NUMERO: 1724A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

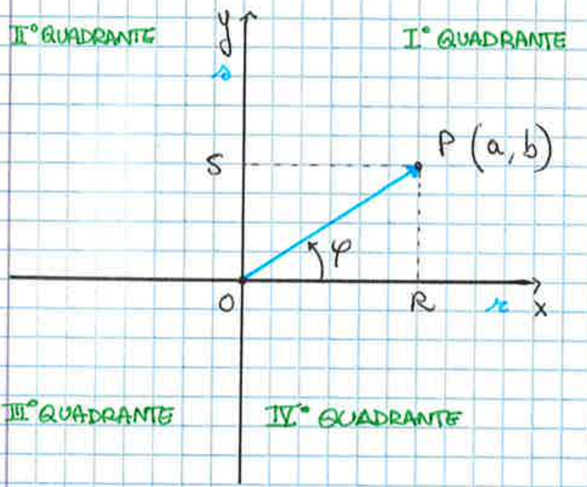
MATERIA: Geometria - prof. Di Scala

COORDINATE NEL PIANO

• COORDINATE CARTESIANE

Nel piano α fissiamo un punto O e due rette r ed s passanti per O tali che:

- $r \perp s$
- r ed s siano orientate in modo che la semiretta positiva della retta r si possa sovrapporre alla semiretta positiva della retta s con rotazione antioraria $\frac{\pi}{2}$



le due rette orientate s e r (y, x) si chiamano assi coordinati. In particolare: $x \to$ asse delle ascisse
$y \to$ asse delle ordinate

Il punto O si chiama origine delle coordinate

Preso P, un qualunque punto del piano, le sue proiezioni sulle rette orientate sono OS e OR. Siano poi b e a le misure rispettive dei segmenti OS e OR, esse si dicono coordinate di P: a ascissa di P, b ordinata di P.

$\Rightarrow$ Quindi ad ogni punto P del piano α resta associata una coppia (a, b) di numeri reali, cioè la coppia ordinata delle sue coordinate

N.B. Fissare gli assi coordinati su α equivale a fissare un sistema di coordinate cartesiane Oxy su α.

Fissato un sistema di coordinate cartesiane nel piano α, abbiamo stabilito una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$ $\rightsquigarrow$ modulo o distanza OP

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$ $\rightsquigarrow$ argomento (o angolo θ)

PASSAGGIO COORDINATE CARTESIANE - POLARI

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Dato un qualsiasi vettore $u = \vec{AB}$, il vettore $\vec{BA}$ è detto vettore opposto di u e si indica con $-u$.

Risulta:

$$|u| = |-u| \Leftrightarrow$$

ovvero

$$\boxed{u + (-u) = 0}$$

Il vettore opposto ha lo stesso modulo e la stessa direzione di u, ma verso opposto.

⊛ Due o più vettori si dicono paralleli se, applicati in uno stesso punto, stanno sulla stessa retta. $(\vec{u} \parallel \vec{v})$

N.B. Per convenzione il vettore nullo $\vec{0}$ è parallelo a qualsiasi altro vettore.

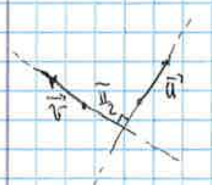
↳ TEOREMA Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori non nulli; allora $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli se e solo se $\exists$ un numero reale t tale per cui $\vec{v} = t\vec{u}$

$$\boxed{\vec{v} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R} : \quad \vec{v} = t\vec{u}}$$

⊛ Due vettori si dicono ortogonali se, applicati ad uno stesso punto, stanno su rette perpendicolari $(\vec{u} \perp \vec{v})$

N.B. Per convenzione il vettore nullo $\vec{0}$ è perpendicolare a qualsiasi altro vettore.

↳ TEOREMA Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ due vettori non nulli, allora $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.



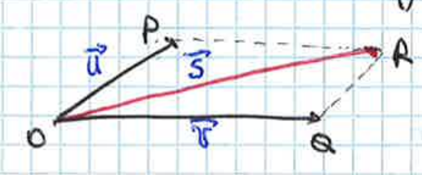
$$\boxed{\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = 0}$$

ovvero $\hat{u v} = \frac{\pi}{2}$

– SOMMA DI VETTORI

La somma $\vec{u} + \vec{v}$ è il vettore $\vec{s}$ ottenuto applicando la regola del parallelogramma

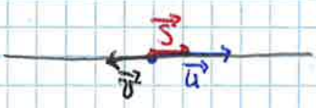
3 vettori complanari



N.B. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ hanno la stessa direzione, cioè stanno sulla stessa retta si ha:

a) stessa direzione, stesso verso $\Rightarrow$ somma = vettore stessa direzione stesso verso, modulo dato dalla somma dei moduli

b) stessa direzione, verso opposto $\Rightarrow$ somma = vettore stessa direzione, verso vettore modulo maggiore, modulo dato dalla differenza dei moduli



c) stessa direzione, verso opposto, moduli uguali $\Rightarrow$ vettore nullo
direzione e verso indeterminati

– PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Dato un vettore $\vec{u} \neq \vec{0}$, dato uno scalare $\lambda \neq 0$ si indica con $\lambda\vec{u}$ il vettore parallelo ad u che ha modulo $|\lambda| \|u\|$ ed è concorde con u se $\lambda > 0$, discorde se $\lambda < 0$.

$\lambda > 0$

$\lambda < 0$

$\lambda = 0 \vee \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \lambda u = 0$

N.B. Per ogni versore non nullo v esiste un unico versore avente la stessa direzione e lo stesso verso di v. Questo versore è:

$$\text{vers } v = \boxed{\frac{v}{|v|} \longrightarrow \text{VERSORE ASSOCIATO}}$$

- SOMMA DI VETTORI IN COMPONENTI

Dati $\vec{v} = (x, y, z)$; $\vec{u} = (x', y', z')$

$$\vec{v} = xi + yj + zk \qquad \vec{u} = x'i + y'j + z'k$$

$$\boxed{\vec{v} + \vec{w} = (x + x')i + (y + y')j + (z + z')k}$$

Le componenti di $v + w$ si ottengono sommando nell'ordine le componenti di v e w.

- PRODOTTO DI UN NUMERO PER UN VETTORE IN COMPONENTI

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{u} = (x, y, z) = xi + yj + zk$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda \vec{u} &= (\lambda x)i + (\lambda y)j + (\lambda z)k \\ \lambda \vec{u} &= (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \end{aligned}}$$

Le componenti di $\lambda \vec{u}$ si ottengono moltiplicando per λ le componenti di $\vec{u}$

→ PRODOTTO SCALARE IN COMPONENTI

$\vec{u}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ $\qquad$ $\vec{u}_2 = (x_2, y_2, z_2)$

$$\boxed{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

• ANGOLO DI 2 VETTORI AVENTI LE COMPONENTI

$v(x_1, y_1)$

$w(x_2, y_2)$

$$\boxed{\cos \widehat{vw} = \frac{v \cdot w}{|v|\,|w|}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos \widehat{vw} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}}$$

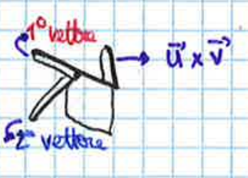
→ PRODOTTO VETTORIALE O ESTERNO

Il prodotto vettoriale è l'unico vettore $\vec{u} \times \vec{v}$ $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ che è ortogonale ad entrambi e ha modulo:

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \operatorname{sen} \widehat{uv}} \rightarrow \text{area del parallelogramma di lati } u \text{ e } v$$

ed è diretto nella terna ordinata $(u, v, u \times v) \longrightarrow$ destrorsa)

regola mano destra



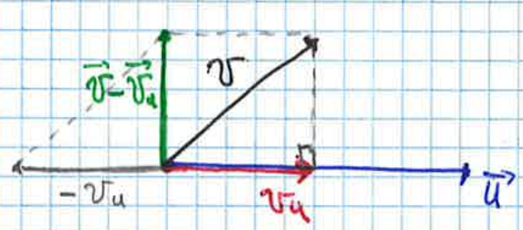
$$\boxed{|u \times v| = 0 \iff u \parallel v}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 140

PROIEZIONI ORTOGONALI

Si chiama proiezione ortogonale di v sulla retta di u il vettore: (nello spazio o nel piano) (dati $\vec{u}$ e $\vec{v}$)

$$\boxed{\vec{v}_u = (\vec{v} \cdot \hat{u})\,\hat{u}}$$

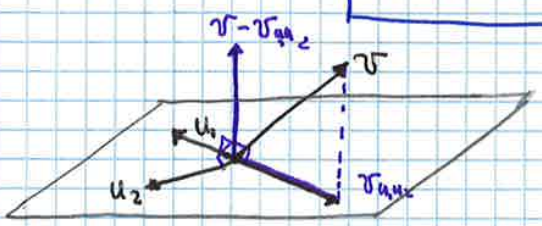


$\vec{v}_u$ = vettore $/\!/ \ \vec{u}$: $\boxed{v - v_u \perp u}$

$\Longrightarrow$ $\boxed{v = \underbrace{v_u}_{/\!/ \vec{u}} + \underbrace{(v - v_u)}_{\perp \vec{u}}}$

Dati nello spazio $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ e $\vec{v}$ si chiama proiezione ortogonale di v sul piano di $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ il vettore:

$$\boxed{\vec{v}_{u_1 u_2} = v - v_u}$$



$$\boxed{v_{u_1 u_2} = (v \cdot \hat{u}_1)\,\hat{u}_1 + (v \cdot \hat{u}_2)\,\hat{u}_2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 140

7) $\exists$ di un elemento neutro per il prodotto

$$1 \cdot a = a$$

8) $\exists$ dell'inverso $\left(a^* = \frac{1}{a} \right)$

$$a \cdot a^* = 1$$

9) P. distributiva

$$a(b+c) = ab + ac$$

SPAZIO VETTORIALE

Siano dati un campo numerico $\mathbb{K}$ $(\text{con } \mathbb{K} \equiv \mathbb{R} \vee \mathbb{K} \equiv \mathbb{C})$ e un insieme $\mathbb{V}$.

$\mathbb{V}$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale se sono definite le 2 operazioni

→ Somma: $\forall$ coppia $(u, v) \in \mathbb{V}$ associa un unico elemento di $\mathbb{V}$ denotato con $u+v$

→ prodotto: $\forall$ coppia $(u, v) \in \mathbb{V}$ associa un unico elemento di $\mathbb{V}$ denotato con $u \cdot v$

e se le due operazioni verificano le seguenti proprietà:

1) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA

$$(u+v) + w = u + (v+w)$$

2) $\exists$ ELEMENTO NEUTRO PER LA SOMMA

$$u + 0_V = u$$

3) $\exists$ DI UN OPPOSTO $(u' = -u)$

$$u + u' = 0$$

PROPRIETÀ ELEMENTARI DEGLI SPAZI VETTORIALI

① Sia $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.
Allora in $\mathbb{V}$ c'è un solo vettore nullo 0_V

② Sia $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $v \in \mathbb{V}$
Allora $\exists$ un solo opposto di v, $(-v)$

③ Annullamento del prodotto
Sia $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, sia $a \in \mathbb{K}$, sia $v \in \mathbb{V}$
Allora av è il vettore nullo $\Leftrightarrow$ $a = 0_K \vee v = 0_V$

$\Rightarrow$ a) $0_K = 0_V \quad \forall v \in \mathbb{V}$
b) $a\,0_V = 0_V \quad \forall v \in K$
c) se $a \neq 0_K$ e $v \neq 0_V \Rightarrow av \neq 0_V$

SOMMA DIRETTA DI DUE SOTTOSPAZI

Siano W e Z due sottospazi di V del campo $\mathbb{K}$. La somma $W \oplus Z$ è diretta se ogni vettore della somma si può scrivere in modo unico nella forma $w + z$, $w \in W$, $z \in Z$

$$\boxed{S = W \oplus Z = \{ s \in V : s = w + z, \ w \in W, z \in Z \}}$$

N.B. La somma $W \oplus Z$ è diretta $\Longleftrightarrow$ $W \cap Z = \{ 0_V \}$

DIPENDENZA LINEARE

Gli elementi $v_1, \dots, v_m$ del $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V si dicono

→ LINEARMENTE INDIPENDENTI (l. i.) se [⇒ INSIEME LIBERO]

$$\boxed{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0} \quad \text{con } a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$$

è verificato solo quando $a_1 = \dots = a_m = 0$

(ha solo soluzione banale)

→ LINEARMENTE DIPENDENTI (l. d.) se

$$\boxed{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0}$$

è verificato quando esistono $a_1, \dots, a_m$ non tutti nulli

(ha soluzioni non banali)

INSIEME LIBERO

L'insieme finito $I \subset V$ è libero se i vettori di I sono l. i.

L'insieme finito $I \subset V$ non è libero se i vettori sono l. d.

N.B. Un insieme contenente 0_V non è mai libero

Un insieme costituito da 1 solo elemento è libero se e solo se $v \neq 0_V$

Due vettori dello spazio vettoriale V_2 son l. d. ⇔ hanno stessa direzione

Due vettori sono l. d. ⇔ $v_1 = 0$ oppure $v_2 = a v_1$ (c. l.)

I vettori riga (o colonna) della matrice I_n (matrice identità $n \times n$) sono una base di $\mathbb{R}^n$ che si dice base canonica $B = (e_1, \dots e_n)$.
ovvero: siano $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ i versori fondamentali ovvero $e_1(1, 0, \dots 0)$, $e_2(0, 1, \dots 0)$ ecc. Allora $B = (e_1, \dots e_n)$ è una base di $\mathbb{K}^n$. Infatti ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ è c.l di $e_1, \dots e_n$.

- Ogni base $\mathbb{K}^n$ è costituita da n elementi.
- Se V è lo spazio vettoriale nullo $\Rightarrow B = \emptyset$ e $\dim(V) = 0$

COMPONENTI DI UN VETTORE RISPETTO AD UNA BASE

Se $(v_1, \dots v_n)$ è una base di V e $v \in V$, le componenti di v rispetto alla base sono gli n numeri $a_1, \dots a_n$:

$$\boxed{v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n}$$

presi nell'ordine.

Somma: Se $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, $w = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$ $\Rightarrow v + w = (a_1 + b_1) v_1 + \dots (a_n + b_n) v_n$

Prodotto: Se $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \Rightarrow a v = (a a_1) v_1 + \dots (a a_n) v_n$

COMPLETAMENTO DI UN INSIEME LIBERO A BASE

Dato un sottoinsieme libero ordinato $I = (v_1, \dots v_m)$ di V, esso si può sempre completare a base di V aggiungendo opportuni elementi.
Consideriamo un insieme di generatori $e_1, \dots e_n$ di V e applicando il metodo degli scarti successivi ai vettori $v_1, \dots v_n, e_1, \dots e_n$ è possibile estrarre una base di V in cui tutti gli elementi di I sono inclusi.

Es: . I vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$ sono l. i.

Trova una base di $\mathbb{R}^3$ contenente v_1 e v_2.

→ prendo la base canonica (e_1, e_2, e_3) di $\mathbb{R}^3$ ed estraggo una base da v_1, v_2, e_1, e_2, e_3 col metodo degli scarti successivi.

$v_1\ (1, 2, 1)$ $\quad$ $e_1\ (1, 0, 0)$ $\quad$ $e_3\ \cancel{(0, 0, 1)}$

$v_2\ (0, 1, 2)$ $\quad$ $e_2\ \cancel{(0, 1, 0)}$

v_1 ok!

e_2 no xkè comb. l.

e_3 no xkè c. l.

$$\mathcal{B} = \big((1,2,1), (0,1,2), (1,0,0) \big)$$

DIMENSIONE DI UN SOTTOSPAZIO

La dim di un sottospazio non può superare la dim di V

- Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $\dim(V) = n$ e sia $W \subset V$ un sottospazio $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a) & W \text{ è finitamente generato} \\ b) & \dim(W) \le \dim(V) \\ c) & \dim(W) = \dim(V) \iff W = V \end{array}}$$

- Siano $V_1, \dots V_n$ dei sottospazi di V allora:

$$\boxed{\dim(V_1 + \dots + V_n) \le \dim(V_1) + \dots + \dim(V_n)}$$

Supponendo di avere una base B_1, di V_1, una base B_n di V_n

$\Rightarrow$ ① la somma $W_1 + \dots + W_n$ è diretta

② $B_1 \cup \dots \cup B_n$ è una base di $W_1 + \dots + W_n$

③ $\dim(W_1 + \dots + W_n) = \dim W_1 + \dots + \dim W_n$

FORMULA DI GRASSMAN

Siano W e Z 2 sottospazi di dimensione finita dello spazio vettoriale V. Allora:

$$\boxed{\dim(W+Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \underbrace{\dim(W \cap Z)}_{\shortparallel}}$$

Se la somma è diretta

$$\dim(W \oplus Z) = \dim(W) + \dim(Z) + \{0\}$$

SOMMA DI MATRICI

Siano A e B matrici $m \times n$ $\in \mathbb{K}^{m,n}$

se $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ e $B \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+9 & 1+4 \\ 0+3 & 7+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

N.B la somma non ha senso se non hanno lo stesso numero di righe

PRODOTTO DI UNA MATRICE PER UN NUMERO

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ e sia $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ con $\lambda = 5$

$$\lambda A = 5 \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 5 & 5 \cdot 1 \\ 0 \cdot 5 & 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

TRASPOSTA DI UNA MATRICE

È la matrice che si ottiene scambiando tra loro le righe con le colonne e si indica con ${}^tA$

$$\text{Se } A \in \mathbb{R}^{m,n} \Rightarrow {}^tA \in \mathbb{R}^{n,m}$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

PROPRIETÀ

$\boxed{{}^t({}^tA) = A}$

$\boxed{{}^t(kA) = k\,{}^tA}$ $\qquad$ $\boxed{{}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA}$

$\boxed{{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB}$

MATRICE TRIANGOLARE

TRIANGOLARE ALTA

se $a_{ij} = 0$ per $i > j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TRIANGOLARE BASSA

se $a_{ij} = 0$ per $i < j$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Siano date le matrici $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{n,p} \Rightarrow$

$C = A \cdot B \in \mathbb{K}^{m,p}$ [Il prodotto fra matrici è definito se e solo se il n° di colonne di A è uguale al n° di righe di B

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

$\in \mathbb{R}^{4,4}$

$C_{1,1} = 3 + 18 + 9 = 30$

$C_{1,2} = 3 + 12 + 0 = 15$

$C_{1,3} = 0 + 6 + 0 = 6$

$C_{1,4} = 0 + 6 + 18 = 24$

$C_{2,1} = 2 + 12 + 8 = 22$

$C_{2,2} = 2 + 8 + 0 = 10$

$C_{2,3} = 0 + 4 + 0 = 4$

$C_{2,4} = 0 + 4 + 16 = 20$

$$C = \begin{pmatrix} 30 & 15 & 6 & 24 \\ 22 & 10 & 4 & 20 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{N.B. } {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA}$

$\boxed{AB \neq BA}$

RANGO DI UNA MATRICE

Il rango di una matrice è la dimensione di due spazi vettoriali che si costruiscono a partire dalla matrice, detti rispettivamente spazio delle righe e spazio delle colonne. Indichiamo le righe con $R_1, \dots, R_m$ e con $C_1, \dots, C_n$ le colonne. $R_1, \dots, R_m \in \mathbb{K}^n$; $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^m$. Con $A \in \mathbb{K}^{m,n}$.

Il sottospazio $\mathcal{L}(R_1, \dots, R_m) \subseteq \mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A si chiama spazio delle righe di A $\Rightarrow R_A$

Il sottospazio $\mathcal{L}(C_1, \dots, C_n) \subseteq \mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A si chiama spazio delle colonne di A $\Rightarrow C_A$

TEOREMA DEL RANGO

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, allora $\dim(R_A) = \dim(C_A)$

$$\boxed{\underbrace{\rho(A)}_{\text{Rango della matrice}} = \dim(R_A) = \dim(C_A)}$$

N.B. Il rango è uguale al numero massimo di colonne (o righe) l.i.

Se $A \in \mathbb{K}^{m,n} \Rightarrow$ sempre $\boxed{\rho(A) \leq \min(m,n)}$

Una matrice ha $\rho(A) = 0 \iff$ è nulla (tutti i coefficienti sono 0)

RIDUZIONE PER RIGHE DI UNA MATRICE

Sia $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, ridurre A per righe vuol dire trovare una matrice A':

a) $A' \in \mathbb{K}^{m,n}$

b) A' sia ridotta per righe

c) A e A' abbiano lo stesso spazio delle righe.

Per ridurre una matrice si possono usare 3 tipi di trasformazioni elementari mediante le quali si può ridurre in modo organizzato una matrice.

TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

NON CAMBIANO LO SPAZIO DELLE RIGHE

1° TIPO — E1: Sommare ad una riga diversa moltiplicata per una costante.
Ovvero: $\boxed{R_i \to R_i + aR_j}$

Es: $R_2 \to R_2 + 2R_3$

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2° TIPO — E2: Scambio di due righe
Ovvero: $\boxed{R_i \leftrightarrow R_j}$

3° TIPO — E3: Moltiplicare una riga per una costante $a \in \mathbb{K} \neq 0$.
Ovvero: $\boxed{R_i \to aR_i}$

METODO DEL PIVOT

È conveniente fare attenzione alla scelta dell'elemento non nullo sotto il quale si annullano gli elementi. Conviene sempre scegliere l'elemento di valore assoluto più grande (se non ci sono situazioni favorevoli tipo la presenza di zeri.) Il metodo di riduzione con questa scelta è detto metodo del pivot (pivot = il + alto)

N.B. Ogni sottospazio di $\mathbb{K}^n$ si può considerare come spazio delle righe di una matrice.

Il metodo della riduzione si può quindi applicare per trovare una base e la dimensione di un sottospazio.

STUDIO DEI SOTTOSPAZI di $\mathbb{K}^n$

Sia $W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_m)$ un sottospazio di $\mathbb{K}^n$. Per trovare $\dim W$ e una sua base si procede:

1. Si pone:

$$w_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$$
$$w_2 = (a_{21}, \dots, a_{2n})$$
$$\dots$$
$$w_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

2. Si costruisce la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, & \dots, & a_{mn} \end{pmatrix}$$

cioè A avente $w_1, \dots, w_m$ come vettori riga.

3. Si riduce A per righe ottenendo A'

$\Rightarrow \rho(A') = \rho(A) = \dim W$

$\Rightarrow$ le righe non nulle di A' formano una base dello spazio di W

DECOMPOSIZIONE DI UN ELEMENTO DI UNO SPAZIO RISPETTO AD UNA BASE B

Sia $\dim V = n$

Sia $B = (u_1, \dots, u_n)$ una base di V

Allora:

$\forall x \in V$ si scrive in modo unico come c.l. di $u_1, \dots, u_n$,

cioè:

$$\boxed{\forall x \in V \ \exists! \ \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{SCALARI = COMPONENTI DI } x \text{ rispetto a } B} \in \mathbb{R} : \ x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n}$$

DECOMPOSIZIONE DI x RISPETTO A B

$$\boxed{[x]_B = (x_1, \dots x_n)}$$

Dati $v_1 \dots v_k \in V$, la matrice $k \times n$ si costruisce disponendo $[v_1]_B, \dots, [v_k]_B$ sulle righe.

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}_B \Rightarrow \begin{array}{l} \text{se } [v_1]_B = (a_{11}, \dots, a_{1n}) \\ \dots \\ \text{se } [v_k]_B = (a_{k1}, \dots, a_{kn}) \end{array} \Rightarrow A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice di } v_1 \dots v_k \text{ rispetto alla base } B}$$

$\Rightarrow$ • $\rho(A) =$ dim del sottospazio $W = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_k)$

• il numero massimo di vettori l.i. tra $v_1, \dots, v_k$

Considerati n vettori $v_1 \dots v_n$ in uno spazio V di dimensione n.
Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $v_1, \dots, v_n$ sono una base di V
- $v_1, \dots, v_n$ sono l.i. e generano tutto V
- la matrice di $v_1, \dots, v_n$ rispetto ad una base di V ha $\rho(A) = n$
- " " " " " " " " ha $\boxed{\det(A) \neq 0}$

SISTEMI LINEARI

Un sistema lineare di m equazioni in n incognite a coefficienti in $\mathbb{R}$ si può scrivere come $\boxed{\text{equazione matriciale } AX = B}$

sistema lineare $\longrightarrow$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{— — — — — — — —} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\boxed{AX=B}$ $\Rightarrow$ equazione matriciale dove:

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice dei coefficienti

$X = (x_j) \in \mathbb{R}^{n,1}$ è la colonna delle incognite

$B = (b_j) \in \mathbb{R}^{m,1}$ è la colonna dei termini noti

Es:
$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 5x + 2z = 3 \\ y + 5z = 6 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \text{matrice completa del sistema}$$

Un sistema è **omogeneo** se ha tutti i termini noti nulli. Esso è SEMPRE COMPATIBILE ovvero ha sempre la soluzione banale.

SISTEMA RIDOTTO

Il sistema lineare $AX = B$ si dice ridotto se la matrice A è ridotta per righe.

Es: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

SISTEMA FORTEMENTE RIDOTTO

Il sistema lineare $AX = B$ si dice fortemente ridotto se la matrice A è ridotta per righe e se l'elemento speciale di ogni riga ha al di sopra di se tutti zero.

Es: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

N.B. I sistemi ridotti vengono risolti per sostituzione.

Un sistema ridotto ha 1 sola soluzione se $\rho(A) = \rho(A|B) = n$

Ovvero quando il sistema è risolubile e inoltre il numero delle eq. non nulle è uguale al numero delle incognite

SISTEMA LINEARE OMOGENEO

I sistemi lineari omogenei servono:

1. esprimere la soluzione generale di un sistema lineare
2. trovare una base del nucleo di 1 applicazione lineare
3. Studiare gli autovettori e autovalori

TEO. Sia $AX = 0$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni e n incognite. Allora l'insieme delle soluzioni è un sottospazio V di $\mathbb{K}^n$

TEO. Sia $AX=0$ un sistema lineare omogeneo in n incognite e sia $p = \rho(A)$. Allora lo spazio vettoriale V delle soluzioni ha dimensione $n-p$ (= al numero delle incognite libere)

$\dim V = n-p$

Es: Consideriamo $AX = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sia V lo spazio vettoriale delle soluzioni. Poichè $\rho(A) = 2$

$$\Rightarrow \dim(V) = 4-2=2$$

SOLUZIONE GENERALE dato $AX=B$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni di $AX=0$ sono le terne $(x, 0, -x)$

Poichè una soluzione di $AX=B$ è la terna $(1, -2, 0)$

$\Rightarrow$ la soluzione generale è $(x+1, -2, -x)$, $x \in \mathbb{R}$

L'equazione matriciale $\boxed{XA = B}$ si può ricondurre all'equazione $\boxed{{}^tA\,{}^tX = {}^tB}$ e si risolve poi con il metodo di riduzione.

MATRICI INVERTIBILI

Si dice che una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ (quadrata di ordine n) è invertibile se $\exists$ $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ tale che

$$\boxed{AB = BA = I_n} \Rightarrow B \equiv A^{-1} \quad (A^{-1} \text{ è unica})$$

Se una matrice A è quadrata di ordine n $\Rightarrow$ A ha rango max

N.B. 1 matrice quadrata è invertibile $\Leftrightarrow$ $\rho(A) = \max$
Per trovare l'inversa A^{-1} basta risolvere $\boxed{AX = I}$!

CONDIZIONI EQUIVALENTI TRA LORO

- A è invertibile
- $\det \neq 0$
- $\rho(A) = n = \max$
- righe di A tutte l.i., colonne di A tutte l.i.

$\rightarrow$ A è invertibile $\Leftrightarrow$ ${}^tA$ è invertibile $\Rightarrow$ $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Se A e B invertibili $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

COMPLEMENTO ALGEBRICO

di una matrice quadrata $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$ di a_{ij} è il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}$$

PRIMO TEOREMA DI LAPLACE

Se $n \geq 4$ il determinante di una matrice si calcola:

$$\boxed{\begin{aligned} \det A &= a_{i1} A_{i1} + \dots + a_{in} A_{in} \\ \det A &= a_{1j} A_{1j} + \dots + a_{nj} A_{nj} \end{aligned}}$$

Quindi det A si ottiene moltiplicando ciascun elemento di una riga (o colonna) per il proprio complemento algebrico e sommando i prodotti.

$$A_{ij} = \rightarrow \begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Es:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 0 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$1 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 + 4(4-6) = -6$$

MATRICE INVERTIBILE

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ allora: (quadrata)

a) A è invertibile $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det A \neq 0}$

b) se $\det A \neq 0$ l'inversa di $A = (a_{ij})$ è

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ji})} \longrightarrow \text{scambio di indici!}$$

c) se A è invertibile $\Leftrightarrow$ $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = 1$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 0 = 0$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

!! TEO. Se A è una matrice $\in \mathbb{K}^{n,n}$ quadrata le seguenti condizioni sono equivalenti:

a) A è invertibile $(\exists B : AB = I)$

b) $\rho(A) = n$

c) $AX = 0$ ha solo la soluzione nulla

d) $AX = B$ ha una e una sola soluzione $\forall B$

e) $|A| \neq 0$

TEO. Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ una matrice quadrata, allora è vero che

- $\rho(A) < n$
- $\boxed{AX = 0 \text{ ha soluzioni non nulle} \iff \det A = 0}$
- le colonne e le righe sono l.d.
- $\boxed{\det A = 0}$

Es: Stabilisci per quali valori reali di λ il sistema ha soluzioni non nulle

$$\begin{cases} x + y + \lambda z = 0 \\ \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y - z = 0 \end{cases}$$

Soluzioni non nulle $\iff \det A = 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 1(-\lambda) + \lambda(\lambda^2 - 1)$$

$$-1 + \cancel{\lambda} + \lambda^3 - \cancel{\lambda} = 0 \qquad \lambda^3 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Soluzione $X = (x, -x, 0)$

→ proprietà elementari delle a.l.

Siano V, W due $\mathbb{K}$ spazi vettoriali e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare si ha:

- $\boxed{f(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) = a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n)}$ $\forall a_n \in K$, $\forall x \in V$
- $\boxed{f(0_V) = 0_W}$
- $\boxed{f(-v) = -f(v) \quad \forall v \in V}$

COMPOSIZIONI DI APPLICAZIONI LINEARI

Se A, B, C sono tre insiemi ed $f: A \to B$, $g: B \to C$ sono due applicazioni, l'applicazione composta di f e g è l'applicazione $g \circ f : A \to C$

$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))} \quad \forall x \in A$$

APPLICAZIONI LINEARI INIETTIVE

Sia $f: V \to W$ un'applicazione è detta **iniettiva** se, presi comunque $u, v \in V$ con $u \neq v$, risulta $f(u) \neq f(v)$, o equivalentemente se, presi comunque $u, v \in V$ con $f(u) = f(v)$ $\Rightarrow$ $u = v$

$$\boxed{f \text{ è iniettiva} \iff \ker f = \{0_V\}} \iff \rho(A) = n$$

APPLICAZIONI LINEARI SURIETTIVA

Un'applicazione $f: V \to W$ è detta ~~suriettiva~~ o **surgettiva** se:

$$\boxed{f \text{ è suriettiva} \iff \operatorname{Im} f = W} \iff \dim \operatorname{Im} f = \dim W$$
$$\iff \rho(A) = m$$

ISOMORFISMI

Siano V e W due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare. Tale applicazione è detta **isomorfismo** tra V e W se è biunivoca

$$\boxed{f \text{ è isomorfismo} \iff \ker f = \{0_V\} \iff \operatorname{Im} f = W}$$

ENDOMORFISMO

Sia V un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale, un'applicazione $f: V \to V$ si dice endomorfismo

$$\boxed{f \text{ è endomorfismo} \iff f: V \to V}$$

MATRICE ASSOCIATA E IMMAGINE

a) il sottospazio $\operatorname{Im} f$ è generato dai vettori di W aventi per componenti rispetto ad F le colonne di A

b) $\operatorname{Im} f$ è isomorfo allo spazio di colonne di A

c) $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = \rho(A)}$

N.B. Per trovare una base $\operatorname{Im} f$ si procede o:

1. si applica il metodo degli scarti successivi: le colonne rimanenti danno le componenti, rispetto alla base F, di una base di $\operatorname{Im} f$

2. Si riduce per colonne la matrice A: le colonne non nulle della matrice ridotta danno le componenti, rispetto ad F, di una base di $\operatorname{Im} f$.

Data la matrice associata, e $f: V \to W$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \rho(A)}$$

$= n - \rho(A) = \#$ parametri liberi del sistema $MX = 0$

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

Sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare allora:

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V}$$

Se $\dim V < \dim W$, f non è suriettiva

se $\dim V > \dim W$, f non è iniettiva

se $\dim V = \dim W \iff f$ è un isomorfismo

$\iff f$ è iniettiva

$\iff f$ è suriettiva

MATRICE DI CAMBIO BASE

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano

$$\underbrace{E = (e_1, \ldots, e_n), \quad F = (f_1, \ldots, f_n)}_{\text{basi di } V}$$

$\Rightarrow \exists \; P_{E,F} = (p_{ij}) \in \mathbb{K}^{n,n}$:

$$\begin{cases} f_1 = p_{11} e_1 + \ldots + p_{n1} e_n \\ f_2 = p_{1n} e_n + \ldots + p_{nn} e_n \end{cases}$$

Le colonne di $P_{E,F}$ sono date dalle componenti degli elementi di F rispetto ad E. La matrice $P_{E,F}$ è detta matrice di cambio base da E ad F (o di passaggio). $\boxed{P_{E,F}^{-1} = P_{F,E}}$

Se $v \in V$: $v(x_1, \ldots, x_n)$ rispetto alla base E e $v(y_1, \ldots, y_n)$ rispetto a F. (componenti)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{E,F} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P_{F,E} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 140

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

AUTOVALORE Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo

Un numero $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di $\varphi \iff$ $\exists$ un vettore non nullo $v \in V$: $\boxed{\varphi(v) = \lambda v}$

ovvero $\boxed{\varphi(v) - \lambda v = 0}$

ha soluzioni non nulle in V

$\Rightarrow$ $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore $\iff$ $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi(v) - \lambda v) \neq \{0\}}$

ovvero $\iff$ $\boxed{\varphi_\lambda(v) = \varphi(v) - \lambda v}$ non è iniettiva

AUTOVETTORE Sia λ un autovalore di $\varphi : V \to V$

$v \in V$ si dice autovettore associato a $\lambda \iff \varphi(v) = \lambda v$

AUTOSPAZIO è l'insieme degli autovettori associati all'autovalore λ e si denota con V_λ

(sottospazio di V)

N.B. Autovettori non nulli associati ad autovalori distinti sono l. i.

$V_1 + \ldots + V_m$ è una somma diretta

MOLTEPLICITÀ DI UN AUTOVALORE

Sia V uno spazio su $\mathbb{K}$
Sia λ un autovalore di $\varphi : V \to V$

λ ha molteplicità m se λ è una radice di molteplicità m del p.c. di φ

DIMENSIONE DEGLI AUTOSPAZI

Sia V uno spazio su $\mathbb{K}$
Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo
Sia λ un autovalore di φ avente molteplicità m $\Rightarrow$

$$\boxed{1 \leq \dim V_\lambda \leq m}$$

ENDOMORFISMO SEMPLICE

Sia V uno spazio su $\mathbb{K}$
Sia $\varphi : V \to V$ un endomorfismo
φ è semplice se $\exists$ una base E : $M_\varphi^{E,E}$ è una matrice diagonale del tipo

$$M_\varphi^{E,E} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Siano $\lambda_1 \ldots \lambda_s$ gli autovalori di φ. Allora sono equivalenti

1) φ è semplice
2) $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$
3) $\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_s}$
4) tutte le radici del p.c. di φ sono in $\mathbb{K}$ e $\forall \lambda_i$ con molteplicità m_{λ_i} si ha che $\dim V_{\lambda_i} = m_{\lambda_i}$

DIAGONALIZZAZIONE

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ quadrata si dice diagonalizzabile se $\exists$ $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ e $D \in \mathbb{K}^{n,n}$ diagonale : $\boxed{P^{-1}AP = D}$. In tal caso P diagonalizza A. (Con P invertibile).
Ciò si esprime anche dicendo che A e P sono simili.

N.B. MATRICI SIMILI HANNO LO STESSO p.c. $P(\lambda)$, e gli autovalori di una matrice diagonale sono gli elementi della sua diagonale (ciò vale anche se la matrice è triangolare)

TEO. DEL CRITERIO DI DIAGONALIZZABILITÀ

A è diagonalizzabile su $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$

a) tutte le radici di $P(\lambda)$ di A $\in \mathbb{K}$

b) $\forall \lambda$ di A risulta:

$$\boxed{\dim V_\lambda = \underset{\text{molteplicità}}{m_\lambda}}$$

ovvero

$$\boxed{\rho(A - \lambda I_n) = n - m_\lambda}$$

(Seconda condizione automaticamente verificata se $m_\lambda = 1$)

Se :
- $\exists$ una base di $\mathbb{K}^n$ composta da autovettori di A
- l'unione di basi degli autospazi di A è una base di $\mathbb{K}^n$
- $\mathbb{K}^n$ = somma diretta degli autospazi di A
- somma delle dimensioni degli autospazi di $A = n$

$\Rightarrow$ diagonalizzabile

PRODOTTI SCALARI E NORMA

PRODOTTO SCALARE

Sia V un $\mathbb{K}$ spazio, un'applicazione

$$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\boxed{(v, w) \rightarrow v \cdot w}$$

Si chiama prodotto scalare

NORMA

Sia V un $\mathbb{K}$ spazio, un'applicazione

$$f: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\boxed{v \rightarrow \|v\|}$$

si chiama norma e gode delle seguenti proprietà:

1) $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2) $\|a v\| = |a| \, \|v\|$
3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare)

NORMA ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALARE

Sia V un $\mathbb{K}$ spazio

$$\boxed{\|v\| = \sqrt{v \cdot v}}$$

NORMALIZZAZIONE DI UN VETTORE

$$\boxed{\text{norm } v = \frac{v}{\|v\|}}$$

$$\left[\left(\| x_1, \ldots, x_n \| \right) = \left(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \right) \right]$$

Come si costruisce una base ortonormale?

Procedimento di ORTONORMALIZZAZIONE

Sia $B(v_1, \dots, v_n)$ una base qualsiasi di V

Poniamo:

$$e_1 = \text{norm}(v_1)$$

$$e_2 = \text{norm}\left(v_2 - (v_2 \cdot e_1)\, e_1\right)$$

$$e_3 = \text{norm}\left(v_3 - \left[(v_3 \cdot e_1) e_1 + (v_3 \cdot e_2) e_2\right]\right)$$

$$\dots$$

$$e_n = \text{norm}\left(v_n - \left[(v_n \cdot e_1) e_1 + \dots + (v_{n-1} \cdot e_{n-1})\right] e_{n-1}\right)$$

$\Rightarrow$ l'insieme $O\{e_1, \dots, e_n\}$ è ortonormale

N.B. Se la base $B(v_1, \dots, v_n)$ è già ortogonale, per ottenere una base ORTONORMALE basta normalizzare tutti i vettori $v_1 \dots v_n$.

Ricorda: Sia $V = \mathbb{R}$ spazio vettoriale
$f : V \to V$ un endomorfismo
$E = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortonormale di V

Se la Matrice $M_f^{E,E}$ è simmetrica allora risulta:

- f è semplice
- gli autospazi di f sono a 2 a 2 ortogonali
- $\exists$ una base ortonormale di V formata da autovettori

Una matrice SIMMETRICA $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ è sempre diagonalizzabile e si può sempre diagonalizzare tramite una matrice ortogonale P che ha per colonne una base ortonormale di autovettori

TEOREMA SPETTRALE

Ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ mediante una matrice di passaggio ortogonale.

$\Rightarrow$ $\exists$ 1 base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di A
$\Rightarrow$ $\exists$ 1 matrice ortogonale che diagonalizza A.

$\Rightarrow$ Una matrice ortogonale che diagonalizza A si ottiene:

- determinando 1 base ortonormale per ogni autospazio di A
- unendone i vettori
- disponendoli sulle colonne di A

in modo che (ricordando che $N^{-1} = {}^tN$) risulta

matrice ortogonale

$$N^{-1} A N = {}^tN A N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ autovalori di A

Forme quadratiche equivalenti

Sia $q(x_1, \dots x_n) = {}^tXAX$.
Per effettuare un cambiamento di variabili da $X = {}^t(x_1 \dots x_n)$ ad $Y = {}^t(y_1 \dots y_n)$ significa che tra i vettori X ed Y intercorre la relazione

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{con } P \in \mathbb{R}^{n,n} \text{ matrice invertibile}$$

Quindi sia $q(X) = {}^tXAX$, sia poi $X = PY$

$$\Rightarrow \quad r(Y) = q(PY) = {}^t(PY)A(PY)$$

$$\underbrace{r(Y) = {}^tY\,{}^tPAPY}_{\text{forma quadratica in } y_1 \dots y_n \text{ la cui matrice associata è } {}^tPAP}$$

Due forme quadratiche che si possono ottenere l'una dall'altra con un cambiamento lineare di variabili si dicono **equivalenti**.

Due forme quadratiche equivalenti hanno lo stesso rango e lo stesso segno.

FORMA CANONICA DI UNA QUADRICA

Una forma quadratica è in forma **canonica** se in essa compaiono solamente i termini al quadrato ovvero se e solo se la matrice associata alla forma è diagonale.

Ogni forma quadratica $q(X) = {}^tX A X$ ha una forma canonica del tipo

$$\boxed{r(Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2}$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice A
dove $Y = PX$ con P matrice ortogonale che ha sulle colonne le componenti di una base ortonormale di autovettori.

SEGNO

Sia $q(X) = {}^tX A X$ una forma quadratica in n variabili
Sia P = n° autovettori positivi di A
Sia N = n° autovalori negativi di A
Sia Z = n° autovalori nulli di A

$$\Rightarrow \boxed{P + N + Z = n} \quad e \quad \boxed{P + N = \rho(A)}$$

La forma quadratica q è:

- definita positiva $\Leftrightarrow$ $P = n$
- definita negativa $\Leftrightarrow$ $N = n$
- semidefinita positiva $\Leftrightarrow$ $N = 0$
- semidefinita negativa $\Leftrightarrow$ $P = 0$
- indefinita $\Leftrightarrow$ $P > 0$ e $N > 0$

GEOMETRIA NEL PIANO

RETTA: $\exists$ 1 e 1 sola retta r passante per un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e parallela ad un vettore $v = l\,i + m\,j$

$$\boxed{P_t = P_0 + t\,v}$$

esplicitandola in termini di componenti:

$$r: \boxed{\begin{cases} x = \underset{P_0}{x_0} + \underset{v}{l}\,t \\ y = y_0 + m\,t \end{cases}}$$

→ equazioni parametriche della retta r passante per P_0 e // a v

→ Ogni retta del piano è rappresentata da un'equazione del tipo:

$$s: \boxed{a\,x + b\,y + c = 0}$$

→ equazione cartesiana

→ il vettore $w = a\,i + b\,j$ è ortogonale alla retta s

RETTA PASSANTE PER UN PUNO E $\perp$ AD UN VETTORE

$P_0 = (x_0, y_0) \qquad w = a\,i + b\,j$

$$\Rightarrow \boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0}$$

→ retta

RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI

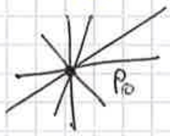
$P_0 = (x_0, y_0) \qquad P_1 (x_1, y_1)$

$$\boxed{\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}} \sim \boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0}$$

FASCIO DI RETTE

Sia P_0 un punto del piano. Il fascio di rette per P_0 è l'insieme di tutte le rette del piano passanti per P_0.

F. PROPRIO



$P_0(x_0, y_0)$

$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

F. IMPROPRIO

$$\boxed{y = mx + k}$$

Date 2 rette

$$\left.\begin{aligned} r_1 &: f(x,y) = ax + by + c = 0 \\ r_2 &: g(x,y) = a'x + b'y + c' = 0 \end{aligned}\right\} P_0$$

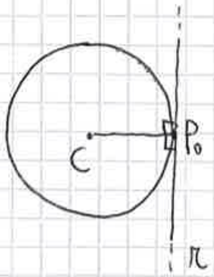
$\Rightarrow$ fascio delle rette passanti per P_0 è

$$\boxed{\lambda f(x,y) + \mu g(x,y) = 0}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

RETTA TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA PASSANTE PER $P_0 \in \mathcal{C}$

$C = (\alpha, \beta) \qquad R > 0 \qquad P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$



$r \perp \overline{CP_0}$

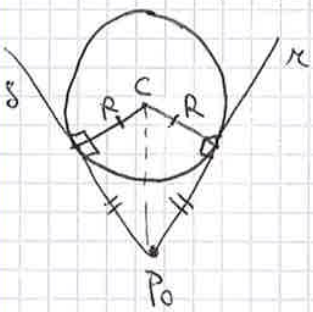
$r \parallel \vec{w} = (x_0 - \alpha)i + (y_0 - \beta)i$

$\Rightarrow \quad r: \boxed{(x_0 - \alpha)(x - x_0) + (y_0 - \beta)(y - y_0) = 0}$

OPPURE

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$$

- Se $P_0 \notin \mathcal{C} \Rightarrow \exists$ 2 rette tangenti



r ed s rette passanti per P_0 aventi distanza dal centro $= R$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ d(C, s) = R \end{cases}}$$

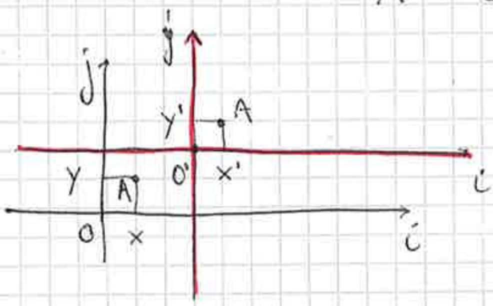
CAMBIAMENTO DI RIFERIMENTO NEL PIANO

TRASLAZIONE

$$\boxed{O\,i\,j \longrightarrow O'\,i\,j}$$

$A \in Oij = (x, y)$

$A \in O'ij = (x', y')$



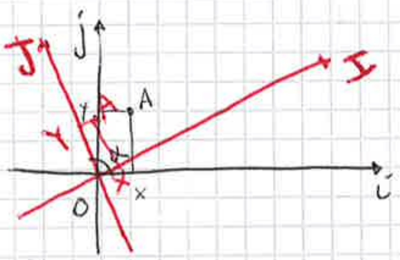
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}}$$

ROTAZIONE

$$\boxed{O\,i\,j \longrightarrow O\,I\,J}$$

$A \in Oij = (x, y)$

$A \in OIJ = (X, Y)$



$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrice del cambio di base $\boxed{P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1}$

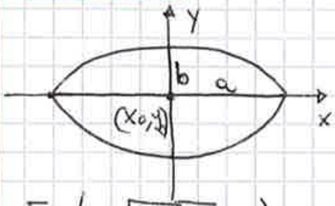
$$\boxed{\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' &= -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}}$$

CONICHE

I luoghi dei punti che si possono rappresentare nel piano attraverso equazioni di 2° grado a coefficienti reali sono detti CONICHE

Coniche non degeneri sono ellisse, iperbole e parabola

ELLISSE



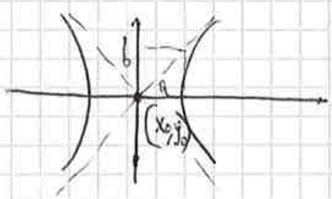
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1} \rightarrow \text{forma cartesiana}$$

di centro $C(x_0, y_0)$
e semiassi $a, b > 0$

$F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2}\,;0\right)$
$F_2\left(\sqrt{a^2-b^2}\,;0\right)$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a\cos t \\ y = y_0 + b\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}} \rightarrow \text{forma parametrica}$$

IPERBOLE



$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1} \rightarrow \text{forma cartesiana}$$

di centro $C(x_0, y_0)$
semiassi $a, b > 0$

$F_1\left(-\sqrt{a^2+b^2}\,;0\right)$
$F_2\left(\sqrt{a^2+b^2}\,;0\right)$

asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x$

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 \pm a\cosh t \\ y = y_0 + b\,\mathrm{senh}\,t \end{cases}} \rightarrow \text{ramo dell'iperbole in forma parametrica}$$

$+ \rightarrow$ ramo dx
$- \rightarrow$ ramo sx

CURVE IN FORMA PARAMETRICA

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \;\; C = \operatorname{im}\gamma = \{P \in \mathbb{R}^2 : P = \gamma(t),\ t \in I\}$$

Una parametrizzazione γ è detta:

- semplice se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$
- regolare se $\gamma \in C^1(I)$ e $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall\, t \in I^\circ$

CONICHE

forma generale

$$\boxed{f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}}$$

↳ le matrici simmetriche:

$$B = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice associata a } f} \qquad A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{matrice dei termini di 2° grado}}$$

→ by Pibazza:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

1°) Vedere se è degenere o no

$$B = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{vmatrix} \Rightarrow A = \begin{vmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta \neq 0 \text{ Conica non degenere}$$

se $\Delta =$ Conica degenere

$$\boxed{\text{se } \begin{cases} \Delta < 0 \to \text{iperbole} \\ \Delta = 0 \to \text{parabola} \\ \Delta > 0 \to \text{ellisse} \end{cases}}$$

→ a punti reali se $Tr(A)\det B < 0$

→ immaginaria se $Tr(A)\det B > 0$

NB. Sia $\Delta: f(x,y)=0$ una conica e siano A e B le matrici associate

$$\boxed{\Delta \text{ è degenere } \Longleftrightarrow \det B = 0}$$

$\rho(B) = 2 \Longleftrightarrow \Delta$ è $r \cup s$ (unione di 2 rette distinte)

$\rho(B) = 1 \Longleftrightarrow \Delta$ è $r \cup s$ (unione di 2 rette coincidenti)

NB Le coniche dotate di centro di simmetria, ellissi e iperboli si dicono coniche a centro.

Sia $\Gamma: f(x,y) = 0$ una conica a centro la cui matrice associata è

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema lineare sono il centro della conica.

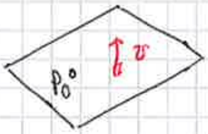
PIANO: Ogni piano dello spazio è rappresentato da:

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

e il vettore $v = ai + bj + ck$ è $\perp$ al piano

PIANO PASSANTE PER 1 PUNTO E $\perp$ A UN VETTORE

N.B. Se π è un piano ortogonale al vettore $v = ai + bj + ck$ e passante per un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$



$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

PIANO PASSANTE PER 3 PUNTI NON ALLINEATI

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ $\quad$ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $\quad$ $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\boxed{\pi = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0}$$

PIANO PASSANTE PER 1 PUNTO E DUE VETTORI // ad α

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ $\quad$ $v = (a, b, c)$ $\quad$ $w = (a', b', c')$

$\Rightarrow u = v \wedge w \Rightarrow u \perp$ ad $\alpha \Rightarrow u(d, e, f)$

$$\Rightarrow \boxed{d(x - x_0) + e(y - y_0) + f(z - z_0) = 0}$$

Quindi 2 piani si intersecano in una retta

$$\Longleftrightarrow$$

$$\boxed{\rho\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2}$$

$\Rightarrow$ il sistema $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ → rappresenta l'equazione cartesiana della retta

N.B. Se è data la retta come intersezione di 2 piani
Per scrivere r in forma parametrica è necessario individuare un punto $\in$ alla retta (data dalla sol. del sist) e un vettore parallelo a r dato dal seguente determinante:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ in questo modo è possibile passare dalla forma cartesiana a quella parametrica

VICEVERSA data $r \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

eliminando il parametro t tra le prime due equazioni e le ultime due, si trovano le eq. di 2 piani che hanno r come intersezione essi sono:

$$\alpha : \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad ; \quad \alpha' : \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$