



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1722A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Topografia - prof. Bellone, Manzano, Cina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

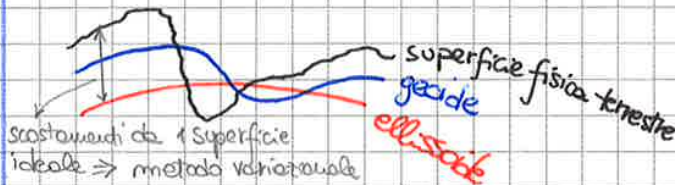
GEODESIA

Superficie fisica della terra $\xrightarrow{\text{sostituita}}$ con una superficie matematica equipotenziale. **GEOIDE**: superficie che in ogni punto è normale alla direzione della verticale e coinciderebbe con la superficie dei mari (livello medio del mare)

- dist (superficie fisica terrestre, geode) = **QUOTA ORTOMETRICA**
 \uparrow
 misurata lungo la verticale
- Le quote si ottengono indirettamente come somma dei dislivelli misurati a partire da un punto a quota nota

GEOIDE \rightarrow superficie di livello del campo gravitazionale

\rightarrow { Si eleva nei continenti } curvatura globale
 { Si abbassa nei mari } ovunque \oplus



In ogni punto della terra \exists la **forza di gravità**, che è risultante della forza di attrazione Newtoniana \vec{F}_N e della forza centrifuga \vec{F}_c .



\Rightarrow Il campo gravitazionale terrestre è conservativo \Rightarrow posso definire superfici equipotenziali \rightarrow **GEOIDE**

$W = \text{cost}$

La superficie equipotenziale del campo gravitazionale che passa per il punto di quota zero (definito dal livello medio del mare) si chiama **GEOIDE**

$W_0 = V + v$

$W_0 - \iiint_V \frac{\rho}{d} d\tau - \frac{\omega^2 r^2}{2} = 0$

→ EQUAZIONE DEL GEOIDE

Risulta impossibile ricavare rigorosamente l'equazione del geode perché occorrerebbe conoscere come varia la densità della terra in ogni punto (perché V è $f(\text{densità})$) ⇒ dobbiamo trovare un' approssimazione di V

Nello spazio esterno V soddisfa $\nabla^2 = 0$ ovvero $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ ⇒ $V =$ funzione armonica analitica ⇒ si sviluppa in serie

$V = \iiint_V \frac{\rho}{d} d\tau$

Il valore dell'integrale viene determinato mediante lo sviluppo in serie di funzioni sferiche dopo aver sostituito le coordinate geocentriche (X, Y, Z) con le coordinate polari (σ, Ψ, λ)

$V = V' + T$

↓
fimo al 2° ordine

↳ potenziale residuo di grado ≥ 3

⇒ $W = V + v$

$W = V' + T + v$

→ $U = V' + v$

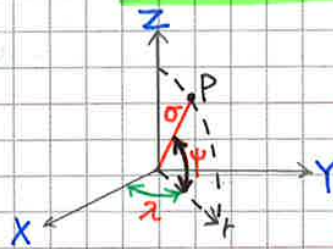
$W = U + T$

potenziale normale

potenziale anomalo

SOSTITUZIONE C. GEOCENTRICHE $(X, Y, Z) \rightarrow$ POLARI (σ, Ψ, λ)

↳ longitudes
latitudine



GRAVITA' NORMALE \vec{g}

$\vec{g} = \text{grad } U$

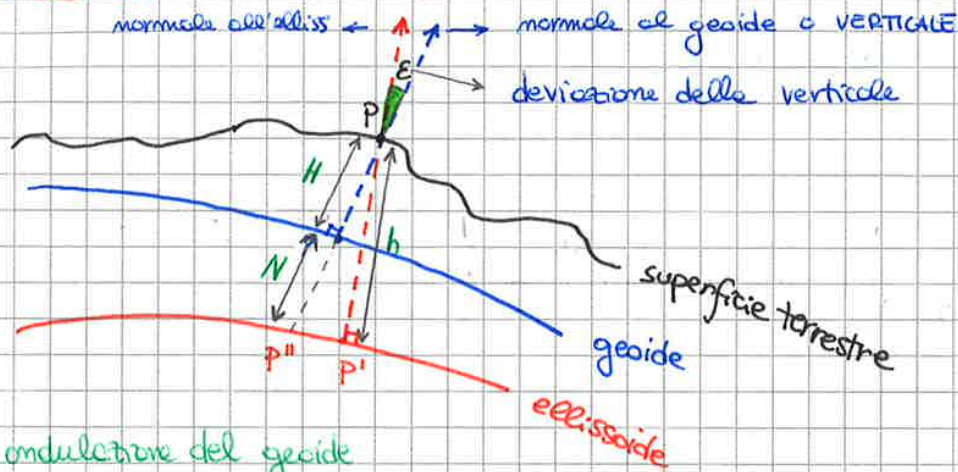
ANOMALIA DI GRAVITA' Δg

$\Delta g = \vec{g} - \vec{g}$

→ grandezza usata per il calcolo del geode

$$\begin{cases} X = \sigma \cos \Psi \cos \lambda \\ Y = \sigma \cos \Psi \sin \lambda \\ Z = \sigma \sin \Psi \end{cases}$$

Quindi le 2 superfici che meglio approssimano la superficie terrestre sono: il **GEOIDE** e l'**ELLISSOIDE**



N = ondulatione del geoid

H = quota ortometrica

h = altezza ellissoidica

$$\rightarrow h = H + N$$

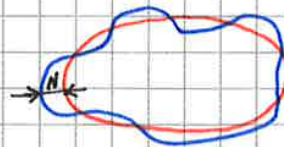
E = deviazione della verticale → indica lo scostamento delle linee di forza dal campo reale (GEOIDE) da quelle del campo normale (ellissoide) e dipende da ϕ, λ → coordinate astronomiche

RELAZIONE DI BRUNS

$$N \cong \frac{T}{\gamma}$$

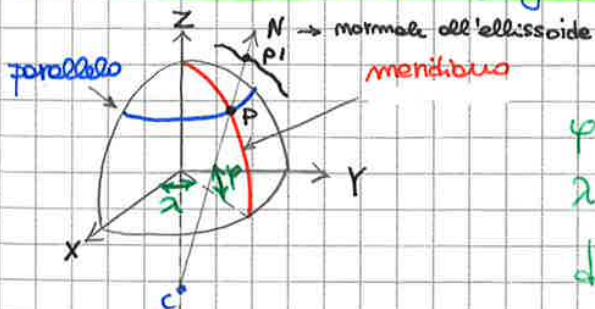
→ campo anomalo

→ gravità normale



↓ misura lo scostamento del geoid dall'ellissoide (in ITA sempre ⊕)

COORDINATE GEOGRAFICHE (o geodetiche) ELLISSOIDICHE



ϕ = latitudine

λ = longitudine

direzione N

} individuano univocamente un punto P

RAGGI DI CURVATURA DELL'ELUSSOIDE E SEZIONI NORMALI

Le curve di 1 superficie possono essere

PIANE

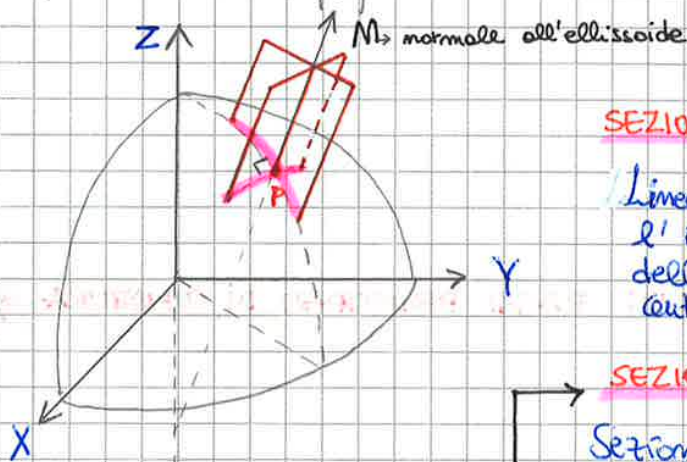
GOBBE (non contenute in 1 unico piano)

NORMALI

OBlique

derivano dall'intersezione della superficie con un piano normale contenente la normale alla superficie

derivano dall'intersezione della superficie con un piano qualsiasi



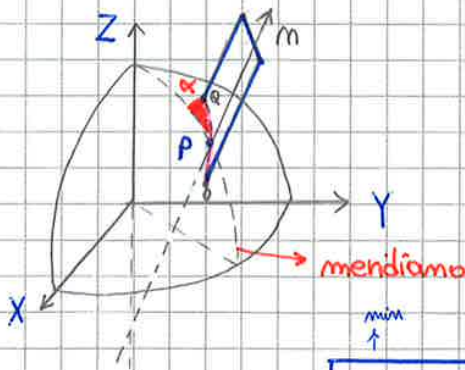
SEZIONE PIANA

Linea di intersezione tra l'ELUSSOIDE e un piano della STELLA DI PIANI aventi centro in P

SEZIONE NORMALE GENERICA

Sezione piana determinata da un piano del fascio di piani avente per costola la normale m

è individuata dall'azimut α



Le sezioni normali in P avranno raggi di curvatura diversi in funzione dell'angolo α (azimut)

angolo orario α che la sezione meridianale forma con l'arco \overline{OP}

$$\rho \leq R \leq N$$

raggi principali di curvatura

SEZIONI NORMALI PRINCIPALI

Sono tra loro ortogonali e \equiv sempre con il meridiano passante per P } se sup di rotazione
e l'altra perpendicolare al meridiano

Per trovare il valore del raggio di curvatura max N applichiamo il:

TEOREMA DI MEUSNIER

Dica che: il raggio di curvatura in P di una sezione obliqua (r) è = al raggio N della sezione normale corrispondente al piano che contiene la tg in P della sezione obliqua moltiplicato per \cos (angolo tra i due piani delle 2 sezioni).

$$r = N \cos \varphi$$

$$N = \frac{r}{\cos \varphi}$$

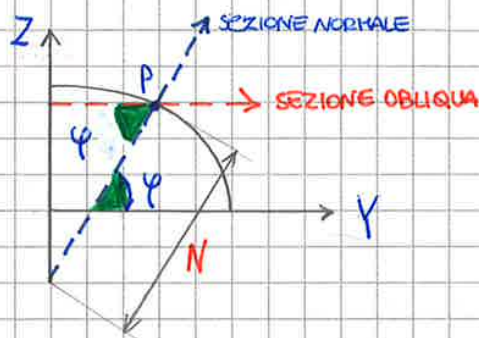
poiché $r = \frac{a}{W} \cos \varphi$

$$\Rightarrow N = \frac{a}{W} \cos \varphi \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$N = \frac{a}{W}$$

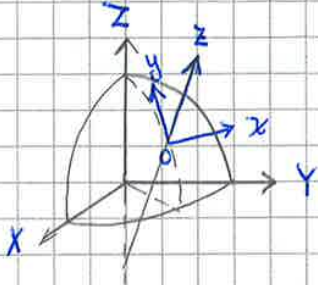
RAGGIO PRINCIPALE DI CURVATURA MAX

(N.B.) $N - \rho$ $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{MAX per } \varphi = 0 \text{ (equatore)} \\ \rightarrow \text{NULLA per } \varphi = 90^\circ \text{ (poli)} \end{array} \right.$



SVILUPPI DI PUISEUX - WEINGARTEN

Terma (locale) Euleriana



$$\begin{cases} z \equiv n \text{ all'ellissoide} \\ y \equiv \text{tg al meridiano} \\ x \equiv \text{tg al parallelo} \end{cases}$$

Gli sviluppi di PUISEUX - WEINGARTEN (arrestati al 3° ord) danno le **COORDINATE EULERIANE** in funzione delle **GEODETICHE POLARI**

$$\begin{cases} x = \bar{x}(\alpha, s) \\ y = \bar{y}(\alpha, s) \\ z = \bar{z}(\alpha, s) \end{cases}$$

Consideriamo la sfera locale in O \rightarrow le terme euleriane \equiv (sfera, elliss)

\rightarrow Gli sviluppi facilitano lo studio delle proprietà di curvatura della geodetica e a caratterizzare il ° di approssimazione raggiungibile.

SFERA LOCALE \rightarrow sfera di raggio R tg all'ellissoide in P
con $R = \sqrt{\rho N}$

TEOREMA DI LEGENDRE

→ risolvere un triangolo sferico (campo geodetico) con la trigonometria piana

$$3\epsilon = \frac{S}{R^2}$$

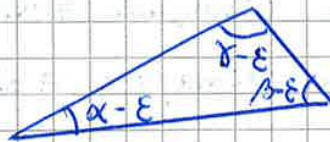
↓ eccesso sferico

superficie

→ triangolo sferico somma angoli = $\pi + 3\epsilon$

→ Dato un triangolo sferico i cui lati siano piccoli rispetto R . Commettendo un errore di $\left(\frac{l}{R}\right)^4$ gli angoli del triangolo piana che ha i lati della stessa lunghezza di quello sferico si possono derivare sottraendo $\frac{1}{3} 3\epsilon \Rightarrow \epsilon$

(Il TEO può essere applicato a \forall triangolo in campo geodetico)



↳ "spicciamento" dell'ellissoide non può avvenire senza deformazioni

◆ MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE m_e

$$m_e = \frac{d s_c}{d s_e}$$

→ carta
→ ellissoide

$ds =$ elemento infinitesimo lineare

◆ MODULO DI DEFORMAZIONE SUPERFICIALE m_o

$$m_o = \frac{d \sigma_c}{d \sigma_e}$$

$d\sigma =$ elemento infinitesimo superficiale

◆ DEFORMAZIONE ANGOLARE δ (differenza tra 2 azimut)

$$\delta = \alpha' - \alpha$$

↓ ↓
carta ellissoide

▷ CLASSIFICAZIONE DELLE CORTE

(1) **CONFORMI O ISOGONE** angoli uguali $\Rightarrow \delta = 0$

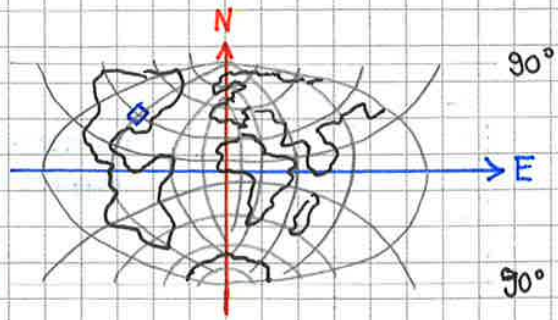
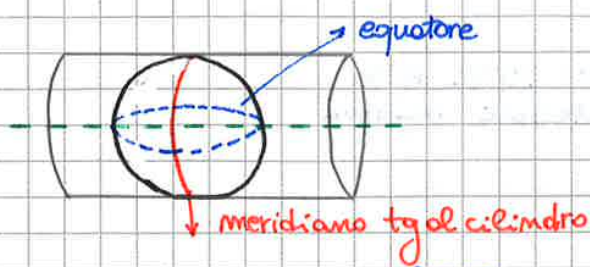
(2) **EQUIVALENTI** superfici uguali $\Rightarrow m_o = 1$

(3) **AFILATICHE** presenti sia (m_e, m_o, δ) ma le deformazioni sono minimizzate

Non è possibile costruire carte equidistanti

CARTA DI GAUSS (GAUSS-BORGA - o UTM) (CONFORME) $\rightarrow S=0$

Proiezione CILINDRICA INVERSA

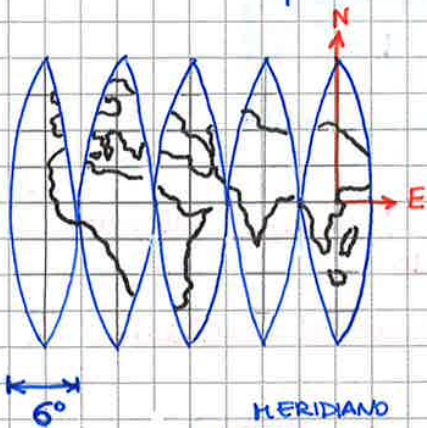


Le trasformate del meridiano tg al cilindro e dell'equatore sono rette che definiscono il sistema di riferimento ortogonale cartesiano (N e E) \rightarrow SISTEMA CARTOGRAFICO

Sul meridiano tg \rightarrow rappresentazione equidistante ($m_e=1$)

Le trasformate di meridiani e paralleli sono famiglie di curve perpendicolari tra di loro e simmetriche rispetto (N,E)

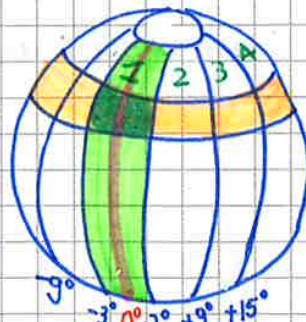
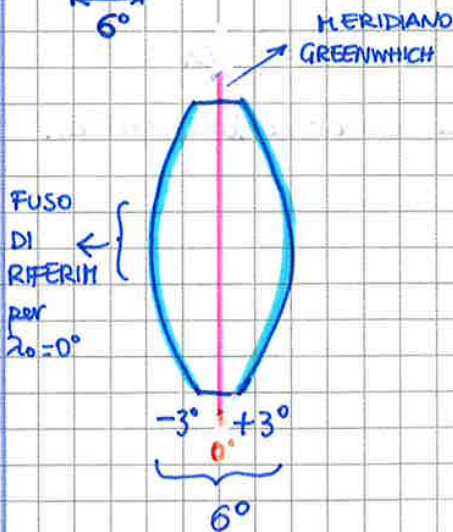
Per contenere le deformazioni si proietta l'ellissoide utilizzando più FUSI di ampiezza limitata.



Ogni fuso ha un'ampiezza di 6° e definisce un sistema di riferimento (E,N) indipendente da tutti gli altri

← 60 FUSI →

↑
20 ZONE
↓



- ZONA
- FUSO
- FASCIA
- 1,2,3... m° FUSI

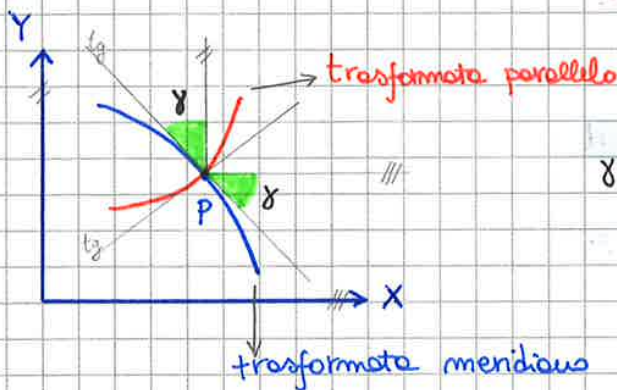
• MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE (carte di GAUSS) (lungo un parallelo)

$$m_l = 1 + \frac{x^2}{2\rho N}$$

$x = \text{dist}(P, \text{meridiano centrale})$

$\hookrightarrow m_{1-2} = 1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2}{6\rho N}$ per 2 punti $P_1(x_1, y_1)$
 $P_2(x_2, y_2)$

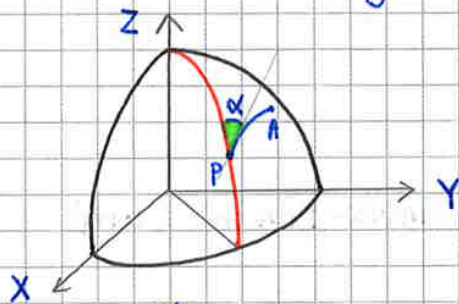
CONVERGENZA MERIDIANO NELLA CARTA DI GAUSS



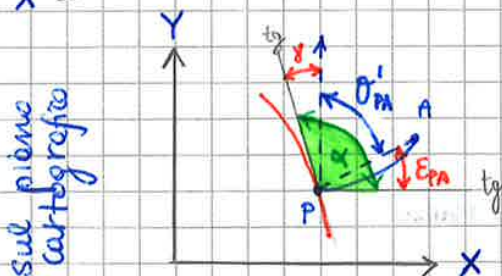
$\gamma = \text{CONVERGENZA DEL MERIDIANO}$

RIDUZIONE ALLA CORDA

Consideriamo una geodetica sull'ellissoide



$\alpha = \text{angolo compreso tra meridiano passante per P e la tg alla geodetica}$
 \downarrow
 azimut



• In cartografia determino facilmente le coordinate (E, N) di P ed A .

\downarrow da questo calcolo l'azimut

$$\sigma'_{PA} = \arctg \frac{E_A - E_P}{N_A - N_P}$$

È necessario apportare delle correzioni (di convergenza γ e di riduzione alla corda E_{PA}) per rendere σ'_{PA} omogeneo ad α

DATUM PLANIMETRICO

Dato un Datum geodetico, ovvero un ellissoide di riferimento, su di esso è possibile esprimere la posizione di un punto mediante diversi sistemi di coordinate.

Ad ogni datum è associato un insieme finito di punti materializzati sulla superficie terrestre cui vengono attribuiti determinati valori di coordinate e che costituiscono la realizzazione del DATUM PLANIMETRICO e sono detti: RETE DI INQUADRAMENTO.

Le coordinate dei vertici della rete vengono ottenute da misure e calcoli geodetici.

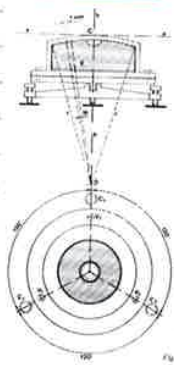


Datum: consiste nel definire un ELLISSOIDE ORIENTATO LOCALMENTE imponendo che in un punto centrale:

- $\vec{m}_{\text{ellissoide}} \equiv \text{verticale } (\xi=0)$
- quota ellissoide \equiv quota ortometrica

Datum: TERNA CARTESIANA GEOCENTRICA solidale alla terra alla quale si associa un ELLISSOIDE (WGS84) GEOCENTRICO avente asse polare $\equiv Z$ e assi X e Y sul piano equatoriale

SFERICHE

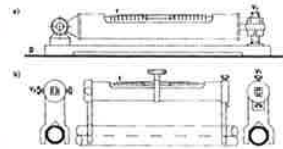


← LIVELLE →

TORICHE



Sensibilità variabili da 1" fino a pochi secondi sessagesimali.



→ ruotando di 200 gon una livella (a strumento rettificato) la bolla non si sposta

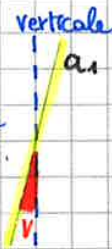
ANGOLO AZIMUTALE α

differenza tra la direzione azimutale del punto avanti meno la direzione azimutale del punto indietro

ERRORI SUGLI ANGOLI AZIMUTALI

(a) v = errore di verticalità

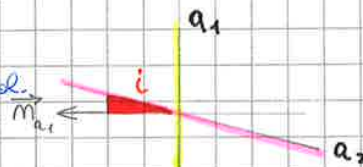
$$E_v = v \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \text{cotg}(z)$$



Letture \leftarrow coincidenti

(b) i = errore di inclinazione

$$E_i = \pm i \cdot \text{cotg}(z)$$



Letture \leftarrow coincidenti

(c) c = errore di collimazione

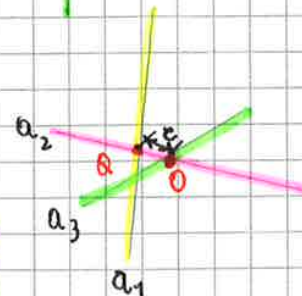
$$E_c = \pm \frac{c}{\text{sen} z}$$



Letture \leftarrow opposte

(d) errore di eccentricità dell'obliquo

(dovuto al fatto che a_1 non passa per O ma per Q \rightarrow di eccentricità e)



LIVELLI E LIVELLAZIONE

(misura dei dislivelli)

STRUMENTI : LIVELLO

Livello ottico -meccanico

- Lamina a facce piane e parallele e micrometro (fisso)
- Stadia: tradizionale (fibra o legno) / Invar
- Livella torica a coincidenza d'immagine o compensatore

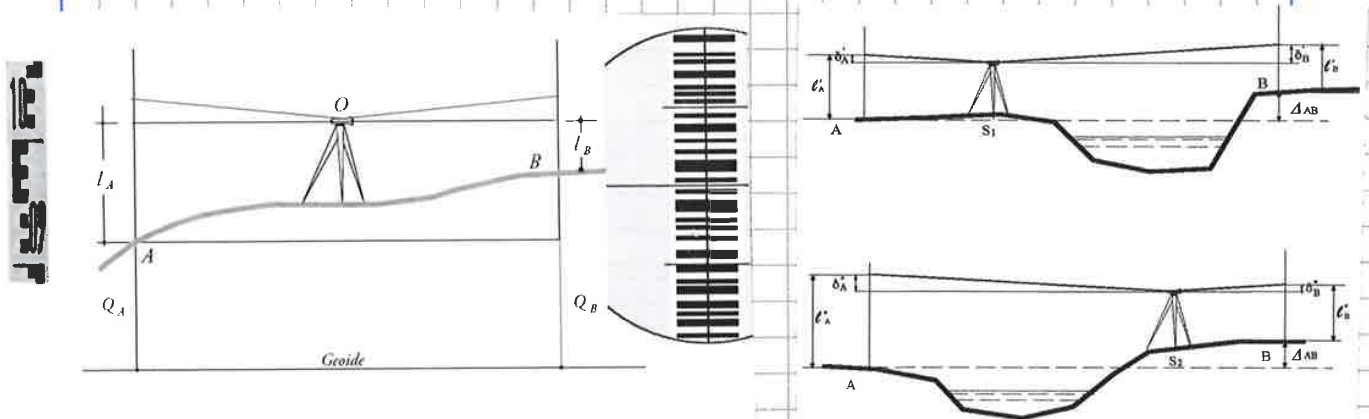


Livello Digitale

- Maggiore efficienza, maggiore rapidità,
- registrazione automatica delle misure e errore di lettura alla stadia indipendente dall'operatore
- richiede buone condizioni di illuminazione (problemi al crepuscolo, con illuminazione artificiale, variazioni repentine di illuminazione..)



Sistema di riferimento livellazione : fisico (linea di mira orizzontale)



DISLIVELLO :

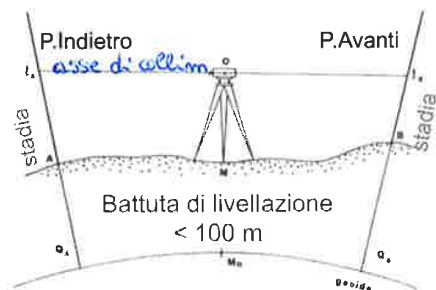
$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = l_A - l_B$$

BATTUTA DI LIVELLAZIONE DAL MEZZO

$$\Delta_{AB} = \frac{(l'_A - l'_B) + (l''_A - l''_B)}{2}$$

BATTUTA RECIPROCA

Misura diretta dei dislivelli: livellazione geometrica



Principio: asse di collimazione orizzontale e lettura alle stadiie verticali in A e B

$$Q_A + l_A = Q_B + l_B$$

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = l_A - l_B$$

CLASSIFICAZIONE LIVELLI

- | | | |
|---------------------|---------------------|------|
| (1) CANTIERE | $\sigma \geq 5$ | (mm) |
| (2) INGEGNERIA | $2 \leq \sigma < 5$ | |
| (3) PRECISIONE | $1 \leq \sigma < 2$ | |
| (4) ALTA PRECISIONE | $\sigma < 1$ | |

Reti di livellazione IGM

capiscala

$$\Delta_{AB} = \sum_i \Delta_i = \sum_i l_{PI} - \sum_i l_{PA}$$

RELAZIONE DI BRUNS

$$N \cong \frac{T}{g}$$

TEOREMA DI EULERO

$$\frac{1}{R\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

TEOREMA DI MEUSNIER

(per trovare $N = \frac{a}{w}$)

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}$$

$$r = N \cos \varphi$$

EQ. SFEROIDE

$$\sigma = a(1 - \alpha \sin^2 \psi)$$

EQ. GEODETICHE

$$X \frac{d^2 Y}{ds^2} - Y \frac{d^2 X}{ds^2} = 0$$

TEOREMA DI CLAIRAUT

$$r \cdot \sin \alpha = \text{cost}$$

TEOREMA DI LEGENDRE

$$3\varepsilon = \frac{S}{R^2} \Rightarrow \alpha = \alpha - \frac{1}{3}(3\varepsilon)$$

MODULO DEF. LINEARE MERCAT

$$m_e = \frac{a}{r}$$

MODULO DEF. LINEARE GAUSS

$$m_l = 1 + \frac{x^2}{2\rho N}$$

RIDUZIONE ALLA CORDA

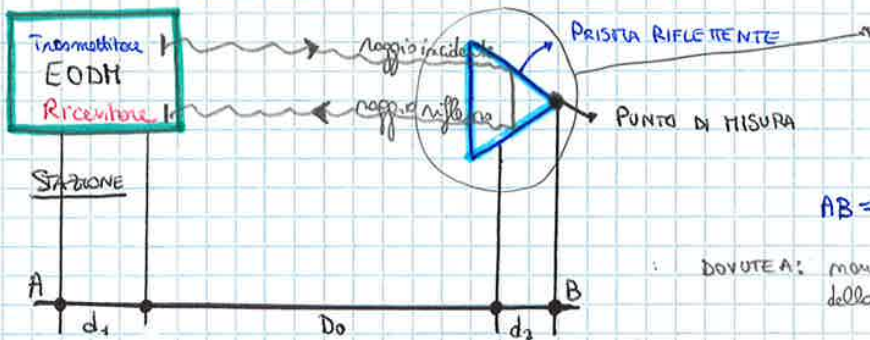
$$E_{PA} = \frac{(Y_P - Y_A)(2X_P - X_A)}{6\rho_c N_c}$$

EQ. DIFF CARTA CONF.

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} = -\frac{\partial x}{\partial u} \end{cases}$$

$$y + ix = f(u + i\lambda)$$

METODO DELLA MISURA DELLA FASE



$$AB = d_1 + D_0 + d_2$$

DOVUTE A: non conoscenza della fase dell'onda non conoscenza del punto di riflessione

Si trasmette verso B un'onda elettromagnetica impura modulata con precisione. L'onda viene riflessa dal prisma e torna al Ricettore. Lo sfasamento tra l'onda emessa e ricevuta sarà funzione di D_0

ONDA EMessa

$$I = I_0 \sin(\omega(t_0 + \Delta t))$$

$$= I_0 \sin(\omega t_0 + \omega \Delta t)$$

impulso

$$I = I_0 \sin(\varphi_0 + \Delta \varphi)$$

sfasamento

Intensità fase iniziale

$$\Delta s = c \Delta t = \Delta \varphi \frac{\lambda}{2\pi}$$

$$\varphi = \omega \Delta t$$

sfasamento

Negli EDM a sfasamento si ha:

ambiguità di fase (determinata con off-schietta)

Le frequenze e le lunghezze d'onda hanno precisione $2 \div 5 \cdot 10^{-6}$ (ppm)
 La misura dello sfasamento avviene con il discriminatore di fase

$$D = \frac{\varphi \lambda}{2\pi \cdot 2} + m \frac{\lambda}{2}$$

$\lambda = L$

La modulazione più semplice, detta MODULAZIONE DIRETTA, utilizza fotodiodi che emettono IR ($\lambda = 0,85 \mu\text{m}$) con energia proporzionale alla corrente che li attraversa:

$$E = kI$$

può essere variata per ottenere un segnale luminoso modulato in ampiezza

► PRECISIONE DEGLI EODM

Sia per quelli a spostamento che anche quella ad impulsi vale:

$$\sigma_d = \pm (C_0 + C_1 \cdot D) \quad \text{con} \quad 1 \leq C_0 \leq 10 \text{ (mm)} \\ 1 \leq C_1 \leq 10 \text{ (ppm)}$$

PRECISIONE LIMITE EODM : $\approx 10^{-6}$

► METODO MISURA AD IMPULSI [FASCIO DI LUCE LASER (ONDA □) di $\lambda = 20 \text{ nm}$]

Nota la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica si ha che:

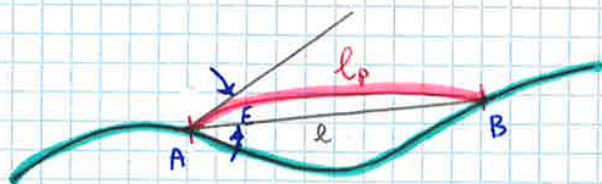
$$D = \frac{v \Delta t}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2D}{v}$$

N.B. Occorre affinché D abbia precisione minima 10^{-5} che sia Δt che v abbiano precisioni uguali.

Dopo un certo intervallo Δt dal 1° fronte d'onda, al ricevitore inizia ad arrivare il segnale di ritorno di ciascuna onda: la misura di questo Δt consente di avere un valore approssimato della dist con sgm pari a

$$\sigma_{\Delta t} = 4,5 \text{ m}$$

▷ INFLUENZA DELLA RIFRAZIONE ATMOSFERICA



$l_p =$ percorso onda ottica

Il segnale ottico emesso da A segue, rispetto al tragitto teorico l , una traiettoria inclinata di un angolo E che dipende dal mezzo attraversato e dalla frequenza dell'onda.

La differenza tra l e l_p (per misure anche di 50 km) è < della precisione strumentale $\Rightarrow l \approx l_p$

In realtà durante il tragitto $l \approx l_p$ subisce un ritardo che dipende dalla **frequenza di modulazione** secondo la legge

$$\lambda = \frac{c}{m f}$$

$c \rightarrow$ v. luce nel vuoto
 $f \rightarrow$ frequenza di modulazione
 $m \rightarrow$ indice di rifrazione

- m dipende da:
 - composizione atmosfera
 - temperatura t
 - pressione p
 - umidità relativa $\varphi\%$

▷ RAGGIO LASER } 5° di pericolosità

- \rightarrow a stato solido
- \rightarrow a gas
- \rightarrow a liquido
- \rightarrow a e-liquidi

La tecnica del laser scanning si basa sul metodo di misurazione delle dist per mezzo di onde elettromagnetiche, noto come **LIDAR** (light detection and ranging)

Il raggio laser deve essere composto da una sola frequenza di luce, da un'onda che non viene irradiata in tutte le direzioni, ma che si propaga a grande dist e con estrema direzionalità (**coerenza spaziale o unidirezionalità**), costituita da onde della stessa frequenza e fase che sommandosi originano un treno di luce che può essere spinto ad elevata intensità e potenza (**coerenza temporale**)



◆ SEGMENTO SATELLITARE

- 31 satelliti a ≈ 20.200 km da Terra non geostazionari
- periodo orbitale \bar{e} di 12 h siderali \Rightarrow in 24 h passano 2 volte sullo stesso P
- disposti su 6 piani orbitali ciascuno inclinato di 60° di longitudine e di 55° rispetto all'equatore

Progettata per garantire che in qualunque punto e in qualunque momento si possano osservare almeno 4 satelliti

- trasmettono all'utente 2 segnali molto complessi
- mantengono un segnale di tempo accurato grazie a 4 orologi atomici

◆ SEGMENTO DI CONTROLLO

- 16 stazioni di USAF, NGA disposte su tutto il globo
- tracciano in maniera continua ogni satellite GPS ed elaborano i dati ricevuti da questi per calcolare le **EFFEMERIDI** cioè la posizione spazio temporale di ogni satellite
- controlla e corregge la posizione di tutte le costellazioni

◆ SEGMENTO DI UTILIZZO

- si ricava la posizione assoluta o relativa, del centro di fase dell'antenna (posta su un 3 piedi)
- il ricevitore immagazzina i dati che poi sono scaricati sul PC

3 PARTI DEL SEGNALE:

- 1) Componente portante → onde sinusoidali = f_c coefficienti moti (≈ 20 km)
- 2) Componente impulsiva (codici) onde quadre → -1 e $+1$ → produce sfasamento π di
- 3) Componente messaggio (messaggio di navigazione) → efferendi e info calcolo delle posizioni dei satelliti

▶ IL SEGNALE GPS

E' formato da 3 parti:

- 1) Onde portanti L_1 e L_2 , L_5
- 2) Codici: C/A, P, L2c, M, Y che modulano una o più onde portanti
- 3) Codice a bassa frequenza detto → messaggio di navigazione D (efferendi)

Ogni parte del segnale è generata a partire da multipli o sottomultipli della frequenza dell'oscillatore

IN.B. Il segnale GPS deve attraversare tutti gli strati atmosferici:

$$P = c \cdot \Delta t = \rho + e$$

⇒ ritardo ionosferico

⇒ ritardo troposferico

ritardo del segnale

Causato { nei primi 10 km sopra H₂O
40 km { nei 30 km successivi da aria
da terra.

Si utilizzano allora 2 frequenze

▶ EQUAZIONE DELLO PSEUDO-RANGE

Dal segnale GPS si possono effettuare 2 misure:

- 1) PSEUDORANGE sui codici C/A o P
 - 2) SU CIASCUNA DELLE FASI
- } dist (satellite, stazione)

① PSEUDORANGE

Pseudorange
staz-satellite

$$P_k^p \approx c \Delta t_k^p = \rho_k^p + e$$

range ρ
distanza (satellite - stazione)

tempo di volo

per la presenza di Bias
tra i quali
errori (l'asincronismo)

Il segnale del codice viene emesso in un certo istante t e dal satellite p e viene ricevuto in un altro

istante T dal ricevitore K . Questo prodotto non rappresenta la distanza (range) stazione-satellite sia perchè il ricevitore non è sincrono con i satelliti sia perchè il segnale non si propaga in questo modo ideale.

Δt = intervallo di tempo tra la trasmissione e la ricezione del segnale
 dT = valore di asincronismo

② EQUAZIONE DELLA FASE

Il ricevitore misura uno sfasamento. In particolare si misura la fase generata dal ricevitore k al tempo del ricevitore T meno la fase ricevuta dal ricevitore k ma generata dal satellite p al tempo del satellite t

$$\Phi_{oss}(T) = \varphi_{gen\ k}(T_k) - \varphi_{rec\ k}^{sat\ p}(T_p)$$

$$\Phi_{TOT} = \varphi_r^{tr} - \varphi_s^{ts}$$

▷ MINIMIZZAZIONE O ANNULLAMENTO DEGLI ERRORI (BIASES) DI MISURA

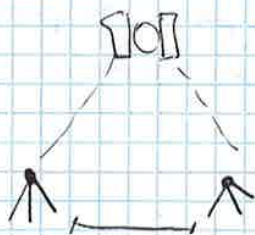
- ∃ 2 metodi:
- 1) MODELLO
 - 2) DIFFERENZIAZIONE

① MODELLO

Cerco un modello fisico matematico del fenomeno e poi lo applico per eliminare gran parte dell'errore. Dopo l'applicazione del modello rimane un errore residuo e se può al tempo che dunque in parte potrà essere eliminato da molte misure. Questi errori sono sistematici e possono essere in gran parte eliminabili. es: errori di analogo / di abito

② DIFFERENZIAZIONE

↗ biases sono eliminati nella differenza delle osservazioni dei 2 ricevitori



devo sapere { posizione relativa di un ricevitore rispetto un'altro

STATISTICA

† VARIABILE STATISTICA AD 1 DIMENSIONE (X)

$X \begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_m \rightarrow \text{(attributo) valore argomentale} \\ F_1, F_2, \dots, F_m \rightarrow \text{frequenza} \end{cases}$
freq. relativa
 $f_i = \frac{F_i}{N}$
a posteriori

† VARIABILE CASUALE

$X \begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_m \\ p_1, p_2, \dots, p_m \rightarrow \text{probabilità} \end{cases}$
a priori

† MEDIA $\mu[x]$

$$\mu[x] = \sum_{i=1}^m x_i \cdot f_i$$

† VALORE QUADRATICO MEDIO $\mu[x^2]$

$$\mu[x^2] = \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot f_i$$

† VARIANZA σ^2 $\sigma^2 \uparrow \Rightarrow$ maggiore dispersione (intorno alla media)

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - \mu[x])^2 \cdot f_i$$

$$\sigma_x^2 = \mu[x^2] - \mu[x]^2$$

$$x_i - \mu[x] = v_i$$

† SCARTO QUADRATICO MEDIO

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

\rightarrow + piccolo è + alta è la campana nella distribuzione delle misure, + precise sono le misure

♦ VARIANZA

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s (x_i - M[x])^2 f_{ik} = \sum_{i=1}^r v_i^2$$

♦ MOMENTO MISTO

$$m_{xy} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s x_i \cdot y_k \cdot f_{ik}$$

♦ COVARIANZA

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^s v_{ix} \cdot v_{ky} \cdot f_{ik}$$

$$\sigma_{xy} = m_{xy} - M[x]M[y]$$

♦ MATRICE DI VARIANZA COVARIANZA

$\begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix}$	per m=2
$\begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{vmatrix}$	per m=3

→ in caso di indipendenza la matrice è diagonale

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{vmatrix}$$

♦ COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE (o indice di BRAVES)

$$-1 \leq \rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \leq 1$$

↓
perfetta dipendenza lineare

ρ = 0 NO l. dipendenti
NO correlazione lineare
ma può essere di altro tipo

$$\rho = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = 0 \Rightarrow m_{xy} = M[x]M[y]$$

TRATTAMENTO STATISTICO DELLE MISURE

MISURE DIRETTE: si conta il no di unità campione contenute nella quantità costruita.

∃ una misura vera mai raggiungibile ed ∞ SITTE di tale misura che l'approssimano
 ↳ a causa di errori accidentali
 ↳ x_k è influenzato secondo la legge

ERRORI SISTEMATICI → taratura strumentazione (evitabili) (rettifiche strumentali)

ERRORI ACCIDENTALI → inevitabili, es: transcurso operatore

ERRORI GROSSOLANI → (rari) tipo errori di mira (eliminabili)

MISURE DIRETTE CONDIZIONATE: legate fra loro da un legame funzionale

MISURE INDIRETTE: la misura indiretta di una grandezza è definita da un legame funzionale che lega tale grandezza ad altre grandezze misurabili direttamente.

STIMA: Valore numerico che associamo a m ($n[x]$) e σ^2

STIMATORE: relazione analitica che consente di definire la stima (funzione di n campione limitato di estrazioni casuali)

PRINCIPIO DI MASSIMA VEROSIMILIANZA

Consideriamo una distribuzione $f(x)$ dipendente da r parametri $\theta_1, \dots, \theta_r$

Consideriamo x_1, \dots, x_m → individui estratti a caso da $f(x)$ ⇒

$$P(x_1, \dots, x_m / \theta_1, \dots, \theta_r) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_m)$$

↓ densità di probabilità

↳ Maggiore verosimiglianza → hanno quelle stime di $\theta_1, \dots, \theta_r$ che rendono massima P .

MISURE DIRETTE DI UGUALE PRECISIONE

STIMA DELLA MEDIA (non affetta da errore sistematico)

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}$$

→ derivata dal principio dei minimi quadrati

Per misurare correttamente una grandezza è necessario ripetere più volte la misura e assumere come valore della grandezza quello espresso dalla media aritmetica delle misure eseguite

STIMA DELLA VARIANZA DELLA DISTRIBUZIONE ORIGINALE

$$\sigma^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{m})^2$$

↳ termine correttivo affinché σ^2 non sia affetta da errore sistematico

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{m})^2}{m-1} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i^2}{m-1}$$

STIMA DELLA VARIANZA DELLA DISTRIBUZIONE DELLE MEDIE

$$\bar{\sigma}_m^2 = \frac{\sigma^2}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{m})^2}{m(m-1)} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i^2}{m(m-1)} = \sigma_m^2$$

Misurare direttamente una grandezza significa:

- 1) eseguire m osservazioni x_1, \dots, x_m
- 2) calcolare la media aritmetica \bar{m}
- 3) calcolare la varianza della distribuzione delle medie $\bar{\sigma}_m^2$

⇒ la misura di 1 grandezza si esprimerà come:

$$\bar{m} \pm \bar{\sigma}_m$$

$$\begin{cases} \bar{m} = \frac{\sum x_i}{m} \\ \bar{\sigma}_m^2 = \frac{\sum v_i^2}{m(m-1)} \end{cases}$$

l'intervallo $\pm 3\bar{\sigma}_m$ rappresenta la max variazione di \bar{m}

(di 1 sola misura invece è $\pm 3\bar{\sigma}$)

Se misura $> \bar{m} \pm 3\bar{\sigma} \Rightarrow$ è affetta da errore grossolano
($\bar{\sigma} \rightarrow$ assumo il valore della precisione strumentale)

MISURE DIRETTE DI DIVERSA PRECISIONE

Se una grandezza viene misurata più volte con strumenti diversi \neq precisi o in condizioni operative differenti, non è possibile ricavare il valore più rappresentativo della grandezza semplicemente facendo la media aritmetica delle misure eseguite.

Le m distribuzioni avranno la stessa media teorica m poiché rappresentano la stessa grandezza, ma varianza $\sigma_i^2 \neq$ perché la precisione è diversa.

$O_1, \dots, O_m = m$ osservazioni di diversa precisione

♦ PESI DELLE SINGOLE MISURE O_i

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \rightarrow \text{varianza dell'unità peso (valore arbitrario)} \\ \text{note } \sigma_i$$

♦ STIMA DELLA MEDIA PONDERATA DELLE m OSSERVAZIONI (non affetta da errore sistematico)

$$\bar{m}_p = \frac{\sum_{i=1}^m p_i O_i}{\sum_{i=1}^m p_i}$$

♦ STIMA DELLA VARIANZA DELLA DISTRIBUZIONE DELLE MEDIE PONDERATE (non aff. da er. sist.)

$$\bar{\sigma}_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^m p_i^2 \sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^m p_i\right)^2}$$

$$\bar{\sigma}_p^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^m p_i}$$

\rightarrow in caso si conoscano solo i pesi (e non σ_i), bisogna però stimare σ_0^2

♦ STIMA DI σ_0^2 (valore corretto \rightarrow non affetto da errore sistematico)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^m p_i \cdot v_i^2}{m-1}$$

$$\Rightarrow \bar{m}_p \pm \hat{\sigma}_p$$

$$V_1 = \Delta_{AB_1} - \bar{m}_p = 0,0024$$

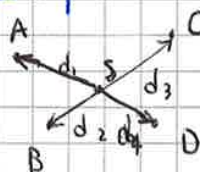
$$V_2 = \Delta_{AB_2} - \bar{m}_p = -0,0055$$

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{P_1 \cdot V_1^2 + P_2 \cdot V_2^2}{2-1} = 0,0000048 \Rightarrow \bar{\sigma}_0^2 = 2,3 \cdot 10^{-11}$$

$$\bar{\sigma}_p^2 = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{P_1 + P_2} = 6,4 \cdot 10^{-11}$$

$$\Rightarrow \Delta_{AB} = \bar{m}_p \pm \bar{\sigma}_p$$

esempio:



conosci q_A, q_C, q_B, q_D

d_1, d_2, d_3, d_4

devo trovare $q_S = ?$

$$P_i = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\sigma_i^2} = \frac{1}{d_i}$$

$$P_i = \frac{1}{d_i}$$

interpolazione di 1 quota
(per le quote)

$$\bar{m}_p = \frac{q_S}{1} = \frac{\sum_{i=1}^K q_i \cdot P_i}{\sum_i P_i}$$

quota incognita = \bar{m}_p

$$\bar{\sigma}_0^2 = \frac{\sum P_i \cdot V_i^2}{n-1}$$

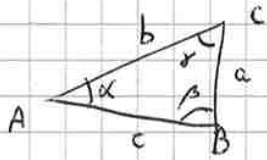
$$\bar{\sigma}_m^2 = \frac{\bar{\sigma}_0^2}{\sum P_i}$$

$$\Rightarrow q_S = \frac{\bar{m}_p}{1} \pm \bar{\sigma}_m$$

$$\sigma_m = \sqrt{\bar{\sigma}_m^2}$$

Esempio:

Calcola l'area ^{→ incorrelate} e il 3° lato del triangolo



$$\begin{aligned}
 a &= 1500 \pm 0,03 \text{ m} \rightarrow \bar{\sigma}_a \\
 b &= 1600 \pm 0,07 \text{ m} \rightarrow \bar{\sigma}_b \\
 \gamma &= 54,790 \pm 0,0011 \rightarrow \bar{\sigma}_\gamma
 \end{aligned}$$

1) $A = ?$

$$\bar{A} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \sin \bar{\gamma}}{2} = 909,985 \text{ m}^2$$

incorre →

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_s^2 &= \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_m^2 \bar{\sigma}_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_m^2 \bar{\sigma}_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)_m^2 \bar{\sigma}_\gamma^2 \\
 &= \left(\frac{\bar{b} \sin \bar{\gamma}}{2}\right)^2 \bar{\sigma}_a^2 + \left(\frac{\bar{a} \sin \bar{\gamma}}{2}\right)^2 \bar{\sigma}_b^2 + \left(\frac{\bar{a} \bar{b} \cos \bar{\gamma}}{2}\right) \bar{\sigma}_\gamma^2 \\
 &= 2.126,44 \text{ m}^4
 \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_s = \pm \sqrt{\bar{\sigma}_s^2} = \pm 46,11 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow S = 909,985 \pm 46,11 \text{ m}^2$$

2) $c = ?$

$$\bar{c} = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 - 2\bar{a}\bar{b} \cos \bar{\gamma}} = 1.286,52 \text{ m}$$

$$\bar{\sigma}_c^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)_m^2 \bar{\sigma}_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)_m^2 \bar{\sigma}_b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)_m^2 \bar{\sigma}_\gamma^2$$

$$\bar{\sigma}_c = \pm 0,043 \text{ m}$$

$$c = 1286,52 \pm 0,043$$

▶ CASO EQUAZIONI LINEARI

✦ STIMA DELLA MEDIA

dete X_1, \dots, X_r grandezze indirette incognite con $m > r$
 L_1, \dots, L_m grandezze misurabili direttamente

Si costruisce il sistema:

$$\begin{cases} a_1 \bar{X}_1 + b_1 \bar{X}_2 + \dots + u_1 \bar{X}_r = \bar{L}_1 \\ \vdots \\ a_m \bar{X}_1 + b_m \bar{X}_2 + \dots + u_m \bar{X}_r = \bar{L}_m \end{cases} \quad AX = T$$

medie

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & u_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_m & b_m & \dots & u_m \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_r \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \bar{L}_1 \\ \vdots \\ \bar{L}_m \end{pmatrix}$$

matrice di segno
vettore stimatore delle medie
vettore stima delle medie delle misure dirette

la soluzione è:

$$X = N^{-1} T_m$$

↑ matrice normale

con

$$\begin{cases} N = A^T \cdot A \\ T_m = A^T \cdot T \end{cases}$$

↓ vettore termini noti normalizzato

► CASO EQUAZIONI NON LINEARI

Bisogna linearizzare nell'intorno di 1 punto noto (sviluppo in serie di Taylor di 1° grado)

SISTEMA DI EQ. NON LINEARI

$$f_i(X_1, X_2, \dots, X_r / L_i) = 0 \quad (1)$$

dati $X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0 \rightarrow$ valori sufficientemente approssimati delle incognite in modo che i quadrati degli scarti possano essere trascurati si avrà:

$$f_i(X_1^0, X_2^0, \dots, X_r^0, L_i) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right)_0 x_1 + \dots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_r}\right)_0 x_r + \text{termini trascur.}$$

SISTEMA DI EQ. ALLE CORREZIONI

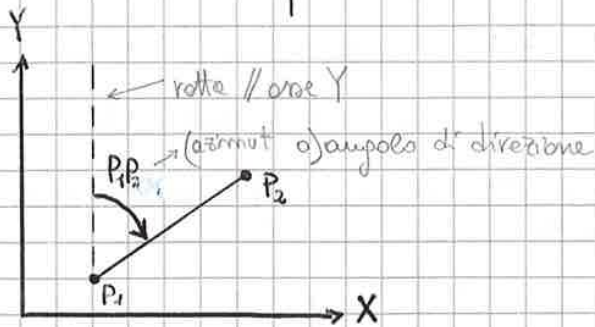
$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right)_0 = a_i \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_r}\right)_0 = u_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + \dots + u_1 x_r = L_1 \\ \vdots \\ a_m x_1 + b_m x_2 + \dots + u_m x_r = L_m \end{cases}$$

valori da sommare ai valori approssimati X_1^0, \dots, X_r^0 per trovare:
 misure involute

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1^0 + x_1 \\ X_2 &= X_2^0 + x_2 \\ X_r &= X_r^0 + x_r \end{aligned}$$

la matrice $C_{xx} \equiv C_{xx}$ che X_1^0, \dots, X_r^0 sono costanti.

Consideriamo 2 punti P_1 e $P_2 \rightarrow P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$



$$P_1P_2 = \arctg \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1}$$

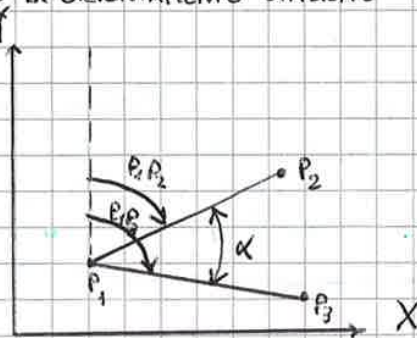
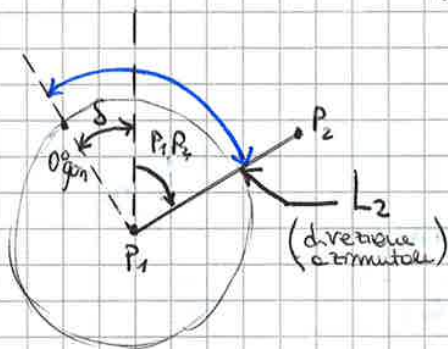
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

L'angolo di direzione α non è misurabile direttamente.

Letture L_2 quando il teodolite è posizionato in P_1 e si collima P_2

$$L_2 = \delta + P_1P_2$$

\rightarrow CORREZIONE AZIMUTALE DI STAZIONE o ANGOLO DI ORIENTAMENTO STAZIONE = ∇ direzione azimutale



∇ direzione azimutale misurata L_2 si ha:

EQ. FRA LE COORDINATE PLANIMETRICHE

$$\arctg \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} + \delta - L_2 = 0$$

X e Y incognite
 δ incognita

L_2 = termine noto

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

X e Y incognite
 $d(P_1, P_2)$ = termine noto

$$P_1P_3 - P_1P_2 = \alpha \rightarrow \text{angolo azimutale}$$

$$P_1P_3 - P_1P_2 - \alpha = 0$$

→ EQUAZIONI LINEARIZZATE

$$\rightarrow \arctg \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} + \delta - L_2 = 0$$

calcolato con le
↑ coordinate approssimate

Se 1 dei
2 vertici:
(P₁, P₂) è moto

$$\Rightarrow a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 x_2 + d_1 y_2 + \delta_c + (P_1, P_2)^0 + \delta^0 - L_2 = 0$$

le correzioni
sono nulle
(corrispondenti)

a_1	b_1	c_1	d_1
"	"	"	"
$\frac{\partial f}{\partial X_1}$	$\frac{\partial f}{\partial Y_1}$	$\frac{\partial f}{\partial X_2}$	$\frac{\partial f}{\partial Y_2}$

$$\rightarrow d(P_1, P_2) = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

Se 1 dei 2
vertici è moto

↓
correzioni
nulle
(corrispondenti)

$$\Rightarrow a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 x_2 + d_1 y_2 + d^0(P_1, P_2) - d(P_1, P_2) = 0$$

$$\rightarrow \arctg \frac{X_3 - X_1}{Y_3 - Y_1} - \arctg \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} - \alpha = 0$$

Se 1 dei 2 vertici
è moto

↓
correzioni
corrispondenti
nulle

$$\Rightarrow a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 x_2 + d_1 y_2 + e_1 x_3 + f_1 y_3 + \alpha^0 - \alpha = 0$$

$$e_1 = \frac{\partial f}{\partial X_3}$$

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial Y_3}$$

RETTE ARITMETRICHE E COMPENSAZIONE

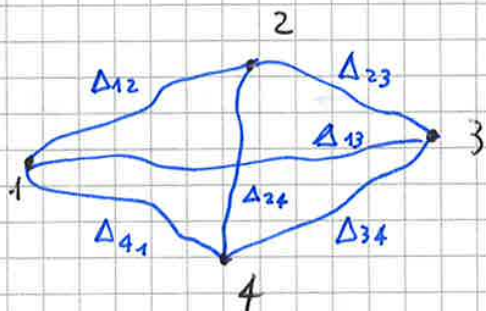
livellazione geometrica

$$\sigma_i = k \sqrt{l_i}$$

livellazione trigonometrica

$$\sigma_i = k l_i$$

$$\Delta_{ij} = Q_j - Q_i \rightarrow \text{eq. lineare}$$



$Q_1 \rightarrow$ quota nota

Calcola Q_2, Q_3, Q_4

Ho 6 dislivelli \Rightarrow 6 equazioni

$$\begin{cases} Q_2 - Q_1 - \Delta_{12} = v_1 \rightarrow \text{scarto} \\ Q_3 - Q_2 = \Delta_{23} = v_2 \\ Q_4 - Q_3 - \Delta_{34} = v_3 \\ Q_1 - Q_4 - \Delta_{41} = v_4 \\ Q_4 - Q_2 - \Delta_{24} = v_5 \\ Q_3 - Q_1 - \Delta_{13} = v_6 \end{cases}$$

$$A = \begin{matrix} & Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

\rightarrow sistema indeterminato

\Downarrow
applica il principio di verosimiglianza

$$P_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_i^2 = k^2 l_i$$

$$\frac{\sigma_0^2}{k^2} = 1$$

$$\Rightarrow P_i = \frac{1}{l_i} \rightarrow \text{linea di livellazione}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{vmatrix}$$

$$T = \begin{vmatrix} Q_1 + \Delta_{12} \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{34} \\ -Q_1 + \Delta_{41} \\ \Delta_{24} \\ Q_1 + \Delta_{13} \end{vmatrix}$$