NUMERO: 1716A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Chialà Francesco

MATERIA: Analisi II - prof. Serra

ANALISI II (PARTE I)

II ANNO (2014 / 2015)

FRANCESCO CHIAIÙ

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 208

INTEGRALI

SE f DEFINITA SU $\mathbb{R}$ $(D \longrightarrow \mathbb{R})$ E CONTINUA:

'D' È COMPATTO, DOTATO DI AREA

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_j \sum_k f(c_j, d_k) \cdot \text{AREA}(R_{jk}) \qquad \delta = \text{MAX AREA}(R_{jk})$$

TALE LIMITE ESISTE, NON DIPENDE DA c_j, d_k ED È FINITO E SI SCRIVE:

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy \implies \text{INTEGRALE DOPPIO}$$

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DOPPIO

PRENDIAMO $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUE

D COMPATTO CON AREA $\subset \mathbb{R}^2$

1) LINEARITÀ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

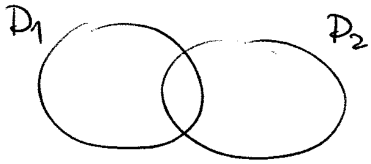
$$\int_D \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \alpha \int_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \int_D g(x,y)\,dx\,dy$$

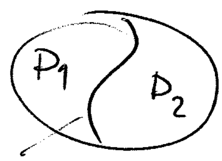
2) ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO

Hp $D = D_1 \cup D_2$ CON D_1 E D_2 COMPATTI

$D_1 \cap D_2$ ABBIA AREA NULLA



NON VALE !!!



VALE !!!

BORDO IN COMUNE CHE HA AREA NULLA

OSSERV.

$$f(x,y) \leq 1 \quad \forall (x,y) \in D$$

$$\int_D dx\,dy = \text{AREA}(D) \cdot 1 = \text{AREA}(D)$$

[LA NOSTRA $f(x,y) = 1$]

TEOREMA DELLA MEDIA

SIA D COMPATTO, CON AREA, $D \in \mathbb{R}^2$

$f : D \to \mathbb{R}$ CONTINUA E D CONNESSO

[$D \subset \mathbb{R}^2$ SI DICE CONNESSO SE $\forall P, Q \in D$ ESISTE UNA CURVA CONTINUA DI ESTREMI P E Q TUTTA CONTENUTA IN D]

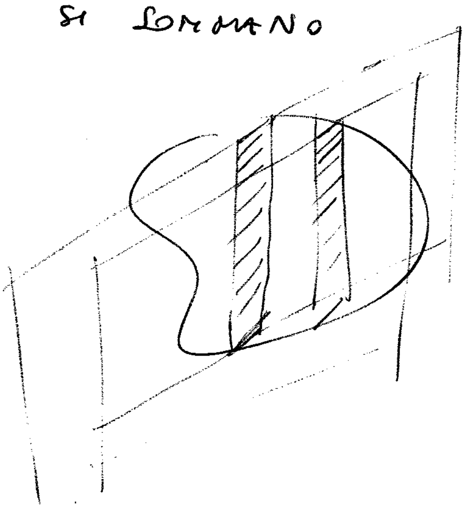
$$\Longrightarrow \exists\, f(x_0, y_0) \in D \text{ t.c. } f(x_0, y_0) = \underbrace{\frac{\int_D f(x,y)\,dx\,dy}{\text{AREA}(D)}}_{\text{MEDIA DI } f \text{ SU } D}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 208

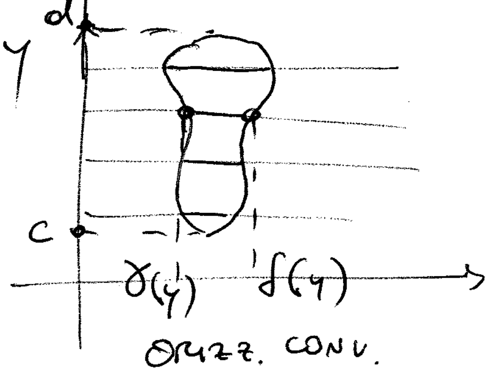
) INTEGRAZIONE PER VERTICALI

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right)}_{\text{DALLA RISOLUZIONE DI QUESTO INTEGRALE ESCE UNA FUNZIONE NELLA SOLA } x} dx$$

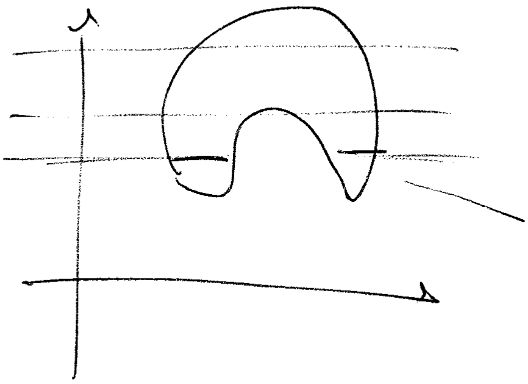
QUESTA FORMULA PUÒ ESSER CONCEPITA COME UN PROCEDIMENTO IN CUI SI AFFETTA IL SOLIDO, SI CALCOLANO LE INFINITE SEZIONI E POI SI SOMMANO



2) DOMINIO ORIZZONTALMENTE CONVESSO

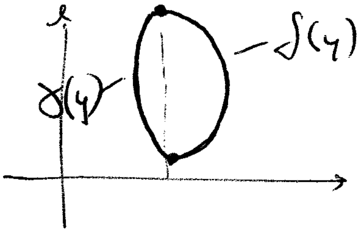


ORIZZ. CONV.



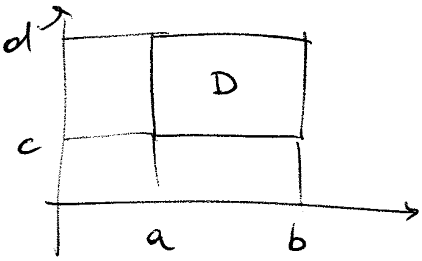
NON ORIZZ. CONV.

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y) \}$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 208

ESEMPIO DI DOMINIO



SIA VERT. CHE ORIZZ. CONVESSO

DESCRIZIONE VERT. CONVESSO

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b ,\ c \leq y \leq d \}$$

DESCRIZIONE ORIZZ. CONVESSO

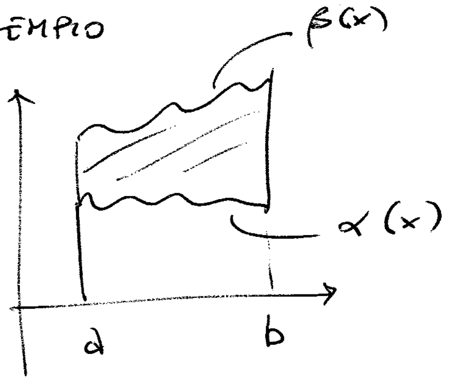
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d ,\ a \leq x \leq b \}$$

IN TAL CASO:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

"QUESTO VUOL DIRE CHE IN TAL CASO SI PUÒ CAMBIARE L'ORDINE DI INTEGRAZIONE NEL CASO DI DOMINIO SIA VERT CHE ORIZZ CONVESSO"

ESEMPIO



VERT. CONVESSO $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b ,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \}$

AREA D:

ANALISI 1 $\Longrightarrow \int_a^b \beta(x) - \alpha(x)\, dx$

ANALISI 2 $\Longrightarrow \int_D dx\, dy$

$\boxed{\text{BARICENTRO}}$

LAMINA 'D' BIDIMENSIONALE

DENSITÀ DI MASSA COSTANTE = 1

$G = (x_G, y_G)$

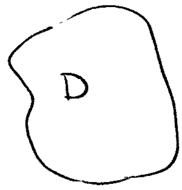
$$x_G = \frac{1}{\text{AREA}(D)} \int_D x \, dx \, dy \qquad y_G = \frac{1}{\text{AREA}(D)} \int_D y \, dx \, dy$$

"MEDIA DELLA COORDINATA x SU D" "MEDIA DELLA COORDINATA y SU D"

⇒ IL BARICENTRO NON CADE NECESSARIAMENTE ALL'INTERNO DEL DOMINIO. INOLTRE SE $\rho = \text{COST} = 1$ G GODE DI PROPRIETÀ SIMMETRICHE DAL PUNTO DI VISTA GEOMETRICO

SE LA DENSITÀ DI MASSA NON È COSTANTE?

$\rho(x, y)$



1) CALCOLO MASSA TOTALE:

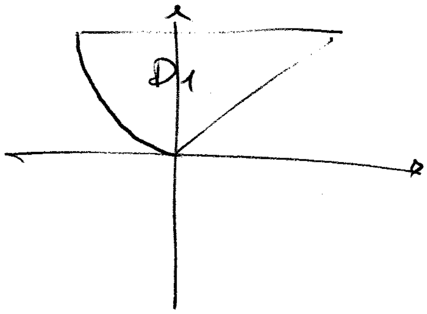
$$M = \int_D \rho(x,y) \, dx \, dy$$

$G = (x_G, y_G)$

$$x_G = \frac{1}{\text{MASSA TOTALE}} \int_D \rho(x,y) \, x \, dx \, dy = \frac{\int_D \rho(x,y) \, x \, dx \, dy}{\int_D \rho(x,y) \, dx \, dy}$$

$$y_G = \frac{1}{\text{MASSA TOTALE}} \int_D \rho(x,y) \, y \, dx \, dy = \frac{\int_D \rho(x,y) \, y \, dx \, dy}{\int_D \rho(x,y) \, dx \, dy}$$

⇒ G NON GODE DI PROP. SIMMETRICHE GEOMETRICAMENTE PARLANDO



$$y = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{y}$$

$$D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le y \le 1,\; -\sqrt{y} \le x \le y \right\}$$

$$\int_{D_1} |y-x|\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (y-x)\,dx \right) dy = \frac{49}{60}$$ (RISOLVERE E VERIFICARE)

$$\int_D |y-x|\,dx\,dy = \frac{1}{60} + \frac{49}{60} = \frac{5}{6}$$

(LA FORMULA SEGUENTE È DI DIFFICILE DIMOSTRAZIONE)

RAGIONAMENTO PRELIMINARE

$A = \mathbb{R}^2$ APERTO

$\phi : A \to \mathbb{R}^2 \qquad \phi(u,v) = \big(x(u,v),\ y(u,v)\big)$

ϕ DEVE ESSERE : 1) C^1 SU A

2) BIETTIVA FRA A E $\phi(A)$

MATRICE JACOBIANA DI ϕ (RICHIAMO)

$$J\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \vec{\nabla}x \\ \vec{\nabla}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

DEF.

SI CHIAMA DETERMINANTE DI $J\phi(u,v)$ O ANCHE JACOBIANO IL VALORE $\boxed{\det J\phi(u,v)}$

TALE DETERMINANTE È UNA FUNZIONE SCALARE DIPENDENTE DA 'u' e 'v'

3) $\det J\phi(u,v) \neq 0 \quad \forall\, u,v$ DI 'A'

TRANNE AL PIÙ SU UN SOTTOINSIEME DI 'A' CON AREA NULLA

ESEMPIO

COORDINATE POLARI (ρ, ϑ)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\Phi(\rho, \vartheta) = (\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$
$$\qquad\qquad x(\rho,\vartheta) \quad y(\rho,\vartheta)$$

$$\Phi : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

1) C^1

2) BIETTIVA

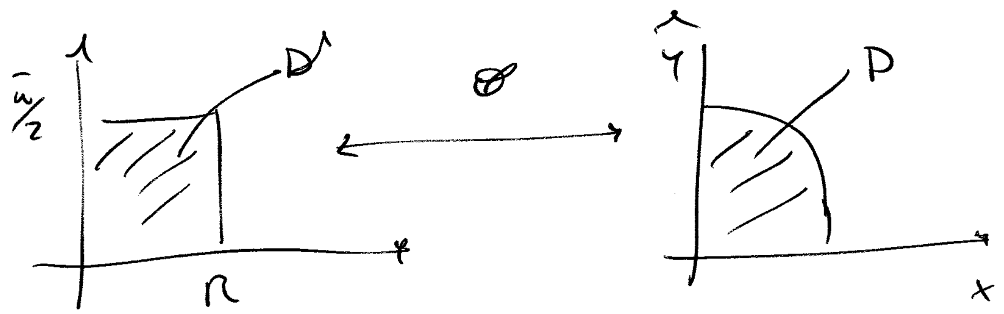
3) $J_\Phi(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$\det J_\Phi(\rho,\vartheta) = \rho\cos^2\vartheta + \rho\,\mathrm{sen}^2\vartheta = \underline{\rho} \overset{\text{SEMPRE POSITIVO}}{> 0}$$

QUINDI IN TAL CASO NON SERVE IL VALORE ASSOLUTO

SOSTITUZIONE UTILE NEL CASO DI DOMINI CIRCOLARI E AFFINI

ESEMPIO



IN COORD. POLARI

IN TAL CASO UN QUADRATO DIVENTA $\frac{1}{4}$ DI CERCHIO IN COORDINATE x, y (E VICEVERSA

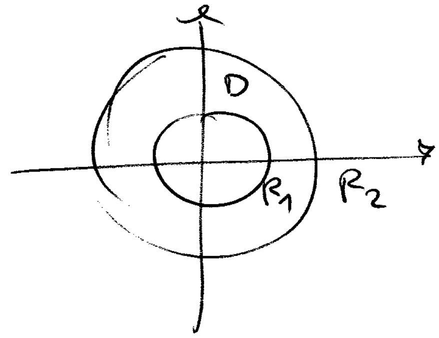
$$0 \leq \rho \leq R$$
$$0 \leq \vartheta \leq \pi/2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 208

$$\int_{D'} \rho\cos\vartheta \cdot \rho \, d\rho \, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \cos\vartheta \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta \cdot \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

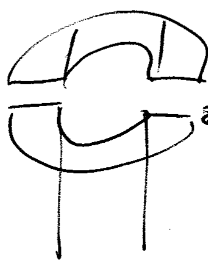
ALTRO CASO TIPICO : CORONA CIRCOLARE



NÈ VERT. NÈ ORIZZ. CONVESSO

⇓

1) SI SPEZZA IN DUE

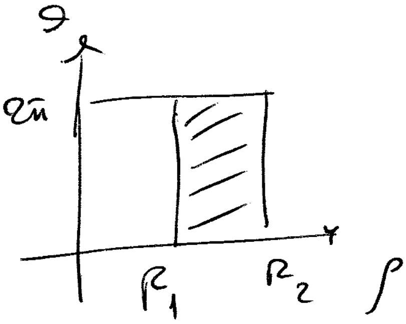


2) SI DIVIDE IN 3 SOPRA E SOTTO (IN COORD. CARTESIANE)

IN COORD <u>POLARI</u> È PIÙ SEMPLICE

$R_1 \le \rho \le R_2$

$0 \le \vartheta \le \pi$



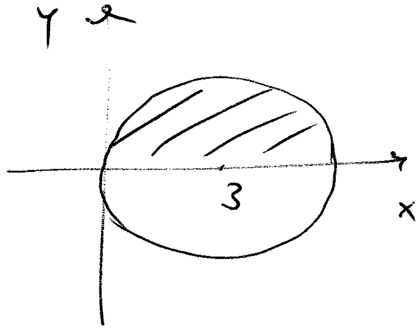
$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

CALCOLARE $\int_D y \, dx\, dy \qquad D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-6x \leq 0, \ y \geq 0$

$$x^2+y^2-6x \leq 0$$

$$x^2-6x+9+y^2 \leq 9$$

$(x-3)^2+y^2 \leq 9 \Rightarrow$ CERCHIO DI CENTRO $C(3,0)$ E RAGGIO 3



$\Rightarrow$ USARE LE COORD. POLARI CON CENTRO IN $(3,0)$

$$\begin{cases} x = 3 + \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$

$$\int_D y \, dx\, dy = \int_{D'} \rho \operatorname{sen}\vartheta \cdot \rho \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$\left[\rho \leq 3 \qquad 0 \leq \vartheta \leq \pi \right]$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{3} \rho^2 \operatorname{sen}\vartheta \, d\rho \, d\vartheta = 18$$

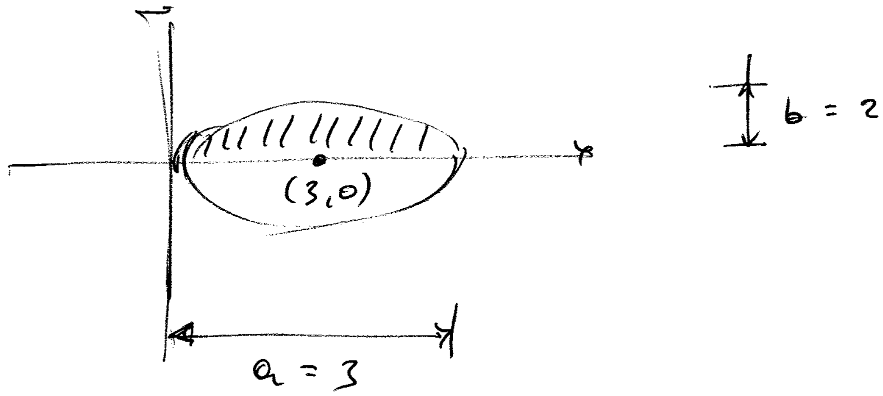
ESERCIZIO

$$\int_D y^2 \, dx\, dy \qquad D = \{(x,y) \mid 4(x-3)^2 + 9y^2 \le 36 ,\ y \ge 0\}$$

DIVIDO PER 36

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 1 \qquad y \ge 0$$

L'ELLISSE NON È CENTRATO NELL'ORIGINE



TRASLO NEL NUOVO CENTRO

$$\begin{cases} x = 3 + 3\rho\cos\vartheta \\ y = 2\rho\sin\vartheta \end{cases} \qquad \det J = 3 \cdot 2 \cdot \rho = 6\rho$$

$$D' = \{(\rho,\vartheta) \mid \underbrace{\rho \le 1}_{} ,\ 0 \le \vartheta \le \pi\}$$

IN AUTOMATICO

(È SEMPRE COSÌ)

$$\int_D y^2 \, dx\, dy = \int_0^{\pi} \int_0^1 4\rho^2 \sin^2\vartheta \cdot \underbrace{6\rho}_{\text{MODULO JACOBIANO}} \, d\rho \, d\vartheta = 3\pi$$

L'INTEGRALE TRIPLO DI f SU Ω SI INDICA:

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$\boxed{\text{PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE TRIPLO}}$

SONO LE STESSE DELL'INTEGRALE DOPPIO O SEMPLICE:

1) LINEARITÀ $\quad f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_{\Omega} (\alpha f + \beta g)\,dx\,dy\,dz = \alpha \int_{\Omega} f\,dx\,dy\,dz + \beta \int_{\Omega} g\,dx\,dy\,dz$$

2) ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO

SE $\Omega \to \Omega_1 + \Omega_2$ ALLORA

$$\int_{\Omega} f\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega_1} f\,dx\,dy\,dz + \int_{\Omega_2} f\,dx\,dy\,dz$$

!!! PURCHÉ L'INTERSEZIONE DI Ω_1 CON Ω_2 ABBIA VOLUME NULLO !!!

3) MONOTONIA

SE $f(x,y,z) \geq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \Omega$

ALLORA $\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

QUINDI

$f \leq g$ (SU Ω) IMPLICA $\Rightarrow \int_{\Omega} f\,dx\,dy\,dz \leq \int_{\Omega} g\,dx\,dy\,dz$

INOLTRE

$$\left| \int_{\Omega} f\,dx\,dy\,dz \right| \leq \int_{\Omega} |f|\,dx\,dy\,dz$$

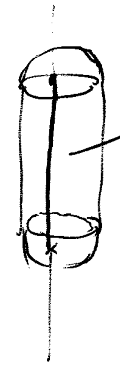
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 208

CALCOLARE INTEGRALI TRIPLI

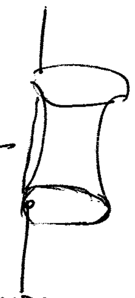
TUTTO DIPENDE DALLA FORMA DEL DOMINIO 'Ω' E DA COME ESSO SI DESCRIVE
ELENCHEREMO I CASI:

I) Ω CONVESSO IN z : OGNI RETTA $\parallel$ A z CHE TAGLIA Ω LO TAGLIA IN UN UNICO SEGMENTO

ESEMPIO DI Ω CON QUESTA PROPRIETÀ:



ESEMPIO CHE NON HA QUESTA PROPRIETÀ:

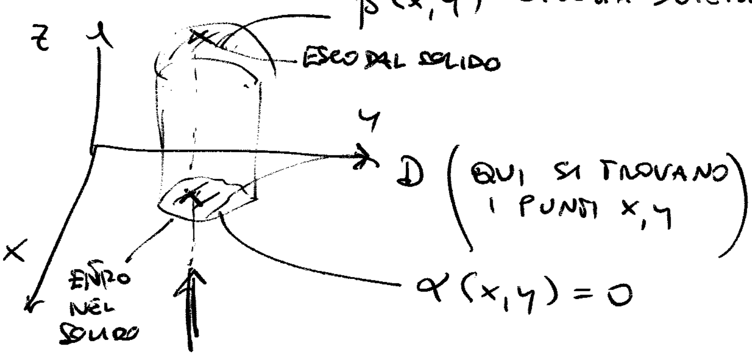


ANCHE IN QUESTI CASI (SIMILMENTE AGLI INTEGRALI DOPPI) Ω SI DESCRIVE:

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D \in \mathbb{R}^2, \ \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y) \}$$

$$\alpha, \beta : D \to \mathbb{R}^2$$

DISEGNO

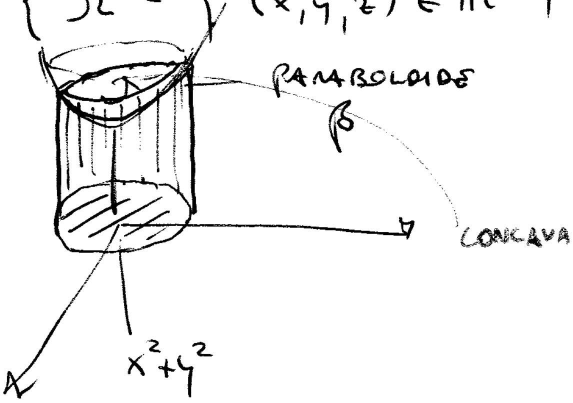


NOTA:
ESCO ED ENTRO DAL SOLIDO ATTRAVERSANDO SUPERFICI.
NEGLI INTEGRALI DOPPI ATTRAVERSAVO LINEE.

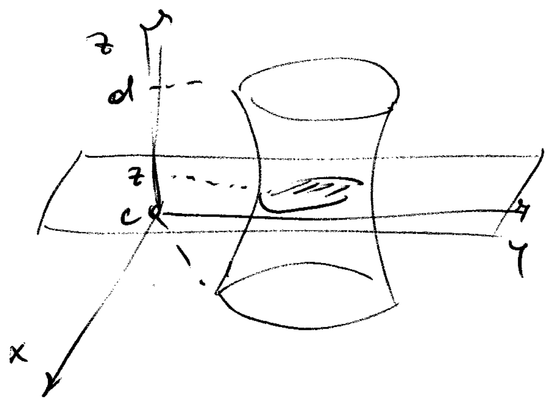
ESEMPIO

$$\left\{ \Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{D} \quad \underbrace{0}_{\alpha} \leq z \leq \underbrace{1+x^2+y^2}_{\beta} \} \right\}$$

PARABOLOIDE



II) ESISTONO FUNZIONI DI QUESTO GENERE
⇓
CHE NON POSSO DESCRIVERE PER FILI
⇓
DEVO TAGLIARLO PER PIANI PARALLELI A xy
E QUINDI DESCRIVERLO IN TAL MODO:



$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid c \le z \le d \,, \text{ DATO } z \quad (x,y) \in D_z \}$$

NE DERIVA LA SECONDA FORMULA DI RIDUZIONE

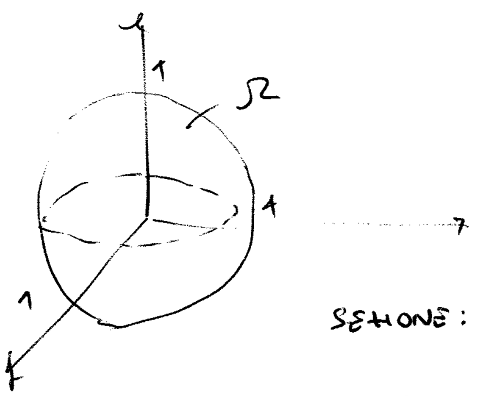
FORMULA DI RIDUZIONE II:
"INTEGRAZIONE PER STRATI"

$$\int_D f \, dx\,dy\,dz = \int_c^d \underbrace{\int_{D_z} f(x,y,z)\, dx\,dy}_{\text{STO INTEGRANDO SULLA SEZIONE } D_z \ (\in \mathbb{R}^2) \text{ QUINDI È UN INTEGRALE DOPPIO DIPENDENTE DALLA SOLA } z} \, dz$$

ESERCIZIO

CALCOLARE $\int_\Omega z^2 \, dx\,dy\,dz$ DOVE

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2+y^2+z^2 \le 1}_{\text{SFERA}} \}$$



PER FILI

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, \ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y) \}$$

SEZIONE: $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1 \}$

FUNZIONI DI ENTRATA ED USCITA: LE PRENDO DA $x^2+y^2+z^2=1$

$$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

(QUANDO C'È IL MENO È LA CALOTTA DI SOTTO, COL + QUELLA DI SOPRA)

CALOTTE: ⊖ ⊕

DESCRIVO QUINDI IL DOMINIO COME:

$$\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; -1 \leq z \leq 1 \;,\; \text{DATO } z \quad x^2+y^2 \leq 1-z^2 \right\}$$

USO LA FORMULA II:

$$\int_\Omega z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_{-1}^{1} \left(\int_{D_z} z^2 \, dx\,dy \right) dz =$$

$$= \int_{-1}^{1} z^2 \left(\int_{D_z} dx\,dy \right) dz = \int_{-1}^{1} z^2 \cdot \underbrace{\pi (1-z^2)}_{\text{AREA DEL CERCHIO DI RAGGIO } \sqrt{1-z^2}} dz =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} z^2 - z^4 \, dz =$$

$$= \pi \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{15} \pi$$

$\boxed{\text{COS'È IL BARICENTRO?}}$ (IN 3D)

SOLIDO CON DENSITÀ DI MASSA $\rho(x,y,z)$.

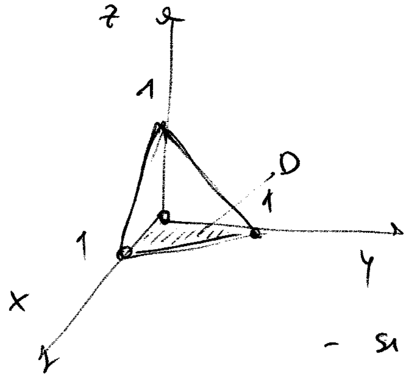
$G = (x_G, y_G, z_G)$

$$x_G = \frac{1}{\text{MASSA TOTALE}} \int_\Omega x \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz = \frac{\int_\Omega x \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}{\int_\Omega \rho(x,y,z) \, dy\,dz}$$

"È LA MEDIA DELLA COORDINATA x PESATA SULLA MASSA"

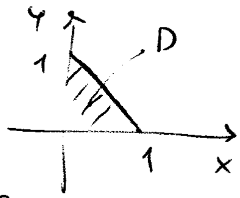
$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$ CALCOLARE IL BARICENTRO DEL TETRAEDRO DI VERTICI $(\rho = 1)$

$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(0,0,0)$



PER FILI

1) D È IL TRIANGOLO



$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \geq 0 \;,\; y \geq 0 \;,\; y \leq 1-x \right\}$$

2) $\alpha(x,y)$? $\beta(x,y)$?

- SI ENTRA IN Ω QUANDO $z=0$
- SI ESCE QUANDO SI RAGGIUNGE IL PIANO PASSANTE PER I PUNTI $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

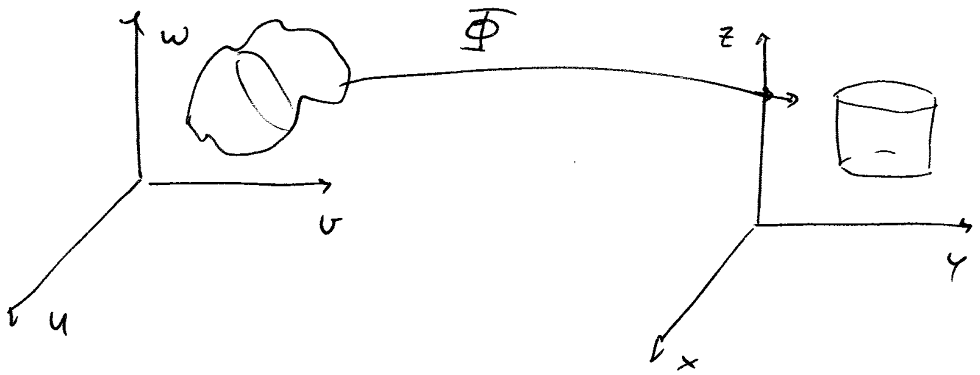
$$\Longrightarrow \quad x+y+z=1 \iff z = 1-x-y$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 208

CAMBI DI COORDINATE IN INTEGRALI TRIPLI

$$\Phi : D' \longrightarrow D$$

$$D' \in \mathbb{R}^3 (u, v, w) \qquad D \in \mathbb{R}^3 (x, y, z)$$



$$\Phi(D') = D$$

Φ DEVE ESSERE BIETTIVA, $\Phi \in C^1$

$$\Phi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

MATRICE JACOBIANA

$$J_\Phi = \begin{bmatrix} \nabla x \\ \nabla y \\ \nabla z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

$\det J_\Phi$ = "JACOBIANO"

$\det J_\Phi \neq 0$ IN OGNI PUNTO DI D' TRANNE AL PIÙ SU UN INSIEME DI VOLUME NULLO.

FORMULA DI CAMBIAMENTO DI COORDINATE

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ CONTINUA $\displaystyle\int_D f(x, y, z)\, dx\,dy\,dz =$

$$= \int_{\substack{D' \\ \shortparallel \\ \Phi^{-1}(D)}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\det J_\Phi(u, v, w)\right| du\,dv\,dw$$

3'

$$J\Phi(\rho, \vartheta, z) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho \operatorname{sen}\vartheta & 0 \\ \operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J\Phi(\rho, \vartheta, z) = \rho$$

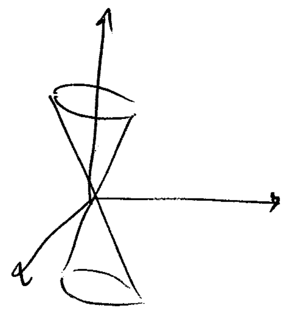
DI SOLITO SI USANO COORDINATE CILINDRICHE QUANDO IL SOLIDO SU CUI SI INTEGRA È INVARIANTE PER ROTAZIONI INTORNO ALL'ASSE Z

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

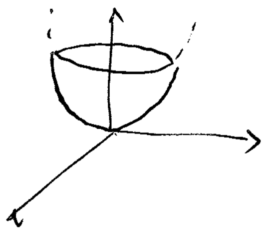
CALCOLARE $\displaystyle\int_\Omega xyz \, dx\,dy\,dz$

$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \leq x^2+y^2, \quad z \geq x^2+y^2 \}$$

CONO (MANCA IL TERMINE NOTO)



PARABOLOIDE

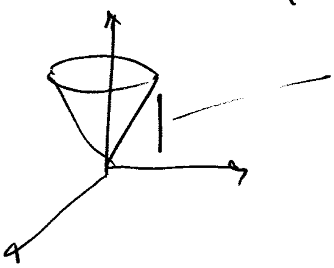


" $\geq$ " $\Rightarrow$ PUNTI DENTRO IL PARABOLOIDE

$z \geq x^2+y^2 \Rightarrow z \geq 0$

QUINDI NEL CONO $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}$ PRENDO SOLO LA SLZ POSITIVA:

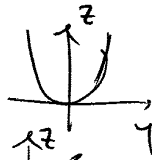
$z \leq \sqrt{x^2+y^2}$



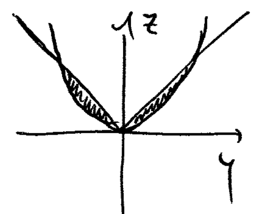
PUNTI SOTTO IL CONO PERCHÉ " $\leq$ "

SUGGERIMENTO: PER CAPIRE CHE SUPERFICIE ABBIAMO SEZIONO LE SUPERFICI CON PIANI VERTICALI. ESEMPIO PER $x = 0$

PARAB) $\Rightarrow z = y^2 \Rightarrow$ PARABOLA

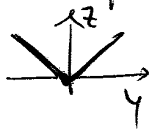


$\Rightarrow$



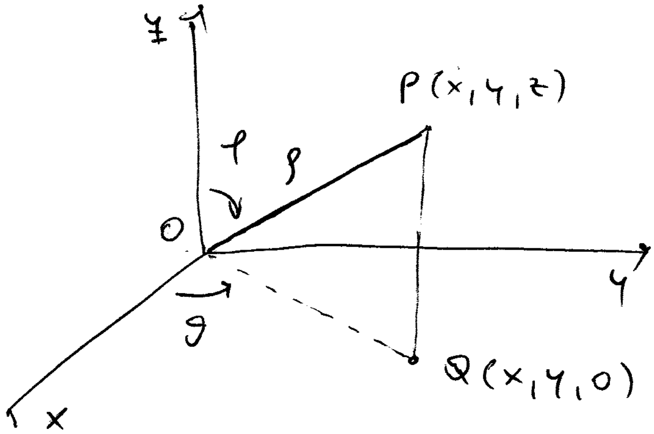
$\Rightarrow$

(CONO) $\Rightarrow z = \sqrt{y^2} = |y| \Rightarrow$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 208

CAMBIO DI COORDINATE SFERICHE (POLARI IN $\mathbb{R}^3$)



ρ = DISTANZA DI "P" DA "O"

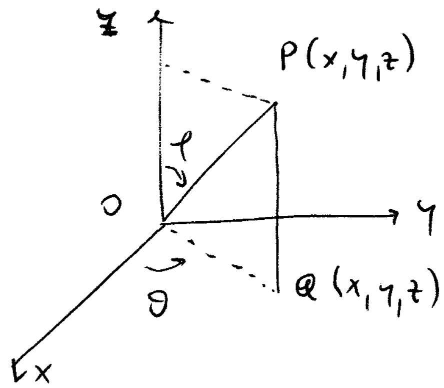
(LONGITUDINE) = ϑ = ANGOLO TRA ASSE X E IL SEGMENTO $\overline{OQ}$

(COLATITUDINE) = ANGOLO TRA L'ASSE Z E IL SEGMENTO $\overline{OP}$

$\rho = \text{cost} \longrightarrow$ SFERA $\qquad \rho \in [0, +\infty)$

$\vartheta = \text{cost} \longrightarrow$ SEMIPIANO $\qquad \vartheta \in [0, 2\pi]$

$\varphi = \text{cost} \longrightarrow$ CONO $\qquad \varphi \in [0, \pi]$



$\overline{OQ} = \rho \operatorname{sen} \varphi$

$x = |OQ| \cos \vartheta$

$y = |OQ| \sin \vartheta$

$z = \rho \cos \varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

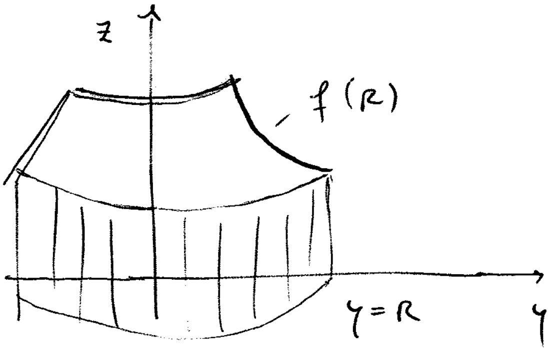
$$J\Phi = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \vartheta & -\rho \sin \varphi \operatorname{sen} \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \rho \sin \varphi \cos \vartheta & \rho \cos \varphi \cos \vartheta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det J\Phi = -\rho^2 \operatorname{sen} \varphi < 0$$

VISTO CHE $\varphi \in [0, \pi]$ TALE DETERMINANTE È SEMPRE NEGATIVO

$$\Longrightarrow |\det J\Phi| = \rho^2 \operatorname{sen} \varphi$$

COME SI ESPRIME LA SUPERFICIE OTTENUTA RUOTANDO LA f INTORNO A z ?



$$z = f(y)$$

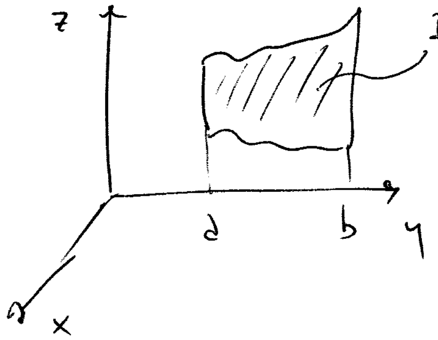
$$z = f(x, y)$$

$$z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \longrightarrow f(R)$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = R$$

$$z = \frac{1}{y} \qquad z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

CALCOLO DEL VOLUME DI SOLIDI DI ROTAZIONI



$$D = \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, \; \alpha(y) \leq z \leq \beta(y) \}$$

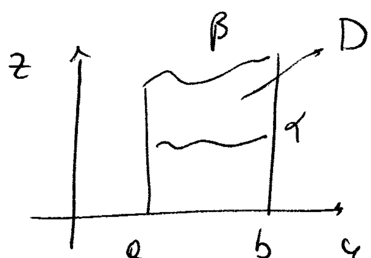
CALCOLIAMO IL VOLUME DEL SOLIDO (Ω) OTTENUTO FACENDO RUOTARE D INTORNO ALL'ASSE z

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; a^2 \leq x^2+y^2 \leq b^2, \; \alpha\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \leq z \leq \beta\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \right\}$$

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \int_a^b \int_{\alpha(\rho)}^{\beta(\rho)} \underbrace{\rho}_{|\det J\Phi|} \, dz\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_a^b \rho \left(\beta(\rho) - \alpha(\rho) \right) d\rho$$

CALCOLO DELLA COORDINATA y DEL BARICENTRO DELLA LAMINA BIDIMENSIONALE D



$$y_G = \frac{1}{\mathrm{Area}(D)} \int_D y \, dx\, dy = \frac{1}{\mathrm{Area}(D)} \int_a^b \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} y \, dz \right) dy =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{Area}(D)} \int_a^b y \left[z \right]_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dy = \frac{1}{\mathrm{Area}(D)} \left(\int_a^b y \left(\beta(y) - \alpha(y) \right) dy \right)$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\rho^2\right)\rho \, d\rho\right) d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\rho}{2}-\frac{\rho^3}{2}\, d\rho \, d\vartheta = 2\pi\left[\frac{1}{4}\rho^2-\frac{1}{8}\rho^4\right]_0^1 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right) = \pi/4$$

II) PER STRATI

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad z = z_0 \quad \Longrightarrow \quad z_0 = \sqrt{x^2+y^2} \iff z_0^2 = x^2+y^2$

STO TAGLIANDO ALLA QUOTA z_0.
POI DOVRÒ FAR VARIARE
z TRA 0 E 1.

$$\int_0^1\left(\int_{D_z} z \, dx\, dy\right) dz = \int_0^1 z\, dz \cdot \underbrace{\int_{D_z} dx\, dy}_{\text{Area del Cerchio}} =$$

$$= \int_0^1 z\, dz \cdot \pi z^2 =$$

$$= \pi\int_0^1 z^3\, dz = \pi\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

III) COORDINATE CILINDRICHE

$0 \le \vartheta \le 2\pi$ $\qquad z = \sqrt{x^2+y^2}$ (ENTRO) $\Longrightarrow z = \rho$ IN COORD. POLARI

$0 \le \rho \le 1$ $\qquad z = 1$ (ESCO)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^1 z\,\rho \, dz\, d\rho\, d\vartheta = 2\pi\int_0^1 \rho\left(\int_0^1 z\, dz\right) d\rho =$$

$$= \pi\int_0^1 \rho-\rho^3\, d\rho = \pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$$= \pi \left[\sin^2 \varphi \right]_0^{\pi/2} \cdot \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^R - \pi \left[\cos^2 \varphi \right]_{\pi/2}^{\pi} \cdot \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_0^R =$$

$$= \pi (1-0) \cdot \frac{R^6}{6} - \pi(-1) \frac{R^6}{6} = \frac{\pi R^6}{6} + \frac{\pi R^6}{6} = \frac{\pi R^6}{3}$$

INTEGRALI CURVILINEI

RICHIAMI SULLE CURVE PARAMETRICHE IN $\mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^n \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$

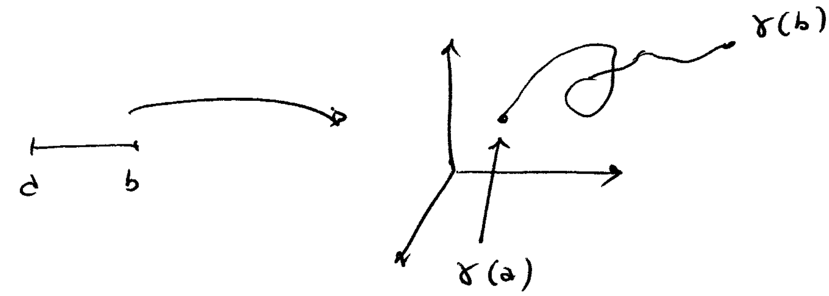
CURVA PARAMETRICA:

UNA CURVA PARAMETRICA È UNA FUNZIONE $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\underline{\underline{\underline{a < b}}}$

$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ È UTILE PENSARE t COME UN TEMPO

ESEMPIO



- UNA CURVA SI DICE C^1 SE LE n FUNZIONI $x_1(t) \dots x_n(t)$ SONO C^1
- L'IMMAGINE DELLA CURVA $\gamma([a,b])$

RAPPRESENTA IL "DISEGNO". TALE IMMAGINE È DETTA ANCHE <u>SOSTEGNO</u>

PERCHÉ SI DISTINGUE LA CURVA DAL SOSTEGNO?

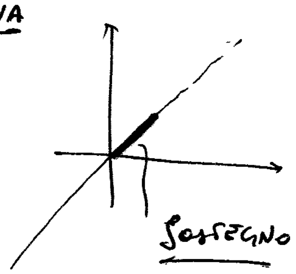
<u>CURVA</u>

$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (t, t)$

$x(t) \quad y(t)$

$\gamma(0) = (0,0)$

$\gamma(1) = (1,1)$

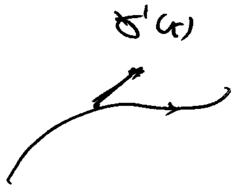


VETTORE VELOCITÀ O VETTORE TANGENTE DI $\gamma(t)$

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), \dots x_n'(t))$$

IN GEOMETRIA SI ~~TROVA~~ CHIAMA VETTORE TANGENTE PERCHÉ È EFFETTIVAMENTE TANGENTE ALLA CURVA.

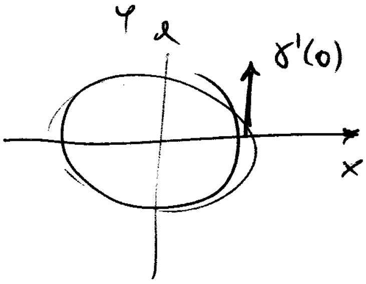


ESEMPIO PRECEDENTE:

$$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$$

$$\gamma'(0) = (0, R)$$



EFFETTIVAMENTE È TANGENTE

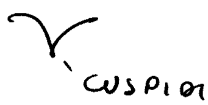
CONSIDERIAMO SOLO CURVE <u>REGOLARI</u>:

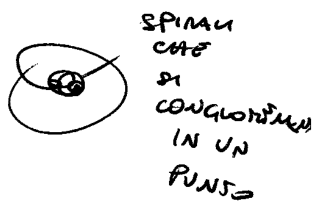
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

- $\gamma \in C^1$
- $\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$

PERCHÉ SI RICHIEDE QUESTO?

PERCHÉ SE IL VETTORE VELOCITÀ SI ANNULLA PUÒ SUCCEDERE DI TUTTO





<u>REGOLARE A TRATTI</u>:

$$\exists\, c \in (a,b) \quad t.c.$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \gamma : [c,b) \longrightarrow \mathbb{R}^n \end{array}\right\}$$ SONO REGOLARI (PRESE SEPARATAMENTE)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 208

$\boxed{\text{LA LUNGHEZZA DEL SOSTEGNO DI } \gamma}$ È PER DEFINIZIONE:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \qquad \gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$

$$\|\gamma'(t)\| = \left((x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ESEMPIO

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$$

$$\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \left((-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = R \implies$$

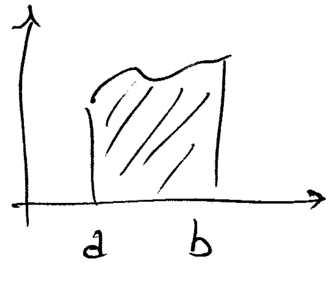
PERCORRO LA CURVA CON VELOCITA' COSTANTE PARI A "R"

QUINDI...

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$$

$\boxed{\text{INTEGRALE CURVILINEO}}$

QUAL E' IL PROBLEMA?



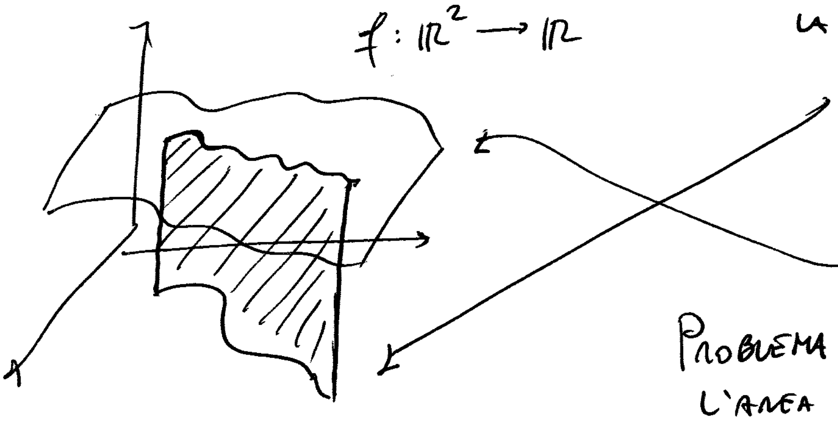
$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

IN QUESTO MODO CALCOLO L'AREA SOTTESA

NELLO SPAZIO SI HA

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$



SI PUO PENSARE DI VEDERE LA STRADA COME UNA LINEA SULLA CARTINA

LA QUOTA INVECE CI E' FORNITA DALLA FUNZIONE IN $\mathbb{R}^2$

PROBLEMA: COME SI CALCOLA L'AREA TRATTEGGIATA

DEVO PARAMETRIZZARE LA CURVA:

$\gamma : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\qquad \gamma(0) = (2, 0)$

$\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t)$ $\qquad \gamma(\pi/2) = (0, 2)$

$\gamma(\pi) = (-2, 0)$

$f(x, y) = x^2 y$ SOSTITUENDO $f(x(t), y(t)) = x^2(t) \cdot y(t) =$

$= (2 \cos^2(t) \cdot 2 \operatorname{sen}(t))$

$\gamma'(t) = (-2 \operatorname{sen} t, 2 \cos t)$ $\qquad \|\gamma'(t)\| = (4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t)^{1/2} = 2$

QUINDI

$$\int_\gamma x^2 y \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt =$$

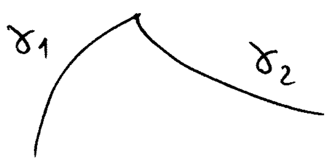
$$= \int_0^\pi (2 \cos^2(t))^2 \cdot (2 \sin t) \cdot 2 \, dt =$$

$$= 16 \int_0^\pi \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t \, dt = 16 \left[\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi =$$

$$= -\frac{16}{3} (-1 - 1) = -\frac{32}{3}$$

COSA SUCCEDE ~~SE~~ γ NON È REGOLARE MA "REGOLARE A TRATTI"?

DEVO PENSARLA COME 2 CURVE DISTINTE



$$\int_\gamma f \, ds = \int_{\gamma_1} f \, ds + \int_{\gamma_2} f \, ds$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\eta(\tau)) \, \|\eta'(\tau)\| \, d\tau = \left[\begin{array}{l} \text{CIOÈ NIENT'ALTRO} \\ \text{CHE LA DEFINIZIONE DI} \ldots \end{array} \right] = \int_{\eta} f \, ds$$

HO QUINDI OTTENUTO

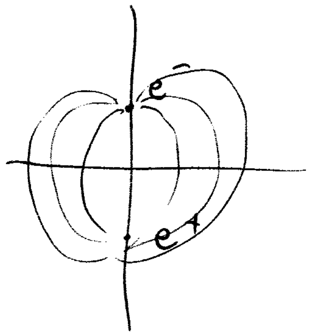
$$\boxed{\int_{\gamma} f \, ds = \int_{\eta} f \, ds} \qquad \text{c.v.d.}$$

ESEMPIO

$$E : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$E(x,y) = \left(\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} , \frac{2y^2-x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right)$$

ESPRESSIONE ANALITICA DEL CAMPO ELETTRICO DI UN DIPOLO



INTEGRALE DI UN CAMPO LUNGO LA CURVA

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ REGOLARE $\left(C^1 , \gamma'(t) \neq 0 \right)$

$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ CONTINUA (ALMENO SUL SOSTEGNO DI γ)

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

$F(x_1, \dots, x_n) = (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$

DIAMO IL NOME AL VERSORE TANGENTE

$$\tau(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \longrightarrow \text{ECCO PERCHÉ SI RICHIEDE } \gamma'(t) \neq 0$$

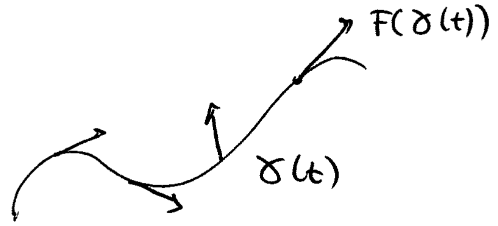
DEF. SI DEFINISCE INTEGRALE DI SECONDA SPECIE DEL CAMPO F LUNGO LA CURVA γ

$$\int_\gamma F \circ dP = \int_\gamma F \cdot \tau \, ds$$

Integrale curvilineo di I specie

5

IL SIGNIFICATO DELL'INTEGRALE DI SECONDA SPECIE !!!



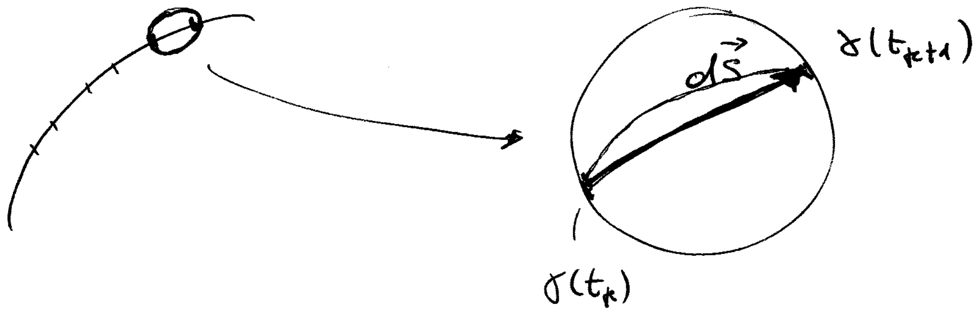
QUANDO CALCOLO

$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ STO CALCOLANDO LA COMPONENTE DI $F(\gamma(t))$ LUNGO LA DIREZIONE TANGENTE ALLA CURVA

DAL PUNTO DI VISTA FISICO STO CALCOLANDO IL **LAVORO**

ALLORA...

HO UNA CURVA ⟶ DIVIDO IN INTERVALLINI



VISTO LE DIMENSIONI INFINITESIME DEI PEZZETINI LO SPOSTAMENTO LUNGO QUEL TRATTO È PROPIO IL VETTORE DISEGNATO

QUINDI

$$dL \approx F(\gamma(t_k)) \cdot \underbrace{\frac{\overbrace{(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k))}^{\text{SPOSTAMENTO}}}{t_{k+1} - t_k}}_{\substack{\text{RAPPORTO INCREMENTALE} \\ (\text{SE } t_{k+1} \sim t_k)}} (t_{k+1} - t_k) =$$

MOLTIPLICO E DIVIDO

$$= F(\gamma(t_k)) \cdot \gamma'(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

PERCIÒ IL LAVORO TOTALE

$$L = \sum_k F(\gamma(t_k)) \cdot \gamma'(t_k)(t_{k+1} - t_k) =$$

$$= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma F \cdot dP$$

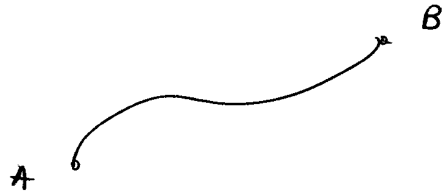
"LAVORO COMPIUTO DAL CAMPO F LUNGO LA CURVA γ." !!!

PROPRIETÀ

"L'INTEGRALE DI II SPECIE NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE DI γ PURCHÈ γ SIA PERCORSA NELLO STESSO VERSO"

CIOÈ SE $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$\eta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$



SE $\eta(\alpha) = \gamma(a)$

$\eta(\beta) = \gamma(b)$

ALLORA NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

SE VADO IN VERSO OPPOSTO CAMBIA SEGNO!

PERCHÈ NEL CASO DI INTEGRALE DI I SPECIE CIÒ NON SUCCEDE?

PERCHÈ $\int_\gamma f \, \|\gamma'(t)\| \, dt \implies$ C'È LA NORMA

$\int_\gamma F \cdot \gamma'(t) \implies$ NON C'È LA NORMA

TROVARE UNA CURVA $\eta \, [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ IN MODO CHE η ABBIA STESSO SOSTEGNO DI γ MA ESSO È PERCORSO IN SENSO INVERSO

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

CAMBIO DEL SENSO PRENDENDO UNA NUOVA η t.c.:

$\eta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\eta(t) = \gamma(a + b - t)}$$

QUINDI

$\eta(a) = \gamma(a + b - a) = \gamma(b)$

$\eta(b) = \gamma(a + b - b) = \gamma(a)$

CAMPI CONSERVATIVI

SONO CAMPI VETTORIALI :

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

F DEFINITO SU UN INSIEME <u>CONNESSO</u>

<u>DEF.</u> $A \in \mathbb{R}^n$ CONNESSO, $F : A \to \mathbb{R}^n$ UN CAMPO CONTINUO

SI DICE CHE F È CONSERVATIVO IN A SE ESISTE UNA FUNZIONE

$U : A \to \mathbb{R}$ t.c. $\underbrace{F(x_1, \dots, x_n) = \nabla U(x_1, \dots, x_n)}$

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial U}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial U}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n)$$

LE FUNZIONI U CON QUESTE PROPRIETÀ SI DICONO POTENZIALI DI F

U POTENZIALE $\Longrightarrow$ $U + C$ È ANCORA UN POTENZIALE

(U PUÒ ESSERE VISTO COME GENERALIZZAZIONE DI PRIMITIVA IN $\mathbb{R}_n$)

ESEMPIO

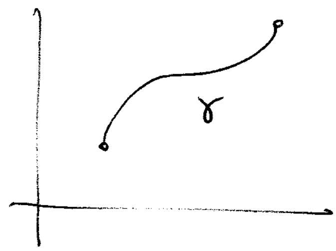
$$F(x,y,z) = \left(e^{y+z^2},\ xe^{y+z^2},\ 2xz\,e^{y+z^2}\right) \qquad F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

F È CONSERVATIVO. INFATTI SE PRENDO $U(x,y,z) = xe^{y+z^2}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{y+z^2} = F_1 \ ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = xe^{y+z^2} = F_2 \ ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 2xze^{y+z^2} = F_3$$

$$\boxed{\nabla U = F}$$

BARICENTRI DI CURVE



filo di densità di massa $\rho(x,y)$

MASSA TOTALE $= \int_\gamma \rho(x,y)\,ds$

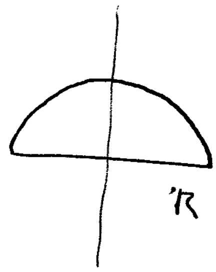
BARICENTRO (x_G, y_G)

$$x_G = \frac{\int_\gamma x\,\rho(x,y)\,ds}{\int_\gamma \rho(x,y)\,ds}$$

$$y_G = \frac{\int_\gamma y\,\rho(x,y)\,ds}{\int_\gamma \rho(x,y)\,ds}$$

ESERCIZIO

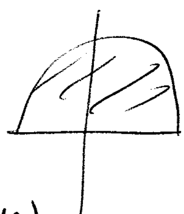
PROGETTARE UN PEZZO DI QUESTA FORMA



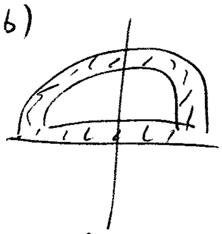
SEMICIRCONFERENZA DI RAGGIO "R"
SEGMENTO $[-R, R]$

VOGLIO CHE IL BARICENTRO SIA PIÙ BASSO POSSIBILE.
QUALE SARÀ LA SOLUZIONE PIÙ CONVENIENTE:

a)



b)



[DENSITÀ $\rho = 1$]

a) (LAMINA)

$$y_G = \frac{\int_D y\,dx\,dy}{\int_D dx\,dy} = \frac{\int_D y\,dx\,dy}{\left(\pi R^2/2\right)}$$

$$\int_D y\,dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^R \rho \sin\theta \cdot \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^R \rho^2\,d\rho = 2 \cdot \frac{R^3}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_G = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\left(\pi R^2/2\right)} = \frac{4}{3}\,\frac{R}{\pi}}$$

S

ESERCIZIO SIGNIFICATIVO

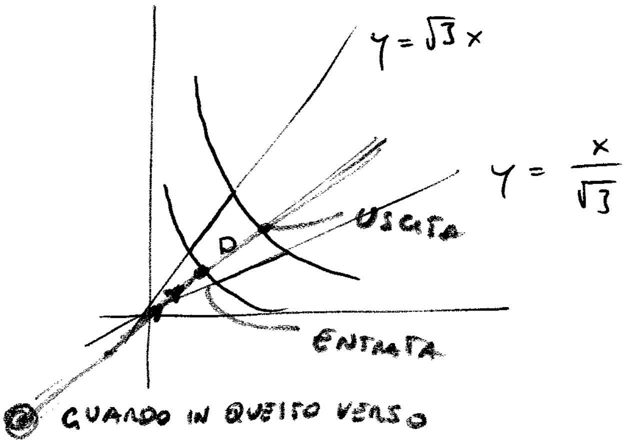
$$\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

$$D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 0\le \frac{x}{\sqrt3}\le y\le \sqrt3\, x\ ,\ 1<xy<4\right\}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta=\frac{1}{\sqrt3}\qquad \vartheta=\frac{\pi}{6}$$

$$\operatorname{tg}\vartheta=\sqrt3\qquad \vartheta=\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{6}\le\vartheta\le\frac{\pi}{3}$$



GUARDO IN QUESTO VERSO

ENTRO QUANDO $xy=1$ ESCO QUANDO $xy=4$

$$\rho^2\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta=1\qquad\qquad \rho^2\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta=4$$

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta}}\qquad\qquad \rho=\frac{2}{\sqrt{\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta}}$$

IN COORD. POLARI

$$D=\left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2\ \middle|\ \frac{\pi}{6}\le\vartheta\le\frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta}}\le\rho\le\frac{2}{\sqrt{\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta}}\right\}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\frac{1}{\sqrt{\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}}}^{\frac{2}{\sqrt{\cos\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}}}\frac{\rho^2\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta}{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\vartheta=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\frac{1}{\sqrt{\ }}}^{\frac{2}{\sqrt{\ }}}\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta\,\rho\,d\rho\,d\vartheta=$$

$$=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta\ \frac{1}{2}\Big[\rho^2\Big]_{\frac{1}{\sqrt{\ }}}^{\frac{2}{\sqrt{\ }}}=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{4}{\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta}-\frac{1}{\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\vartheta}\right)d\vartheta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/3}3\,d\vartheta=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 208

CAMPI VETTORIALI CONSERVATIVI

CONSIDERIAMO $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ DOVE $A \subset \mathbb{R}^n$ APERTO E CONNESSO

F CONTINUA

DEF.

F SI DICE CONSERVATIVO IN A SE ESISTE UNA FUNZIONE U SCALARE

$U : A \longrightarrow \mathbb{R}$ T.C. $\boxed{F = \nabla U}$ $\quad F_j(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\partial U}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$

IN OGNI PUNTO DI A

[LE FUNZIONI U T.C. $F = \nabla U$ SI CHIAMANO POTENZIALI]

- CALCOLO DEL LAVORO (INTEGRALE CURVILINEO DI II SPECIE) MOLTO SEMPLICE PER CAMPI CONSERVATIVI

TEOREMA

SIA $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ CONTINUO E CONSERVATIVO

A APERTO, CONNESSO

SIA $\gamma : [a, b] \longrightarrow A$ REGOLARE

SIA $U : A \longrightarrow \mathbb{R}$ UN POTENZIALE DI F

$$\int_\gamma F \cdot dP = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

" IL LAVORO LUNGO γ È LA DIFFERENZA DI POTENZIALE AGLI ESTREMI DI γ "

DIM.

$$\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \left[\begin{array}{l} \text{SFRUTTANDO} \\ F = \nabla U \text{ PERCHÉ PER} \\ \text{IPOTESI È CONSERVATIVO} \end{array} \right]$$

$$= \int_a^b \nabla U(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \left[\begin{array}{l} \text{DERIVATA DI} \\ \text{FUNZIONE COMPOSTA} \end{array} \right]$$

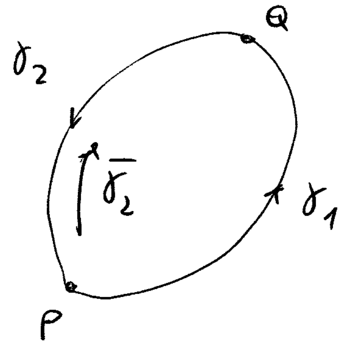
$$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(\gamma(t))\, dt \overset{\left[\text{TEOREM. FOND. DEL CALCOLO INTEGRALE}\right]}{=} U(\gamma(t)) \Big|_a^b = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a))$$

DIM. $1 \overset{\text{IMPLICA}}{\Longrightarrow} 2$ (GIÀ FATTA)

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = U(Q) - U(P) = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

DIM. $2 \Longrightarrow 3$

- PRENDO UNA CURVA CHIUSA $\gamma = \gamma_1$ E POI γ_2



- CHIAMA $\bar{\gamma}_2$ LA CURVA γ_2 PERCORSA IN SENSO INVERSO
- PER LA 2

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

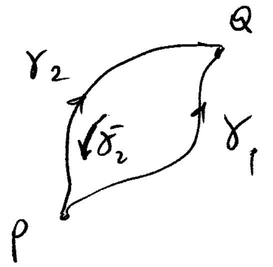
PER CUI: $\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\bar{\gamma}_2} F \cdot dP = 0$

[CAMBIANDO IL VERSO DI $\bar{\gamma}_2$ => CHIAMANDOLA γ_2]

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 0 = \int_{\gamma} F \cdot dP$$

DIM. $3 \Longrightarrow 2$

SO CHE LA CIRCUITAZIONE È NULLA $\left(\oint_{\gamma} F \cdot dP = 0 \right)$



- CHIAMO $\bar{\gamma}_2$ LA γ_2 PERCORSA IN SENSO INVERSO
- SE PERCORRO γ_1 E POI $\bar{\gamma}_2$ STO PERCORRENDO UN PERCORSO CHIUSO

- PER L'IPOTESI 3 HO $\int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\bar{\gamma}_2} F \cdot dP = 0$

- CAMBIO IL SEGNO (CIOÈ VERSO DI PERCORRENZA) $\int_{\gamma_1} F \cdot dP - \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 0$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$$

- $F(\gamma_1(t)) = (0, 0, 0) \implies \int_{\gamma_1} F \cdot dP = 0$

- $F(\gamma_2(t)) = (0, 0, x^2 t \cdot 1)$
  $\gamma_2'(t) = (0, 1, 0)$
  $\implies F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = 0 \implies \int_{\gamma_2} F \cdot dP = 0$

- $F(\gamma_3(t)) = (2xy \sin t, x^2 \sin t, x^2 y \cos t)$
  $\gamma_3'(t) = (0, 0, 1)$

$$F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) = x^2 y \cos t \cdot 1$$

QUINDI

$$U(x,y,z) = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP =$$

$$= \int_{\gamma_3} F \cdot dP = \int_0^z x^2 y \cos t \, dt = x^2 y \sin t \Big|_0^z =$$

$$= x^2 y \sin z$$

SI VERIFICANO I CONTI VEDENDO SE È VERO:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = F_3$$

$$\boxed{\text{CALCOLO DEL POTENZIALE TRAMITE "ISPEZIONE DIRETTA"}}$$

$$F : A \to \mathbb{R}^2 \qquad F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$$

F CONSERVATIVO $\implies F = \nabla U \implies \dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$

INTEGRO IN x $\dfrac{\partial U}{\partial x} = F_1$:

$$U(x,y) = \int F_1(x,y)\, dx + C(y)$$

STO FACENDO L'INTEGRALE IN x E LO STO CALCOLANDO $\forall y$ AD OGNI y FISSATO CORRISPONDERÀ UNA COSTANTE
PER CUI SCRIVO
$C(y) \to$ COSTANTE DIPENDENTE DA y

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 208

Problema 2

COME CAPIRE SE UN CAMPO È CONSERVATIVO ?

È IN REALTÀ PIÙ FACILE CONTROLLARE CHE F <u>NON</u> È CONSERVATIVO SFRUTTANDO IL <u>TEOREMA DI SWARZ</u> :

$$F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

SE F È CONSERVATIVO $\quad F = \nabla U \quad U : A \to \mathbb{R}$

QUANDO U È C^2 IL TEOREMA DI SWARZ DICE:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i} F_j = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i} \qquad \forall i, j \qquad \forall x \in A \;\left(\text{IN OGNI PUNTO DI } A\right)$$

In $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_x F_3 &= \partial_z F_1 \\ \partial_y F_3 &= \partial_z F_2 \\ \partial_x F_2 &= \partial_y F_1 \end{aligned}}$$

QUESTE UGUAGLIANZE VALGONO SE F È CONSERVATIVO

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} &= \frac{\partial F_3}{\partial x} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 208

IN $\mathbb{R}^2$ $\quad F = (F_1, F_2)$

$$F = (F_1, F_2, 0)$$

IL ROTORE SI CALCOLA:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \partial_x F_2 - \partial_y F_1) = (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\,\hat{k}$$

$$\Updownarrow$$

$$\partial_x \partial_y U = \partial_y \partial_x U$$

(TEOREMA DI SWARTZ)

$$\boxed{\text{MA IRROTAZIONALE} \xrightarrow{\text{IMPLICA}} \text{CONSERVATIVO ?}}$$

ESEMPIO:

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \qquad F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{rot } F = -\partial_y F_1 + \partial_x F_2 = 0$$

PARENTESI

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$\partial_{x_j} \|x\| = \frac{\overset{\text{DERIVATA RADICANDO RISPETTO A } x_j}{2x_j}}{\underset{\text{DERIVATA RADICE}}{2\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}}}$$

$$\nabla \|x\| = \frac{x}{\|x\|} \qquad x \neq 0$$

CALCOLI ERRATI: RIGUARDARE !!!

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) = \left(\frac{-x_2}{\|x\|}, \frac{x_1}{\|x\|} \right) = \left(-x_2 \|x\|^{-1}, x_1 \|x\|^{-1} \right)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\|x\|^{-1} - x_2 \left(-\|x\|^{-2} \frac{x_2}{\|x\|} \right)$$

SI NOTA: $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ $\quad F$ È IRROTAZIONALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 208

TEOREMA

SE A È SEMPLICEMENTE CONNESSO E

$$F : A \to \mathbb{R}^n, \ C^1, \ \xrightarrow{\text{ALLORA}} F \text{ IRROTAZIONALE} \xrightarrow{\text{IMPLICA}} F \text{ CONSERVATIVO.}$$

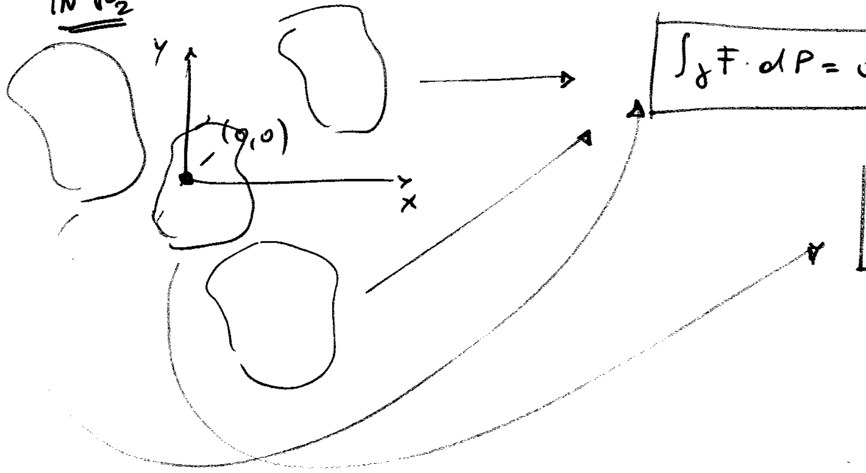
RITORNANDO ALL'ESEMPIO DI PRIMA:

$$F = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

rot $F = 0$ MA NON CONSERVATIVO

PERCHÈ $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

IN $\mathbb{R}_2$



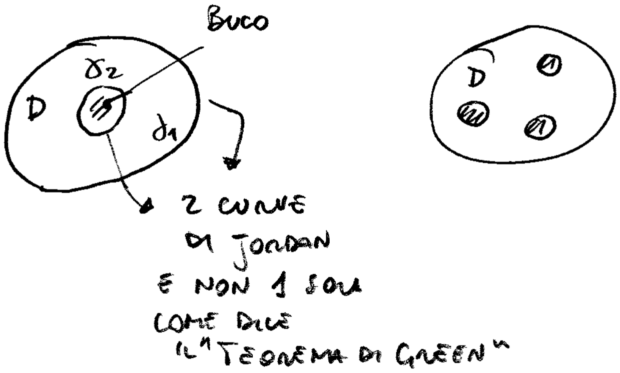
$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = 0}$ ZONA IN CUI È CONSERVATIVO

$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP \neq 0}$ ZONA IN CUI NON È CONSERVATIVA

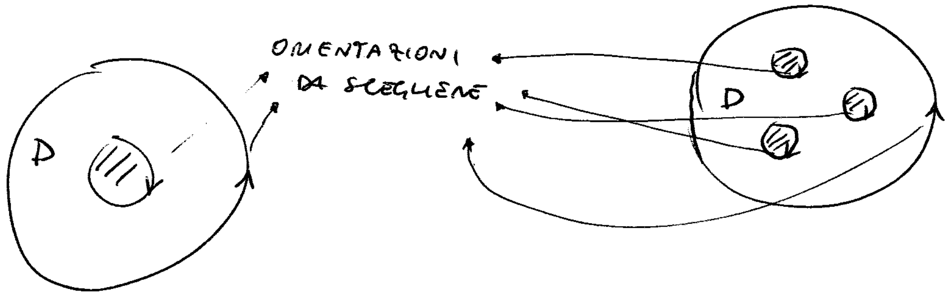
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 208

IL TEOREMA DI GREEN SI ESTENDE AL CASO IN CUI IL BORDO DELLA REGIONE D È COSTITUITO DA UN NUMERO FINITO DI CURVE DI JORDAN.

ESEMPIO :



IL TEOREMA DI GREEN VALE ANCORA SE LE 2 (O PIÙ CURVE) SONO ORIENTATE IN MODO CHE UN OSSERVATORE CHE CI CAMMINI SOPRA HA IL DOMINIO SULLA SINISTRA

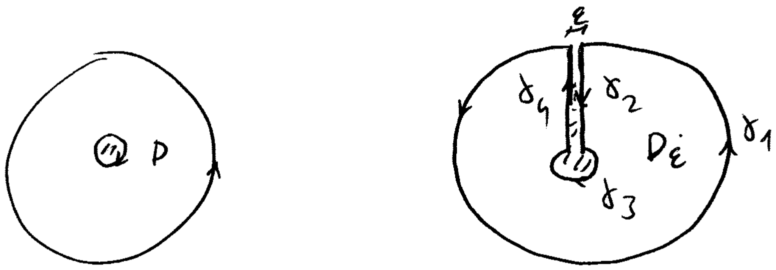


$$\oint_{\partial D} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_D \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \, dx\, dy$$

SPIEGAZIONE :

1) HO UN DOMINIO

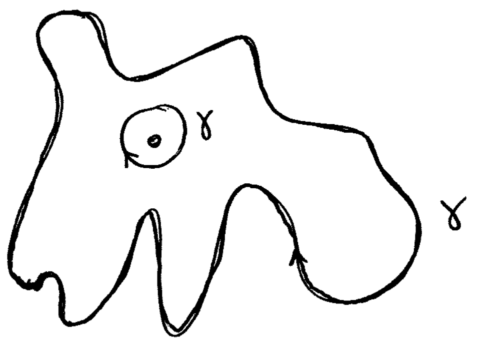
2) SPEZZO IL DOMINIO IN TAL MODO



$$\int_{D_\varepsilon} \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx\, dy \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx\, dy$$

$$\oint_{\partial D_\varepsilon} F \cdot dP = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \right) F \cdot dP$$

QUINDI SE HO UNA CURVA γ E IL $\text{rot } F = 0$ ALLORA



POSSO CALCOLARE

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\gamma} F \cdot dP$$

CON γ CIRCONFERENZA (O QUALSIASI ALTRA CURVA) PERCORSA NELLO STESSO VERSO DI γ

$\boxed{\text{ESERCIZIO TEMA D'ESAME}}$

$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = \left(e^y + \alpha y,\ x e^y + e^z + 2x + \beta y z,\ y e^z + 3y^2 \right)$$

1) DETERMINARE $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ IN MODO CHE F SIA CONSERVATIVO

2) TROVARE IL POTENZIALE $U(x,y,z)$ CHE VALE 10 IN $(1,0,2)$

3) CALCOLARE IL LAVORO COMPIUTO DA F LUNGO $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = \left(t,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right),\ \sqrt{t} \right)$

oss.

- $\text{dom}(F) = \mathbb{R}^3 \qquad F \in C^1$
- $\mathbb{R}^3$ è semplicemente connesso
- F irrotazionale $\Rightarrow$ F conservativo

1) Trovare α, β in modo che $\text{rot } F = 0$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^y + \alpha y & x e^y + e^z + 2x + \beta y z & y e^z + 3y^2 \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\cancel{e^z} + 6y - \cancel{e^z} - \beta y \right) + \hat{j}\left(0 - 0 \right) + \hat{k}\left(\cancel{e^y} + 2 - \cancel{e^y} - \alpha \right) =$$

$$= \hat{i}\left(6y - \beta y \right) + \hat{k}\left(2 - \alpha \right)$$

$$\text{rot } F = 0 \quad \begin{cases} 6y - \beta y = 0 \\ 2 - \alpha = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6 - \beta = 0 \\ 2 - \alpha = \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} \beta = 6 \\ \alpha = 2 \end{matrix}}$$

3) Lavoro di F lungo $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = \left(t ; \sin \frac{\pi}{2} t , \sqrt{t} \right)$

$L = \int_\gamma F \cdot dP = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$

$\gamma(1) = (1,1,1) \qquad \gamma(0) = (0,0,0)$

$L = U(1,1,1) - U(0,0,0) =$

$= 1e^1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot e^1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 \cancel{+H}$

$- 0 - 0 - 0 - 0 \cancel{-H} = 2e + 5$

$\boxed{\text{ESERCIZIO TEORICO}}$ Tema d'esame Quiz

$F : \mathbb{R}^2 \setminus Q \to \mathbb{R}^2 \qquad C^1$ conservativo

$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad C^1$ irrotazionale

$A \subset \mathbb{R}^2$ un cerchio e ∂A il suo bordo.

Suppongo $Q \notin \partial A$.

Essendo G irrotazionale e definito su un insieme SEMPLICEMENTE CONNESSO $\Rightarrow$ G è conservativo

Risposta

b) $4F + 2G$ non è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ $\Rightarrow$ Falsa

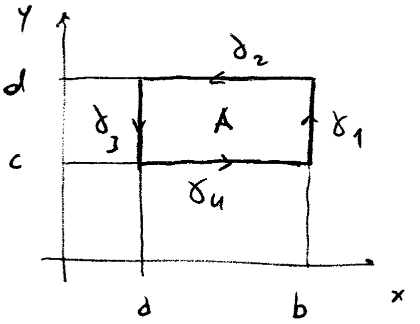
c) $4F + 2G$ non è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus Q$ $\Rightarrow$ Falsa

a) $\int_\gamma (4F + 2G) \cdot dP = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Vera}}$ perché $4F + 2G$ è conservativo

d) $\int_\gamma (4F + 2G) \cdot dP = 0$ se e solo se $Q \notin A$ $\Rightarrow$ Falsa perché $\int_\gamma (4F + 2G) \cdot dP = 0$ ovunque

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 208

DIM. TEOREMA DI GREEN NEL CASO DI UN RETTANGOLO



$F : A \to \mathbb{R}^2$

IL TEOREMA DI GREEN DICE CHE:

$$\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A (\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\, dx\, dy$$

$$\oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

CALCOLIAMO SU γ_1

$\int_{\gamma_1} F \cdot dP$ $\qquad \gamma_1(t) = (b, t) \qquad t \in [c, d]$

$\gamma_1'(t) = (0, 1)$

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_c^d \big(F_1(b,t), F_2(b,t)\big) \cdot (0, 1)\, dt =$$

$$= \int_c^d F_2(b,t)\, dt$$

SU γ_3

$$\int_{\gamma_3} F \cdot dP = -\int_{\bar\gamma_3} F \cdot dP$$

$\bar\gamma_3 = \gamma_3$ PERCORSA IN SENSO INVERSO

$\bar\gamma_3 = (a, t) \qquad t \in [c, d]$

$\bar\gamma_3' = (0, 1)$

$$-\int_{\bar\gamma_3} F \cdot dP = \int_{\gamma_3} F \cdot dP = -\int_c^d F_2(a,t)\, dt$$

COSA ACCADE SE SOMMO:

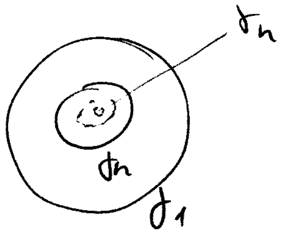
$$\int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_3} F \cdot dP = \int_c^d F_2(b,t) - F_2(a,t)\, dt \qquad ?$$

$F_2(b,t)$ = FUNZIONE CALCOLATA IN b

$F_2(a,t$ = " " " a

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 208

SIA A SEMPLICEMENTE CONNESSO



$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP$$

SE IMMAGINO DI PRENDERE UNA CURVA SEMPRE PIÙ PICCOLA SE $n \to \infty$ γ_n TENDE AD UN PUNTO

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\gamma_n} F \cdot dP = 0$$

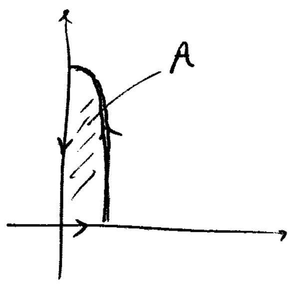
ECCO PERCHÉ IL LAVORO LUNGO UNA CURVA CHIUSA È NULLO SE F È CONSERVATIVO

SE F NON È SEMPLICEMENTE CONNESSO (NON CONSERVATIVO IL CAMPO F) NON POSSO SCHIACCIARE IN UN PUNTO LA CURVA γ_n FACENDO TENDERE $n \to \infty$. QUINDI NON VALE L'ASSUNTO PRECEDENTE (ABBIAMO SFRUTTATO IL TEOREMA DI GREEN)

ESERCIZIO:

γ BORDO DI $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \geq 0,\ 9x^2 + y^2 \leq 9 \}$

$$F(x,y) = \left(e^{x^2} - y,\ \frac{x}{4} + e^y \right)$$



$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_D \partial_x F_2 - \partial_y F_1 \, dx\,dy$$

$$\partial_x F_2 = x^3$$
$$\partial_y F_1 = -1$$

ELLISSE:

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_D (x^3 + 1) \, dx\,dy$$

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = 3\rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \Rightarrow |\det \Phi| = 3\rho$$

$0 \leq \rho \leq 1$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (\rho^3 \cos^3\theta + 1)\, 3\rho \, d\rho \, d\theta = \dots$$

$$\dots (\text{SVOLGENDO I CALCOLI}) = \frac{2}{5} + \frac{3\pi}{4}$$

[HO USATO GREEN EVITANDO DI RISOLVERE 3 INTEGRALI CURVILINEI]

$\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$

esempio

$\omega = x e^y dx + z^2 y^2 dy + (x+y) dz$ $\qquad \gamma(t) = (t^2, \sin t, t)$

sarebbe come scrivere: $\qquad \gamma'(t) = (2t, \cos t, 1)$

$$F = (x e^y, z^2 y^2, x+y)$$

① $\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$

② $\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$

Sono uguali !!!

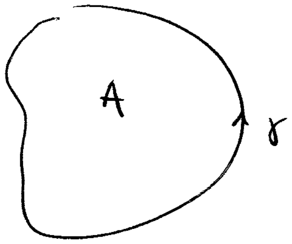
① $= \int_a^b t^2 e^{\sin t} \cdot 2t\,dt + \ldots$

② $= \int_a^b t^2 e^{\sin t} \cdot 2t\,dt + \ldots$

$dx = x'(t)dt$

① = ②

$\boxed{\text{TEOREMA DI GREEN CON LE 1-FORME}}$



$F: D \to \mathbb{R}^2$

$$\oint_\gamma F \cdot dP = \int_A \partial_x F_2 - \partial_y F_1\, dx\, dy$$

$F = (F_1, F_2)$

CON LINGUAGGIO DELLE FORME $\qquad \omega = F_1\,dx + F_2\,dy$

PERCIÒ:

$$\int_{\partial A} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_A \partial_x F_2 - \partial_y F_1\, dx\, dy$$

È IL BORDO DI A

CIOÈ UNA CURVA !!!

QUESTO MI DICE CHE STO
AVENDO A CHE FARE
CON UN INTEGRALE CURVILINEO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 208

CAMPI VETTORIALI	1 - FORME
$F = (F_1, F_2, F_3)$	$\omega = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
$\int_\gamma F \cdot dP$	$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$
F CONSERVATIVO $F = \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$	ω "ESATTA" (DIFFERENZIALE ESATTO) $\omega = dU \qquad dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$
F IRROTAZIONALE $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$	ω "CHIUSA"
F CONSERVATIVO $\Rightarrow$ F IRROTAZIONALE	ω "ESATTA" $\longrightarrow$ ω "CHIUSA"
F IRROTAZIONALE SU A SEMPLICEMENTE CONNESSO $\Rightarrow$ F CONSERVATIVO	ω "CHIUSA" ED A SEMPLICEMENTE CONNESSO $\Downarrow$ ω "ESATTA"

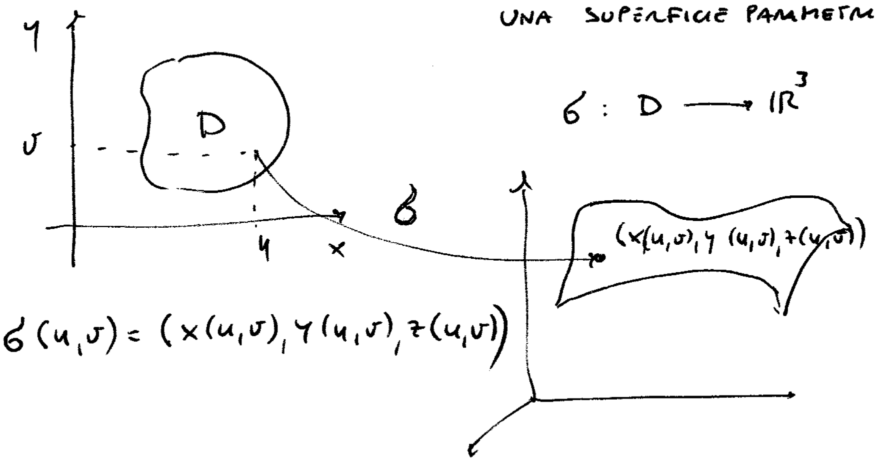
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 208

INTEGRALI DI SUPERFICIE

RICHIAMI SUPERFICI PARAMETRICHE:

UNA SUPERFICIE PARAMETRICA È UNA FUNZIONE

$$\sigma : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

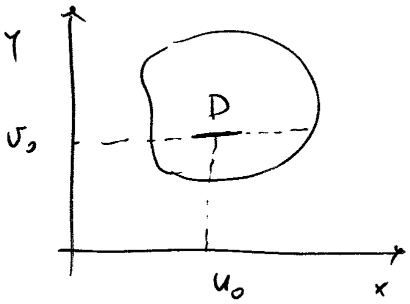


$$\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

L'IMMAGINE DI σ È DETTA SOSTEGNO DELLA SUPERFICIE Σ

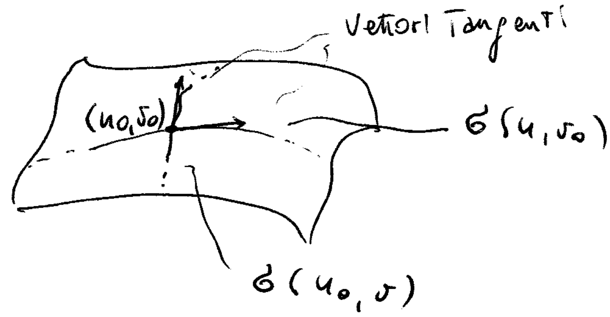
FISSO v_0 IN $\mathbb{R}^2$ E FACCIO VARIARE SOLO u

(CIOÈ CONSIDERO I PUNTI (u, v_0))



$\sigma(u, v_0)$ È UNA CURVA

CHE GIACE LUNGO LA SUPERFICIE



SE FISSO u_0 E FACCIO VARIARE v VEDO UNA CURVA VERTICALE SULLA SUPERFICIE

VETTORE TANGENTE ALLA CURVA $\sigma(u, v_0)$ È:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

IL VETTORE TANGENTE A $\sigma(u_0, v)$ INVECE:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

AREA DI UNA SUPERFICIE

SIA σ SUPERFICIE (C^1, REGOLARE)

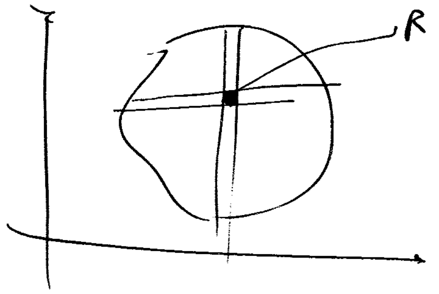
$D \in \mathbb{R}^2$ (DOMINIO DI INTEGRAZIONE)

SOSTEGNO $\Sigma = \sigma(D)$

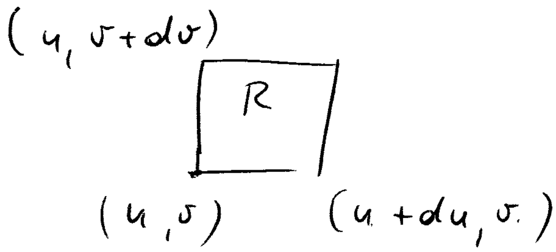
$$\boxed{\text{Area}(\Sigma) = \int_D \|N(u,v)\| \, du \, dv}$$

INTEGRALE DOPPIO IN CUI $N(u,v)$ È UNA FUNZIONE IN DUE VARIABILI

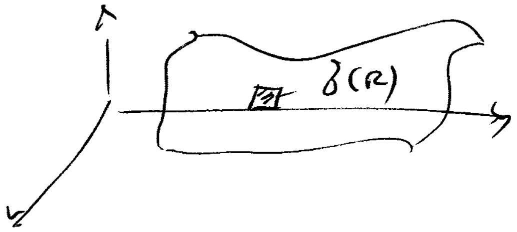
Perché se integro la lunghezza del vettore normale ciò mi fornisce l'Area(Σ)?



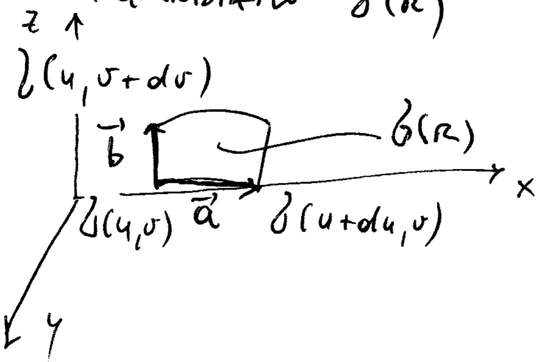
DIVIDENDO D IN QUADRATINI



CALCOLO $\sigma(R)$



INGRANDIAMO $\sigma(R)$



L'AREA DI $\sigma(R)$ È CIRCA L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA DI VERTICI

$$\sigma(u,v),\ \sigma(u+\Delta u, v),\ \sigma(u, v+\Delta v)$$
$$\sigma(u+\Delta u, v+\Delta v)$$

L'AREA DEL PARALLELOGRAMMA È DATA DA

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

$$\vec{a} = \sigma(u+\Delta u, v) - \sigma(u,v)$$

$$\vec{b} = \sigma(u, v+\Delta v) - \sigma(u,v)$$

CON TAYLOR
$$\vec{a} = \frac{\partial \sigma}{\partial u}\Delta u + o(\Delta u)$$
$$\vec{b} = \frac{\partial \sigma}{\partial v}\Delta v + o(\Delta v)$$

$$\Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| \simeq \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}\Delta v \right\|$$
$$= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \Delta u \, \Delta v$$

$$N = \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \sigma}{\partial \rho}$$

$$N = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\operatorname{sen}\rho \operatorname{sen}\vartheta & \operatorname{sen}\rho\cos\vartheta & 0 \\ \cos\rho\cos\vartheta & \cos\rho \operatorname{sen}\vartheta & -\operatorname{sen}\rho \end{vmatrix} = \left(-\operatorname{sen}^2\rho\cos\vartheta,\ \operatorname{sen}^2\rho \operatorname{sen}\vartheta,\ -\operatorname{sen}\rho\cos\rho \sin^2\vartheta + \right.$$

$$\left. - \operatorname{sen}\rho\cos\rho\cos^2\vartheta\right) =$$

$$= \left(-\sin^2\rho\cos\vartheta,\ -\operatorname{sen}^2\rho \operatorname{sen}\vartheta,\ -\operatorname{sen}\rho\cos\rho\right)$$

$$\|N\| = \left(\operatorname{sen}^4\rho\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^4\rho \operatorname{sen}^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\rho\cos^2\rho\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\operatorname{sen}^4\rho + \sin^2\rho\cos^2\rho\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\operatorname{sen}^2\rho\left(\operatorname{sen}^2\rho + \cos^2\rho\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\operatorname{sen}^2\rho\right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{sen}\rho$$

Non metto il modulo quando svolgo la radice perché $\rho \in [0, \pi]$

Quindi:

$$\text{Area (SFERA)} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\rho \, d\rho \, d\vartheta = 2\pi\left[-\cos\rho\right]_0^{\pi} = 4\pi$$