NUMERO: 1723A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Analisi II - prof. Baciotti

INDICE

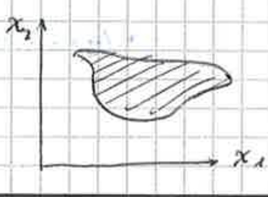
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 84

* Se $\boxed{l_s = l_R}$ $\Rightarrow$ A è misurabile $\rightarrow$ $m(A) = l_s = l_R$ (limiti coincidenti)

* Se $\boxed{l_s < l_R}$ $\Rightarrow$ A non è misurabile $\rightarrow$ $m(A)$ $\nexists$

MISURA DI PEANO-JORDAN

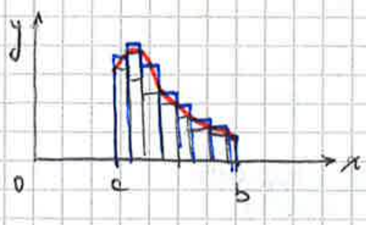
PROPOSIZIONE: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato è misurabile $\Leftrightarrow$ la frontiera dell'insieme ha misura zero. In particolare risultano misurabili le regioni di piano delimitate da grafici di funzioni continue.

es: 

INTEGRALE DEFINITO

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ed $I[a,b]$

$\rightsquigarrow$ Supponiamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$



TRAPEZOIDE

$$T_{f,I} = \{(x,y) : x \in I,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

def. f è integrabile nel senso di REIMANN, se il trapezoide è misurabile e in tal caso si definisca:

$$\boxed{\int_I f(x)\,dx = m(T_{f,I})}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 84

INTEGRALI DOPPI

✦ MISURA DEL VOLUME ED INTEGRALE DOPPIO ESTESO AD UN RETTANGOLO

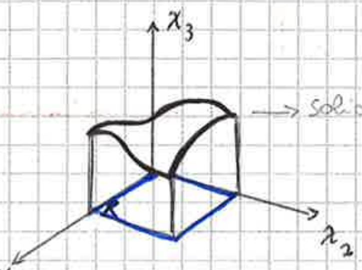
Per introdurre l'integrale definito nel senso di Reiman per funzioni di 2 variabili partiamo dalla nozione di volume.

Volume: misure dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$

Sia data: $f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $f(x_1, x_2) \geq 0$

$$\operatorname{dom}(f) = \underset{\text{rettangolo}}{R} = [a,b] \times [c,d]$$

$$\text{grafico}(f) \subset \mathbb{R}^3$$



→ solido → devo calcolare il volume

$$T_{f,R} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \wedge x_3 \in [0, f(x_1, x_2)] \right\}$$

se $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è limitato $\Rightarrow$ lo approssimo con un insieme più semplice
→ PARALLELEPIPEDO con facce // ai piani coordinati

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$
↳ PARALLELEPIPEDO

$$V(R) = m(R) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3)$$
↓ volume

PLURIPARALLELEPIPEDO: unione di un numero finito di parallelepipedi, sovrapposti al più per punti e alle loro facce

$$\Rightarrow m(R) = m(R_1) + m(R_2) + \dots + m(R_k) = V(R)$$

1) si costruisce 1 successione di pluriparallelepipedi sempre più piccoli $\{Q_n\}$
2) si costruisce 1 successione di pluriparallelepipedi sempre più grandi $\{P_n\}$

Le misure $\{m(Q_n)\}$ e $\{m(P_n)\}$ entrambe limitate costituiscono 2 successioni numeriche.
Esse ammettono limite finito:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} m(P_n) \leq \lim_{n \to +\infty} m(Q_n)}$$

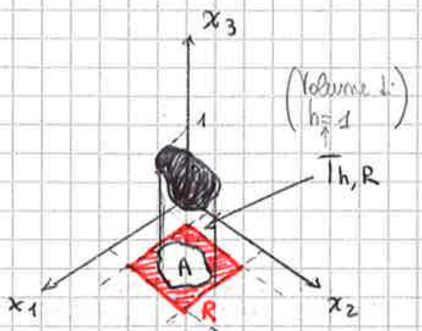
Quando i 2 limiti coincidono si dice che V è misurabile e si definisce il volume di V il numero $m(V) = l_P = l_Q$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 84

INTEGRALE DOPPIO ESTESO A UN INSIEME MISURABILE

(E se il dominio di integrazione non fosse un rettangolo R?)

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato e sia R un rettangolo contenente A



Introduciamo una funzione caratteristica o indicatrice di A $\rightarrow h(x_1, x_2)$ tale che:

$$\boxed{h(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x_1,x_2) \in A \\ 0 & \text{se } (x_1,x_2) \in R \wedge \notin A \end{cases}}$$

discontinua sulla frontiera di A

↦ h è integrabile su R $\Leftrightarrow$ A è misurabile come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_R h(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = m(A)} \cdot 1$$

↳ (sarebbe l'altezza del solido)

misura in $\mathbb{R}^2$ → INTEGRALE SEMPLICE

misura in $\mathbb{R}^2$ ↓ misura in $\mathbb{R}^3$

misura in $\mathbb{R}^3$ → INTEGRALE DOPPIO

INTEGRALE DOPPIO → misura in $\mathbb{R}^2$

Sia ora $f(x_1,x_2) : A \rightarrow \mathbb{R}$ e R un rettangolo che contiene A che è un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^2$

$$\iint_A f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = ? \quad \Rightarrow \text{ definiamo } \boxed{\tilde{f}(x_1,x_2) = \begin{cases} f(x_1,x_2) & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in R - \{A\} \end{cases}}$$

con $\tilde{f} : R \rightarrow \mathbb{R}$

↦ f è integrabile su A se $\tilde{f}$ è integrabile su R

$$\Rightarrow \boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = \iint_R \tilde{f}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 84

TEOREMA Sia $f(x_1, x_2)$ continua su R, allora l'integrale doppio iterato riferito $[a,b] \times [c,d] \equiv \int$ doppio nel senso di Riemann su R:

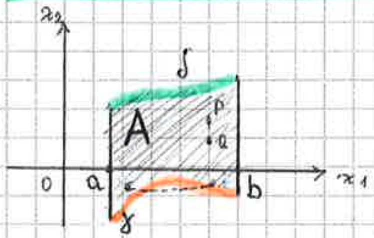
stessa cosa invertendo i parametri $\leftarrow$

$$\boxed{\iint_R f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1,x_2)\,dx_2 \right) dx_1}$$

$R = [a,b] \times [c,d]$

- Consideriamo 2 CASI (con domini di integrazione più generali)

A è VERTICALMENTE CONVESSO



Consideriamo 2 funzioni γ, δ continue

$$\begin{aligned} x_2 &= \delta(x_1) \\ x_2 &= \gamma(x_1) \end{aligned} \quad \forall x_1 \in [a,b] \text{ con } \gamma \le \delta$$

Se mi trovo sulla stessa verticale 2 punti $\in A$ stanno sempre dentro perché A è verticalmente convesso

$$A = \{(x_1,x_2) : a \le x_1 \le b \text{ con } \gamma(x_1) \le x_2 \le \delta(x_1)\}$$

TEOREMA Siano γ, δ 2 funzioni continue tali che $\gamma \le \delta$.
Sia $f(x_1,x_2)$ definita e continua

$$\Rightarrow F(x_1) = \int_{\gamma(x_1)}^{\delta(x_1)} f(x_1,x_2)\,dx_2$$

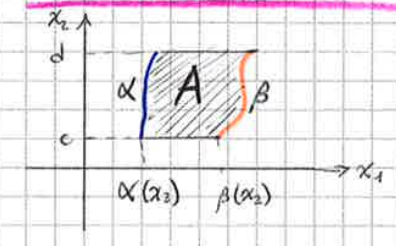
continua $\Rightarrow$ integro

$$\int_a^b F(x_1)\,dx_1$$

integrazione per verticali

$$\Rightarrow \boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_a^b \left(\int_{\gamma(x_1)}^{\delta(x_1)} f(x_1,x_2)\,dx_2 \right) dx_1}$$

A è ORIZZONTALMENTE CONVESSO



Consideriamo 2 funzioni α, β continue

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha(x_2) \\ x_1 &= \beta(x_2) \end{aligned} \quad \forall x_2 \in [c,d] \text{ con } \alpha \le \beta$$

Se mi trovo sulla stessa orizzontale 2 punti $\in A$ stanno sempre dentro perché A è orizzontalmente convesso

$$A = \{(x_1,x_2) : c \le x_2 \le d \text{ con } \alpha(x_2) \le x_1 \le \beta(x_2)\}$$

TEOREMA Siano α, β 2 funzioni continue tali che $\alpha \le \beta$
Sia $f(x_1,x_2)$ definita e continua

$$\Rightarrow F(x_2) = \int_{\alpha(x_2)}^{\beta(x_2)} f(x_1,x_2)\,dx_1$$

continua $\Rightarrow$ integro

$$\int_c^d F(x_2)\,dx_2$$

integrazione per orizzontali

$$\Rightarrow \boxed{\iint_A f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = \int_c^d \left(\int_{\alpha(x_2)}^{\beta(x_2)} f(x_1,x_2)\,dx_1 \right) dx_2}$$

$\hookrightarrow$ FORMULE DI RIDUZIONE DEGLI INTEGRALI DOPPI $\hookleftarrow$

CALCOLO DI INTEGRALI DOPPI CON L'USO DI SOSTITUZIONI

(cambiamento di coordinate)

Risulta utile fare ricorso a trasformazioni di tipo geometrico mediante le quali la forma del dominio viene semplificata. Per arrivare al risultato desiderato, bisognerà compensare la modifica apportata attraverso il fattore $\varphi'(t)$ detto termine compensatore

per l'integrale semplice ←

$$\boxed{\int_a^b f(x_1)\,dx_1 = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt}$$

CAMBIAMENTI DI COORDINATE IN $\mathbb{R}^2$

Sia A una regione del piano $x_1 x_2$

Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una funzione continua definita su A

Consideriamo un cambiamento di coordinate $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$T:\begin{cases} x_1 = \psi_1(u_1,u_2) \\ x_2 = \psi_2(u_1,u_2)\end{cases} \longrightarrow \underbrace{\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1,x_2) \\ u_2 = \varphi_2(x_1,x_2)\end{cases}}_{\text{trasformazione inversa}} \quad T^{-1}$$

(con ψ_1 e ψ_2 funzioni differenziabili)

(Applico T ad A e trovo la regione B)

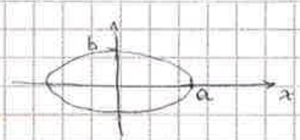
CONDIZIONI

1. T deve essere una applicazione BIUNIVOCA (devo trovare l'inversa) ovvero INVERTIBILE
2. $T\in C^1$
3. $\underbrace{\det J_T(u_1,u_2)}_{\text{MATRICE JACOBIANA}} \neq 0$ ← deve essere non singolare $\forall (u_1,u_2)$

MATRICE JACOBIANA 2X2 (matrice del cambiamento di base)

$$\boxed{J_T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial u_2} \\[2ex] \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial u_2}\end{pmatrix}}$$

5 COORDINATE ELLITTICHE



$$T: \begin{cases} x_1 = a \rho \cos\theta \\ x_2 = b \rho \sin\theta \end{cases}$$

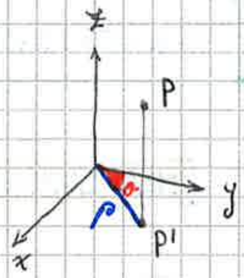
$$\boxed{\det J_T = ab\rho}$$

6 COORDINATE CILINDRICHE

triple

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\boxed{\det J_T = \rho}$$



7 COORDINATE SFERICHE

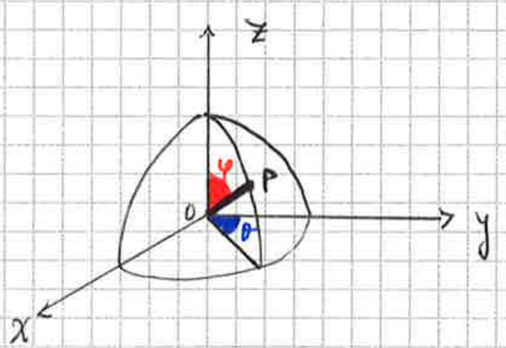
(polari sferiche)

triple

(lat, long) (φ, θ)

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos\theta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\boxed{\det J_T = \rho^2 \sin\varphi}$$

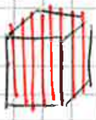


$\overline{OP} = \rho$

12

A seconda della forma del dominio vi sono 2 possibili strade per ridurre un integrale triplo:

- **RIDUZIONE PER FILI**



$$\boxed{\iiint_A f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_Q \left(\int_a^b f(x_1,x_2,x_3)\,dx_3\right) dx_1 dx_2}$$

- **RIDUZIONE PER STRATI**

$$\boxed{\iiint_A f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 dx_2 dx_3 = \int_a^b \left(\iint_Q f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 dx_2\right) dx_3}$$

Cambiamento di coordinate

$$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad T: \begin{cases} x = \Psi_1(u_1,u_2,u_3) \\ y = \Psi_2(u_1,u_2,u_3) \\ z = \Psi_3(u_1,u_2,u_3) \end{cases}$$

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{A'} f(\Psi_1,\Psi_2,\Psi_3)\cdot\left|\det J_T(u_1,u_2,u_3)\right| du_1\,du_2\,du_3}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 84

MOMENTO DI INERZIA: Sia $\overline{P} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ un punto di $\mathbb{R}^3$ fissato e $P(x_1, x_2, x_3)$ un punto variabile in un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^3$ su quale assumiamo la distribuzione uniforme di massa con densità pari ad 1. Il momento di inerzia di A rispetto a $\overline{P}$ è dato dalla quantità scalare:

se $\mu \neq 1$

$\Rightarrow I_{\overline{P}} = \iiint_A d(P,\overline{P})^2 \cdot \mu(x_1,x_2,x_3)\, dx_{123}$

MOMENTO DI INERZIA RISPETTO AD 1 PUNTO

$$\boxed{I_{\overline{P}} = \iiint_A d(P,\overline{P})^2 \, dx_1\, dx_2 dx_3}$$

rispetto ad 1 retta $\Rightarrow d(P, r)^2$

$$I_{\overline{P}} \cdot \dot{\omega} = M$$

M: momento delle forze

$\longrightarrow$ I misura la resistenza che la figura A oppone alle forze che cercano di farla mettere in rotazione

CURVE E LUNGHEZZA DI UNA CURVA

✦ CURVE

Le curve possono essere esplicitate o in forma cartesiana o in forma parametrica e i 2 modi di rappresentarle sono del tutto equivalenti

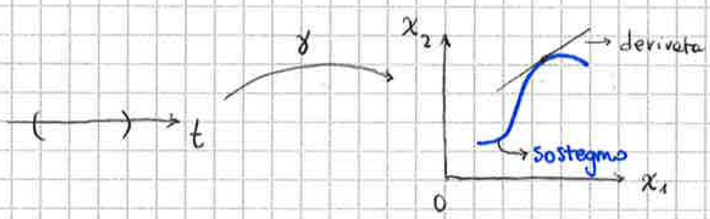
→ CURVE IN FORMA PARAMETRICA IN $\mathbb{R}^n$

funzione da un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$: $I \to \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

curva

- una curva è **SEMPLICE** se γ è iniettiva (no valori di t che hanno la stessa immagine)
- l' IMMAGINE in $\mathbb{R}^n$ di γ è detta **SOSTEGNO**
- **SENSO DI PERCORRENZA** : relazione di ordine dei punti di sostegno indotto dalla variazione di t
- una curva è **REGOLARE** quando per ogni componente $i, \dots, N$
  $\gamma_i(t)$ è CONTINUA, DERIVABILE, $\gamma' \in C^1$ $\forall t \in I$
  e $\gamma'(t) \neq 0$.



→ funzione tg alla curva data

$\gamma'(t) : I \to \mathbb{R}^n$

è un vettore che ci dice la direzione e la velocità con cui mi sposto

→ Se prendiamo un intervallo chiuso $[a, b] \subset I$ ⇒ ARCO DI CURVA

↳ estremi intervallo sono degli scalari

$\gamma(a), \gamma(b) \in \mathbb{R}^n$ $\xrightarrow{\text{caso particolare}}$ $\boxed{\gamma(a) \equiv \gamma(b)}$ → CURVA CHIUSA (semplice ma eccezione dei punti di estremo)

↳ estremi curva sono dei vettori

es:  → CURVA CHIUSA SEMPLICE

 → CURVA CHIUSA NON SEMPLICE

$$|\alpha'(\tau)|$$

per $\alpha' > 0$

$$\Rightarrow \int_c^d \alpha'(\tau) \sqrt{(\gamma_1'(\alpha(\tau)))^2 + (\gamma_2'(\alpha(\tau)))^2}\, d\tau$$

per $\alpha' < 0$

$$-\int_c^d \alpha'(\tau) \sqrt{(\gamma_1'(\alpha(\tau)))^2 + (\gamma_2'(\alpha(\tau)))^2}\, d\tau$$

effettuo una sostituzione ponendo $t = \alpha(\tau)$

$$\Rightarrow \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt$$

$$\Rightarrow -\int_b^a \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}\, dt$$

sono uguali

$$\Rightarrow l_\delta = l_\gamma$$

c.v.d.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 84

possiamo estendere la definizione di integrale curvilineo anche nel caso di **CURVE REGOLARI A TRATTI**, ovvero per una curva continua per la quale la condizione di regolarità è violata, al più, in un numero finito di punti.

Per la proprietà di additività degli integrali rispetto al dominio di integrazione data una suddivisione dell'intervallo $[a,b]$ come segue:

$$t_0 = a \quad t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad \dots \quad b = t_m$$

possiamo scrivere

$$\boxed{\int_\gamma f \, ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} f \, ds = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt}$$

↳ intendo curve diverse

⇝ "somme di curve regolari"

ROTORE

Il rotore è un operatore differenziale che caratterizza il moto di rotazione in quanto fornisce le stesse informazioni del vettore velocità angolare

(CAMPO VETTORIALE $\xrightarrow{in}$ CAMPO VETTORIALE)

def. Il rotore è un operatore differenziale che agisce trasformando un campo vettoriale $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ in un nuovo campo vettoriale di cui si assumono di classe C^1 tutte le sue componenti

Sia $\boxed{F(x_1, x_2, x_3) = \left(f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3)\right)}$

$$\text{rot } F = \text{curl } F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Può essere utile talvolta indicare i vettori mediante i versori della base canonica di $\mathbb{R}^3 (i, j, k)$

$$\Rightarrow \quad F(x_1, x_2, x_3) = (f_1, f_2, f_3) = f_1 i + f_2 j + f_3 k$$

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \text{rot } F = \nabla \wedge F$$

N.B. Se $\boxed{\text{rot } F = 0}$ $\Rightarrow$ CAMPO IRROTAZIONALE

CAMPI CONSERVATIVI

def. Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo, definito su un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che **F è conservativo su A** se $\exists$ una funzione scalare $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita su A e di classe C^1:

$$\boxed{\nabla g(x) = F(x)} \qquad \forall x \in A$$

g si dice un POTENZIALE del CAMPO F su A

Se F è un campo conservativo di $\mathbb{R}^3$ di classe C^1 allora:

$$\boxed{\text{rot } F(x) = 0}$$

CAMPO CONSERVATIVO $\Rightarrow$ IRROTAZIONALE

es: Sia $F(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$ è conservativo?

Per esserlo deve esistere $g(x_1, x_2)$:

$$\nabla g(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2}\right) = (x_2, -x_1) = F(x)$$

per essere $\frac{\partial g}{\partial x_1} = x_2 \Rightarrow g(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \varphi(x_2)$

ma nello stesso tempo $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -x_1$ ma $\frac{\partial g}{\partial x_2} = x_1 + \varphi'(x_2) \Rightarrow \neq$

allora il campo non è conservativo

INTEGRALI DI LINEA DEI CAMPI CONSERVATIVI

TEOREMA: Sia F un campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$ definito su A insieme aperto e continuo in A stesso. Sia g un potenziale di F su A e sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una qualsiasi curva regolare il cui sostegno sia incluso in A. Posto

$$\gamma(a) = P_0$$
$$\gamma(b) = P_1$$

si ha:

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = g(P_1) - g(P_0)}$$

Dimostrazione: (caso $\mathbb{R}^2$)

$$F = (f_1, f_2) \qquad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$$

$$\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = \int_a^b \left[\left(f_1(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\right)\gamma_1'(t) + \left(f_2(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\right)\gamma_2'(t)\right] dt =$$

$\nabla g = F \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_1} = f_1 , \frac{\partial g}{\partial x_2} = f_2$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\gamma_2'(t) \right) dt$$

poichè F è conservativo per la formula della derivata totale

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = \int_a^b \frac{d}{dt}\, g(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\, dt}$$

per il Teo fondamentale del Calcolo si ha $\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$

TEOREMA

Sia A un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$
Sia $F(x) : A \to \mathbb{R}^n$ un campo conservativo continuo
Se f e g sono entrambi potenziali di F su A allora
$\exists\, k \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f(x) = g(x) + k} \qquad \forall\, x \in A$$

dim.

x, $P_0 \in A$ (connesso) $\Rightarrow \exists\, \gamma$ che unisce P_0 ad x

P_0 ↳ fisso

x ↳ variabile

$$\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = f(x) - f(P_0) = g(x) - g(P_0)$$

$$f(x) = g(x) + \underbrace{f(P_0) - g(P_0)}_{= k}$$

TEOREMA

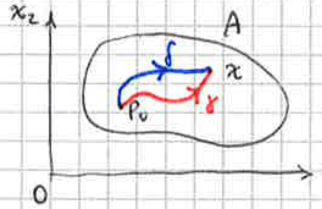
per accertare la conservatività di F bisognerebbe ovver verificato che le sue ∮ siano nulle per tutte le ∞ curve
⇓
inutile

Sia A un sottoinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$. Sia $F(x) : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Supponiamo che per ogni $P_0, P_1 \in A$ e $\forall\, \gamma, \delta$ (curve regolari a tratti aventi come estremi entrambe P_0 e P_1) si abbia

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = \int_\delta F \cdot \mathbf{t}}$$

$\Rightarrow$ allora $\boxed{F \text{ è conservativo in } A}$

dimostrazione



(P_0 fisso, x variabile) $\in A$

γ di estremi $(P_0, x) \to \exists$ xké A è connesso

$$\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = g(x) = \int_\delta F \cdot \mathbf{t}$$

↳ indipendente dal cammino

Verifico che $g(x)$ è effettivamente potenziale
ovvero $\nabla g(x) = F(x) \quad \forall\, x \in A$

GENERALIZZAZIONE TEOREMA DI GREEN

- Sia $F \in C^1$ definito su $A \subset \mathbb{R}^n$ → campo vettoriale
- Sia $\gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ chiusa, semplice, regolare a tratti
  - ↳ ⇒ divido $a = t_0 \; t_1 \; t_2 \ldots b = t_n$ ⇒ in $[t_{i-1}, t_i]$ γ è regolare
- γ_i = restrizione di γ su $[t_{i-1}, t_i]$
- Γ = sostegno di γ
- Ω = regione delimitata da γ
- $k = \Gamma \cup \Omega \subset A$

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = \int_{\gamma_1} F \cdot \mathbf{t} + \ldots + \int_{\gamma_N} F \cdot \mathbf{t} = \iint_k \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2}$$

N.B. REGOLA → Un osservatore che percorre la curva deve vedere K alla propria sinistra (senso ↺ antiorario)

p. 74

esempio:

$$F(x,y) = (2xy + 3x^2 \,,\, x^2)$$

$\downarrow$ è conservativo?

CONDIZIONE $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}$ $\Rightarrow$ CONSERVATIVO

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$2x = 2x$$

Posto $\bar{P} = (0,0)$

$$g(x,y) = \int_\gamma F \cdot \mathbf{t} = \int_0^x 3t^2\,dt + \int_0^y x^2\,dt = x^3 + x^2 y$$

$\Rightarrow$ potenziale generico $g(x_1,x_2) = x^3 + x^2 y + k$

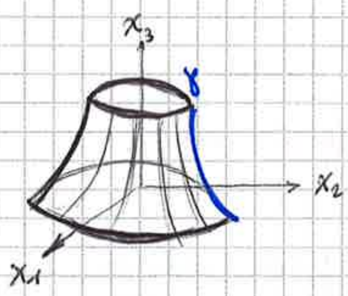
def. Due superfici σ e ρ si dicono equivalenti se esiste una trasformazione T (cambiamento di parametri) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\rho = \sigma \circ T$ con $T \in C^1$ e invertibile (ovvero $\det(J_T)_{(u_1,u_2)} \neq 0$)

- > 0 = orientazione
- < 0 ≠ orientazione

$$\Rightarrow \boxed{\int_\sigma f \, dS = \int_\rho f \, dS}$$

⇒ L'integrale di superficie del campo scalare non dipende dalla parametrizzazione né dal senso di attraversamento.

SUPERFICI DI ROTAZIONE



Sia $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare. La superficie che si ottiene facendo ruotare intorno l'asse x_3 il suo sostegno (di 360°) si dice SUPERFICIE DI ROTAZIONE

$\gamma(t)$ è la SEZIONE MERIDIANA DELLA SUPERFICIE

TEOREMA DI GULDINO PER LE SUPERFICI DI ROTAZIONE

L'area S della superficie di rotazione generata da $\gamma(t)$ è data da:

$$\boxed{S = 2\pi \int_\gamma x_2 \, ds = 2\pi \, l_\gamma \, b_2}$$

$b_2 = \text{dist}(G, x_3)$

x_2: distanza di $P (\in \text{curva})$ rispetto l'asse di rotazione x_3

G = baricentro = (g_1, g_2, g_3)

$$\boxed{g_1 = \frac{1}{l_\gamma} \int_\gamma x_1 \, ds, \quad g_2 = \frac{1}{l_\gamma} \int_\gamma x_2 \, ds, \quad g_3 = \frac{1}{l_\gamma} \int_\gamma x_3 \, ds}$$

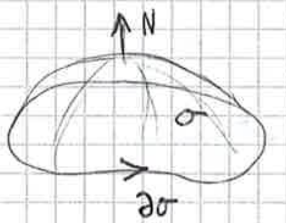
⇒ L'area S è pari alla lunghezza della curva l_γ moltiplicata per la lunghezza della circonferenza descritta dal baricentro quando ruota intorno l'asse x_3 di rotazione

TEOREMA DI STOKES

TEOREMA Sia V un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^3$
Sia $\boxed{F : V \to \mathbb{R}^3}$ un campo vettoriale $\in C^1$
Sia σ una calotta di $\mathbb{R}^3$ con sostegno $\subset V$
Allora:

$$\boxed{\int_{\partial\sigma} F \cdot t = \int_{\sigma} \text{rot}\, F \cdot n}$$

↳ integrale di flusso



N.B. La calotta σ e la curva $\partial\sigma$ (bordo) sono parametrizzate in modo che muovendosi lungo $\partial\sigma$ con la testa rivolta nella direzione del vettore normale, la superficie rimane sulla sinistra.
(altrimenti segno opposto)

Sia $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo
Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale $\in C^1$ tale che

$$\boxed{G = \text{rot}\, F} \quad \Rightarrow \quad \text{div}\, G = \text{div rot}\, F = 0 \quad (\text{se } F \text{ è conservativo})$$

Allora F è un potenziale-vettore di G

▶ IMPLICAZIONI TEOREMA DI STOKES

Se G ammette un potenziale-vettore allora gli integrali di flusso di G non dipendono dalla forma della calotta ma solo da $\partial\sigma$ dalla forma del suo bordo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 84

TEOREMA DI GAUSS

TEOREMA Sia V una regione di $\mathbb{R}^3$ delimitata dall'unione di un numero finito di calotte σ_i $(i = 1, \dots, N)$ i cui sostegni siano sovrapposti al più per parti dei loro bordi, e che siano tutte parametrizzate in modo che i loro vettori normali siano orientati verso l'esterno di V. Sia F un campo vettoriale di $\mathbb{R}^3$ definito su un aperto contenente V e di classe C^1. Vale:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \int_{\sigma_i} F \cdot m = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3}$$

↳ misura del flusso di F uscente dalla regione A (racchiusa da σ)

Il TEO DI GAUSS si applica a regioni limitate V la cui frontiera sia formata dall'unione di calotte i cui sostegni siano sovrapposti al massimo per parti dei loro bordi, e siano sempre tutte parametrizzate in modo che i loro vettori normali siano orientati verso l'esterno di V

N.B. Se il CAMPO F è SOLENOIDALE $\longrightarrow \operatorname{div} F = 0 \Rightarrow$ il flusso complessivamente uscente è zero (nullo)

SERIE NUMERICHE

Data una successione di termini reali $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Si chiama:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n}$$ → SERIE NUMERICA DI TERMINE GENERALE a_n

a_n → termine generale

S_n → (somme degli infiniti addendi) successione delle ridotte o delle somme parziali della serie

$S_0 = a_0$

$S_1 = a_0 + a_1 = S_0 + a_1$

$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = S_1 + a_2$

$\vdots$

$S_n = S_{n-1} + a_n$

definizioni:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$

- La SERIE CONVERGE ed ha per somma S, se il $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$, $\exists$ finito ed $= S$
- La SERIE DIVERGE POSITIVAMENTE / NEGATIVAMENTE se $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \,/\, -\infty$
- La SERIE è INDETERMINATA se $\lim_{n \to +\infty} S_n = \nexists$

N.B. Il comportamento di una serie non cambia se si cambiano, si eliminano, o si aggiungono un numero finito di termini della serie (ma altera la somma!)

STUDIO DEL COMPORTAMENTO DELLE SERIE

CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, se la serie converge allora

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

N.B. $\begin{cases} \sum \text{ CONVERGE} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Rightarrow \sum \text{ CONVERGE} \end{cases}$

dim: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_{n+1} = S_{n+1} - S_n} \quad \forall n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{n+1} - S_n) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_{n+1}}_{S} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}_{S} = 0$$

CONTROESEMPIO:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \qquad a_n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} a_n = 0$$

$S_1 = \log 2$

$S_2 = \log \frac{3}{2} = \cancel{\log 2} + \log 3 - \cancel{\log 2}$

$\vdots$

$S_n = \log(n+1)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty \Rightarrow$ diverge

CRITERIO DEL RAPPORTO (Vale per Σ a termini positivi)

Se $a_n > 0 \ \forall n$, data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Se $\boxed{\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l}$
- $< 1 \rightarrow \sum a_n$ CONVERGE
- $= 1 \rightarrow \sum a_n$ BOH ?! ← non so.
- $> 1 \rightarrow \sum a_n$ DIVERGE

dim.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$$

$l-\varepsilon \quad l+\varepsilon$

$0 \quad l \quad 1$

per def. di limite $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : \forall n \geq \bar{n} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

↳ diverg. ↳ convergente

prendo $\boxed{\varepsilon = \frac{1-l}{2}}$

$a_{n+1} < (l+\varepsilon) a_n \quad \forall n \geq \bar{n}$

- $n = \bar{n} \quad a_{\bar{n}+1} < (l+\varepsilon) a_{\bar{n}}$
- $n = \bar{n}+1 \quad a_{\bar{n}+2} < (l+\varepsilon) a_{\bar{n}+1} < (l+\varepsilon)^2 a_{\bar{n}}$
- $n = \bar{n}+2 \quad a_{\bar{n}+3} < (l+\varepsilon)^3 a_{\bar{n}}$
- $n = \bar{n}+m \quad a_{\bar{n}+m} < (l+\varepsilon)^m a_{\bar{n}} \quad \forall m \ (0, \infty)$

$$\sum \underbrace{a_{\bar{n}+m}}_{\text{minorante}} \leq \underbrace{\sum (l+\varepsilon)^m \underbrace{a_{\bar{n}}}_{\text{cost}}}_{\text{serie geometrica}} \Rightarrow a_{\bar{n}} \sum (l+\varepsilon)^m \quad \forall m \ (0, \infty)$$

$\Rightarrow$ CONVERGE

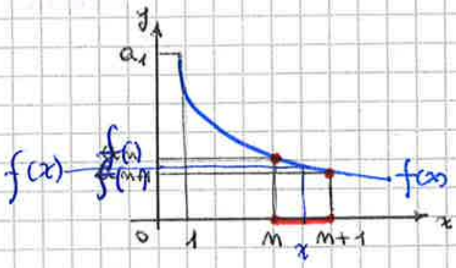
CRITERIO DI MC LAURIN (vale per Σ a termini positivi)

TEO. Dato una funzione reale di variabile reale $f(x)$ decrescente tale che $f(x): [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f \in C^1 \searrow$

- $a_n = f(n)$
- $\boxed{\sum f(n) \text{ converge} \Leftrightarrow \text{converge} \int_1^{+\infty} f(x)\,dx}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1) \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n)}$$

dim: considero un intervallo $[n, n+1]$



$$f(n+1) \le f(x) \le f(n) \quad \forall n \ge 1 \quad \forall x \in [n, n+1]$$

per la monotonicità dell'$\int$ $\quad \hookrightarrow$ Hp $f \searrow$

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx$$

$$\underset{f(n+1)}{\parallel} \longrightarrow \text{integrali di } f \text{ costanti} \longleftarrow \underset{f(n)}{\parallel}$$

Applico 2 volte il criterio del confronto

$$\Rightarrow f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n)$$

$\downarrow$ passo alle sommatorie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

converge $\qquad\qquad$ converge

Per le proprietà sugli integrali:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_1^{N} f(x)\,dx \qquad \forall N \ge 1$$

Poiché $f(x) \ge 0$, $\quad z \to \int_1^{z} f(x)\,dx$ è crescente

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) = \lim_{z \to \infty} \int_1^{z} f(x)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int_1^{N} f(x) =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

✦ CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

In mancanza di informazioni su come cambia il segno del termine generale di una serie si considera

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Se $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \text{ CONVERGE} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE ASSOLUTAMENTE}}$

e $\boxed{\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|}$

{CONVERGENZA ASSOLUTA $\Rightarrow$ CONVERGENZA}

N.B. $\exists$ Σ CONVERGENTI ma che NON LO SONO ASSOLUTAMENTE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 84

SERIE DI FUNZIONI

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$ $\rightarrow$ Σ CONV. UNIF $\Leftrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ CONV. UNIF in I

x varia in $I \subseteq \mathbb{R}$

Σ converge $\xLeftrightarrow{\text{puntualmente in } I}$ $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \underbrace{S(x)}_{\text{SOMMA DELLA SERIE}}$ ovvero se converge $\{S_n(x)\}$ puntualmente in I

CRITERIO DI WEIERSTRASS

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ CONVERGE $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE

Sia data $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)}$ e $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$ a termini positivi e convergente e tale che:

$$\boxed{|f_n(x)| \leq a_n}$$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE e UNIFORMEMENTE in I

- $\Sigma f_n(x)$ se CONVERGE PUNTUALMENTE SU I, $S(x)$ = funzione somma, Supponiamo che la convergenza sia uniforme $\forall$ intervallo chiuso in I $\rightarrow [a,b] \subset I$ e $f_n(x)$ continua $\forall n$ $\Rightarrow$ $S(x)$ è continua in I

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

INTEGR

- Se $f_n(x) \in C^2$ con derivata continua in I, se Σ converge puntualmente e che $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ $\rightarrow$ converga pure puntualmente e $\sigma(x)$ sia la sua somma $\rightarrow$ converge uniformemente

$\Rightarrow$ $S(x)$ è derivabile e

$$S'(x) = \sigma(x) \quad \forall x \in I$$

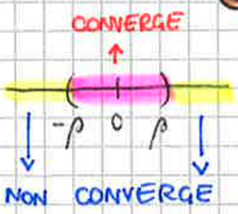
DERIV.

✦ CONVERGENZA PUNTUALE

TEOREMA Data una serie di potenze $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$:

① per $x = 0$ ⟶ Σ CONVERGE ⟶ $\rho = 0$

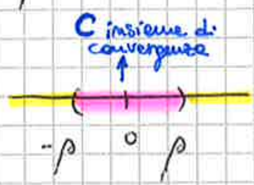
② $\exists\, \rho > 0$ (ρ = raggio di convergenza) tale che:



$\left.\begin{array}{l} - \forall x \in (-\rho, \rho) \to \Sigma \text{ CONVERGE ASSOLUTAMENTE} \\ - \forall x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty) \to \Sigma \text{ NON CONVERGE} \end{array}\right\} \rho$

③ $\forall x \in \mathbb{R}$ ⟶ Σ CONVERGE ⟶ $\rho = \infty$

- C è l'insieme dei valori della x per cui la Σ converge.
- $C \equiv \text{dom}[S(x)]$ ↳ funzione somma
- C è sempre un intervallo centrato nell'origine che può essere limitato o illimitato.
- C = insieme di convergenza o intervallo di convergenza
- Nel caso ②, $\rho \equiv$ con la semiampiezza di **C**.



$\Rightarrow$ **C** può essere $\begin{cases} (-\rho, \rho) \\ [-\rho, \rho) \\ (-\rho, \rho] \\ [-\rho, \rho] \end{cases}$

N.B. L'insieme di convergenza **C** di una serie di potenze non è mai vuoto

- Il teorema non dà alcuna informazione sul comportamento della Σ nei punti in cui $x = -\rho$ e $x = \rho$ (agli estremi dell'intervallo **C**). Il comportamento agli estremi va analizzato caso per caso.

- Il teorema assicura l'$\exists$ di ρ

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 84

CALCOLO DI ρ

CRITERIO DEL RAPPORTO

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

supponiamo che $\exists$ (finito o infinito) il limite

$$\text{se} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \rho = \frac{1}{\ell} \\ \ell = 0 \Rightarrow \rho = \infty \\ \ell = \infty \Rightarrow \rho = 0 \end{cases}$$

Il criterio del rapporto non si applica in generale se vi sono infiniti coefficienti a_n uguali a zero. Se però i coefficienti non nulli si susseguono in maniera regolare, la difficoltà può essere aggirata con una sostituzione. Se neanche così si riesce, si può cercare di utilizzare il criterio del rapporto per le serie numeriche $\forall x$ fissato.

dim: $\ell \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\forall x$ fissato consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, converge se:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = \lim_{n \to +\infty} |x| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot \ell < 1$$

ovvero se $|x| < \frac{1}{\ell}$ $\left(x \in \left(-\frac{1}{\ell}, \frac{1}{\ell}\right)\right)$

$\longrightarrow$ per gli altri casi si procede allo stesso modo

DERIVAZIONE E INTEGRAZIONE

Derivando termine a termine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si ottiene la serie

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n}$$

$\Rightarrow$ Entrambe le serie hanno stesso $\rho \iff$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad \exists \text{ finito}}$$

dim: detto ℓ il valore del limite

il $\rho_1 = \frac{1}{\ell}$ della 1ª serie, ma

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)|a_{n+1}|}{n\,|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n}$$

$\Rightarrow \rho_2 = \frac{1}{\ell}$

TEOREMA

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze data con $\rho > 0$ o $\rho = \infty$, allora:

1. $s(x)$ è continua $\forall\, x \in C$
2. $s(x)$ ammette primitiva $S(x)$ nell'intervallo $(-\rho, \rho)$ e si ha:

$$\boxed{S(x) = \underset{\text{cost}}{\underset{\downarrow}{k}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}} = k + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots$$

ovvero l'$\int$ indefinito della somma di 1 serie di potenze può essere sempre calcolato integrando termine a termine

3. $s(x)$ è derivabile in $(-\rho, \rho)$ e si ha:

$$\boxed{s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

ovvero la derivata della somma di 1 serie di potenze può essere sempre calcolata derivando termine a termine

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

Sia data una funzione $f(x)$ di classe C^∞, definita in un intervallo aperto contenente il punto x_0. Per mezzo di $f(x)$ possiamo "generare" una serie che scriviamo come

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

a_n

→ SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR DELLA FUNZIONE f CENTRATA IN x_0

↳ funzione generatrice

Quando $x_0 = 0$, la serie di Taylor si dice SERIE DI McLAURIN

La somma parziale n-esima ≡ polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0.

def. Se la SERIE DI TAYLOR ha raggio di convergenza $\rho \neq 0$

Se $\exists\ \delta > 0$ tale che la somma della serie ≡ con la f generatrice almeno per $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ allora

la funzione $f(x)$ è analitica in x_0

Se la funzione $f(x)$ è definita in un insieme aperto $I \subseteq \mathbb{R}$, se risulta analitica in ogni punto $x_0 \in I \Rightarrow f(x)$ è analitica su I

CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHÈ UNA funzione SIA ANALITICA

Sia $f(x) \in C^\infty(I)$, e sia x_0 un punto interno all'intervallo I.

Supponiamo che $\exists\ \delta > 0$ e $M > 0$ tali che

$$|f^{(n)}(x)| < M \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Allora $f(x)$ è analitica in x_0

Se $S(x)$ è definita come somma di una serie di potenze centrata in x_0 con raggio di convergenza non nullo, allora $S(x)$ è analitica in x_0

Tutte le funzioni che sono definite come somma di una serie di potenze sono sempre analitiche.

Le funzioni analitiche sono quelle che sono identificate in maniera univoca la propria serie di Taylor.

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = S(x)$ con $\rho > 0$, se $S(x) = 0 \Rightarrow a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

• Consideriamo $\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x}$

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f(x)$ è analitica in x_0

Calcolando le derivate successive per $x_0 = 0$ si arriva a:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \qquad \boxed{\rho = \infty}$$

N.B. se $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ pongo $t = x - x_0$

✦ SERIE DA RICORDARE

✦ SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \rightarrow$$ DIVERGE POSITIVAMENTE

✦ SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

- $\alpha \in [0,1]$ DIVERGE POSITIVAMENTE
- $\alpha \in (1,+\infty)$ CONVERGE

✦ SERIE ARMONICA A SEGNI ALTERNI

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$$

- $\alpha\ (0,+\infty)$ CONVERGE
- $\alpha\ (1,+\infty)$ CONVERGE ASSOLUTAMENTE
- $\alpha\ (0,1]$ CONVERGE SEMPLICEMENTE

✦ SERIE ARMONICA MODIFICATA

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$$

- $\alpha\ (1,+\infty),\ \forall\beta$ CONVERGE
- $\alpha = 1,\ \beta\ (1,+\infty)$ CONVERGE
- $\alpha = 1,\ \beta\ (-\infty,1]$ DIVERGE POSITIVAMENTE
- $\alpha \in (-\infty, 1]$ DIVERGE POSITIVAMENTE

✦ SERIE DI MENGOLI

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = 1 \rightarrow$$ CONVERGE

✦ $$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty \rightarrow$$ DIVERGE POSITIVAMENTE $\qquad S_n = \log(n+1)$

SERIE DI FOURIER

✦ SERIE TRIGONOMETRICHE

Le serie di Taylor approssimano funzioni molto regolari ($f(x) \in C^\infty$)
Le serie trigonometriche approssimano anche funzioni discontinue.
Esse sono particolarmente indicate per approssimare funzioni periodiche.

Una serie trigonometrica è una serie di funzioni del tipo:

$$\boxed{\alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\left(\alpha_m \cos(m\omega x) + \beta_m \sin(m\omega x)\right)}_{f(x)}}$$

- $\alpha_0, \alpha_m, \beta_m \longrightarrow$ numeri dati $\quad \omega > 0$
- Tutte le funzioni che compaiono sono periodiche di $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $\underset{\text{freq. fondamentale}}{f} = \frac{\omega}{2\pi}$
- per $m = 0 \longrightarrow f_0(x) = \alpha_0$
- per $m = 1 \longrightarrow f_1(x) = \alpha_1 \cos(\omega x) + \beta_1 \sin(\omega x)$
- per m generico

$$\longrightarrow \boxed{f_m(x) = \alpha_m \cos(m\omega x) + \beta_m \sin(m\omega x)}$$

COMBINAZIONE LINEARE DI FUNZIONI PERIODICHE

di $T_{min} = \frac{2\pi}{m\omega} \longrightarrow \frac{1}{T_{min}} = \underset{\text{frequenza}}{f} = \frac{m\omega}{2\pi}$

(FUNZIONI) ARMONICHE DI ORDINE m

(funzioni la cui f è un multiplo intero della f fondamentale)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 84

- Sia P il vettore-colonna formato da $P_1, \dots, P_k$
- Sia W la matrice formata mettendo uno sotto l'altro i vettori-riga $U_1, \dots U_k$
- Sia M il vettore-colonna formato dai parametri $\mu_1, \dots, \mu_m$ (incognite)

Il metodo dei minimi quadrati consiste nell'identificare M con l'immagine inversa del punto $Q \in$ all'immagine di W e che realizza la minima distanza da P

2° METODO PER LA SOLUZIONE

TEOREMA DELLA PROIEZIONE

- Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, $\dim V = n$
- $\forall x \in V \rightarrow \|x\| = \sqrt{x \cdot x} \longrightarrow$ norma = misura della lunghezza vettore x
- Siano $x, y \in V \Rightarrow d(x,y) = \|x - y\|$
- $x, y \in V$ sono ortogonali $\Leftrightarrow x \cdot y = 0$
- normalizzare un vettore significa passare da $x \longrightarrow \frac{x}{\|x\|} \rightarrow$ stesso verso, stessa direzione, norma $= 1$
- Una base di V si dice ortonormale se i vettori $e_1, \dots, e_n$ che la formano hanno le seguenti proprietà:

  - $\|e_i\| = 1 \qquad \forall i \in [1, n]$
  - $e_i \cdot e_j = 0 \qquad \forall i, j \in [1, n]$ con $i \neq j$

- Ogni spazio vettoriale V di dimensione finita ammette una base ortonormale.
- Sia W un sottospazio di V, $0 < \dim W = m < \dim V = n$. Allora $\exists$ una base ortonormale di V i cui primi m vettori costituiscono una base ortonormale di W

✦ FUNZIONI CONTINUE A TRATTI

- $PC(\mathbb{R})$ = spazio funzioni continue a tratti su $\mathbb{R}$
  ($\Rightarrow$ $\forall f \in PC(\mathbb{R})$, f ha al max 1 n° finito di punti di discontinuità $\forall [a,b]$, e che $\forall$ eventuale punto di discontinuità è di 1ª specie)

- $PCR(\mathbb{R})$ = sottospazio di $PC(\mathbb{R})$ formato dalle funzioni f regolarizzat…
  ($\Rightarrow$ $\forall x_0$ di discontinuità si ha

$$f(x_0) = \frac{\ell^- + \ell^+}{2} \qquad \ell^- = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad \ell^+ = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
)

- $PCR([a,b])$ = spazio formato dalle restrizioni ad $[a,b]$ di tutte le funzioni $\in PCR(\mathbb{R})$. $PCR([a,b])$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita. Poichè le funzioni continue a tratti sono integrabili si ha $\forall f \in PCR([a,b])$

$$\boxed{\|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 \, dx}}$$ → NORMA DELLA MEDIA QUADRATICA

con $\|f\| = f \cdot f$

e $\forall f, g \in PCR([a,b])$:

$$\boxed{f \cdot g = \int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx}$$

- $\{f_n(x)\}$ è una successioni di funzioni in $PCR([a,b])$ se esiste una funzione $f \in PCR([a,b])$ tale che:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 \, dx = 0}$$

$\Rightarrow$ $\{f_n(x)\}$ CONVERGE a $f(x)$ in MEDIA QUADRATICA

N.B. se $\{f_n(x)\}$ CONVERGE a $f(x)$ $\Rightarrow$ CONVERGE a $f(x)$ anche in MEDIA QUADRATICA. M… non vale il contrario.

COEFFICIENTI DI FOURIER

Sia $f \in PCR\left(\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]\right)$. Si possono calcolare i prodotti scalari:

$$f \cdot g_0 \ , f \cdot g_1 \ , f \cdot h_1 \ , f \cdot g_2 \ , f \cdot h_2 \ \dots$$

$\forall\, m \geq 1$ si può formare il polinomio trigonometrico

$$Q_m(x) = (f \cdot g_0)\, g_0(x) + \sum_{k=1}^{m} \left((f \cdot g_k)\, g_k(x) + (f \cdot h_k)\, h_k(x) \right) =$$

$$= (f \cdot g_0) \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} + \sum_{k=1}^{m} \left((f \cdot g_k) \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \cos(k\omega x) + (f \cdot h_k) \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \operatorname{sen}(k\omega x) \right)$$

migliore approssimazione tra tutti i P_m di f

$$\| f - Q_m \|^2 = \| f \|^2 - \frac{\pi}{\omega} \left[2 a_0^2 + \sum_{k=1}^{m} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \right]$$

↳ SCARTO QUADRATICO

$\Rightarrow$ Si chiama SERIE DI FOURIER di f la serie di funzioni:

$$\boxed{a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \operatorname{sen}(k\omega x) \right)}$$

dove a_0, a_k, b_k $(k \geq 1)$ sono numeri detti COEFFICIENTI DI FOURIER DI f

$$a_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}\,(f \cdot g_0) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\, dx \quad \rightarrow \text{MEDIA INTEGRALE di } f(x)$$

$$a_k = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\,(f \cdot g_k) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos(k\omega x)\, dx$$

$$b_k = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}\,(f \cdot h_k) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \operatorname{sen}(k\omega x)\, dx$$

CONVERGENZA DELLA SERIE DI FOURIER.

✦ TEOREMA DI RIEMANN - LEBESGUE

Sia $f(x)$ una funzione $\in PCR\left(\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]\right)$

Siano a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier.

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} a_k = 0} \quad , \quad \boxed{\lim_{k\to\infty} b_k = 0}$$

✦ (TEOREMA) PRINCIPIO DI IDENTITÀ PER LA SERIE DI FOURIER

Siano $f(x)$ e $g(x)$ $\in PCR\left(\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]\right)$. Se i coefficienti di Fourier di $f(x)$ sono ordinatamente uguali a quelli di $g(x)$ $\Rightarrow f(x) = g(x)$ $\forall\ x \in \left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]$

✦ CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA

Sia $f(x) \in PCR\left(\left[-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}\right]\right)$, siano a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier

$\longrightarrow$ SERIE DI FOURIER DI $f(x)$ $\longrightarrow$ $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right)$

La serie CONVERGE IN NORMA (MEDIA) QUADRATICA ALLA funzione $f(x)$ in I

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{m\to\infty} \left\| f(x) - Q_m(x) \right\| = 0}$$

La convergenza quadratica non dà nessuna garanzia della convergenza della serie stessa in un punto x prefissat

$\Downarrow$

✦ IDENTITÀ DI PARSEVAL

$$\boxed{\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f^2(x)\,dx = \frac{2\pi}{\omega} a_0^2 + \frac{\pi}{\omega} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)}$$

DERIVAZIONE E INTEGRAZIONE Σ FOURIER

- La Σ di Fourier di $f'(x)$ si ottiene derivando termine a termine la Σ di Fourier di $f(x)$.

$$\rightarrow \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega x) + b_k \operatorname{sen}(k\omega x) \right)$$

deriva
$$\rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{k\omega b_k}_{c_k} \cos(k\omega x) \underbrace{- k\omega a_k}_{d_k} \operatorname{sen}(k\omega x) \right)$$

$c_0 = 0 \rightarrow c_k \rightarrow d_k \rightarrow$ COEFFICIENTI DI FOURIER di $f'(x)$

- La Σ di Fourier delle funzioni a media nulla $\left(\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,dx = 0 \right)$ possono essere integrate termine a termine.

$$\alpha_k = -\frac{1}{k\omega} b_k \quad ; \quad \beta_k = \frac{1}{k\omega} a_k$$

COEFFICIENTI DI FOURIER DI F

α_0 = cost di integrazione arbitraria

$$\text{con } F(x) = \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{x} f(t)\,dt$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 84

Quindi per risolvere il sistema:

1) calcolo gli autovalori λ di A
2) calcolo gli Autovettori u corrispondenti a λ di A

a) scrivo il polinomio caratteristico $\rightarrow$ $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$
b) le soluzioni sono λ autovalori

↳ equazione di grado 2
⇒ 3 CASI

▶ CASO 1 $\rightarrow \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \text{ reali e distinti} \quad (m(\lambda_1) = 1,\ m(\lambda_2) = 1) \\ u_1, u_2 \text{ linearmente indipendenti} \end{cases}$

si hanno le 2 soluzioni
$$x = \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} u_1$$
$$x = \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} u_2$$

Introdotte 2 cost arbitrarie c_1, c_2:

INTEGRALE GENERALE $\leftrightarrow$ $\boxed{x = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2}$

▶ CASO 2 $\rightarrow$ { unico λ con $m(\lambda) = 2$

unico u autovettore $(\neq 0)$

1ª sol $\quad x = \varphi_1(t) = e^{\lambda t} u$

ma $\exists$ un vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che

2ª sol $\quad x = e^{\lambda t}(u\,t + v) = \varphi_2(t)$

$$\frac{d}{dt}\varphi_2(t) = \lambda e^{\lambda t}(u t + v) + e^{\lambda t} u =$$
$$= A\varphi_2(t) = A e^{\lambda t}(u t + v)$$

→ CONDIZIONE PER RICAVARE v

$\boxed{\lambda v + u = A v}$ ↳ $(A - \lambda I) v = u$

⇒ $\boxed{x = c_1 e^{\lambda t} u + c_2 e^{\lambda t}(u t + v)}$ INTEGRALE GENERALE

2 autovettori l.i. u_1, u_2

$\boxed{x = c_1 e^{\lambda t} u_1 + c_2 e^{\lambda t} u_2}$

INTEGRALE GENERALE

Per risolvere il sistema → $\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$

▶ **CASO 1** → $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ autovalori distinti

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \to u_1$, $\lambda_2 \to u_2$, $\lambda_3 \to u_3$ l.i

$$\boxed{x = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} u_3}$$

INTEGRALE GENERALE

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ → u_1

λ_2, λ_3 coppia autovalori complessi coniugati

$$\boxed{\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} u_1}$$

$$\boxed{\varphi_2(t) = e^{\alpha t}\left((\cos\beta t)\, u - (\sin\beta t)\, v\right)}$$

$$\boxed{\varphi_3(t) = e^{\alpha t}\left((\cos\beta t)\, v + (\sin\beta t)\, u\right)}$$

INTEGRALE GENERALE

$$\boxed{x = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\alpha t}\left((\cos\beta t)\, u - (\sin\beta t)\, v\right) + c_3 e^{\alpha t}\left((\cos\beta t)\, v + (\sin\beta t)\, u\right)}$$

$$\boxed{\alpha u - \beta v = A u}$$

$$\boxed{\alpha v + \beta u = A v}$$

u, v, u_1 l.i

▶ **CASO 2** $\{\mu, \lambda$ autovalori reali distinti $m(\mu) = 1$, $m(\lambda) = 2$

u_1, u_2, u_3 l.i

$u_1, u_2 \to \lambda$, $u_3 \to \mu$

INTEGRALE GENERALE

$$\boxed{x = c_1 e^{\lambda t} u_1 + c_2 e^{\lambda t} u_2 + c_3 e^{\mu t} u_3}$$

$v, u \to \lambda$, $w \to \mu$

$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} u$

$\varphi_2(t) = e^{\mu t} w$

$\varphi_3(t) = e^{\lambda t}(t u + v)$

INTEG. GENERALE

$$\boxed{x = c_1 e^{\lambda t} u + c_2 e^{\mu t} w + c_3 e^{\lambda t}(t u + v)}$$

$$\boxed{(A - \lambda I)\, v = u}$$

↓ per calcolare v

77

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Psi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \Psi_0(t)}$$

INTEGRALE GENERALE

Trovo $\Psi_0(t)$ attraverso il METODO DI SOMIGLIANZA

▶ CASO 1 $\quad b(t) = b \in \mathbb{R} \longrightarrow$ costante

$$\boxed{\Psi_0(t) = Kt + h}$$

$$\boxed{AK = 0} \qquad \boxed{Ah = K - b}$$

se A ha un autovalore $\lambda = 0$ con $m(\lambda) = 1$

$$\boxed{\Psi_0 = Kt^2 + ht + m}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} AK = 0 \\ Ah = 2K \\ Am = h - b \end{array}}$$

se A ha un autovalore $\lambda = 0$ con $m(\lambda) = 2$

▶ CASO 2 $\quad b(t) = b\, e^{\gamma t} \longrightarrow \neq$ costante

$$\boxed{\Psi_0(t) = K e^{\gamma t}}$$

$$\boxed{(A - \gamma I) K = -b}$$

se γ non è un autovalore di A

$$\boxed{\Psi_0(t) = (Kt + h) e^{\gamma t}}$$

oppure

$$\boxed{\Psi_0(t) = (Kt^2 + ht + m) e^{\gamma t}}$$

se γ è autovalore di A

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 84