = 30°$

Scrivo la lagrangiana:

$$U(x) = -mgR - mg\frac{R}{2} - \frac{K}{2}OA^2 + M\frac{x}{R}$$

$$OA^2 = \left(x - 2R\cos\frac{\pi}{6}\right)^2 \vec{i} = \left(x - R\sqrt{3}\right)^2$$

$$U(x) = \frac{Mx}{R} - \frac{K}{2}x^2 + KR\sqrt{3}\,x + c$$

$$T = E_{K\,asta} + E_{K\,disco}$$

$$T^{asta} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \cancel{\frac{1}{2}I_G\,\omega^2_{asta}} \leftarrow \text{applico Teo König}$$

$$T^{disco} = \frac{1}{2}I_C\,\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m\cancel{R^2}\frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}}$$

$$T(\dot{x}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}m\dot{x}^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 201 di 238

$$T(\dot{y}) = \frac{1}{2}\frac{3}{2} m \dot{y}^2$$

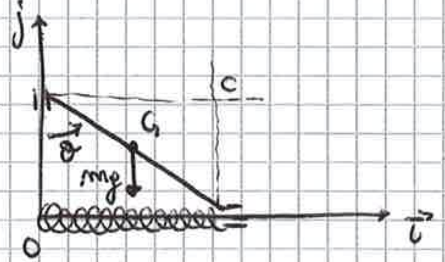
⇒ Eq. di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial}{dt}\left(\frac{3}{2} m \dot{y}\right) = \frac{3}{2} m \ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} = -ky + \frac{M}{R} - mg$$

$$\boxed{\frac{3}{2} m \ddot{y} + ky - \frac{M}{R} + mg = 0}$$

◆ Es: asta m, l $N = 1$ $q_1 = \theta$ (forze agenti F_p e F_k)



$$U(\theta) = -\frac{k}{2} OA^2 - mg\, y_G + c$$

$$OA = l \operatorname{sen}\theta \qquad y_G = \frac{l}{2}\cos\theta$$

$$U(\theta) = -\frac{k}{2} l^2 \operatorname{sen}^2\theta - mg\frac{l}{2}\cos\theta + c$$

applico König

$$T = \frac{1}{2} I_c \omega^2 \qquad \text{con } I_c = \frac{ml^2}{12} + m\,CG^2 \text{ e } CG = \frac{l}{2}$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\right) = \frac{ml^2}{3}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \theta} = -kl^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\boxed{\frac{ml^2}{3}\ddot{\theta} + kl^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta - mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta = 0}$$

per $q_2 = x$

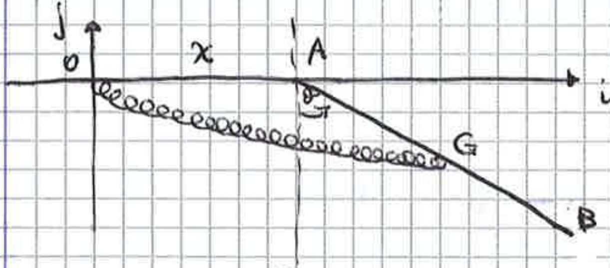
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial x}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -kx + kl\cos\vartheta + F$$

$$\boxed{m\ddot{x} + kx - kl\cos\vartheta - F = 0}$$

Es: aste m, l $N=2$



$$\begin{cases} q_1 = x_A = x \\ q_2 = \vartheta \end{cases}$$

$\vec{\omega} = \dot{\vartheta}$

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$x_G = x + \frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta$; $y_G = -\frac{l}{2}\cos\vartheta$

$\dot{x}_G = \dot{x} + \frac{l}{2}\cos\vartheta\,\dot{\vartheta}$; $\dot{y}_G = +\frac{l}{2}\operatorname{sen}\vartheta\,\dot{\vartheta}$

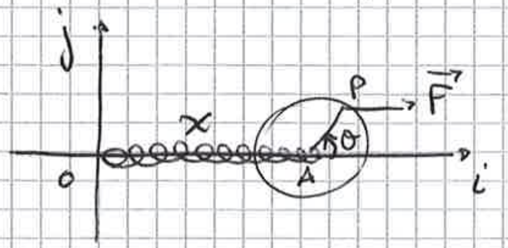
$$I_G = \frac{ml^2}{12}$$

$$v_G = \dot{x}^2 + l\cos\vartheta\,\dot{x}\dot{\vartheta} + \frac{l}{4}\dot{\vartheta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left\{ m\dot{x}^2 + ml\cos\vartheta\,\dot{x}\dot{\vartheta} + m\frac{l^2}{3}\dot{\vartheta}^2 \right\}$$

$$U(x,\vartheta) = +mg\frac{l}{2}\cos\vartheta - \frac{k}{2}x^2 - \frac{k}{2}lx\operatorname{sen}\vartheta + c$$

Es: DISCO m, R $\quad F = cost$ $\quad N = 2$ $\quad \begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \vartheta \end{cases}$



$$U(x, \vartheta) = -\frac{K}{2}x^2 + F(x + R\cos\vartheta) + c$$

$$T \overset{\text{Konig}}{=} \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \frac{R^2}{2} \dot{\vartheta}^2$$

per $q_1 = x$ $\quad \boxed{m\ddot{x} + Kx - F = 0}$

per $q_2 = \vartheta$ $\quad \boxed{\frac{mR^2}{2}\ddot{\vartheta} + FR\,\text{sen}\,\vartheta = 0}$

equazioni giacobiane

ottengo che:

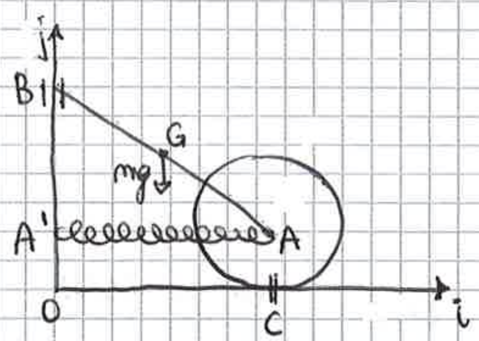
per $N=1$ con $q=\theta$

$$\boxed{\tilde{U} = \frac{1}{2}\left(\frac{dU''}{d\theta}\right)_{P_e}(\theta-\theta_e)}$$

per $N=2$ con $q_1 = x$ $q_2=\theta$

$$\boxed{\tilde{U} = \frac{1}{2}\sum_{h,k=1}^{h}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_h q_k}\right)_{P_e}(q_1-q_1^e)(q_2-q_2^e)}$$

Es: asta m, ℓ, disco m, R $N=1$ $\{q=\theta$



$$\vec{\omega}_{disco} = -\frac{\ell\cos\theta\,\dot{\theta}}{R}\vec{k}$$

ricavata con la formula fondamentale calcolata tra A e C

$$y_G = R + \frac{\ell}{2}\cos\theta$$

POTENZIALE

$$U(\theta) = -mg\,y_G - \frac{K}{2}\overline{AA'}^2 - mgR + c$$

$$U(\theta) = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{K}{2}\ell^2\operatorname{sen}^2\theta + c'$$

$$\frac{dU}{d\theta} = mg\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta - K\ell^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 209 di 238

$$\Rightarrow \frac{1}{4K}\left(4K^2\ell^2 - m^2g^2\right) \quad > 0 \quad \text{se } \exists$$

$$\Rightarrow \vartheta_{3,4} \quad \text{se } mg \leq 2K\ell \quad \text{se } \exists \quad \text{NON STABILI}$$

ENERGIA CINETICA

$$T = T^{\text{asta}} + T^{\text{disco}}$$

$$T^{\text{asta}} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \overbrace{\frac{m\ell^2}{12}}^{I_G} \overbrace{\dot\vartheta^2}^{\omega^2}$$

$$T^{\text{disco}} = \frac{1}{2} \underset{\frac{3}{2}R^2}{I_C} \cdot \underset{\frac{\ell^2}{R^2}\cos^2\vartheta\,\dot\vartheta^2}{\omega^2}$$

$$v_G^2 = \frac{\ell}{2}\left(\cos\vartheta\,\dot\vartheta - \operatorname{sen}\vartheta\,\dot\vartheta\right)$$

$$\begin{cases} x_G = \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta \\ y_G = R + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta \end{cases} \qquad v_G \begin{cases} \dot x_G = \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\,\dot\vartheta \\ \dot y_G = -\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\vartheta\,\dot\vartheta \end{cases}$$

$$v_G^2 = \dot x_G^2 + \dot y_G^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\left(\frac{m\ell^2}{3} + \frac{3}{2}m\ell^2\cos^2\vartheta\right)\dot\vartheta^2$$

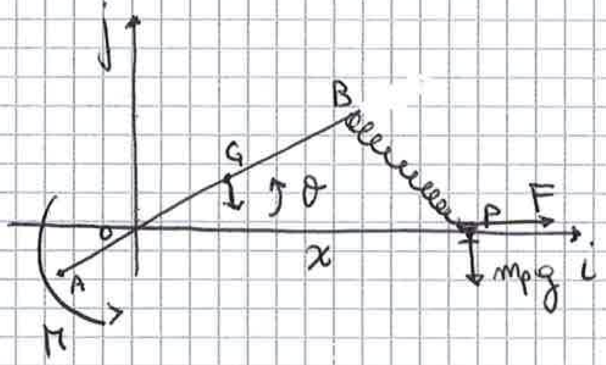
$$\Rightarrow \tilde{L} = \tilde{T} + \tilde{U}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot\theta} - \frac{d\tilde{L}}{d\theta} = 0$$

$$\boxed{m\ell^2\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)\ddot\theta + \left(\frac{mg}{2}+k\ell\right)\ell\,(\theta-\pi) = 0}$$

EQUAZIONE LINEARIZZATA

ES: asta incernierata in O (TEMA D'ESAME 2014)



$N = 2$

$$\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \theta \end{cases}$$

$OG = \frac{\ell}{6}$

- Valore di M affinché ci fosse equilibrio in $\theta = \pi$?

1) POTENZIALE

se M antiorario +, M orario −

$$U(x,\theta) = \underbrace{-mg\,y_G}_{U\,asta} + \underbrace{M\theta}_{U\,coppia} - \underbrace{\frac{k}{2}BP^2}_{U\,molla} + \underbrace{Fx}_{U\,forza} + c$$

$$y_G = \frac{\ell}{6}\operatorname{sen}\theta$$

$$BP^2 = (\underset{\frac{2}{3}\ell\cos\theta}{x_B} - \underset{x}{x_P})^2 + (\underset{\frac{2}{3}\ell\operatorname{sen}\theta}{y_B} - \underset{0}{y_P})^2 = x^2 - \frac{4}{3}x\ell\cos\theta + \frac{4}{9}\ell^2$$

20

EQUAZIONI LINEARIZZATE NELL'INTORNO DI P^e

$$T = \overbrace{\frac{1}{2} m_p \dot{x}^2}^{T\ punto} + \overbrace{\frac{1}{2} I_a \omega^2}^{T\ asta}$$

$$= \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(I_G + m \overset{OG^2}{\overset{\|}{d^2}}\right)\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{36}\right)\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m_p \dot{x}^2 + \frac{1}{9} m l^2 \dot{\theta}^2\right)$$

poiche T non dipende da $P^e(x^e, \theta^e) \Rightarrow T \equiv \tilde{T}$

$$\tilde{U}(x,\theta) = \frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2}\right)_{P_e} (q_1 - q_1^e)(q_2 - q_2^e)$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{2}\left\{ -k(x-x^e)^2 + \underbrace{2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta}\right)_{P_e}(x-x^e)(\theta-\theta^e)}_{= 0} + \frac{2}{3} k l \left(\frac{F}{k} - \frac{2}{3} l\right)(\theta - \pi)^2\right\}$$

derivata mista xkè in questo caso $= 0$

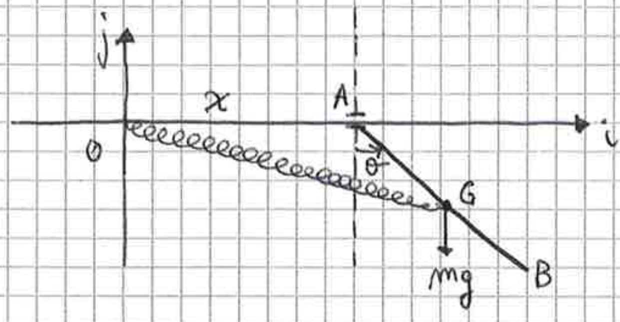
$$\Rightarrow \tilde{L} = \tilde{T} + \tilde{U}$$

rispetto q_1 $\qquad \frac{d}{dt}\frac{d\tilde{L}}{d\dot{x}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = 0$

$$\boxed{m_p \ddot{x} + k\left(x - \frac{F}{k} + \frac{2}{3} l\right) = 0} \qquad \omega_1^2 = \frac{k}{m_p}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 215 di 238

Es: Asta m, ℓ $\quad N = 2 \quad \begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \theta \end{cases}$



▶ POTENZIALE

$$U(x,\theta) = -mg\, y_G - \frac{k}{2}\, OG^2 + c$$

$$y_G = -\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

$$OG^2 = x_G^2 + y_G^2$$

$$= \left(x + \frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\cos\theta\right)^2$$

$$= x^2 + x\,\ell\operatorname{sen}\theta + \frac{\ell^2}{4}$$

$$U(x,\theta) = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta - \frac{k}{2}x^2 - k\frac{\ell}{2}x\operatorname{sen}\theta + c$$

▶ POSIZIONE DI EQUILIBRIO

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -kx - k\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mg\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta - k\frac{\ell}{2}x\cos\theta$$

$P^e(0,0)$ è di equilibrio

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -k \; ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial\theta} = -k\frac{\ell}{2}\cos\theta \; ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mg\frac{\ell}{2}\cos\theta + k\frac{\ell}{2}x\operatorname{sen}\theta$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 217 di 238

rispetto $q_1 = x$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m\frac{\ell}{2}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + m\frac{\ell}{2}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = -kx - \frac{k}{2}\frac{\ell}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} + m\frac{\ell}{2}\ddot{\theta} + kx + \frac{k}{2}\ell\theta = 0}$$

rispetto $q_2 = \theta$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\frac{\ell}{2}\dot{x} + \frac{m\ell^2}{3}\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\frac{\ell}{2}\ddot{x} + \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} = -k\frac{\ell}{2}x - mg\frac{\ell}{2}\theta$$

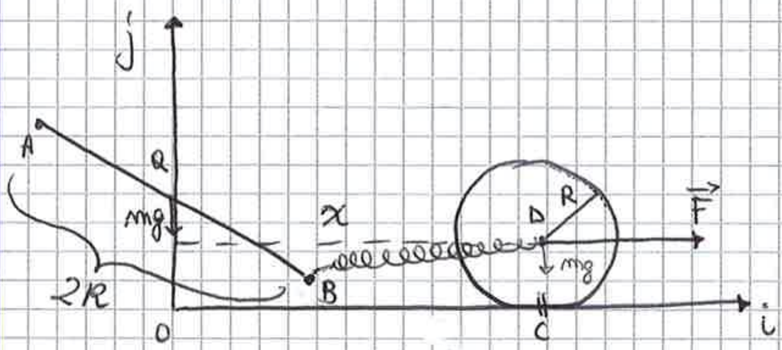
$$\Rightarrow \boxed{m\frac{\ell}{2}\ddot{x} + \frac{m\ell^2}{3}\ddot{\theta} + k\frac{\ell}{2}x + mg\frac{\ell}{2}\theta}$$

→ ottengo 2 eq. differenziali del II ORDINE (combinazione lineare di 2 moti armonici (compaiono termini misti con θ, x))

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 219 di 238

TEMA GIUGNO 2013

Disco omogeneo m, R → puro rotolamento su x
Asta omogenea m, $2R$ → vincolata senza attrito al suo baricentro Q
Molla con modulo elastico $k>0$ che lega disco e asta
Si scelgono come coordinate lagrangiane $\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \vartheta \end{cases}$



1) DETERMINA POSIZIONI DI EQUILIBRIO E STUDIA STABILITÀ

▶ **POTENZIALE**

$$U(x,\vartheta) = Fx - \frac{k}{2} BD^2 + c \quad \text{in cui inglobo il } U \text{ della } 2\, F_{peso}$$

$$BD^2 = (\overset{x}{\overset{\shortparallel}{x_D}} - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2$$

$$= (x - R\,\text{sen}\,\vartheta)^2 + (\cancel{R} - \cancel{R} + R\cos\vartheta)^2$$

$$= x^2 - 2x R\,\text{sen}\,\vartheta + R^2$$

$$U(x,\vartheta) = Fx - \frac{k}{2} x^2 + k x R\,\text{sen}\,\vartheta + c$$

28

2) DETERMINA L'ENERGIA CINETICA E I MOMENTI CINETICI

▶ ENERGIA CINETICA

$$T = T^{asta} + T^{disco}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mR^2}{3} \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{2} m \cancel{R^2} \frac{\dot{x}^2}{\cancel{R^2}}$$

velocità angolare disco che rotola senza strisciare

▶ MOMENTI CINETICI

$$P_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m \dot{x}$$

$$P_\vartheta = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{mR^2}{3} \dot{\vartheta}$$

3) LINEARIZZA EQ. MOTI E CALCOLA OSCILLAZIONI E PERIODI (in P_3)

$$\tilde{T} \equiv T$$

$$\tilde{U} = \frac{1}{2} \left\{ -k\left(x - R - \frac{E}{k}\right)^2 - \frac{k}{R} \underset{R+\frac{E}{k}}{x^e} \underset{1}{\operatorname{sen}\vartheta} \left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right\}$$

rispetto $q_1 = x$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} = 0$$

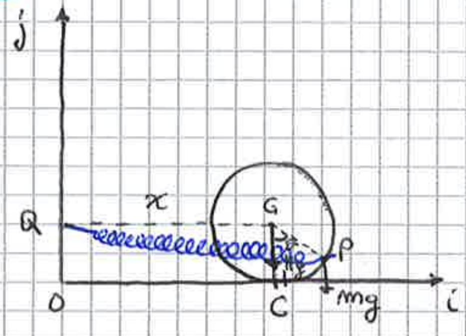
$$\boxed{\frac{3}{2} m \dot{x}^2 + k\left(x - R - \frac{E}{k}\right) = 0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 223 di 238

TEMA D'ESAME FEBBRAIO 2014

Disco M, R puro rotolamento
Vincoli ideali
$\vec{F}^{ee} = -k\,\vec{QP}$ con $k > 0$

$N = 2$ $\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \theta \end{cases}$



1) DETERMINA LE POSIZIONI DI EQUILIBRIO E STUDIA LA STABILITÀ AL VARIARE DI K

▶ POTENZIALE

$$U(x,\theta) = -Mg\,\underset{R}{y_G} - mg\,y_P - \frac{k}{2}\,QP^2 + C$$

$$y_P = R - R\cos\theta$$

$$QP^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 = (x + R\operatorname{sen}\theta - 0)^2 + (\cancel{R} - R\cos\theta - \cancel{R})^2$$

$$= x^2 + R^2\operatorname{sen}^2\theta + 2Rx\operatorname{sen}\theta + R^2\cos^2\theta$$

$$= x^2 + 2Rx\operatorname{sen}\theta + R^2$$

$$U(x,\theta) = -mgR + mgR\cos\theta - \frac{k}{2}x^2 - kRx\operatorname{sen}\theta + C$$

$$U(x,\theta) = mgR\cos\theta - \frac{k}{2}x^2 - kRx\operatorname{sen}\theta + c$$

32

▶ STABILITA'

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -K \; ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} = -KR\cos\theta \; ; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -mgR\cos\theta + KRx\,\text{sen}\,\theta$$

$$H(x,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \theta} & \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \end{vmatrix}$$

$$H(P_1) = KR(mg - KR) > 0 \iff mg > KR$$

$\Rightarrow P_1$ è stabile se $K < \frac{mg}{R}$

$$H(P_2) = -KmgR - K^2R^2 < 0$$

$\Rightarrow P_2$ mai stabile

$$H(P_3, P_4) = \cancel{+KmgR\frac{mg}{KR}} - K^2Rx^e\,\text{sen}\,\theta^e + \cancel{-K^2R^2\frac{m^2g^2}{K^2R^2}}$$

$$x^e = -R\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow H(P_3, P_4) = K^2R^2\,\text{sen}^2\theta^e > 0$$

$\Rightarrow$ stabili quando $\exists$

3) CALCOLA LE EQUAZIONI DEL MOTO NELLA FORMA DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0$$

rispetto $q_1 = x$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} p_x - \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{\left(m + \frac{3}{2}M\right)\ddot{x} + mR\cos\vartheta\,\ddot{\vartheta} - mR\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\dot{\vartheta}^2 + K\left(x + R\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right) = 0}$$

rispetto $q_2 = \vartheta$

$$\frac{d}{dt} p_\vartheta - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} p_\vartheta - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} - \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} & mR\cos\vartheta\,\ddot{x} + mR^2\ddot{\vartheta} - \cancel{mR\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\dot{x}\,\dot{\vartheta}} + \cancel{mR\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\dot{x}\,\dot{\vartheta}} + \\ & + mgR\,\mathrm{sen}\,\vartheta + KRx\cos\vartheta = 0 \end{aligned}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 229 di 238

rispetto $q_2 = \vartheta$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\vartheta}} = mR\dot{x} + mR^2\dot{\vartheta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\vartheta}} = mR\ddot{x} + mR^2\ddot{\vartheta}$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \vartheta} = -KRx - mgR\vartheta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{\vartheta}} - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \vartheta} = 0$$

$$\boxed{mR\ddot{x} + mR^2\ddot{\vartheta} + kRx + mgR\vartheta = 0}$$

4) CALCOLO DELLE PULSAZIONI

Le 2 eq. non sono disaccoppiate (xké compaiono in entrambi x e ϑ contemporaneamente)

$\Rightarrow$ variabili incrociate $\Rightarrow$ lavoro sul determinante

$$\det\left| A_{(P_e)}\,\omega^2 + H_{(P_e)} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \left(m + \frac{3}{2}M\right)\omega^2 - k & mR\omega^2 - KR \\ mR\omega^2 - KR & mR^2\omega^2 - mgR \end{vmatrix} = 0$$

$\longrightarrow$ eq. con ω^4

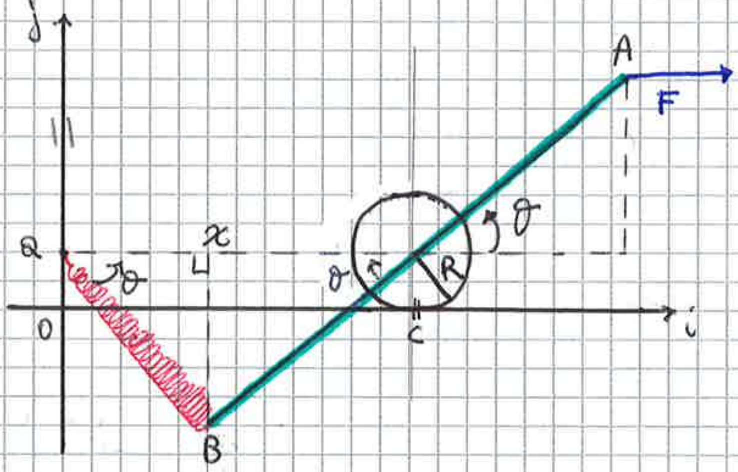
TEMA D'ESAME

Disco m, R puro rotolamento

AB = asta di lunghezza ℓ e massa m

QB = molla

$N = 2$ $\begin{cases} q_1 = x \\ q_2 = \vartheta \end{cases}$



1) DETERMINA LE EQUAZIONI DEL MOTO E I MOMENTI CINETICI

▶ POTENZIALE

$$U = U^{disco} + U^{molla} + U^{Asta} + U^{FORZA} + c$$

$$= -mg\, \underset{\overset{\shortparallel}{R}}{y_G} - \frac{k}{2} QB^2 - mg\, \underset{\overset{\shortparallel}{R}}{y_G} + F x_A + c$$

$$x_A = x + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta$$

$$QB^2 = \left(x - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\sin\vartheta\right)^2$$

$$QB^2 = x^2 - \ell x \cos\vartheta + \frac{\ell^2}{4}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 233 di 238

$$T^{disco} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m R^2\right)\frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{3}{4} m\dot{x}$$

$$T^{asta} = \frac{1}{2} m \underset{\dot{x}^2}{\underset{\shortparallel}{v_G^2}} + \frac{1}{2} \underset{\frac{ml^2}{12}}{\underset{\shortparallel}{I_G^{asta}}} \cdot \underset{\dot{\vartheta}^2}{\underset{\shortparallel}{\omega_{asta}^2}}$$

$$\boxed{\omega = \dot{\vartheta}}$$

velocità angolare di un'asta

$$T^{asta} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\vartheta}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{5}{4} m\dot{x}^2 + \frac{1}{24} m l^2 \dot{\vartheta}^2}$$

▶ LAGRANGIANA

$$L = U + T$$

$$\boxed{L = -\frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{2} l\, x\cos\vartheta + Fx + F\frac{l}{2}\cos\vartheta + \frac{5}{4} m\dot{x}^2 + \frac{1}{24} m l^2\dot{\vartheta}^2}$$

▶ MOMENTI CINETICI

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dfrac{5}{2} m\dot{x} \\ \hline \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \dfrac{1}{12} m l^2 \dot{\vartheta} \end{array}}$$

2) DETERMINA LE REAZIONI VINCOLARI NEL PUNTO DI CONTATTO DEL DISCO IN CONDIZIONI DINAMICHE

$$R^{ATTIVE,EXT} + R^{VINCOLARI,EXT} = \sum m \underset{\ddot{x}}{\underset{\parallel}{a_G}}$$

$$i)\quad \phi_{cx} + F - k\left(x - \frac{l}{2}\cos\theta\right) = 2m\ddot{x}$$

$$j)\quad \phi_{cy} - 2mg + k\left(\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) = 0$$

ricavo dalla 1° EQ. DI LAGRANGE $\ddot{x} = \frac{2}{5m}\left(F + \frac{kl\cos\theta}{2} - kx\right)$

$$\begin{cases} \phi_{cx} = 2m\ddot{x} + k\left(x - \frac{l}{2}\cos\theta\right) - F \\ \phi_{cy} = 2mg - k\left(\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\right) \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 237 di 238