NUMERO: 1717A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Chialà Francesco

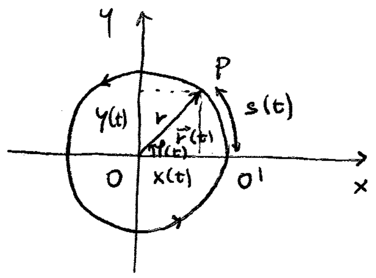
MATERIA: Fisica I - prof. Triggiante

FISICA 1 (PARTE I)

I ANNO (2013/2014)

FRANCESCO CHIALA'

MOTO CIRCOLARE



[COORD. CARTESIANE]
$$\begin{cases} x(t) = R\cos(wt) \\ y(t) = R\sin(wt) \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y$$

$$[w] = [T^{-1}] \qquad \frac{rad}{sec}$$

MOTO PERIODICO: DOPO T IL PUNTO RITORNA NELLA POSIZIONE INIZIALE CON LA STESSA VELOCITÀ DI PARTENZA

$$t \longrightarrow t + T$$

$$x(t+T) = R\cos(w(t+T)) = R\cos(wt + wT) = x(t)$$
$$y(t+T) = R\sin(w(t+T)) = R\sin(wt + wT) = y(t)$$

QUANDO $T = \frac{2\pi}{w}$

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad \text{PERIODO}$$

TRAIETTORIA

$$r^2 = |\vec{r}(t)|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = R^2\cos^2(wt) + R^2\sin^2(wt) = R^2(\cos^2 wt + \sin^2 wt) = R^2$$

INFATTI L'EQ DELLA CIRCONFERENZA È:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

LA TRAIETTORIA È UNA CIRCONFERENZA

$S(t)$ ASCISSA CURVILINEA

$$s(t) = \varphi(t)\,R$$

[COORD. CART.]
$$\begin{cases} x(t) = R\cos(wt) \\ y(t) = R\sin(wt) \end{cases} \Rightarrow$$
[COORD. POLARI]
$$\begin{cases} r(t) = R \\ \varphi(t) = wt \end{cases}$$

IN TAL MODO IDENTIFICHIAMO LA POSIZIONE ANGOLARE

DALLA POSIZIONE ANGOLARE $\varphi(t)$ CALCOLIAMO LA VELOCITÀ ANGOLARE w (FACENDO LA DERIVATA DI $\varphi(t)$ RISPETTO AL TEMPO)

$$w = \frac{d\varphi}{dt} = \text{cost.}$$

CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE

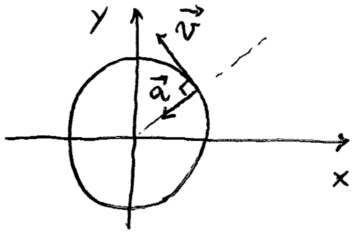
CONSIDERANDO CHE $\vec{v} = -Rw\,\text{sen}(wt)\,\vec{u_x} + Rw\cos(wt)\,\vec{u_y}$

CALCOLIAMO $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(-Rw\,\text{sen}(wt))\,\vec{u_x} + \frac{d}{dt}(Rw\cos(wt))\,\vec{u_y}$

$$= -Rw^2\cos(wt)\,\vec{u_x} - Rw^2\,\text{sen}(wt)\,\vec{u_y} =$$

$$= -Rw^2\left(\cos(wt)\,\vec{u_x} + \text{sen}(wt)\,\vec{u_y}\right) =$$

$$= -Rw^2\,\vec{u_r}$$



IL SEGNO "−" INDICA CHE $\vec{a}$ HA VERSO ENTRANTE DIRETTO VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA PERCIÒ L'ACCELERAZIONE È DETTA CENTRIPETA

NOTIAMO ANCHE $\vec{v} \perp \vec{a}$

RIASSUMENDO

$$\begin{cases} \vec{v} = Rw\,\vec{u_\varphi} \\ \vec{a} = -Rw^2\,\vec{u_r} \\ \vec{r}(t) = R\,\vec{u_r} \end{cases}$$

DIMOSTRIAMO CHE IL MODULO DI $\vec{v}$ È COSTANTE

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{R^2w^2\,\vec{u_\varphi}\cdot\vec{u_\varphi}} = \sqrt{R^2w^2\cdot 1} = R|w| =$ COSTANTE

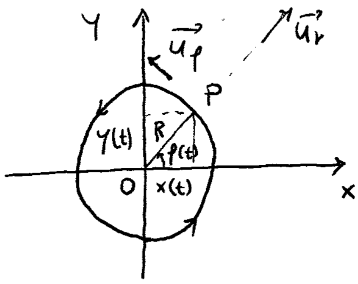
METTIAMO IL VALORE ASSOLUTO ($|w|$) PERCHÉ W PUÒ ESSERE POSITIVA O NEGATIVA.

PROPRIO PERCHÉ $\vec{v}$ NON VARIA IN MODULO SI PARLA DI "MOTO CIRCOLARE UNIFORME".

NON DIMENTICHIAMO PERÒ CHE $\vec{v}$ VARIA IN DIREZIONE PER EFFETTO DELL'ACCELERAZIONE CENTRIPETA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 296

MOTO CIRCOLARE GENERICO



[COORD. POLARI] $\begin{cases} r(t) = R \\ \varphi(t) \end{cases}$

[COORD. CARTESIANE] $\begin{cases} x(t) = R\cos(\varphi(t)) \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}(\varphi(t)) \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \mathrm{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\varphi = -\mathrm{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y \end{cases}$$

CALCOLO VELOCITÀ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y\right) = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)\vec{u}_y =$$

$$= -R\,\mathrm{sen}(\varphi(t))\,\frac{d\varphi}{dt}(t)\,\vec{u}_x + R\cos(\varphi(t))\,\frac{d\varphi}{dt}(t)\,\vec{u}_y =$$

$$= -R\,w(t)\,\mathrm{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_x + R\,w(t)\cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y =$$

$$= R\,w(t)\left(-\mathrm{sen}(\varphi(t))\,\vec{u}_x + \cos(\varphi(t))\,\vec{u}_y\right) = R\,w(t)\,\vec{u}_\varphi(t)$$

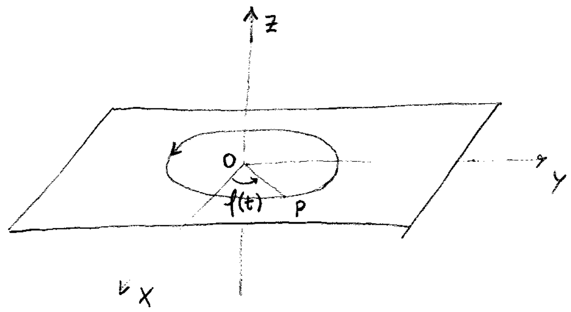
N.B. w E $\vec{u}_\varphi$ VARIANO NEL TEMPO

RICORDANDO CHE $\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\,w(t)$

QUINDI $\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\,\vec{u}_\varphi(t)}$ (VELOCITÀ IN COMPONENTI INTRINSECHE)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 296

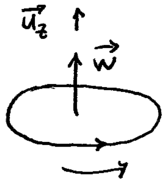
VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE



IL VERSO SEGNATO SULL'ASSE z È LEGATO A QUELLO FISSATO SULLA CIRCONFERENZA DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA.
N.B. IL VERSO FISSATO SULLA CIRCONFERENZA (VERSO DEI φ CRESCENTI) È INDIPENDENTE DAL VERSO DEL MOTO ANALIZZATO.

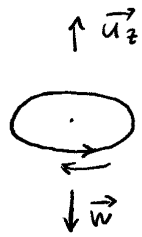
DEFINISCO IL VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE

$$\vec{w} = w\,\vec{u}_z$$



$w > 0 \qquad \vec{w} = w\,\vec{u}_z$

SE IL PUNTO SI MUOVE LUNGO LA CIRCONFERENZA NEL VERSO FISSATO SULLA STESSA $w > 0$ E QUINDI $\vec{w}$ HA VERSO CONCORDE A QUELLO DI $\vec{u}_z$



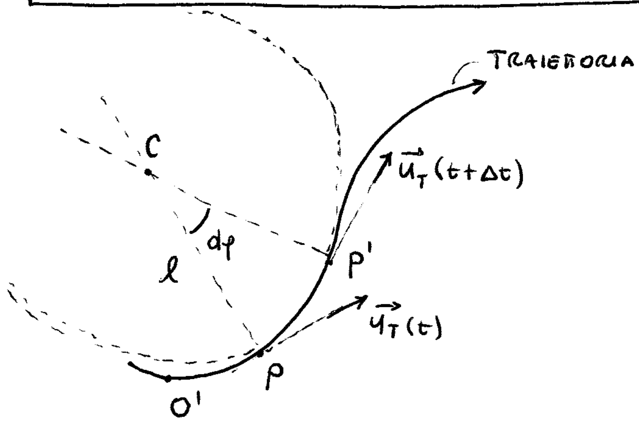
$w < 0 \qquad \vec{w} = w\,\vec{u}_z$

SE IL PUNTO SI MUOVE NEL VERSO OPPOSTO A QUELLO FISSATO SULLA CIRCONFERENZA $w < 0$ E QUINDI $\vec{w}$ HA VERSO OPPOSTO A QUELLO DI $\vec{u}_z$

NOTAZIONE VETTORIALE DI $\vec{w}$

$$\vec{w} = (0, 0, w)$$

ACCELERAZIONE IN UN MOTO 3D



INNANZITUTTO NOTIAMO CHE LA DESCRIZIONE COMPLETA DEL MOTO PUÒ ESSER FATTA ATTRAVERSO L'ASCISSA CURVILINEA $s(t)$

RICORDIAMO CHE ...

$\vec{v} = v(t)\,\vec{u}_T(t) \qquad v(t) = \dfrac{ds}{dt}$

CONSIDERIAMO DUE ISTANTI SUCCESSIVI E LA POSIZIONE DELL'OGGETTO IN MOTO INDIVIDUATA DAI PUNTI P E P'.

TRACCIAMO LE UNICHE DUE PERPENDICOLARI AI VERSORI $\vec{u}_T(t)$ E $\vec{u}_T(t+\Delta t)$ PASSANTI PER I PUNTI "P" E "P'" CHE SI INCONTRERANNO IN UN PUNTO "C"

IN GENERALE $|PC| \neq |P'C|$

QUESTA UGUAGLIANZA VARRÀ NEL LIMITE IN CUI $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta t = dt$

$|PC| \simeq |P'C| = \ell$

CIÒ VUOL DIRE CHE I PUNTI "P" E "P'" APPARTENGONO AD UNA STESSA CIRCONFERENZA CENTRATA IN "C".

PER $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta t = dt$ L'ARCO DI TRAIETTORIA $\widehat{PP'}$ SI CONFONDE CON L'ARCO DELLA CIRCONFERENZA CENTRATA IN "C" DI RAGGIO ℓ.

STIAMO APPROSSIMANDO IL MOTO SFRUTTANDO IL MOTO CIRCOLARE CHE SI PUÒ RICONOSCERE IN UN INTERVALLO INFINITESIMO DI TEMPO dt.

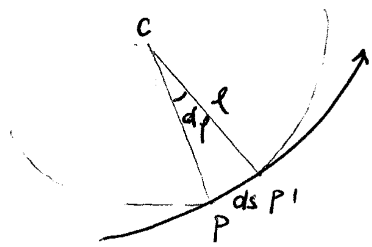
LA CIRCONFERENZA CENTRATA IN "C" È DETTA CERCHIO OSCULATORE ED IL PIANO SU CUI GIACE TALE CERCHIO È DETTO PIANO OSCULATORE.

È CHIARO CHE IL "CERCHIO OSCULATORE" CONSIDERATO VARIA DA PUNTO A PUNTO.

$d\varphi$ È L'ANGOLO SOTTO CUI IL CENTRO "C" VEDE IL TRATTO DI TRAIETTORIA PERCORSO.

DEFINISCO LA VELOCITÀ ANGOLARE ISTANTANEA

$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$



INOLTRE $ds = \ell\, d\varphi$

QUINDI $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \ell \dfrac{d\varphi}{dt} = \ell\omega$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 296

SAPENDO CHE $\frac{d\vec{u_T}}{dt} = w\vec{u_N} = \vec{w}\times\vec{u_T}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u_T}(t) + v\frac{d\vec{u_T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u_T}(t) + v(\vec{w}\times\vec{u_T}) = \frac{dv}{dt}\vec{u_T} + (\vec{w}\times\vec{v}) =$$

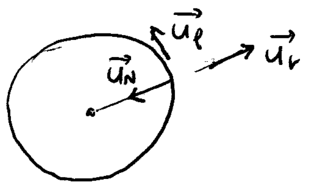
$$= \frac{dv}{dt}\vec{u_T} + vw\vec{u_N} = \vec{a_T} + \vec{a_c}$$

$$\vec{a_T} = \frac{dv}{dt}\vec{u_T} = \frac{d^2s}{dt}\vec{u_T}$$

$$\vec{a_c} = \vec{w}\times\vec{v} = vw\vec{u_N} = \underbrace{\ell w^2}_{>0}\vec{u_N} = \underbrace{\frac{v^2}{\ell}}_{>0}\vec{u_N}$$

QUINDI L'ACCELERAZIONE È SEMPRE RIVOLTA VERSO L'INTERNO DELLA CURVA E VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO OSCULATORE

TUTTO QUESTO È CONFORME A QUELLO CHE ACCADE NEL MOTO CIRCOLARE



$$\vec{u_N} = -\vec{u_r}$$
$$\vec{u_\ell} = \vec{u_T}$$

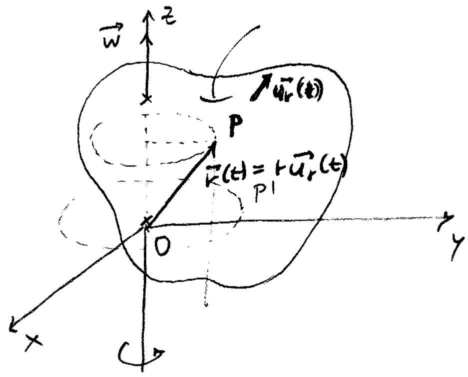
$$\vec{a_T} = \frac{dv}{dt}\vec{u_T} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u_T}$$

$$\vec{a_c} = vw\vec{u_N} = \ell w^2\vec{u_N} = -\frac{v^2}{\ell}\vec{u_N}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 296

CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI

CONSIDERIAMO UNA MELA ED IL SUO MOTO DI ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE Z.

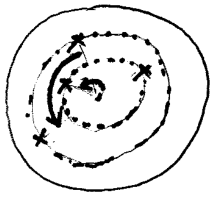


LA DISTANZA DI UN "P" (O DI QUALUNQUE ALTRO PUNTO) DELLA MELA DALL'ASSE Z RIMANE COSTANTE DURANTE LA ROTAZIONE. IL PUNTO "P", QUINDI, DESCRIVERÀ UNA TRAIETTORIA CONCENTRICA: IL SUO MOTO È CIRCOLA

NOTIAMO ANCHE CHE LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO P IN UN CERTO INTERVALLO DI TEMPO E' UGUALE A QUELLO DI QUALSIASI ALTRO PUNTO DELLA MELA IN QUELLO STESSO INTERVALLO DI TEMPO.

QUESTA È UNA PROPRIETÀ DEI SISTEMI RIGIDI.

PER CONVINCERCI CONSIDERIAMO UN VINILE.



SE IN UN CERTO INTERVALLO Δt IL GRAFFIO X SUL VINILE SI SARÀ SPOSTATO DI UN ANGOLO $\Delta\rho$ ALLORA IN QUELLO STESSO Δt UN ALTRO GRAFFIO X AVRÀ DESCRITTO UN ANGOLO $\Delta\theta = \Delta\rho$.

QUESTO IMPLICA CHE LA VELOCITÀ ANGOLARE DI OGNI PUNTO DEL VINILE È LA STESSA.

$\omega = \dfrac{d\rho}{dt}$ UGUALE PER TUTTI I PUNTI!!!

PERCIÒ POSSIAMO DIRE CHE IL MOTO DI UN CORPO RIGIDO INTORNO AD UN ASSE FISSO PUÒ ESSERE DESCRITTO COMPLETAMENTE DA UN UNICO PARAMETRO: $\rho(t)$ LA POSIZIONE ANGOLARE DI UN PUNTO ATTRAVERSO LA QUALE DEDUCIAMO QUELLA DI TUTTI GLI ALTRI. IL SISTEMA RIGIDO HA 1 GRADO DI LIBERTÀ.

DEF. SISTEMA RIGIDO: È L'INSIEME DEI PUNTI CHE SI MUOVONO MANTENENDO FISSA LA LORO DISTANZA RECIPROCA.

UN ESEMPIO DI SISTEMA RIGIDO È UN CORPO RIGIDO OPPURE GLI ASSI DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO, I VERSORI $\vec{u}_T$ E $\vec{u}_\rho$ DI UN MOTO CIRCOLARE ECC.

COME SI MUOVE LA MELA???

NOTIAMO CHE LA DISTANZA OP = COST NELLA ROTAZIONE.
CIÒ CHE VARIA È IL VERSORE $\vec{u}_r$.

$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ OP $\in$ AL CORPO RIGIDO $\Rightarrow |\vec{r}(t)| = |OP| = \text{cost}$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{w} \times \vec{r}}$$

SE L'ASSE È FISSO $\vec{w} = w\vec{u}_z$

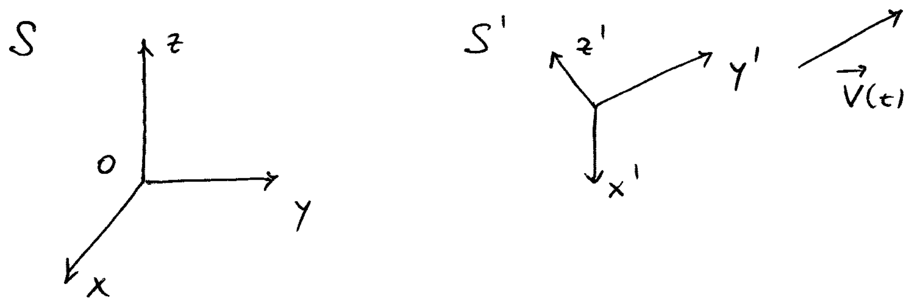
CINEMATICA DEI MOTI RELATIVI

IL MOTO DI UN PUNTO MATERIALE PUÒ ESSERE DESCRITTO DA DUE OSSERVATORI CIASCUNO CON UN PROPRIO SISTEMA DI RIFERIMENTO. LE DESCRIZIONI DEI DUE OSSERVATORI SARANNO DIVERSE MA IN QUALCHE MODO COLLEGATE.
A NOI INTERESSA CAPIRE QUALI RELAZIONI INTERCORRONO TRA LE DUE.

"IL MOTO + GENERALE IN ASSOLUTO DI UN SISTEMA RIGIDO È COMPOSTO DA: MOTO TRASLATORIO + MOTO ROTATORIO."

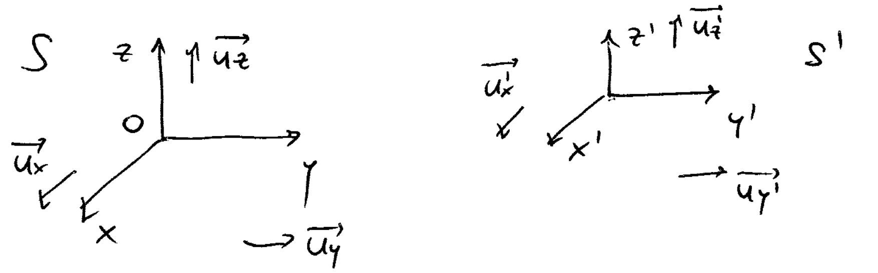
CONSIDERIAMO DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO: S E S'
SUPPONIAMO CHE S' SI MUOVA SECONDO UN MOTO DI **PURA TRASLAZIONE**

DEF. MOTO TRASLATORIO: TUTTI I PUNTI DEL SISTEMA RIGIDO HANNO STESSA VELOCITÀ IN UN DATO ISTANTE, O MEGLIO VARIANO LA LORO VELOCITÀ (CHE IN GENERALE DIPENDE DAL TEMPO) ALLO STESSO MODO.



$\vec{V}(t)$ INDICA LA VELOCITÀ DEI PUNTI SOLIDALI AL SISTEMA S'

DATO CHE IL MOTO È DI PURA TRASLAZIONE LA COSA PIÙ FURBA DA FARE È FISSARE GLI ASSI DI S' IN MODO CHE SIANO PARALLELI A QUELLI DI S



$$\vec{u_x} = \vec{u_x'}$$
$$\vec{u_y} = \vec{u_y'}$$
$$\vec{u_z} = \vec{u_z'}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 296

- CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE DEL PUNTO O' MISURATA DA O

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \overrightarrow{a_{O'}}$$

- CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE DEL PUNTO P MISURATA DA S'

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{dv_x'}{dt}\overrightarrow{u_x}' + \frac{dv_y'}{dt}\overrightarrow{u_y}' + \frac{dv_z'}{dt}\overrightarrow{u_z}'$$

- CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE DEL PUNTO P MISURATA DA S

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\overrightarrow{u_x} + \frac{dv_y}{dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{dv_z}{dt}\overrightarrow{u_z}$$

ANALOGAMENTE A QUANTO OSSERVATO PER IL CALCOLO DELLA VELOCITÀ OSSERVIAMO CHE LA LEGGE CHE LEGA LE ACCELERAZIONI MISURATE NEI DIVERSI SISTEMI DI RIFERIMENTO SI OTTIENE DERIVANDO QUELLA DELLA VELOCITÀ (O DERIVANDO DUE VOLTE QUELLA DELLE POSIZIONI),

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}' + \overrightarrow{a_{O'}}}$$

$\vec{V}$ È DETTA <u>VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO</u> DI QUALSIASI PUNTO SOLIDALE A S' RISPETTO A S

$\vec{a}_{O'}$ È DETTA <u>ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO</u> DI QUALSIASI PUNTO SOLIDALE A S' RISPETTO A S

RIASSUMENDO

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \overrightarrow{OO'} \\ \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \overrightarrow{a_{O'}}(t) \end{cases}$$

CASO PARTICOLARE SE S' SI MUOVE DI MOTO <u>UNIFORME</u>

$$\frac{dOO'}{dt} = \vec{V} = \text{COSTANTE} \Longrightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \overrightarrow{a_{O'}} = 0$$

PERCIÒ $\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$ "I DUE SISTEMI PERCEPISCONO IDENTICAMENTE L'ACCELERAZIONE DEL PUNTO P"

QUESTO SI VERIFICA I TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO DETTI INERZIALI

QUINDI $\overrightarrow{OO'}(t) = \overrightarrow{OO'}(t_0) + \vec{V}(t - t_0)$

SE IN $t_0 = 0$ LE ORIGINI O E O' COINCIDONO $\longrightarrow \overrightarrow{OO'}(0) = 0$

$$\overrightarrow{OO'}(t) = \vec{V}t$$

CALCOLIAMO LE DERIVATE DI u_x', u_y', u_z'

$$\frac{d\vec{u}_x'}{dt} = \vec{w} \times \vec{u}_x'$$

$$\frac{d\vec{u}_y'}{dt} = \vec{w} \times \vec{u}_y'$$

$$\frac{d\vec{u}_z'}{dt} = \vec{w} \times \vec{u}_z'$$

ESPRIMIAMO ANCHE IL VETTORE POSIZIONE ATTRAVERSO LE COMPONENTI DEI DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO

$$r = r' = \begin{cases} x'\vec{u}_x' + y'\vec{u}_y' + z'\vec{u}_z' \\ x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \end{cases}$$

CALCOLIAMO ORA LA VELOCITA' DI P MISURATA DA S'

$$\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_x' + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_y' + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_z'$$

NOTARE CHE NELLA DERIVAZIONE NON VENGONO COINVOLTI $\vec{u}_x'$, $\vec{u}_y'$, $\vec{u}_z'$ PERCHE' ESSI SONO FISSI PER L'OSSERVATORE IN S' IN QUANTO SONO AD ESSO SOLIDALI (RUOTANO INSIEME A LUI)

CALCOLIAMO ORA LA VELOCITA' DI P MISURATA DA S TENENDO CONTO CHE, A DIFFERENZA DI PRIMA, $\vec{u}_x'$, $\vec{u}_y'$, $\vec{u}_z'$ VARIANO NEL TEMPO

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \quad (\text{DERIVANDO } \vec{r})$$

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_S = \frac{d}{dt}\left(x'\vec{u}_x' + y'\vec{u}_y' + z'\vec{u}_z'\right) = \quad (\text{DERIVANDO } \vec{r}')$$

$$= \left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_x' + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_y' + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_z'\right) + x'\frac{d\vec{u}_x'}{dt} + y'\frac{d\vec{u}_y'}{dt} + z'\frac{d\vec{u}_z'}{dt}$$

$$= \vec{v}' + x'(\vec{w} \times \vec{u}_x') + y'(\vec{w} \times \vec{u}_y') + z'(\vec{w} \times \vec{u}_z') =$$

$$= \vec{v}' + \vec{w} \times (x'\vec{u}_x' + y'\vec{u}_y' + z'\vec{u}_z') =$$

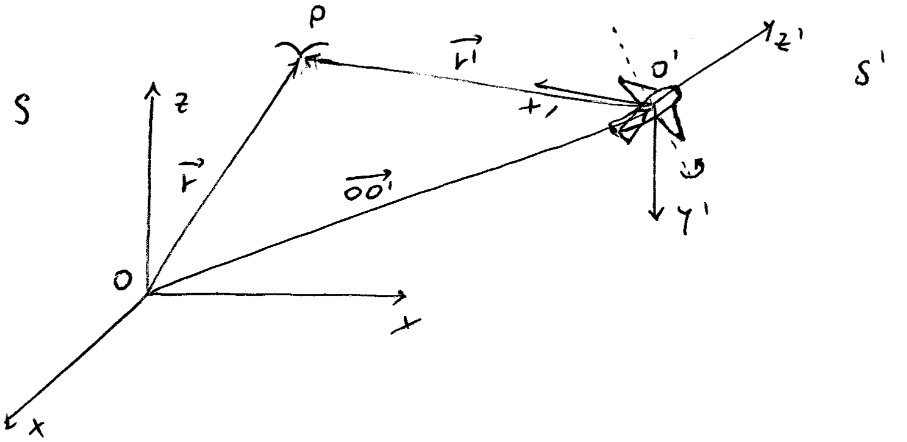
$$= \vec{v}' + \vec{w} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{V}_T$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_T}$$

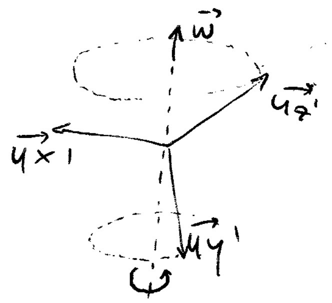
$\vec{V}_T = \vec{w} \times \vec{r}' = \vec{w} \times \vec{r}$ = VELOCITA' DI TRASCINAMENTO CON CUI SI MUOVE IL SISTEMA S' E TUTTI I PUNTI AD ESSO SOLIDALI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 296

STUDIAMO ADESSO IL MOTO RELATIVO + GENERICO POSSIBILE: $\boxed{\text{ROTATORIO + TRASLATORIO}}$
IN PARTICOLARE IMMAGINIAMO CHE NOI SIAMO SULLA TERRA ED UN ALTRO OSSERVATORE SIA SU UN JET CHE VOLTEGGIA IN ARIA ROTANDO E TRASLANDO.
FISSIAMO I DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO:



- IL MOTO DI TRASLAZIONE DEL JET E' QUELLO CHE COINVOLGE ALLO STESSO MODO TUTTI I PUNTI CHE COMPONGONO IL VELIVOLO E CHE SONO AD ESSO SOLIDALI (ANCHE GLI ASSI).
- IL MOTO DI ROTAZIONE DEL JET PUÒ ESSERE DESCRITTO IMMAGINANDO DI CONSIDERARE UN ASSE DI ISTANTANEA ROTAZIONE



$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_{x'}}{dt} = \vec{w} \times \vec{u}_{x'} \\ \dfrac{d\vec{u}_{y'}}{dt} = \vec{w} \times \vec{u}_{y'} \\ \dfrac{d\vec{u}_{z'}}{dt} = \vec{w} \times \vec{u}_{z'} \end{cases}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{OO'}(t)$$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{u}_{x'} + y'(t)\vec{u}_{y'} + z'(t)\vec{u}_{z'}$$

CALCOLIAMO LA VELOCITA' MISURATA DA S' (IL JET)

$$\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} = \frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}$$

CALCOLIAMO LA VELOCITÀ MISURATA DA S

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'(t)\vec{u}_{x'} + y'(t)\vec{u}_{y'} + z'(t)\vec{u}_{z'}\right) =$$

$$= \left(\frac{dx'}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\vec{u}_{z'}\right) + x'\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt} =$$

$$= v' + x'(\vec{w} \times \vec{u}_{x'}) + y'(\vec{w} \times \vec{u}_{y'}) + z'(\vec{w} \times \vec{u}_{z'}) =$$

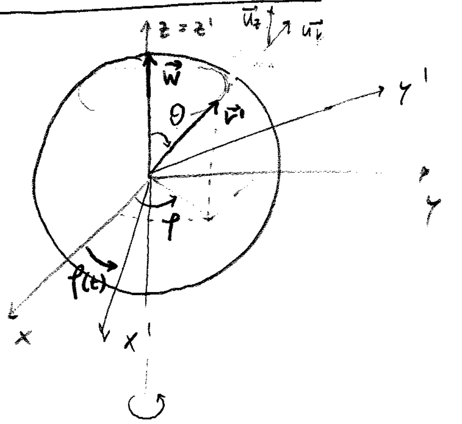
$$= v' + \vec{w} \times \vec{r}' \qquad \boxed{\frac{dr'}{dt} = v' + \vec{w} \times r'}$$

SE $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{OO'}(t)$ $\Rightarrow$ $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}'(t)}{dt} + \dfrac{d\,\vec{OO'}(t)}{dt} =$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{w} \times \vec{r}' + \vec{V}}$$

$\vec{V} = \dfrac{d\vec{OO'}}{dt} =$ VELOCITA' DI O'

MOTO DELLA TERRA



CONSIDERIAMO DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO:

1) S FISSO CON ASSI x, y, z CHE PUNTANO VERSO STELLE FISSE

2) S' CON ASSI x', y', z' CHE SI MUOVE IN MODO SOLIDALE ALLA TERRA INTORNO ALL'ASSE DI ROTAZIONE z

VELOCITÀ ANGOLARE DELLA TERRA $\quad w = 7{,}3 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{sec} \qquad w = \frac{d\varphi}{dt}$

QUAL È L'EFFETTO DEL MOTO DI ROTAZIONE SULLA VELOCITÀ E SULLA ACCELERAZIONE ?!

NON TENENDO CONTO DEL MOTO DI ROTAZIONE OGNI CORPO È SICURAMENTE SOGGETTO ALLA ACCELERAZIONE ~~DI~~ GRAVITAZIONALE. CIÒ ACCADE RISPETTO AL SIST. DI RIF. S

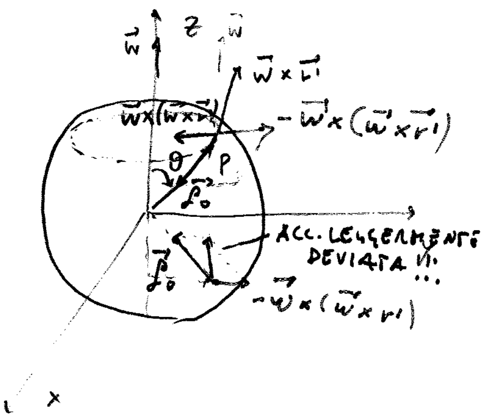
$$\vec{g}_0 = \frac{G M_T}{R_T^2} \vec{u}_r \qquad |\vec{g}_0| \simeq 9{,}8 \ m/s^2 \qquad R_T \cong 6{,}37 \times 10^6 \ m \simeq 6400 \ km$$

SE OSSERVIAMO IL MOTO DI UN CORPO RISPETTO A S' VARRÀ LA LEGGE DI TRASFORMAZIONE:

$$\boxed{\vec{a}' = \vec{g} = \vec{a} \underbrace{- 2\vec{w} \times \vec{v}'}_{\text{ACC. DI CORIOLIS}} \underbrace{- \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}')}_{\text{ACCELERAZIONE CENTRIPETA}}} \quad (1)$$

CONSIDERIAMO UN FILO A PIOMBO. LA DIREZIONE DEL FILO AVRÀ LA STESSA DIREZIONE DI $\vec{g}$. IL FILO HA $\vec{v}' = 0$

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}')$$



$$\vec{w} = w\,\vec{u}_z$$
$$\vec{r}' = R_T\,\vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{w} \times \vec{r}' = w R_T \sin\vartheta\, \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}') = w^2 R_T \sin\vartheta\, \vec{u}$$

DOVE $\vec{u} = \vec{u}_z \times \vec{u}_\varphi$ CIOÈ IL VERSORE CHE VA DAL PUNTO "P" ED È DIRETTO VERSO L'ASSE DI ROTAZIONE

DATO CHE NELLA FORMULA (1) VI È UN SEGNO "MENO" ALLORA L'ACCELERAZIONE SARÀ CENTRIFUGA

L'ACCELERAZIONE CENTRIFUGA PERÒ VALE IN MODULO $w^2 R_T \simeq 3{,}4 \times 10^{-2} \ m/s^2$ ALL'EQUATORE DOVE È MASSIMA $\vartheta = \frac{\pi}{2}$

SE LA CONFRONTIAMO CON $|\vec{g}_0| \simeq 9{,}8 \ m/s^2$ ESSA È DEL TUTTO TRASCURABILE MA ESISTE E DETERMINA QUELLA LEGGERISSIMA DEVIAZIONE DELLA ACCELERAZIONE CHE PER COMODITÀ CONSIDERIAMO DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA TERRA

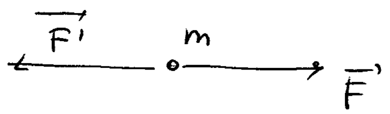
L'EFFETTO È DEL 3 ‰ (TRE PER MILLE) È TRASCURABILISSIMO!!!

DINAMICA

(VEDI INTRODUZIONE DISCORSIVA SULLE DISPENSE PAG. 55 - 60, PAG. 72 - 75)

LA DEFINIZIONE OPERATIVA DI FORZA DATA ATTRAVERSO LA LEGGE DI NEWTON,
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (CHE È UGUALE A $\vec{F} = m\vec{a}$ QUANDO m È COSTANTE) NON È UTILE PER DESCRIVERE IL MOTO DI UN OGGETTO PERCHÉ DI FATTO USIAMO IL MOTO STESSO PER DEFINIRE LA FORZA (NEL SENSO CHE PER CONOSCERE $\vec{F}$ DOBBIAMO CONOSCERE $\vec{a}(t)$).
OCCORRE QUINDI DEFINIRE UNA FORZA INDIPENDENTEMENTE DALL'ACCELERAZIONE CHE ESSA PRODUCE. SUCCESSIVAMENTE UTILIZZEREMO IL VALORE COSÌ CALCOLATO PER DETERMINARE $\vec{a}$ GRAZIE ALLA LEGGE DI NEWTON. TALE DEFINIZIONE È DETTA DEFINIZIONE STATICA DI FORZA.

AGIAMO SU DI UN CORPO, A CUI È APPLICATA UNA FORZA INCOGNITA $\vec{F}$, CON UNA FORZA A NOI NOTA $\vec{F'}$ CHE POSSIAMO MODULARE FACENDO IN MODO CHE $\vec{F} + \vec{F'} = 0$. IL CORPO DOVRÀ RESTARE IMMOBILE SE FERMO NELL'ISTANTE INIZIALE t_0=



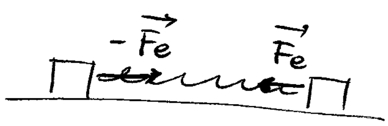
SE $\vec{F} + \vec{F'} = 0 \Rightarrow m\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$
$\vec{F} = -\vec{F'}$

QUESTA È UNA SITUAZIONE DETTA DI EQUILIBRIO STATICO IN CUI $\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = \vec{0}$. NOTARE CHE AFFINCHÉ CI SIA EQUILIBRIO STATICO IL CORPO DEVE AVERE VELOCITÀ INIZIALE NULLA

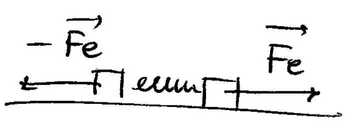
DINAMOMETRO

LA CONDIZIONE DI EQ. STATICO SI REALIZZA QUANDO UTILIZZIAMO IL DINAMOMETRO. ESSO È COSTITUITO DA UNA MOLLA DI LUNGHEZZA A RIPOSO PARI A "ℓ". QUANDO GLI VIENE APPLICATA UNA FORZA SI GENERANO FORZE UGUALI E OPPOSTE CHE TENDONO A RIPORTARLA NEL SUO STATO INIZIALE FACENDOLA RIACQUISTARE LA SUA LUNGHEZZA ORIGINARIA.

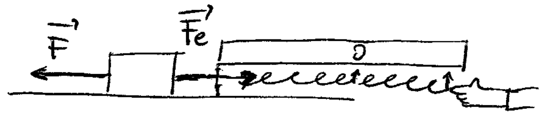
MOLLA ALLUNGATA



MOLLA COMPRESSA



USO DEL DINAMOMETRO



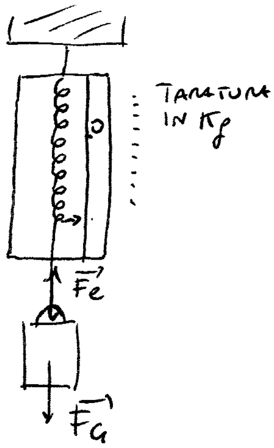
SE APPLICHIAMO UNA FORZA $\vec{F_e}$ UGUALE ED OPPOSTA A $\vec{F}$ SI REALIZZERÀ UNA CONDIZIONE DI EQ. STATICO E QUINDI POTREMO CONOSCERE $\vec{F}$.

VALE $\vec{F} = -\vec{F_e}$

MISURA DELLA FORZA PESO

SAPPIAMO CHE L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ NON DIPENDE DAL CORPO CONSIDERATO ED È PARI A $9{,}8 \frac{m}{s^2}$. LA FORZA PESO SARÀ DATA DA $|\vec{F_g}| = mg$

PER MISURARLA POSSIAMO UTILIZZARE UNA BILANCIA A MOLLA.



COLLEGHIAMO AD UN DINAMOMETRO FISSATO AD UN VINCOLO IN VERTICALE E AGGANCIAMOLI UNA MASSA. SI REALIZZERÀ UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO IN CUI:

$$\vec{F_e} + \vec{F_g} = 0 \iff |\vec{F_e}| = |\vec{F_g}|$$

IN QUESTO MODO POSSIAMO CONOSCERE LA FORZA PESO USANDO LA LEGGE DI NEWTON

$|\vec{F}| = mg$ POSSIAMO TARARE IL DINAMOMETRO DIRETTAMENTE IN UNITÀ DI MASSA

ABBIAMO REALIZZATO UNA BILANCIA A MOLLA.

ESEMPI DI DEFINIZIONI STATICHE DELLA FORZA SONO

1) LA LEGGE DI HOOKE $|\vec{F_e}| = K_e \Delta l$ CI PERMETTE DI RICAVARE LA FORZA SENZA CONOSCERE L'ACCELERAZIONE.
2) LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE DI NEWTON ('700) CHE ERA GIÀ STATA FORMULATA DA KEPLERO MA IN TERMINI DINAMICI E NON STATICI.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 296

SCELGO UN CORPO DI MASSA UNITARIA TALE CHE $m_G = 1$ E $m = 1$

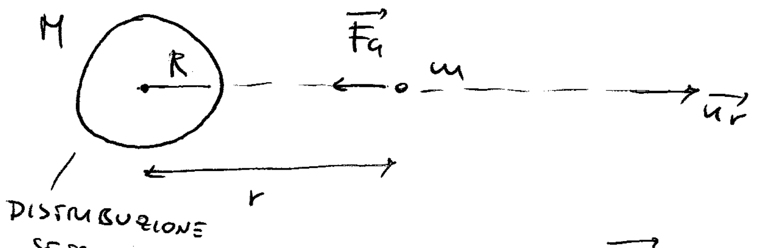
SEGUE $\Longrightarrow \dfrac{m_G}{m} = k = 1$

BENCHÉ m_G SIA DIVERSA DA m COME CONCETTO È POSSIBILE DEFINIRLA ALLO STESSO MODO E TALE CHE $\boxed{m_G = m}$ PRINCIPIO DI EQUIVALENZA

POSSIAMO QUINDI SCRIVERE SEMPLICEMENTE

$$\vec{F}_{12} = \frac{-G\, m_1 m_2}{r^2}\, \vec{u}_{12} \qquad G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{N m^2}{kg^2}$$

IN GENERALE QUESTA RELAZIONE VALE PER OGGETTI PUNTIFORMI, PERÒ SE CONSIDERIAMO OGGETTI APPROSSIMATIVAMENTE SFERICI VARRÀ



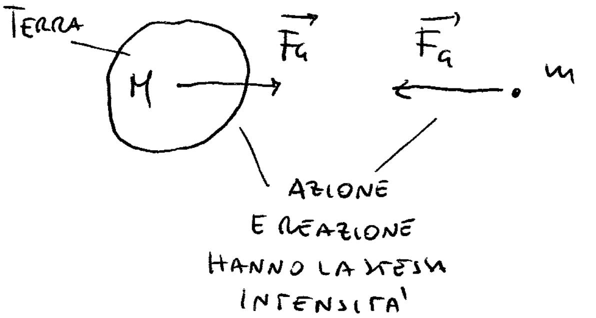
$r > R$

(MASSA CONCENTRATA NEL SUO CENTRO)

$$\vec{F}_G = -\frac{G\, M m}{r^2}\, \vec{u}_r$$

QUESTA SITUAZIONE È QUELLA CHE SI VERIFICA TRA LA TERRA E I CORPI SU DI ESSA.

SE $M >> m$ SI AVRÀ UNA SITUAZIONE DI QUESTO GENERE:



$$|\vec{F}_G| = m\,|\vec{a}_m| \qquad |\vec{F}_G| = M\,|\vec{a}_T| \longrightarrow \frac{|\vec{a}_T|}{|\vec{a}|} = \frac{m}{M_T}$$

SE $M_T >> m \Longrightarrow |\vec{a}_T| << |\vec{a}|$

L'ACCELERAZIONE ESERCITATA DA UN CORPO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE È TRASCURABILE $|\vec{a}_T| << |\vec{a}'|$

QUINDI UN SR SOLIDALE ALLA TERRA È IN BUONA APPROSSIMAZIONE UN INERZIALE. L'ACCELERAZIONE DI UNA MASSA SULLA TERRA PUÒ ESSERE CALCOLATA IN TAL MODO:

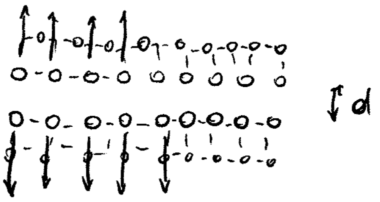
$$\boxed{\vec{a}' = \frac{-G M}{r^2}\, \vec{u}_r}$$

L'ACCELERAZIONE NON DIPENDE DALLA MASSA DEL CORPO IN QUANTO STIAMO USANDO LA STESSA DEFINIZIONE OPERATIVA DI MASSA INERZIALE E MASSA GRAVITAZIONALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 296

FORZE DI CONTATTO

LE FORZE DI CONTATTO SONO QUELLE FORZE CHE APPARENTEMENTE DERIVANO DA UN CONTATTO. IN REALTÀ ESSE DERIVANO DA UN NUMERO MOLTO ELEVATO DI INTERAZIONI ELEMENTARI CHE DERIVANO DA FORZE ELETTROSTATICHE TRA LE MOLECOLE DEI DUE CORPI CONSIDERATI E SONO DI TIPO REPULSIVO. SONO ANCH'ESSE FORZE A DISTANZA.



TALI FORZE VENGONO DETTE ANCHE

$\boxed{\text{FORZE EFFICACI}}$

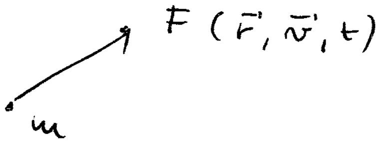
ESEMPI DI FORZE EFFICACI:

1) REAZIONE VINCOLARE DI UN TAVOLO SU UN OGGETTO POSTO SU DI ESSO.
2) FORZE D'ATTRITO
3) FORZE ELASTICHE.

ECC.

EQUAZIONE DEL MOTO

NOTA LA FORZA CHE AGISCE SU DI UN CORPO IN FUNZIONE DI $\vec{r}, \vec{v}, t$ QUAL È IL MOTO CHE NE DERIVA ???



$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = ?$$

SI PUÒ SCRIVERE L'EQ. DI NEWTON:

$$m\vec{a} = \vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$$

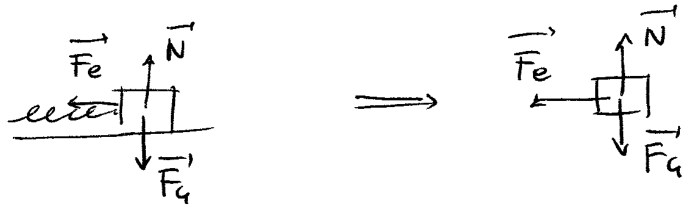
SCOMPONENDOLA NELLE COMPONENTI:

$$m\vec{a}_x = \vec{F}_x(x,y,z,v_x,v_y,v_z,t)$$
$$m\vec{a}_y = \vec{F}_y(x,y,z,v_x,v_y,v_z,t)$$
$$m\vec{a}_z = F_z(x,y,z,v_x,v_y,v_z,t)$$

QUESTE SONO DELLE EQ. CHE LEGANO FUNZIONI (x,y,z) DIPENDENTI DAL TEMPO ALLE LORO DERIVATE PRIME E SECONDE $(v_x, v_y, v_z, a_x, a_y, a_z)$

EQ. DI QUESTO TIPO SONO EQ. DIFFERENZIALI DEL II ORDINE IN $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$ DIPENDENTI DAL TEMPO

SCRIVIAMO TUTTE LE FORZE AGENTI SUL SISTEMA (SCHEMA DELLE FORZE, O MEGLIO, "DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO")



SOSTITUIAMO L'AMBIENTE CON LE FORZE CHE ESSO ESERCITA SUL CORPO

SCRIVIAMO LA LEGGE DI NEWTON

$$m\vec{a} = \vec{N} + \vec{F_g} + \vec{F_e}$$

$$\vec{N} = N\vec{u_y} \qquad \vec{F_g} = -mg\,\vec{u_y} \qquad \vec{a} = a\,\vec{u_x}$$

SCOMPONIAMO IL MOTO

$$m a \vec{u_x} = -k_e \vec{u_x} - mg\vec{u_y} + N\vec{u_y}$$

LUNGO x
LUNGO y

$$\begin{cases} ma = -k_e x & (1) \\ N = mg > 0 \end{cases}$$

IL VALORE DI $\vec{N}$ (DETTA REAZIONE VINCOLARE) NON È NOTA A PRIORI MA POSSIAMO RICAVARLA SCOMPONENDO OPPORTUNAMENTE IL MOTO.

ESPRIMIAMO L'ACCELERAZIONE NELLA (1) COME DERIVATA SECONDA DI $x(t)$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k_e x \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{-k_e x}{m} \; ;$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_e x}{m} = 0}$$

DEFINISCO $w_0^2 = \frac{k_e}{m}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = 0}$$

DOMANDA MOLTO PROBABILE ALL'ESAME !!!

$$[k_e] = [N L^{-1}] = [M(LT^{-2})L^{-1}] = [MT^{-2}]$$

$$[w_0^2] = \left[\frac{MT^{-2}}{M}\right] = [T^{-2}]$$

$$[w_0] = [T^{-1}]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 296

ASPETTO QUANTITATIVO DEL MOTO

BISOGNA RISOLVERE $\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x = 0$ IMPONENDO $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$

L'EQ. RISOLUTIVA È $x(t) = A \sin(w_0 t) + B \cos(w_0 t)$ $(*)$

RISOLVENDO IL PROBLEMA DI CAUCHY OTTERREMO L'EQ. SPECIFICA

CALCOLIAMO LA VELOCITÀ DERIVANDO $(*)$

$$v = \frac{dx}{dt} = A w_0 \cos(w_0 t) - B w_0 \sin(w_0 t)$$

ED ANCHE L'ACCELERAZIONE

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt} = -A w_0^2 \sin(w_0 t) - B w_0^2 \cos(w_0 t) =$$

$$= -w_0^2 \underbrace{\left(A \sin(w_0 t) + B \cos(w_0 t)\right)}_{x(t)} =$$

$$= -w_0^2 x(t)$$

CALCOLIAMO $x(0)$ DALLA $(*)$

$x(0) = B = x_0$

$B = x_0$

E LA VELOCITÀ

$v(0) = A w_0 = v_0$

$A = \frac{v_0}{w_0}$

LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA È

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{w_0} \sin(w_0 t) + x_0 \cos(w_0 t)}$$

LA STESSA EQUAZIONE PUÒ ESSERE DESCRITTA IN TAL MODO

$$x(t) = \underbrace{C}_{\text{AMPIEZZA}} \cos(\omega_0 t + \underbrace{\phi}_{\text{FASE INIZIALE}})$$

$\varphi(t) = \omega_0 t + \phi$ FASE

USANDO LE FORMULE DI PROSTAFERESI

$$x(t) = C \cos\phi \cos(\omega_0 t) - C \sin\phi \sin(\omega_0 t) = \quad (1)$$

$$= B \cos(\omega_0 t) + A \sin(\omega_0 t) \quad (2)$$

PER CONFRONTO DI (2) CON (1)

$$\begin{cases} A = -C \sin\phi = \dfrac{v_0}{\omega_0} \\ B = C \cos\phi = x_0 \end{cases}$$

C E ϕ SONO DETERMINATE DALLE CONDIZIONI INIZIALI

$\Downarrow$

DAL RAPPORTO $\dfrac{A}{B} \Longrightarrow \quad tg\,\phi = -\dfrac{v_0}{x_0\omega_0}$

DETERMINIAMO "C" IN TAL MODO:

$$\begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2}} \\ tg\,\phi = -\dfrac{v_0}{x_0\omega_0} \end{cases}$$

SE $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$

$$tg\,\phi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} = 0 \Longrightarrow \phi = 0 \text{ OPPURE } \pi$$

PER $\phi = 0$

$$-C \sin(0) = \frac{v_0}{\omega_0} = 0$$

$$C \cos(0) = x_0 \Longrightarrow C = x_0$$

LA SOLUZIONE SARÀ

$$\Longrightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

PER $\phi = \pi$

$$-C \sin(\pi) = \frac{v_0}{\omega_0} = 0$$

$$C \cos(\pi) = x_0 \Longrightarrow C = -x_0$$

LA SOLUZIONE SARÀ

$$\Longrightarrow x(t) = -x_0 \cos(\omega_0 t + \pi)$$

$$= x_0 \cos(\omega_0 t)$$

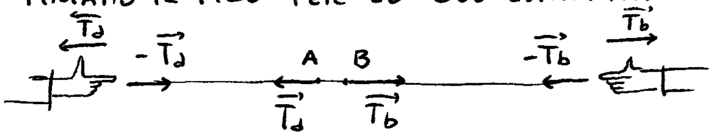
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 296

FILO INESTENSIBILE IDEALE

È UN FILO CHE HA LUNGHEZZA FISSA ANCHE SE SOGGETTO A DELLE FORZE CHE LO TENDONO. QUESTO AVVIENE GRAZIE A DELLE FORZE CHE SI SVILUPPANO ALL'INTERNO DEL FILO DETTE FORZE DI TENSIONE.

LA SUA MASSA È NULLA PER IPOTESI.

ESEMPIO: TIRIAMO IL FILO PER LE DUE ESTREMITÀ



SCRIVIAMO LA LEGGE DI NEWTON:

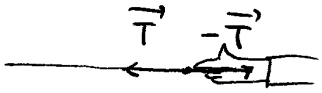
$$\Delta m \vec{a} = \vec{T_A} + \vec{T_B}$$

Δm = MASSA DELLA PORZIONE DI FILO TRA "A" E "B"

DATO CHE PER DEF. DI FILO IDEALE, LA SUA MASSA È NULLA ALLORA AVREMO $\Delta m = 0$ QUINDI:

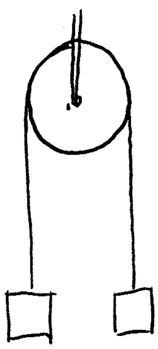
$$\Delta m \vec{a} = \vec{T_A} + \vec{T_B} = 0 \Longrightarrow \vec{T_A} = -\vec{T_B} = \vec{T}$$

LE FORZE AGLI ESTREMI SONO UGUALI E OPPOSTE, INDIPENDENTEMENTE DAL SUO MOTO. "T" È DETTA TENSIONE CHE A CAUSA DEL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE LA FORZA SI DISTRIBUISCE SU TUTTO IL FILO ED ANCHE SUI CORPI CHE LO TIRANO (NELL'ESEMPIO LE NOSTRE MANI)

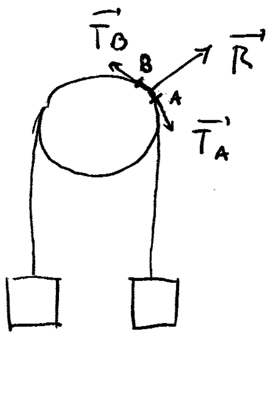


CARRUCOLA

DISCO LIBERO DI RUOTARE INTORNO AL SUO CENTRO SENZA ATTRITO.
E INOLTRE PRIVA DI MASSA.



SUPPONIAMO DI AVVOLGERE SULLA CARRUCOLA UN FILO IDEALE. AGIRANNO LE SEGUENTI FORZE.

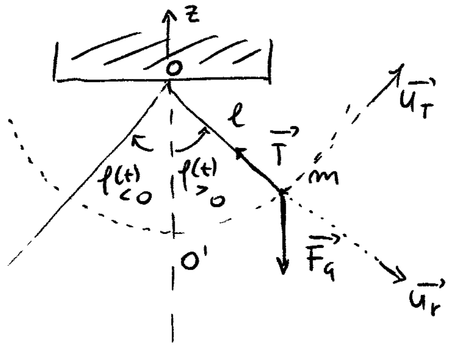


$\vec{R}$ = REAZIONE

$$\Delta m \vec{a} = \vec{T_A} + \vec{T_B} + \vec{R} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 296

PENDOLO SEMPLICE



DOPO AVER DISEGNATO LE FORZE, SCRIVIAMO LA LEGGE DI NEWTON

$$m\vec{a} = \vec{F_g} - \vec{T}$$

(LE FORZE AGISCONO SU UN PIANO)

NOTIAMO SUBITO CHE IL MOTO DELL'OGGETTO SARÀ UN MOTO PIANO ED ESSO SI MUOVERÀ LUNGO UNA CIRCONFERENZA CENTRATA IN "O".
POSSIAMO DESCRIVERE IL MOTO ATTRAVERSO L'ASCISSA CURVILINEA:

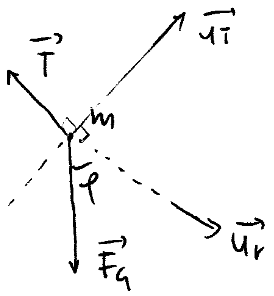
$s(t) = \ell\,\varphi(t)$ $\qquad$ $\varphi(t),\ s(t) > 0 \implies$ LA MASSA È A DESTRA DI O

$\varphi(t),\ s(t) < 0 \implies$ " " " SINISTRA " "

DEFINIAMO $\omega(t) = \dfrac{d\varphi}{dt}$

LA VELOCITÀ SARÀ $\vec{v} = v\,\vec{u_T} = \dfrac{ds}{dt}\vec{u_T} = \ell\dfrac{d\varphi}{dt}\vec{u_T} = \ell\,\omega\,\vec{u_T}$

FACCIAMO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



L'ACCELERAZIONE SARÀ COMPOSTA DA DUE COMPONENTI:

$$\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_c} = \underbrace{\frac{d^2 s}{dt^2}}_{\frac{dv}{dt}}\vec{u_T} - \frac{v^2}{\ell}\vec{u_r} =$$

SCRIVIAMO L'EQ. DI NEWTON LUNGO LE DIREZIONI POLARI $\vec{u_r}$ E $\vec{u_T}$

$$\vec{T} = -T\,\vec{u_r}$$

$$\begin{cases} \vec{F_{g_r}} = F_g\cos\varphi(t)\,\vec{u_r} \\ \vec{F_{g_T}} = -F_g\,\mathrm{sen}\,\varphi(t)\,\vec{u_T} \end{cases} \implies \vec{F_g} = mg\cos\varphi(t)\,\vec{u_r} - mg\,\mathrm{sen}(\varphi(t))\,\vec{u_T}$$

QUANDO $\varphi = 0$ $\sin\varphi = 0$ AVREMO

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -g\frac{\sin\varphi}{l} = -g\frac{\sin 0}{l} = 0 \Rightarrow$$ L'ACCELERAZIONE TANGENZIALE È NULLA

L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA NON È NULLA IN GENERALE

INFATTI LA GENERERÀ LA TENSIONE T

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos(\varphi) = m\frac{v^2}{l} + mg$$

LA DUPLICE FUNZIONE DI $\vec{T}$ È:

1) GENERARE LA FORZA CENTRIPETA.
2) COMPENSARE LA FORZA PESO.

SE PONIAMO IL PENDOLO IN POSIZIONE $\varphi_0 = 0$ CON VELOCITÀ ANGOLARE $\omega_0 = 0$ ALLORA $v(0) = l\,\omega(0) = 0 \Rightarrow T = mg$ (NON IMPRIME $\vec{a}_c$)

QUINDI IN TAL CASO IL PENDOLO RIMANE NELLA SUA POSIZIONE INIZIALE CIOÈ QUELLA VERTICALE. ESSA È UNA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE

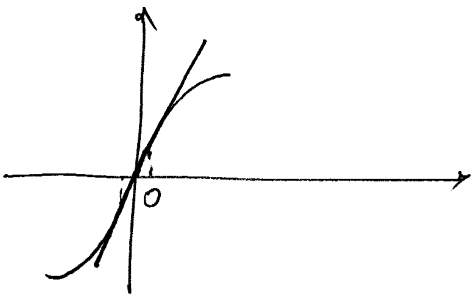
SE LA POSIZIONE INIZIALE VIENE PERTURBATA LEGGERMENTE SI REALIZZA UN MOTO DI PICCOLE OSCILLAZIONI $\varphi(t) \approx 0$ (SEMPRE MOLTO PICCOLO IN OGNI ISTANTE)

CONSIDERIAMO L'EQ.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi(t))$$ SE $\varphi(t) \to 0$ POSSIAMO SVILUPPARE IN SERIE DI TAYLOR IL SENO

$$\sin(\varphi) = \varphi + o(\varphi^2)$$

GRAFICAMENTE



IN UN INTORNO DI "0" POSSO APPROSSIMARE $\sin\varphi \sim \varphi$

POSSO QUINDI SCRIVERE:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\varphi = 0$$ CHIAMANDO $\frac{g}{l} = \Omega^2 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \Omega^2\varphi = 0}$

EQ. DI UN OSCILLATORE ARMONICO

SISTEMI DI PARTICELLE

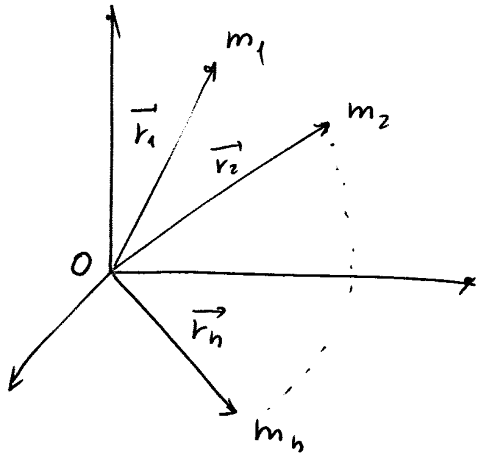
NEL MOMENTO IN CUI SI CONSIDERA UN SISTEMA DI PIÙ PARTICELLE NESSUNA DI ESSE PUÒ ESSERE TRASCURATA PERCHÈ OGNUNA INFLUENZA ED È INFLUENZATA DALLE ALTRE.

DISTINGUIAMO:

FORZA INTERNA: ESERCITATA DAI CORPI INTERNI AL SISTEMA STUDIATO

FORZA ESTERNA: ESERCITATA DA TUTTO CIÒ CHE NON FA PARTE DEL SISTEMA (L'AMBIENTE)

SUPPONIAMO DI AVERE A CHE FARE CON UN SISTEMA DI n PARTICELLE

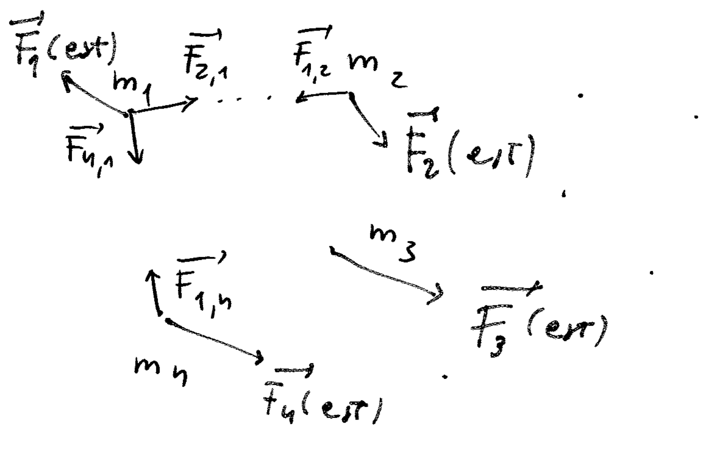


PER DETERMINARE IL MOTO DI QUESTO SISTEMA DOBBIAMO SPECIFICARE LA POSIZIONE DI OGNI PARTICELLA ISTANTE PER ISTANTE

$$\begin{cases} \vec{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t)) \\ \vec{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t)) \\ \vdots \\ \vec{r}_n(t) = (x_n(t), y_n(t), z_n(t)) \end{cases}$$

IL MINIMO NUMERO DI VARIABILI UTILIZZATE PER DESCRIVERE TALE SISTEMA, CIOÈ I SUOI <u>GRADI DI LIBERTÀ</u>, È: "$3n$"

LE FORZE INTERNE FIGURANO SEMPRE A COPPIE (AZIONE E REAZIONE):



PER LE FORZE ESTERNE NON VALE LA STESSA COSA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 296

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE

SCRIVIAMO LE EQ. DEL MOTO DI OGNI PARTICELLA NELLA FORMA PIÙ GENERALE

$$\frac{dp_1}{dt} = \vec{F}_1^{(int)} + \vec{F}_1^{(est)}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \vec{F}_2^{(int)} + \vec{F}_2^{(est)}$$

$$\vdots$$

$$\frac{dp_n}{dt} = \vec{F}_n^{(int)} + \vec{F}_n^{(est)}$$

CALCOLIAMO LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE IN TAL MODO:

$$\vec{P} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \ldots + \vec{p_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i}$$

DERIVANDO OTTENIAMO

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p_1}}{dt} + \frac{d\vec{p_2}}{dt} + \ldots + \frac{d\vec{p_n}}{dt} = \left(\vec{F}_1^{(int)} + \vec{F}_2^{(int)} + \ldots + \vec{F}_n^{(int)}\right) + \left(\vec{F}_1^{(est)} + \vec{F}_2^{(est)} + \ldots + \vec{F}_n^{(est)}\right)$$

DATO CHE LE FORZE INTERNE SONO PER IL 3° PRINCIPIO DELLA DINAMICA GOVERNATI DAL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONI SI ELIMINANO A DUE A DUE.
QUINDI IN DEFINITIVA:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_1^{(est)} + \vec{F}_2^{(est)} + \ldots + \vec{F}_n^{(est)} = \vec{F}^{(est)}$$

LA VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO È SOLO INFLUENZATA DALLE FORZE ESTERNE.
SE LA SOMMA DI TUTTE LE FORZE ESTERNE È UGUALE A ZERO ALLORA

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \implies \vec{P} = \underline{\underline{\text{COSTANTE}}}$$

$\boxed{\text{CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO}}$

QUESTO <u>NON</u> VUOL DIRE CHE LA QUANTITÀ DI MOTO DELLA SINGOLA PARTICELLA È COSTANTE, MA SOLO LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE LO È.

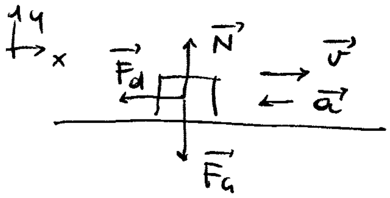
SI DIMOSTRA CHE LA COMPONENTE <u>TRASLATORIA DI INSIEME</u> DEL MOTO DI UN SISTEMA È DESCRITTA DA $\vec{P} = cost$ È RISENTE SOLO DELLA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 296

FORZE DI ATTRITO

ATTRITO RADENTE

SAPPIAMO CHE NEL MOMENTO IN CUI SPINGIAMO UN OGGETTO SU UNA SUPERFICIE ESSO RALLENTERÀ PROGRESSIVAMENTE IL SUO MOTO FINO A FERMARSI.
CIÒ SIGNIFICA CHE ESSO SUBISCE UNA DECELERAZIONE. ESAMINIAMO IL CASO:



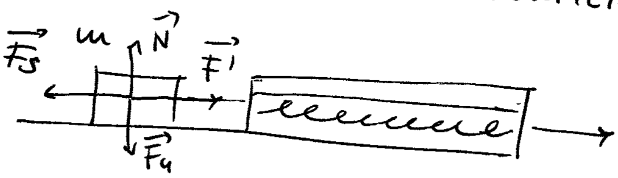
DATO CHE IL CORPO È SOGGETTO A DUE FORZE UGUALI E OPPOSTE CHE SI COMPENSANO LUNGO L'ASSE Y ALLORA LA SUA DECELERAZIONE PUÒ ESSERE SPIEGATA DALL'ESISTENZA DI UNA FORZA CHE CONTRASTA IL SUO MOTO DETTA FORZA DI ATTRITO DINAMICO

$$m\vec{a} = \sum \vec{F_i} = \vec{F_g} + \vec{N} + \vec{F_d}$$

$$\begin{cases} \text{LUNGO } y & \vec{N} + \vec{F_g} = \vec{0} \\ \text{LUNGO } x & m\vec{a} = \vec{F_d} \end{cases}$$

ATTRITO DINAMICO SI SVILUPPA QUANDO L'OGGETTO È IN MOTO ED È PARALLELA ALLA SUPERFICIE SU CUI L'OGGETTO SCIVOLA

SUPPONIAMO ADESSO DI VOLER SPOSTARE UN OGGETTO POSTO SU UNA SUPERFICIE AGENDO CON UNA FORZA $\vec{F'}$.



LA FORZA $\vec{F'}$ È MISURATA ATTRAVERSO UN DINAMOMETRO

OSSERVIAMO CHE NONOSTANTE CIÒ, PER QUALCHE MOTIVO, L'OGGETTO NON SI MUOVE. DEVE ESSERCI PERCIÒ UNA FORZA CHE COMPENSA ESATTAMENTE LA FORZA $\vec{F'}$ CHE STIAMO APPLICANDO. TALE FORZA È DETTA FORZA DI ATTRITO STATICO. ANCH'ESSA, COME QUELLA DI ATTRITO DINAMICO, È PARALLELA ALLA SUPERFICIE SU CUI È POSTO L'OGGETTO. $|\vec{F'}| = |\vec{F_s}|$ $|\vec{N}| = |\vec{F_g}|$
AUMENTIAMO LA FORZA $\vec{F'}$. LA MOLLA DEL DINAMOMETRO SI ALLUNGHERÀ.
ADESSO IL CORPO INIZIA A MUOVERSI. CIÒ ACCADE PERCHÈ ADESSO LA FORZA $\vec{F'}$ È IN GRADO DI VINCERE QUELLA DI ATTRITO STATICO.
OSSERVIAMO ANCHE CHE UNA VOLTA CHE L'OGGETTO HA PRESO A MUOVERSI PER MANTENERLO A $v = cost$ BISOGNA RIDURRE LA FORZA $\vec{F'}$ APPLICATA PER METTERLO IN MOTO. VALGONO QUINDI I SEGUENTI FATTI:

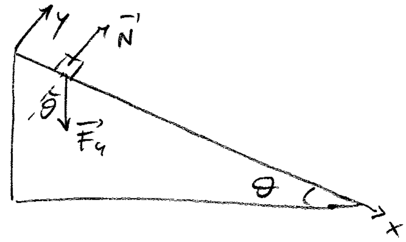
1) $|\vec{F'}| < F_s$ $\Rightarrow$ L'OGGETTO È FERMO
2) $|\vec{F'}| > F_s$ $\Rightarrow$ L'OGGETTO SI METTE IN MOTO
3) $|\vec{F_d}| = |\vec{F'}| < F_s$ $\Rightarrow$ L'OGGETTO CHE ABBIAMO MESSO IN MOTO PROSEGUIRÀ CON $v = cost$

QUINDI: "$\vec{F_d}$ È MENO INTENSA DEL VALORE MASSIMO DELL'INTENSITÀ DELL'ATTRITO STATICO"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 296

ESERCIZIO 2 QUESTA VOLTA $\boxed{\text{ESISTE ATTRITO}}$

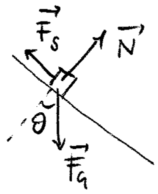
SUPPONIAMO DI POTER VARIARE L'INCLINAZIONE ϑ



QUELLO CHE SI OSSERVA È CHE: 1) SE INCLINIAMO IL PIANO IN MODO CHE $\vartheta > \vartheta_0$ L'OGGETTO SCIVOLA;
2) SE $\vartheta \leq \vartheta_0$ L'OGGETTO NON SI MUOVE.

VOGLIAMO DETERMINARE:
1) ϑ_0
2) IL MOTO PER $\vartheta > \vartheta_0$

DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO $\vartheta \leq \vartheta_0$



$$m\vec{a} = \vec{F_s} + \vec{N} + \vec{F_g} = 0 \qquad \vec{F_s} = F_s \vec{u_x} \qquad \vec{N} = N\vec{u_y}$$

$$\vec{F_g} = -mg\cos\vartheta\,\vec{u_y} + mg\,\text{sen}\,\vartheta\,\vec{u_x}$$

L'ACCELERAZIONE ESISTE SOLO LUNGO x.
AL DI LÀ DI QUESTO IN UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STATICO DEVE VERIFICARSI $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$. QUINDI

$$F_s\vec{u_x} + N\vec{u_y} - mg\cos\vartheta\,\vec{u_y} + mg\,\text{sen}\,\vartheta\,\vec{u_x} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{l} \text{LUNGO } x \\ \text{LUNGO } y \end{array} \begin{cases} F_s + mg\,\text{sen}\,\vartheta = 0 \\ N - mg\cos\vartheta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_s = -mg\,\text{sen}\,\vartheta \\ N = mg\cos\vartheta \end{cases}$$

$|F_s| = mg\,\text{sen}\,\vartheta$ SI NOTI CHE AUMENTANDO ϑ AUMENTA LA COMPONENTE LUNGO y DI F_g ED AUMENTA $|F_s|$ CHE DEVE NEUTRALIZZARLA

$|F_s|$, PERÒ, PER DEFINIZIONE PUÒ ESSERE AL MASSIMO $|F_s| = \mu_s N = \mu_s mg\cos\vartheta$

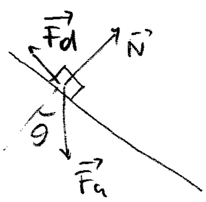
$$F_s = mg\,\text{sen}\,\theta \leq \mu_s mg\cos\vartheta$$

IN ϑ_0 $\vec{F_s}$ ASSUME IL SUO MODULO MASSIMO. QUINDI:

$\vartheta = \vartheta_0$ $\quad |F_s| = mg\,\text{sen}\,\vartheta_0 = \mu_s mg\cos\vartheta_0$ (MAX INTENSITÀ)

DA CUI $\quad \text{sen}\,\vartheta_0 = \mu_s\cos\vartheta_0 \Rightarrow \boxed{\mu_s = tg\,\vartheta_0}$

QUANDO $\vartheta > \vartheta_0$ IL CORPO INIZIA A MUOVERSI.



$$m\vec{a} = \vec{F_d} + \vec{N} + \vec{F_g} \qquad \vec{F_d} = -\mu_d N\vec{u_x}$$

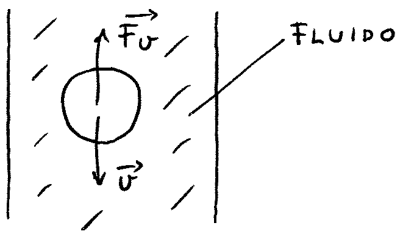
$$\begin{array}{l} \text{LUNGO } x \\ \text{LUNGO } y \end{array} \begin{cases} ma = mg\,\text{sen}\,\vartheta - \mu_d N \\ N = mg\cos\vartheta \end{cases}$$

$$a = g\,\text{sen}\,\vartheta - \frac{\mu_d N}{m} = g\,\text{sen}\,\vartheta - \mu_d g\cos\vartheta =$$

$$= g\,\text{sen}\,\vartheta\left(1 - \frac{\mu_d}{tg\,\vartheta}\right)$$

ATTRITO VISCOSO

SI MANIFESTA SU QUALSIASI OGGETTO CHE SI MUOVE ALL'INTERNO DI UN FLUIDO.
LA FORZA DI ATTRITO VISCOSO, COME QUELLA DI ATTRITO RADENTE, HA LA STESSA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ DELL'OGGETTO MA VERSO OPPOSTO.



"SE LA VELOCITÀ DELL'OGGETTO NON È TROPPO ELEVATA IN INTENSITÀ $|\vec{F_v}| \propto |\vec{v}|$"
IN TAL CASO SIAMO IN UN <u>REGIME DI MOTO LAMINARE DEL FLUIDO</u> DETTO ANCHE

$$\boxed{\text{REGIME DI STOKES}}$$

IN QUESTE CONDIZIONI VALE LA LEGGE:

$$\vec{F_v} = -K\eta\vec{v}$$

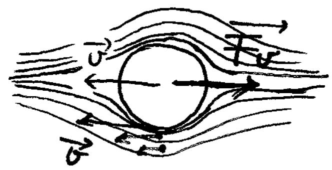
K È UN COEFFICIENTE CHE DIPENDE DALLA FORMA E DIMENSIONE DELL'OGGETTO.
NEL CASO DI UN OGGETTO SFERICO DI RAGGIO R $\quad K = 6\pi R$

$$[K] = [L]$$

η INDICA LA VISCOSITÀ $\quad [\eta] = [M L^{-1} T^{-1}]$

PER VELOCITÀ PIÙ ELEVATE $|\vec{F_v}| \propto v^2$ (QUESTO ACCADE NELLA GALLERIA DEI VENTI AD ESEMPIO)

A COSA È DOVUTA LA FORZA DI ATTRITO VISCOSO ???
TUTTI I FLUIDI SONO CARATTERIZZATI DALLA PROPRIETÀ DI NON AVERE UNA FORMA PROPRIA PERCIÒ QUANDO UN FLUIDO È IN MOTO LE PARTI DEL FLUIDO NON SI MUOVONO TUTTE CON LA STESSA VELOCITÀ. QUANDO LA VELOCITÀ DEL FLUIDO NON È TROPPO ELEVATA IL SUO MOTO PUÒ ESSERE DESCRITTO COME MOTO DI SCORRIMENTO DI STRATI SOVRAPPOSTI INFINITAMENTE SOTTILI (REGIME LAMINARE) CHE SI MUOVONO UNO RISPETTO ALL'ALTRO. STRATI ADIACENTI POSSONO MUOVERSI CON DIVERSA VELOCITÀ. LE INTERAZIONI MICROSCOPICHE TRA UNO STRATO E L'ALTRO SI MANIFESTANO A LIVELLO MACROSCOPICO CON DELLE FORZE CHE SI OPPONGONO AL MOTO DI SCORRIMENTO RELATIVO DEGLI STRATI. QUESTA FORZA È DETTA <u>FORZA DI ATTRITO VISCOSO</u> PERCHÉ LEGATA ALLA PROPRIETÀ DELLA <u>VISCOSITÀ</u>.
COSA SUCCEDE QUANDO UN CORPO SCORRE IN UN FLUIDO ???

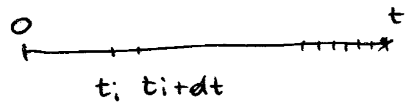


LO STRATO A DIRETTO CONTATTO CON IL CORPO VERRÀ TRASCINATO DA ESSO E SI MUOVERÀ CON LA STESSA VELOCITÀ. ALLO STESSO TEMPO UNO STRATO PIÙ ESTERNO VERRÀ TRASCINATO DA QUELLO PIÙ INTERNO MA L'EFFETTO DI TALE TRASCINAMENTO SARÀ MINORE ED ESSO SI MUOVERÀ CON VELOCITÀ PIÙ BASSA, E COSÌ VIA...
TRA QUESTI STRATI IN MOTO RELATIVO SI GENERA UNA FORZA CHE PRODUCE A LIVELLO MACROSCOPICO UNA FORZA DI ATTRITO VISCOSO SULL'OGGETTO $\vec{F_v}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 296

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 296

SUPPONIAMO ORA DI CALCOLARE QUESTA ESPRESSIONE PER OGNI INTERVALLINO INFINITESIMO COMPRESO TRA 0 E t:



$$\frac{dv_i}{g+\frac{k\eta v_i}{m}} = -dt_i$$

E ADESSO SOMMIAMO LE ESPRESSIONI COSÌ TROVATE PER OGNI $i \mid i=1 \longrightarrow i=n$ (i VA DA 1 A n INTERVALLINI) CON $n \to +\infty$

$$\sum_i \frac{dv_i}{\left(g+\frac{k\eta v_i}{m}\right)} = -\sum_i dt_i = -t$$

IL TUTTO SARÀ UGUALE A $-t$ CON t L'INTERVALLO TOTALE

QUESTO È UN INTEGRALE CON $\underline{\underline{v(0)=0}}$ (CONDIZIONE INIZIALE)

$$\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g+\frac{k\eta}{m}v} = -t$$

LO RISOLVIAMO PER SOSTITUZIONE

$$y = g + \frac{k\eta}{m} v$$

y È UNA FUNZIONE DI v

$$y(v) = g + \frac{k\eta}{m} v$$

SE $v \to v+dv$ ALLORA $y \to y+dy$

$$\Rightarrow dy = y(v+dv) - y(v) = \frac{dy}{dv}\,dv = \frac{k\eta}{m}\,dv$$

$$dy = \frac{k\eta}{m}\,dv \iff dv = \frac{m}{k\eta}\,dy$$

RISCRIVIAMO L'INTEGRALE. GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE SARANNO:

$$v \to 0 \Rightarrow y \to g$$

$$v \to v(t) \Rightarrow y = g + \frac{k\eta}{m} v(t)$$

$$\int_{g}^{g+\frac{k\eta}{m}v(t)} \frac{\left(\frac{m}{k\eta}\right)dy}{y} =$$

$$\frac{m}{k\eta}\int_{g}^{g+\frac{k\eta}{m}v(t)} \frac{dy}{y} = \frac{m}{k\eta}\log(y)\Big|_{g}^{g+\frac{k\eta}{m}v(t)} = \frac{m}{k\eta}\cdot\log\left(\frac{g+\frac{k\eta}{m}v(t)}{g}\right) =$$

$$= \frac{m}{k\eta}\log\left(1+\frac{k\eta}{mg}v(t)\right)$$

QUANTO RAPIDAMENTE RAGGIUNGE IL VALORE LIMITE ???

VALUTIAMO IL RAPPORTO:

$$\frac{|v_\infty| - |v(t)|}{|v_\infty|} = \frac{\frac{mg}{K\eta} - \frac{mg}{K\eta}\left(1 - e^{-t/t_0}\right)}{\frac{mg}{K\eta}} = e^{-t/t_0}$$

LA QUANTITÀ

$$\frac{|v_\infty| - |v(t)|}{|v_\infty|} = e^{-t/t_0}$$

MI DICE DI QUANTO IL VALORE DELLA VELOCITÀ IN UN ISTANTE t SI DISCOSTA DALLA VELOCITÀ LIMITE $|v_\infty|$

PER $t = t_0 \Rightarrow e^{-t/t_0} = e^{-1} \simeq \frac{1}{3}$

QUINDI SOSTITUENDO $t = t_0$ NELLA FUNZIONE $|v(t)|$ CI SI RENDERÀ CONTO CHE:

$|v(t_0)| \simeq 63\%$ DELLA SUA VELOCITÀ LIMITE $|v_\infty|$

$\Longrightarrow$ IL PARAMETRO $t_0 = \frac{m}{K\eta}$ È DETTO $\boxed{\text{TEMPO DI RILASSAMENTO}}$

PER $t = 2t_0$ LA GOCCIA D'ACQUA RISULTERÀ ANCORA PIÙ VICINA ALLA VELOCITÀ LIMITE (<u>VELOCITÀ DI REGIME</u>)

PER $t \gg t_0$ $\quad |v(t)| \simeq |v_\infty| = \text{COSTANTE}$

IL FATTO CHE $|v(t)|$ SIA COSTANTE IMPLICA CHE $a = 0$ E QUESTO ACCADE SE E SOLO SE $\sum F = 0$

INFATTI PER $t \gg t_0$ ABBIAMO CHE LE FORZE IN GIOCO SONO:

$$\underbrace{mg}_{\text{FORZA PESO}} + \underbrace{K\eta v(t)}_{\text{FORZA DI ATTRITO VISCOSO}} \simeq mg + K\eta v_\infty = mg + K\eta\left(-\frac{mg}{K\eta}\right) = 0$$

LA RISULTANTE È <u>NULLA</u>

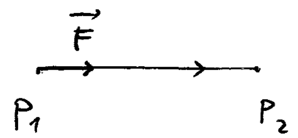
LA FORZA DI ATTRITO VISCOSO COMPENSA ESATTAMENTE LA FORZA PESO.
QUESTO È VERO A PATTO CHE $|v_\infty|$ NON SIA MOLTO GRANDE.
CIÒ SI REALIZZA IN TUTTI I CORPI OMOGENEI IN CUI LA MASSA DELL'OGGETTO CONSIDERATO È PROPORZIONALE AL VOLUME. IL RAPPORTO $\frac{m}{V}$ È DETTO <u>DENSITÀ</u>.

PER UN OGGETTO SFERICO $\quad m \propto \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{\text{VOLUME DELLA SFERA}}$

ENERGIA MECCANICA

LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA $\vec{F}$ QUANDO UNA PARTICELLA È SPOSTATA DA $P_1 \rightarrow P_2$

SUPPONIAMO CHE UNA PARTICELLA VENGA SPOSTATA DA P_1 A P_2 LUNGO LA RETTA CONGIUNGENTE I DUE PUNTI.



SUPPONIAMO INOLTRE CHE $\vec{F}$ SIA COSTANTE E ABBIA VERSO CONCORDE A QUELLO DELLO SPOSTAMENTO
CHIAMIAMO $\vec{\ell}$ IL VETTORE SPOSTAMENTO.

$$\vec{\ell} = |\overrightarrow{P_1P_2}| \qquad \ell = |\vec{\ell}|$$

IL LAVORO SI DEFINISCE COME:

$$W = |\vec{F}|\,\ell$$

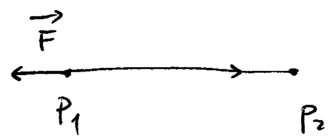
LE SUE DIMENSIONI SONO $[W] = [FL] = [MLT^{-2} \cdot L]$

$$= [ML^2T^{-2}] = [MJ^2]$$

NEL SISTEMA "MKSA" LA SUA UNITÀ DI MISURA È IL JOULE:

$$\text{JOULE } (J) = N \cdot m = kg\,\frac{m^2}{s^2}$$

2) SUPPONIAMO ADESSO CHE LA FORZA AGENTE SULLA PARTICELLA CHE SI MUOVE DA P_1 A P_2 LUNGO LA RETTA CONGIUNGENTE ABBIA VERSO OPPOSTO ALLO SPOSTAMENTO.

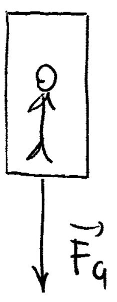


IN TAL CASO $W = -|\vec{F}|\,\ell$

NEL PRIMO CASO LA FORZA FAVORISCE LO SPOSTAMENTO E $W = |\vec{F}|\,\ell > 0$
" SECONDO " - " SFAVORISCE " " " $W = -|\vec{F}|\,\ell < 0$

ESEMPIO

SIAMO IN UN ASCENSORE



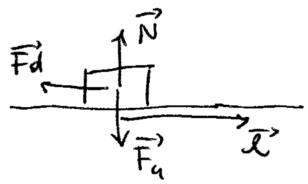
SE LO SPOSTAMENTO DELL'ASCENSORE È VERSO L'ALTO

$\uparrow \quad W = -mg\,\ell < 0$ ($\vec{F_g}$ SI OPPONE ALLO SPOSTAMENTO)

SE LO SPOSTAMENTO È VERSO IL BASSO

$\downarrow \quad W = mg\,\ell > 0$ ($\vec{F_g}$ FAVORISCE LO SPOSTAMENTO)

ESEMPIO ATTRITO DINAMICO



$$\vec{F} = \vec{F_g} + \vec{N} + \vec{F_d} \qquad \vec{F_d} = -\mu_d N \vec{u}$$

$$\vec{\ell} = \ell \vec{u}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell} = (\vec{F_g} + \vec{N} + \vec{F_d}) \cdot \vec{\ell} = \underbrace{\vec{F_g} \cdot \vec{\ell}}_{=0} + \vec{F_d} \cdot \vec{\ell} + \underbrace{\vec{N} \cdot \vec{\ell}}_{=0}$$

$\vec{F_g}$ ED $\vec{N}$ SONO $\perp$ ALLO SPOSTAMENTO

$$= -\mu_d \ell m g < 0$$

ESEMPIO ATTRITO STATICO NON C'È SPOSTAMENTO $\Rightarrow W = 0$

ESEMPIO ATTRITO VISCOSO

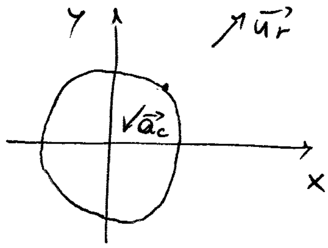
$$\vec{F_v} = -k\eta \vec{v}$$

CONSIDERIAMO UN INTERVALLINO INFINITESIMO dt; AD ESSO CORRISPONDERÀ UNO SPOSTAMENTO $d\vec{\ell}$

$$d\vec{\ell} = \vec{v}\, dt$$

$$W = \vec{F_v} \cdot d\vec{\ell} = (-k\eta \vec{v}) \cdot (\vec{v}\, dt) = -k\eta |\vec{v}|^2 dt < 0$$

ESEMPIO MOTO CIRCOLARE



$$\vec{a_c} = -\frac{v^2}{R} \vec{u_r} \qquad m\vec{a_c} = \vec{F_c}$$

$$\vec{F_c} = m\left(-\frac{v^2}{R}\right)\vec{u_r}$$

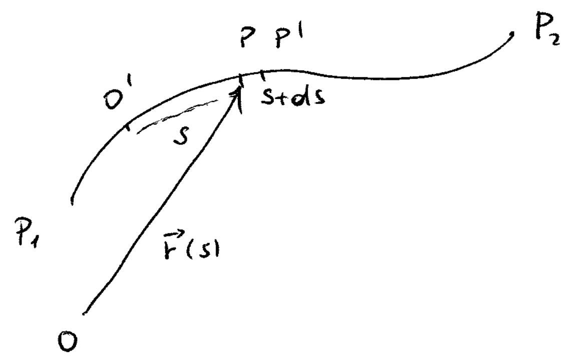
IL LAVORO È DATO DA

$$dW = \vec{F_c} \cdot d\vec{\ell} = \left(-m\frac{v^2}{R}\vec{u_r}\right) \cdot \left(\vec{v}\, dt\right)$$

DATO CHE $\vec{F_c}$ E $d\vec{\ell}$ SONO PERPENDICOLARI COSÌ COME $\vec{u_r}$ E $\vec{v}$ IL LAVORO SARÀ NULLO

$$dW = 0$$

OGNI INTEGRALE DI LINEA PUÒ ESSERE RICONDOTTO, NOTO LO SPOSTAMENTO, A UN INTEGRALE AD UNA SOLA VARIABILE.
PRENDIAMO UN GENERICO SPOSTAMENTO:



OGNI PUNTO SULLA CURVA PUÒ ESSERE INDIVIDUATO CON UNA ASCISSA CURVILINEA s

$$P\ (x(s), y(s), z(s))$$

SUPPONIAMO DI SPOSTARCI DA P DI MOLTO POCO PASSANDO AD UN PUNTO P'.
ESSO SARÀ DESCRITTO DA

$$P'\ (x(s+ds), y(s+ds), z(s+ds)) = \vec{r}(s+ds)$$

LO SPOSTAMENTO È DATO DA:

$$d\vec{l} = \overline{PP'} = \vec{r}(s+ds) - \vec{r}(s) = (x(s+ds), y(s+ds), z(s+ds)) - (x(s), y(s), z(s))$$

$$= (x(s+ds) - x(s), y(s+ds) - y(s), z(s+ds) - z(s)) =$$

DIVIDO E MOLTIPLICO PER ds) $= \left(\frac{x(s+ds) - x(s)}{ds}, \frac{y(s+ds) - y(s)}{ds}, \frac{z(s+ds) - z(s)}{ds} \right) ds$

INDIVIDUIAMO LE DERIVATE) $= \left(\frac{dx}{ds}(s), \frac{dy}{ds}(s), \frac{dz}{ds}(s) \right) ds$

LA FORZA DIPENDERÀ IN GENERALE DA s:

$$\vec{F}(\vec{r}(s)) = \vec{F}(x(s), y(s), z(s))$$

L LAVORO ELEMENTARE COMPIUTO DALLA FORZA IN UNO SPOSTAMENTO $d\vec{l}$ SI SCRIVE:

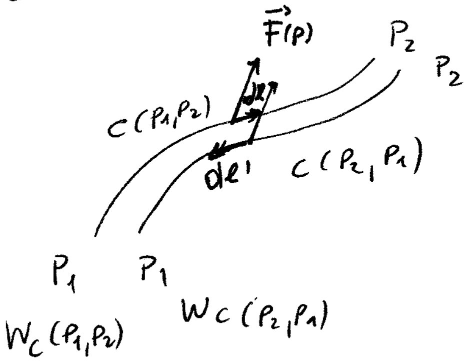
$$dW = \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot d\vec{l} = (F_x \vec{u_x} + F_y \vec{u_y} + F_z \vec{u_z}) \cdot \left(\frac{dx}{ds} \vec{u_x}, \frac{dy}{ds} \vec{u_y}, \frac{dz}{ds} \vec{u_z} \right) ds =$$

$$= \left(F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_z \frac{dz}{ds} \right) ds = f(s)\, ds$$

$f(s)$ È LA FUNZIONE $\left(F_x \frac{dx}{ds} + F_y \frac{dy}{ds} + F_z \frac{dz}{ds} \right)$ CHE DIPENDE DA "s" STESSA IN QUANTO LA FORZA E QUINDI F_x, F_y, F_z DIPENDONO DA s (COME DETTO IN PRECEDENZA) E LE DERIVATE $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ SONO CALCOLATE RISPETTO A s. POSSIAMO QUINDI RICONDURRE L'INTEGRALE DI LINEA A UN INTEGRALE AD UNA SOLA VARIABILE:

$$W = \int_{C(P_1, P_2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{s_1}^{s_2} f(s)\, ds$$

ESEMPIO SPOSTAMENTO ANDATA – RITORNO LUNGO LO STESSO PERCORSO



VOGLIAMO MOSTRARE CHE

$$W_C(P_1,P_2) = -W_C(P_2,P_1)$$

LA FORZA AGENTE DIPENDE DALLA POSIZIONE

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

- TALE FORZA IN UN PUNTO DELLA CURVA C È LA STESSA SIA ALL'ANDATA CHE AL RITORNO
- LO SPOSTAMENTO CHE SI OSSERVA ALL'ANDATA È, PERÒ, OPPOSTO A QUELLO DEL RITORNO.

$$d\vec{l} \in C(P_1,P_2) \qquad d\vec{l}' \in C(P_2,P_1) \quad \Rightarrow \quad d\vec{l} = -d\vec{l}'$$

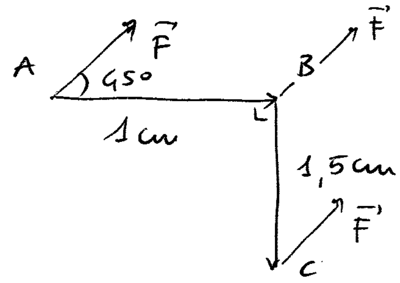
CALCOLIAMO I LAVORI ELEMENTARI E SFRUTTIAMO TALE RELAZIONE:

$$\underline{dW} = \vec{F}(P)\cdot d\vec{l} = \vec{F}(P)\cdot(-d\vec{l}') = -\vec{F}(P)\cdot d\vec{l}' = \underline{-dW'}$$

SE CONSIDERIAMO IL LAVORO TOTALE ALL'ANDATA E AL RITORNO DOBBIAMO SOMMARE TALI CONTRIBUTI ELEMENTARI CHE SONO UNO L'OPPOSTO DELL'ALTRO QUINDI:

$$\underline{W_C(P_1,P_2)} = \sum_i dW_i = \sum_i (-dW_i') = \underline{-W_C(P_2,P_1)}$$

ESERCIZIO



$$\vec{F} = \text{cost} = 1\,N$$

INDIVIDUIAMO GLI SPOSTAMENTI $\vec{AB}$ E $\vec{AC}$

$$W = W_{(AB)} + W_{(BC)}$$

$$\vec{F} = F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{AB} = (0{,}01\,m, 0)$$

$$\vec{BC} = (0, -0{,}015\,m)$$

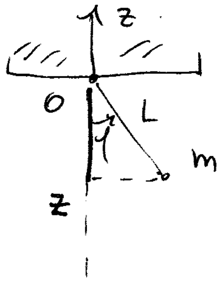
$$\vec{AB} + \vec{BC} = (0{,}01\,m, -0{,}015\,m)$$

$$W = \vec{F}\cdot(\vec{AB}+\vec{BC}) = \vec{F}\cdot\vec{AC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}N, \frac{\sqrt{2}}{2}N\right)\begin{pmatrix} 0{,}01\,m \\ -0{,}015\,m \end{pmatrix} = -0{,}003\,J$$

$$W_{c(P_1,P_2)} = -mgL(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)$$

$(z_2 - z_1)$

OSSERVIAMO IL NOSTRO SR:



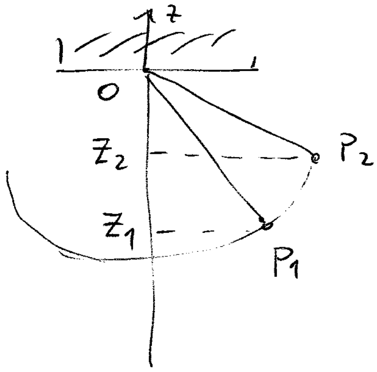
$|z| = L\cos\varphi$

DATO CHE "z" SI TROVA AL DI SOTTO DI O QUALUNQUE SIA φ ALLORA

$$\boxed{z = -L\cos\varphi}$$

$$W_{c(P_1P_2)} = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2)$$

NEL NOSTRO CASO $\varphi_2 > \varphi_1$ CIOÈ



SE $z_1 > z_2$ $W > 0$

QUINDI LA FORZA GRAV. FAVORISCE LO SPOSTAMENTO CIOÈ IL PENDOLO SCENDE ↙

- SE $z_1 < z_2$ $W < 0$

LA FORZA GRAV. SFAVORISCE LO SPOST. CIOÈ IL PENDOLO SALE ↗

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 296

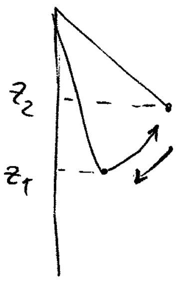
CONTENUTO DEL TEOREMA

$$\boxed{W_{C(P_1 P_2)} = \Delta E_K = E_K(t_2) - E_K(t_1)}$$

E COME SE...

- SE $W > 0$ $\quad \underline{\Delta E_K > 0}$ $\quad E_K \uparrow$ $\quad$ 1) LA FORZA CEDE ENERGIA CINETICA AL SISTEMA ($\Delta E_K > 0$)
- SE $W < 0$ $\quad \underline{\Delta E_K < 0}$ $\quad E_K \downarrow$ $\quad$ 2) LA FORZA SOTTRAE ENERGIA CINETICA AL SISTEMA ($\Delta E_K < 0$)

CONSIDERAZIONI MOTO DEL PENDOLO ALLA LUCE DEL TEOREMA



SALITA

$z_1 < z_2 \quad W_{z_1 \to z_2} < 0 \quad \Delta E_{K(1 \to 2)} < 0$ SI SOTTRAE E_K

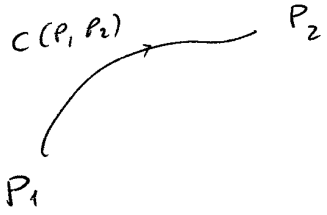
DISCESA

$z_1 > z_2 \quad W_{z_2 \to z_1} > 0 \quad \Delta E_{K(2 \to 1)} > 0$ SI CEDE E_K

È BENE PRECISARE CHE NELLA FASE DI SALITA L'ENERGIA CINETICA PERSA DAL PENDOLO VIENE IMMAGAZZINATA IN "UN ENTITÀ". ESSA È CAPACE DI RESTITUIRE INTERAMENTE TALE ENERGIA NEL MOMENTO IN CUI IL PENDOLO COMPIRÀ LA FASE DI DISCESA.

QUESTA È UNA CARATTERISTICA CHE ACCOMUNA LE COSIDDETTE FORZE CONSERVATIV

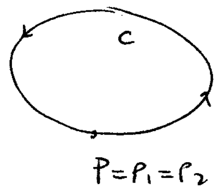
SPOSTO UNA PARTICELLA DA P_1 A P_2



$$W_{P_1 \to P_2} = W_{C(P_1 P_2)} = -W_{C(P_2 P_1)} = -W_{P_2 \to P_1}$$

(IL LAVORO COMPIUTO DA $\vec{F}$ PER SPOSTARE LA PARTICELLA DA P_1 A P_2 È UGUALE E OPPOSTO A QUELLO PER SPOSTARE LA PARTICELLA DA P_2 A P_1 LUNGO LO STESSO PERCORSO)

IN PARTICOLARE SE $P = P_1 = P_2$ IL PERCORSO SARÀ CHIUSO:



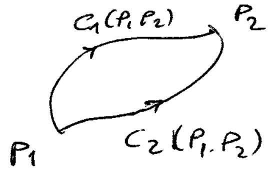
$$W_{P \to P} = -W_{P \to P} = 0$$

(PER LA PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE UN NUMERO a È UGUALE A ZERO SE E SOLO SE $|a| = 0$)

$\vec{F}$ CONSERVATIVA $\iff$ $\forall$ C PERCORSO CHIUSO : $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0$

DIMOSTRIAMO CHE $\forall C : \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0 \implies \vec{F}$ CONSERVATIVA

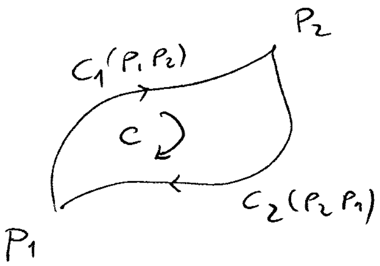
VOGLIAMO DIMOSTRARE CHE DATO UN PERCORSO



VARRÀ:

$$\int_{C_1(P_1 P_2)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{C_2(P_1 P_2)} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

SPOSTIAMO LA MASSA DA P_1 A P_2 LUNGO C_1 E LO RIPORTIAMO A P_1 LUNGO C_2.



PER IPOTESI $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{C_1(P_1 P_2)} \vec{F} \cdot \vec{dl} + \int_{C_2(P_2 P_1)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = 0$$

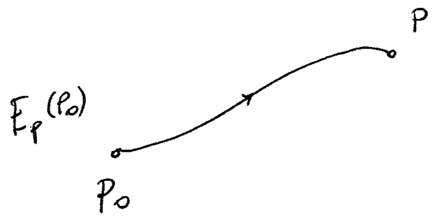
$$\int_{C_1(P_1 P_2)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = -\int_{C_2(P_2 P_1)} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$\int_{C_1(P_1 P_2)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{C_2(P_1 P_2)} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$ (TESI DEL TEOREMA)

" C_1 C_2 GENERICI $\implies W_{C_1(P_1 P_2)} = W_{C_2(P_1 P_2)} = W_{P_1 \to P_2} \implies \vec{F}$ CONSERVATIVA "

DATA $\vec{F}$ CONSERVATIVA COME DETERMINO $E_p(P)$?

PRENDO P_0 E FISSO ARBITRARIAMENTE $E_p(P_0)$; FISSO INOLTRE P E ESPRIMO $E_p(P)$.



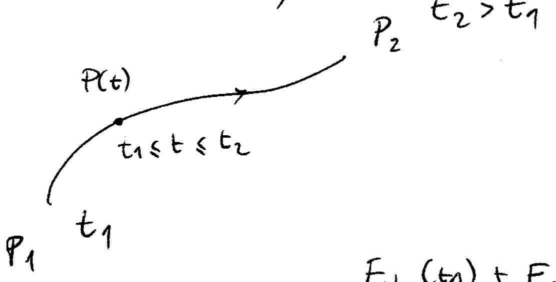
$$E_p(P) = E_p(P) - E_p(P_0) + E_p(P_0)$$

$$E_p(P) = -\int_{P_0 \to P} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} + E_p(P_0)$$

QUINDI ASSEGNO ARBITRARIAMENTE $E_p(P_0)$ E MISURO IL LAVORO $W_{P_0 \to P} = -\int_{P_0 \to P} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$. IL FATTO DI FISSARE $E_p(P_0)$ EQUIVALE A FISSARE LA COSTANTE "C".

CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA

SIA DATA $\vec{F}$ CONSERVATIVA (RISULTANTE DI TUTTE LE FORZE CHE AGISCONO SULLA PARTICELLA)



$$W_{P_1 \to P_2} = E_p(P_1) - E_p(P_2) = \quad \text{(QUESTO VALE SOLO PER } \vec{F} \text{ CONSERVATIVE)}$$

$$= E_k(t_2) - E_k(t_1) \quad \text{(QUESTO VALE SEMPRE)}$$

$$E_k(t_1) + E_p(P_1) = E_k(t_2) + E_p(P_2)$$

$$\boxtimes \quad E_k(t_1) + E_p(P_1(t_1)) = E_k(t_2) + E_p(P_2(t_2))$$

DEFINISCO $E_k + E_p = E$ COME <u>ENERGIA MECCANICA</u>

L'EQ. $\boxtimes$ MOSTRA CHE "E" È COSTANTE IN OGNI ISTANTE.

SE CONOSCO IL MOTO ED IN PARTICOLARE $\vec{v}$ E $\vec{r}$ POSSO SCRIVERE:

$$E = E_k(|\vec{v}|) + E_p(\vec{r}) = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} + E_p(\vec{r})$$

SE $\vec{F}$ È CONSERVATIVA $\Longrightarrow E(t) = \dfrac{m|\vec{v}(t)|^2}{2} + E_p(\vec{r}(t)) = \text{COST}$

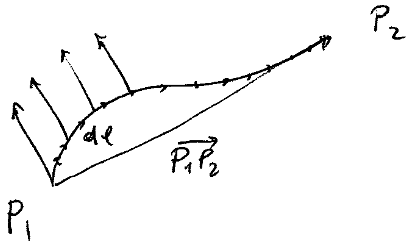
(SI CONSERVA!)

QUINDI IN DUE QUALSIASI ISTANTI:

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1) = 0 \Longrightarrow \Delta E_p + \Delta E_k = 0$$

$$\boxed{\Delta E_k = -\Delta E_p}$$

ESEMPIO FORZA CONSERVATIVA FORZA COSTANTE (ESEMPIO FORZA GRAVITAZIONALE)



$$W_{C(P_1 P_2)} = \int_{C(P_1 P_2)} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \sum \vec{F} \cdot \vec{dl} =$$

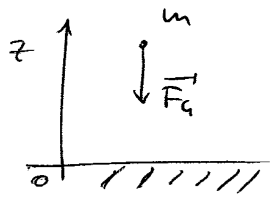
$$= \vec{F} \cdot \left(\sum \vec{dl}\right) = \vec{F} \cdot \left(\overrightarrow{P_1P_2}\right) = \vec{F} \cdot \left(\vec{r_2} - \vec{r_1}\right) =$$

$$= \left(-\vec{F} \cdot \vec{r_1}\right) - \left(-\vec{F} \cdot \vec{r_2}\right) =$$

$$= E_p(\vec{r_1}) - E_p(\vec{r_2})$$

DOVE IN GENERALE $E_p(\vec{r}) = -\vec{F} \cdot \vec{r} + c$

FORZA GRAVITAZIONALE



$$\vec{F_G} = -mg\,\vec{u_z} = \text{cost.}$$

$$E_p(\vec{r}) = -\vec{F_G} \cdot \vec{r} + c =$$

$$= -\left(-mg\,\vec{u_z}\right) \cdot \left(x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}\right) + c =$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -mg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = mgz + c$$

FISSIAMO C PONENDO $E_p(z=0) = 0 \Longrightarrow c = 0$

QUINDI $E_p(z) = mgz$

$$E_p(z) = E_p(z) - E_p(z=0) = W_{z \to 0}$$

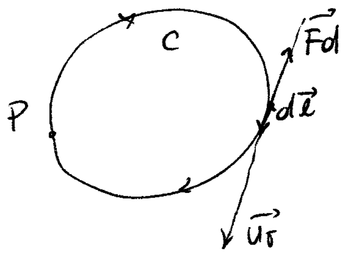
SE LA FORZA GRAVITAZIONALE È L'UNICA FORZA A COMPIERE LAVORO VALE:

$$E = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} + E_p(z) = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} + mgz(t) = \text{cost}$$ (CONSERV. DELL'ENERGIA MECCANICA)

ESEMPIO FORZA DI ATTRITO DINAMICO (NON CONSERVATIVA)

RICORDIAMO CHE UNA FORZA $\vec{F}$ È CONSERVATIVA $\Longleftrightarrow$ IL LAVORO DA ESSA COMPIUTO LUNGO UN PERCORSO CHIUSO È ZERO.

CONSIDERIAMO PERCIÒ UN PERCORSO CHIUSO



$d\vec{l} = dl\,\vec{u_T}$

LUNGO LO SPOSTAMENTO INFINITESIMO $d\vec{l}$ AGISCE LA FORZA D'ATTRITO:

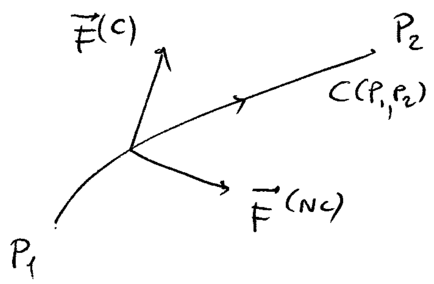
$$\vec{F_d} = -\mu_d N \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = -\mu_d N \vec{u_T} = -\mu_d mg \vec{u_T}$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = (-\mu_d mg\,\vec{u_T})\cdot(dl\,\vec{u_T}) = -\mu_d mg\,dl < 0$$

$$W_c = \oint_C \vec{F_d}\cdot d\vec{l} = \int_C (-\mu_d mg\,dl) = -\mu_d mg\int dl = -\mu_d mg L < 0$$

LA QUANTITÀ $-\mu_d mg L \neq 0 \implies \vec{F}$ NON È CONSERVATIVA

PARTICELLA SOGGETTA A FORZE CONSERVATIVE E NON CONSERVATIVE



$\vec{F}^{(C)}$ = RISULTANTE FORZE CONSERVATIVE

$\vec{F}^{(NC)}$ = RISULTANTE FORZE NON CONSERVATIVE

$\vec{F} = \vec{F}^{(C)} + \vec{F}^{(NC)}$

$$W_C(P_1,P_2) = W^{(C)}_{C(P_1,P_2)} + W^{(NC)}_{C(P_1,P_2)} =$$

PER IL LAVORO $W^{(C)}_{C(P_1P_2)}$ LAVORO DI UNA FORZA CONSERVATIVA VALE LA RELAZIONE $W^{(C)}_{C(P_1P_2)} = E_p(P_1) - E_p(P_2)$

$$= E_p(P_1) - E_p(P_2) + W^{(NC)}_{C(P_1P_2)} =$$

$$= \Delta E_k = E_k(t_2) - E_k(t_1)$$

$$-\Delta E_p + W^{(NC)}_{C(P_1P_2)} = \Delta E_k$$

SAPENDO CHE $E = E_k + E_p$

$\Rightarrow \Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p$

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = W^{(NC)}_{C(P_1P_2)}$$

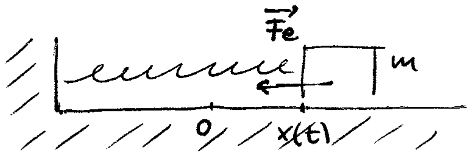
SE LE FORZE NON CONSERVATIVE COMPIONO LAVORO ED IN PARTICOLARE LA RISULTANTE DELLE FORZE NON CONSERVATIVE COMPIE LAVORO $\implies$ L'ENERGIA MECC. NON SI CONSERVA

INOLTRE $\Delta E = W^{(NC)}_{C(P_1P_2)}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 296

$$E_p(x) = -\int F(x)\,dx + c$$

UN ESEMPIO DI FORZA DI QUESTO TIPO È LA FORZA ELASTICA



$$\vec{F_e}(x) = F(x)\,\vec{u_x} \qquad F(x) = -k_e x$$

ASSOCIO ALLA FORZA UN'ENERGIA POTENZIALE

$$E_p(x) = -\int(-k_e x)\,dx + c = k_e\int x\,dx + c =$$

$$= k_e\frac{x^2}{2} + c$$

SAPENDO CHE IN GENERALE $E_p(x) = -f(x)$; $\frac{dE_p}{dx}(x) = -\underbrace{\frac{df}{dx}}_{F(x)}$;

QUINDI NEL NOSTRO CASO:

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

$$F_e(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -k_e x$$

FISSIAMO "C" PONENDO

$$E_p(x=0) = 0 \implies c = 0$$

$$\boxed{E_p(x) = k_e\frac{x^2}{2}}$$

SE LA FORZA ELASTICA È L'UNICA A COMPIERE LAVORO L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA

$$E = m\frac{v^2}{2} + k_e\frac{x^2}{2} = \text{cost.} \quad \text{LUNGO IL MOTO}$$

VERIFICHIAMO CHE E È COSTANTE.

SUPPONIAMO DI CONSIDERARE LA SITUAZIONE IN CUI $x(0) = x_0 > 0$ $v(0) = 0$

LE EQ. CHE DESCRIVONO IL MOTO SONO

$$x(t) = x_0\cos(w_0 t) \qquad w_0 = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

$$v(t) = -x_0 w_0 \sin(w_0 t)$$

$$E_k(t) = \frac{m}{2}v(t)^2 = \frac{m}{2}x_0^2 w_0^2 \sin^2(w_0 t) = \frac{k_e x_0^2}{2}\sin^2(w_0 t)$$

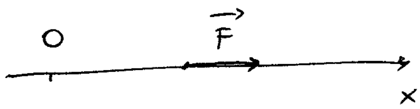
$$E_p(t) = k_e\frac{x(t)^2}{2} = \frac{k_e x_0^2}{2}\cos^2(w_0 t)$$

$$E = E_p(t) + E_k(t) = \frac{k_e x_0^2}{2}\left(\sin^2(w_0 t) + \cos^2(w_0 t)\right) = \frac{k_e x_0^2}{2} =$$

$$= \underbrace{E_k(t=0)}_{\substack{=0 \text{ NELL'IST.} \\ \text{INIZIALE PERCHÉ} \\ v(0)=0}} + E_p(t=0) = \text{cost}$$

PUNTI DI EQUILIBRIO STABILE E INSTABILE

RIEPILOGHIAMO CHE ...

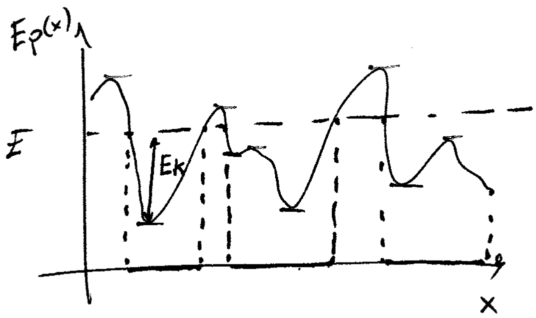


NEL CASO DI UNA FORZA AGENTE LUNGO LA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO VALGONO LE SEGUENTI RELAZIONI:

$$\vec{F}(x) = F(x)\,\vec{u_x} \longrightarrow E_p(x) = -\int F(x)\,dx + C$$

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

IL GRAFICO DI $E_p(x)$ CI DÁ IMPORTANTI INFORMAZIONI SUL MOTO
SUPPONIAMO DI CONOSCERE UNA GENERICA FUNZIONE $E_p(x)$:



1) I PUNTI DI MINIMO SONO PUNTI DI EQUILIBRIO STABILE.

2) I PUNTI DI MASSIMO PUNTI DI EQUILIBRIO INSTABILE

DATO CHE E_K È SEMPRE POSITIVA VALE LA LEGGE:

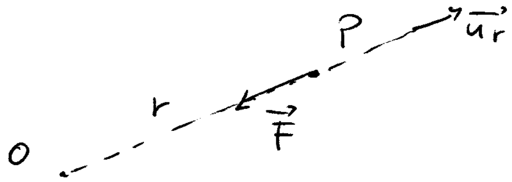
$$E_K = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - E_p(x) \geq 0$$

AFFINCHÉ QUESTO VALGA DEVE ESSERE $E \geq E_p(x)$.

SE CONOSCIAMO L'ENERGIA MECCANICA DELLA PARTICELLA ALLORA CONOSCIAMO GLI INTERVALLI ENTRO CUI LA PARTICELLA SI POTRÀ MUOVERE: QUELLI IN CUI IL GRAFICO DI $E_p(x)$ È AL DI SOTTO DELLA RETTA $Y = E$. (SEGNATI IN ROSSO SULL'ASSE X)

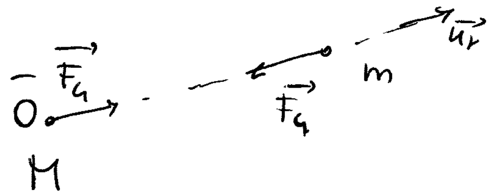
FORZE CENTRALI

SONO FORZE TALI CHE 1) IN OGNI PUNTO HANNO SEMPRE DIREZIONE DELLA CONGIUNGENTE DI DUE PUNTI DI CUI UNO È IL CENTRO DELLA FORZA "O";
2) IL MODULO DI TALI FORZE DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA "r".



$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\vec{u}_r \qquad \begin{cases} F(r) > 0 & \text{FORZA ATTRATTIVA} \\ F(r) < 0 & \text{FORZA REPULSIVA} \end{cases}$$

ESEMPIO: FORZA GRAVITAZIONALE



FISSIAMO UN "SR" SOLIDALE ALLA MASSA M IN CUI PONIAMO IL CENTRO DELLA FORZA.

$$\vec{F}_G(\vec{r}) = F_G(r)\,\vec{u}_r$$

$$F_G = -\frac{\gamma}{r^2} \qquad \gamma = GMm$$

IN GENERALE PERÒ IL "SR" POSTO IN M NON È INERZIALE IN QUANTO M SUBISCE UNA FORZA.
SE $M >> m$ ALLORA TALE "SR" DIVENTA APPROSSIMATIVAMENTE INERZIALE
INFATTI
$$\begin{cases} M\vec{a}_M = -\vec{F}_G \\ m\vec{a}_m = \vec{F}_G \end{cases} \Longrightarrow \frac{|\vec{a}_M|}{|\vec{a}_m|} = \frac{m}{M} << 1$$

QUINDI L'EFFETTO DI $\vec{F}_G$ SU m È MOLTO MAGGIORE DI QUELLO DI $-\vec{F}_G$ SU M.

$$E_p(r) = -f(r) = -\int F(r)\,dr + c$$

SE CONSIDERIAMO FORZE GRAVITAZIONALI O ELETTROSTATICHE GENERALIZZIAMO

$$F(r) = -\frac{\gamma}{r^2} \qquad E_p(r) = -\int F(r)\,dr \overset{+c}{=} -\int -\frac{\gamma}{r^2}\,dr \overset{+c}{=} +\gamma\int \frac{1}{r^2}\,dr \overset{+c}{=}$$

$$E_p(r) = -\frac{\gamma}{r} + c$$

DOBBIAMO FISSARE LA COSTANTE "c". PONIAMO $E_p(r \to +\infty) = 0$

QUINDI $c = 0$. $E_p(r) = -\dfrac{\gamma}{r}$ $\left[\lim_{r\to+\infty} E_p(r) = 0\right]$

$$E_p(r) = E_p(r) - 0 =$$
$$= E_p(r) - E_p(r \to +\infty) = W_{r\to+\infty}$$

QUESTO È IL LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA CHE PORTA LE DUE PARTICELLE A DISTANZA ∞

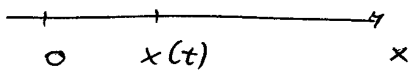
VALE IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DI E

$$E = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} + E_p(r) = \frac{m|\vec{v}|^2}{2} - \frac{\gamma}{r} = \underline{cost}$$

QUESTO RAGIONAMENTO VALE PER MOTI UNIDIMENSIONALI

$\boxed{\text{CARATTERISTICA IMPORTANTE MOTO UNIDIMENSIONALE}}$

IL MOTO È COMPLETAMENTE DETERMINATO DALLA VARIAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA CIOÈ DALLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA



$$E_p(x) = -\int F(x)\,dx + c$$

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_p(x) = cost$$

E È FISSATA PER DATE CONDIZIONI INIZIALI $v(0) = v_0$, $x(0) = x_0$

$$\underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}_{\substack{\text{SEMPRE}\\ \geq 0}} = \frac{2}{m}\underbrace{(E - E_p(x))}\geq 0$$

$\Updownarrow$ SE E SOLO SE

$$E - E_p(x) \geq 0 \implies \boxed{E \geq E_p(x)}$$

SOSTITUZIONE

$$y(x) = \sqrt{\frac{k_e}{2E}}\, x \qquad dy = \frac{dy}{dx}\,dx = \sqrt{\frac{k_e}{2E}}\,dx \iff dx = \sqrt{\frac{2E}{k_e}}\,dy$$

RISCRIVO L'INTEGRALE:

$$= \sqrt{\frac{m}{\cancel{2E}}}\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{\sqrt{\frac{\cancel{2E}}{k_e}}\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sqrt{\frac{m}{k_e}}\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

NOTIAMO CHE $1 - y^2 \geq 0 \iff y^2 \leq 1$

QUESTO È VERO SEMPRE PERCHÈ:

$$E_p(x) \leq E \qquad \frac{k_e x^2}{2} \leq E \qquad \frac{k_e x^2}{2E} \leq 1 \quad \text{CIOÈ} \quad y^2(x) \leq 1 \qquad |y| = \sqrt{\frac{k_e x^2}{2E}} \leq 1$$

NOTIAMO INOLTRE CHE:

$$w_0 = \sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

QUINDI

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm\sqrt{\frac{k_e}{m}}\,t = \pm w_0 t$$

DATO CHE $|y| \leq 1$ IDENTIFICO y CON IL COSENO DI UN ANGOLO ϑ

$$y = \cos\vartheta \qquad 0 \leq \vartheta < \pi$$

$$dy = -\sin\vartheta\, d\vartheta$$

L'INTEGRALE DIVENTA

$$\vartheta = \arccos y$$

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(y)} \frac{-\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{1-\cos^2\vartheta}} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta(y)} \frac{-\sin\vartheta}{|\sin\vartheta|}\,d\vartheta = -\int_{\vartheta_0}^{\vartheta(y)} d\vartheta =$$

DATO CHE PER $0 \leq \vartheta \leq \pi$ $\sin\vartheta \geq 0$ sempre POSSO SEMPLIFICARE

$$= -(\vartheta(y) - \vartheta_0) = \vartheta_0 - \vartheta(y) =$$

$$= \arccos(y_0) - \arccos(y(x)) = \arccos(y_0) - \arccos(y(x(t))) =$$

Y DIPENDE DA X CHE A SUA VOLTA DIPENDE DA t

$$= \arccos(y(t=0)) - \arccos(y(t)) = \pm w_0 t$$

$$\arccos(y(t)) = \mp w_0 t \mp \arccos(y(t=0))$$

IL COSENO È UNA FUNZIONE PARI PERCIÒ POSSO NON PREOCCUPARMI DEI SEGNI

$$\boxed{y(t) = \cos(w_0 t + \phi)} \qquad \phi = \mp \arccos(y(t=0))$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 296

$r = |\vec{r}|$

$\vec{r} = r\,\vec{u_r}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{1}{dt}\left(dr\,\vec{u_r} + r\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}\right) = \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u_r}}_{\text{COMPONENTE RADIALE}} + \underbrace{r\frac{d\varphi}{dt}\vec{u_\varphi}}_{\text{COMPONENTE ANGOLARE}}$$

CALCOLIAMO IL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\left(r\vec{u_r}\right) \times \left(\frac{dr}{dt}\vec{u_r} + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{u_\varphi}\right) = m r^2 w\, \vec{u_r} \times \vec{u_\varphi} =$$

$$= m r^2 w\, \vec{u_z} = L\,\vec{u_z}$$

IL PRODOTTO È NULLO

IL VERSO DI $\vec{L}$ DIPENDE DAL SEGNO DI w $\begin{cases} w > 0 & L \text{ VERSO L'ALTO} \\ w < 0 & L \text{ VERSO IL BASSO} \end{cases}$

INOLTRE IL FATTO CHE NEL PRODOTTO VETTORIALE IL CONTRIBUTO RADIALE È NULLO ALLORA IL MOMENTO (NON A CASO DETTO ANGOLARE) DIPENDE SOLO DALLA COMPONENTE ANGOLARE $\left(r w = r\frac{d\varphi}{dt}\right)$

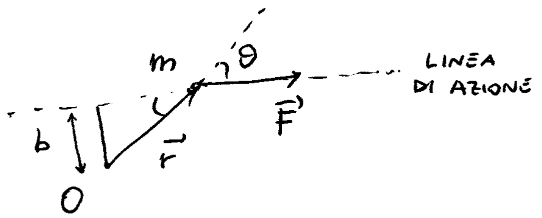
CALCOLIAMO COME VARIA $\vec{L}$ NEL TEMPO:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_{\vec{v} \times m\vec{v} = 0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$ È DETTO $\boxed{\text{MOMENTO DELLA FORZA}}$

ESSO CI DICE: "QUANTO UNA FORZA È IN GRADO DI FAR VARIARE LA COMPONENTE ANGOLARE"

DEFINISCO <u>LINEA DI AZIONE</u> DELLA FORZA COME LA DIREZIONE SU CUI ESSA AGISCE



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

$$|\vec{\tau}| = |\vec{F}|\, r \sin\theta = |\vec{F}|\, b$$

b = BRACCIO DELLA FORZA = È LA DISTANZA DEL PUNTO "O" DALLA LINEA DI AZIONE

$|\vec{\tau}| = |\vec{F}|\, b = \vec{0} \iff$ • $b = 0$ CIOÈ LA FORZA GIACE SULLA LINEA DI AZIONE RISPETTO AD "O"

QUESTO VALE PER LE FORZE CENTRALI !!!

• OPPURE SE $|\vec{F}| = 0$ NON È APPLICATA ALCUNA FORZA