



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1714A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Busca Francesco

MATERIA: Topografia - prof. Bellone (2015)

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

TOPOGRAFIA

04/03/15

Prof. BELLONE Tamara

Sul sito non sono gli argomenti fatti

Libro:

- Comoglio, "Topografia e cartografia", CELID
va molto bene, si capisce senza seguire lezione
- Manzino, Dispense x approfondimento

Consiglio: COMOLIO + appunti

ESAME:

- Orale (3-4 domande) 1 domanda e un esercizio
2 domande di teoria

4 appelli x dividere il gruppo su 4 settimane; se tutti lo stesso giorno fa anche test da 10 minuti (così chi non sa nulla non passa all'orale)

topografia: "geodesia informatizzata", si è molto modernizzata con l'uscita dei voli spaziali (GPS, GNSS) + fotogrammetria digitale
America (Europa, America, Asia)

Negli ultimi decenni SCIENZE DEL RILEVAMENTO o TOPOGRAFIA rivoluzionato



Geodesia risponde a "descrizione della Terra" - forma e dimensioni

Cartografia risponde ad esigenze di rappresentare superficie terrestre su un piano

① Strumenti topografici + fotogrammetrici

- ① strumenti classici per misure:
 - zangoli
 - distanze
 - distlivelli
- + moderni GNSS (sistemi di posizionamento satellitare, e il GPS mobile)
|
misure di posizione relativa

Attraverso trattamento delle misure trova COORDINATE DEI PUNTI

Scopo topografia: attraverso misure apprese elementari, voglio trovare posizione di punti su superficie terrestre attraverso COORDINATE in un sistema di riferimento

→ trattamento delle osservazioni fatte x trovare coordinate di punti espresse in un certo sistema di riferimento, sono trattamenti statistici

le coordinate: cartesiane, geografiche, ... modi diversi di esprimerle

Risultati della topografia RELATIVI, NON ASSOLUTI

Misure di zangoli e distanze PLANIMETRICHE danno x e y

Distlivelli - misure di differenza di quota, relative → coordinate AUTIMETRICA (3 coordinate)

Rete = grato dove nodi = coordinate incognite
 lati = misure

nella rete planimetrica
 io conosco le distanze - LATI
 ma non conosco le coordinate
 di un punto di solito - NODO

FINE INTRODUZIONE

Ho trovato introduzione su slide, la ries

Rappresentare il mondo = problema matematico complesso

C'è una storia di cartografie nel passato con diverse visioni del mondo

Eratostene di Cirene (II secolo a.C.) fu uno dei primi a dare la sua visione del mondo

Al Biruni - arabo, anche lui matematico

GEODESIA legata a GEOFISICA → forma della Terra legata alla forza gravitazionale che agisce

* CARTAZIONALI - 5 ZONE (---)
 ↳ parte alta - NORD

Ma usare il termine "CARTINA"

CARTA EQUIVALENTE DI ARNO PETERS → deformazione di angolo e non di area
 ↳ differenza delle carte di GAUSS di cui abbiamo parlato prima

ANAMORFOSI - fenomeno che permette di vedere oggetti e riconoscerli solo da una certa angolazione

Carta anamorfica deforma le aree delle carte di Gauss → secondo del valore di un certo fenomeno studiato su quella determinata area (ex. lavoro minerario → deformazione elementi in Africa)

~~Non è un problema di geometria~~

GEOREFERENZIAZIONE = determinazione della posizione di un punto situato su superficie terrestre

Coordinate geografiche ellissoidiche (φ, λ)
 ↳ φ = latitudine
 ↳ λ = longitudine
 Coordinate cartesiane geocentriche (X, Y, Z)
 (con centro nel centro della Terra)

* latitudine = angolo tra equatoriale e normale a superficie ell.
 * longitudine = angolo tra normale a superficie in P e primo passante per meridiano di Greenwich del

Ad ogni DATUM associato ... DATUM GEODETICO = sistema geodetico di riferimento
 ↳ ELLUSOIDE DI RIFERIMENTO

MISURA DELL'ANGOLO con Teodolite



θ_{AB} = ANGOLO DI DIREZIONE, angolo che si ottiene x orizzontale della parallela a d y in A in senso orario che raggiunge segmento AB

$\theta_{BA} = \theta_{AB} + \pi$

Angolo di direzione intico che in topografia angolo ha sempre un verso



γ = differenza tra due angoli di direzione
 $\gamma = \theta_{BC} - \theta_{AB}$

VARIABILE CASUALE e VARIABILE STATISTICA

Variable casuale e' una distribuzione di probabilita'; esprime probabilita' che $x \leq x_0$

Probabilita' di estrarre un elemento con valore argumentale minore o uguale di x_0

Ex. quanta probabilita' di estrarre una persona con altezza ≤ 180 cm? Questo e' la probabile casuale

VALORE ARGOMENTALE e' il valore della variabile casuale, sono i risultati

$F(x)$ - Funzione distribuzione di probabilita' } descrivono **PROBABILITA'**
 $f(x)$ - funzione densita' di probabilita'

$0 < F(x) < 1$ $F(x) = P(x \leq x_0)$

frequenza = $\frac{\text{numero risultati ottenuti}}{\text{totale risultati}}$

FENOMENO DETERMINISTICO → posso fare previsioni del fenomeno
 " PROBABILISTICO → non posso

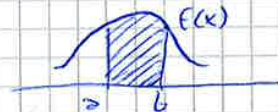
Prova dell'esistenza della probabilita' → test/croce
 → elettrone che passa attraverso → nessun colosso
 ha determinata velocita' (principio di Heisenberg)

Le misure che si fanno in qst' momenti sono valori argumentali, statistici

Variable casuale = descrizione matematica di un fenomeno statistico casuale (descritto da $F(x)$)

~~variable casuale~~

$f(x)$ e' derivata di $F(x)$ $f(x) = F'(x)$



valori argumentali				
x_1	x_2	x_n
$\frac{N_1}{N_{tot}}$	$\frac{N_2}{N_{tot}}$	$\frac{N_n}{N_{tot}}$

variable statistica = descrizione matematica di un fenomeno reale statistico

V. S. → REALE

V. C. → IDEALE

$P[x \in [a, b]] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$

PROBABILITA' che estrando a caso, il valore sia compreso tra a e b

INDICE DI CENTRO = MEDIA

INDICE DI DISPERSIONE = VARIANZA

Lettere greche → variabili casuali

Lettere latine → variabili statistiche

MEDIA $\mu = \int x f(x) dx$ Variable casuale continua
 $m = \sum_i x_i \frac{N_i}{N_{tot}}$ Variable statistiche
 $M = \sum x_i p_i$ Variable casuale discreta

Esercizio

{	0	1	3	11	→ valori osservati
	0,10	0,35	0,30	0,25	→ probabilità

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ → area sotto curva = comparea; somma delle probabilità = 1

$M_x = 0 \cdot 0,10 + 1 \cdot 0,35 + 3 \cdot 0,30 + 11 \cdot 0,25 = 4$

MODA = valore osservabile che ha la massima probabilità di tutti i valori

• Nel nostro caso la moda è 1 ed è un altro indice di centro poco utilizzato

moda $V = 1$ $p(x=1) = \max (M_k)$

MEDIANA = indice robusto, se faccio errori non cambia la mediana

↳ stima di parametri "robusti" che vediamo nei funziori se ci sono errori (si basa sul suo medio)

Stime alternative robuste che si basano su mediana (Me)

Mediana = valore per il quale $F(x)$ sia superiore a 0,5

$F(Me) \geq 0,5$

$F(0) = 0,10$

$F(1) = 0,35 + 0,10 = 0,45$

$F(3) = 0,45 + 0,30 = 0,75$ → la mediana è 3 $Me = 3$

Se ho variabili grandi misura poco precisa. Quindi varianza è indice di precisione

(pesi saranno direttamente prop. a precisione, inversamente proporzionale a varianza)

↳ importanza di dare alle misure

TEOREMA

$\sigma^2 = E[X^2] - M^2$ ← = media dei quadrati - medio al quadrato

Primo sapere $\sigma^2 = E[(x - \mu)^2]$ ←

$(0-4)^2 \cdot 0,10 + (1-4)^2 \cdot 0,35 + (3-4)^2 \cdot 0,30 + (11-4)^2 \cdot 0,25$

Invece faccio $[0^2 \cdot 0,10 + 1^2 \cdot 0,35 + 9 \cdot 0,30 + 121 \cdot 0,25] - 4^2$
 medio dei quadrati

$s^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n}$ dove $m = \frac{\sum x_i}{n}$

STIMA DELLA MEDIA = STIMA CORRETTA. (cioè?) Media è trasformazione della variabile

casuale. Si dimostra che $media_{componaria} = media_{teorica}$ (della popolazione) → MEDIA è stima corretta

cioè media della media coincide con la media della pop. $E[m] = \mu$

mentre varianza non è stima corretta $E[s^2] \neq \sigma^2$

$\bar{s}^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n-1}$ → se divido per (n-1) e non per (n) allora ho stima corretta

Quindi $media_{componaria} = stima\ valida\ della\ media_{teorica}$ (casuale)

Varianza campionaria ≠ stima valida della varianza teorica → $\bar{s}^2 = \frac{E(x_i - m)^2}{n-1}$

$$\mu_y = \int (a+bx) \cdot f(y) dy = \int (a+bx) \frac{f(x)}{g'(x)} g'(x) dx = \int a f(x) dx + \int b \cdot x \cdot f(x) dx =$$

$$= a \int f(x) dx + b \int x f(x) dx$$

$$\mu_y = a + b \mu_x = g(\mu_x) \quad \text{CVD}$$

II COROLLARIO x media

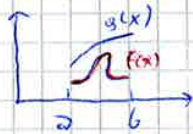
Se $g(x)$ non lineare, posso linearizzarla attorno ad una \hat{x} approssimata

$$y = g(x) \approx g(\hat{x}) + \frac{dg}{dx}(x - \hat{x})$$

$$\mu_y \approx g(\mu_x) \quad \text{in modo approssimato}$$

Vincoli a questa linearizzazione:

- nell'intervallo anzi dominio in cui lavora $g(x)$ cresce in modo lento, non brusco



- varianza piccola (valori concentrati nella media) di $f(x)$

NO DIMOSTRAZIONE

II COROLLARIO x varianza

$$\sigma_y^2 = \int (y - \mu_y)^2 f(y) dy = \int [a+bx - (a+b\mu_x)]^2 f(y) dy = \int b^2 (x - \mu_x)^2 \frac{f(x)}{g'(x)} g'(x) dx$$

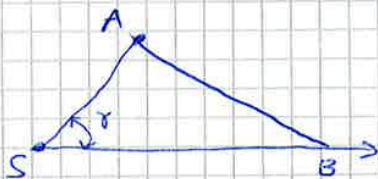
$$= b^2 \int (x - \mu_x)^2 f(x) dx \Rightarrow \boxed{\sigma_y^2 = b^2 \sigma_x^2} \quad \text{Varianza di } y = \text{varianza di } x \cdot b^2 \text{ (costante)}$$

Parte di statistica di COMOGUO è peggio di MARELLO

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \sigma_x^2 = [g'(x)]^2 \sigma_x^2 = [g'(\mu_x)]^2 \sigma_x^2$$

Un tempo MISURE INDIRETTE = TRASFORMAZIONI DI VARIABILI CASUALI

(non fatte direttamente misurate)



$$d_{AS} = \overline{SA} = b \text{ misura diretta}$$

$$d_{SB} = \overline{SB} = a \text{ misura diretta}$$

$$\gamma \text{ misura diretta}$$

Area è misura indiretta, usa funzione che esprime area mediante a, b, γ

$$A = \frac{ab \sin \gamma}{2} \quad (\text{è la nostra } g(x)) \quad a, b, \gamma \text{ sono misure di variabili casuali}$$

A misura indiretta mediante 3 misure indirette

$g(x)$ non è lineare ma può essere linearizzato

$$\mu(A) \approx g(\mu_a, \mu_b, \mu_\gamma)$$

$$\bar{A} \approx \frac{a b \sin \gamma}{2}$$

$$\sigma_{\bar{A}}^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \gamma}\right)^2 \sigma_\gamma^2$$

LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA

STAMPO SLIDE

Th CHEBYŠEV (cebisioy) - uno dei padri moderni della statistica

$$P(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Guardo su slide, tutto è come se ricopiosi:

se ho media, probabilità che variabile si trovi tra $\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma \rightarrow \frac{3}{4}$ casi
75%

$\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma \rightarrow 89\%$

$\mu - 4\sigma \leq x \leq \mu + 4\sigma \rightarrow 94\%$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE (noi studieremo)

si basa su prove eseguite su una popolazione caratterizzata da due soli valori argomentali

da \downarrow Bernoulli

BERNOULLI

DISTRIBUZIONE NORMALE

Esercizio su slide

EX. (estrazione console polimerosse e palline bianche)

Noi studiamo variabile casuale normale perché modella gli errori o gli scarti nelle misure

si parla di DISTRIBUZIONE GAUSSIANA o A CAMPANA o NORMALE

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ci basta conoscere media teorica μ e varianza teorica σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

① variabile normale è simmetrica rispetto $x = \mu$

② due flessi in $x = \mu + \sigma$ e $x = \mu - \sigma$ (conseggo su slide)

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

④ media, moda e mediana coincidono

in statistica x gaussiana media, moda e mediana
in statistica x gaussiana = SEQUENZIALE = PERMANENTE = PERMANENTE AL POSTO

⑤ β (indice di curtosi) = 3 - NORMALE o MESOCURTICA

Se volessi conoscere probabilità tra a e b dovrei fare integrale sempre

Per facilitare le cose si normalizzano i valori argomentali

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{\text{SCARTO}}{\text{SCARTO QUADRATICO MEDIO}}$$

⑥ STANDARDIZZAZIONE delle misure \rightarrow DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARDIZZATA

Guardo slide

Sempre $\begin{cases} \text{media} = 0 & E(z) = 0 \\ \text{varianza} = 1 & \sigma^2(z) = 1 \end{cases}$ $\sigma^2(z) = \frac{\sigma^2(x)}{\sigma^2(\mu)} = 1$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \rightarrow dz = \frac{1}{\sigma} dx$$

Tabella su slide delle aree sottese dalla curva normale di Gauss



$a[-1, +1] = 2 a[0, 1]$ perché simmetrico rispetto origine

X DISTRIBUZIONE NORMALE

$$P(-\sigma, +\sigma) = 0,68$$

$$P(-2\sigma, +2\sigma) = 0,95$$

$$P(-3\sigma, +3\sigma) = 0,99$$

CONDIZIONI DI RETTIFICA : 1) $\alpha_1 \perp \alpha_2 \perp \alpha_3$

2) si incontrano nel centro dello strumento - CENTRO STRUMENTALE

Errori residui di rettifica: ERRORE DI VERTICALITÀ, COLLIMAZIONE E INCLINAZIONE
 Spiegati su slide

asse α_1 verticale

asse α_2 orizzontale

ARTOGRAFIA/GEODESIA \rightarrow GRADI SESSAGESIMALI (gradi, primi, secondi) \rightarrow RADIANTI

TOPOGRAFIA \rightarrow GRADI CENTESIMALI (GON)

$180^\circ = 200 \text{ gon}$

$90^\circ = 100 \text{ gon}$

$360^\circ = 400 \text{ gon}$

Analisi calcolo che facciamo deve essere in radianti

N° cifre significative? Nel passaggio da gradi sessagesimali a centesimali o radianti, devo fare attenzione a non perdere valori

GON - 4 CIFRE DECIMALI rispetto sessagesimali (senza primi e secondi)

GON - 5 CIFRE DECIMALI (se gradi sessagesimali con primi)

Non sono ciclico \uparrow

CANNOCCHIALE

oggetto + obiettivo + oculare . Immagine si forma sul reticolo
 \downarrow
 spallolge
 immagine

Domani faremo 2 messe a fuoco del reticolo x avere RETICOLO MITO

ADATTAMENTO ALLA VISTA = messo a fuoco del reticolo (sua immagine)

LIVELLA - strumento accessorio, fiala con liquido volatile che serve a stabilizzare

superficie orizzontale \rightarrow PRONTEZZA DELLA LIVELLA = tempo che il liquido impiega a disporsi in equilibrio \rightarrow bolla a fermarsi

LIVELLA \neq LIVELLO

TORICA

+ preciso

SFERICA

fiala cilindrica di vetro delimitata superiormente da un coltello sferico
 LIQUIDO = ALCOOL

tangente centrale della fiala = tangente alla mezzoria della produzione della fiala

tangente alla bolla deve coincidere con la tangente centrale della livella

livello aiuta a ottenere verticalità dell'asse perché mi dà orizzontalità e lo ritrovano

sia su teodolite sia su livello

Useremo due livelle toriche che, i cui vertici ed assi saranno a 90° fra di loro che

mi servono x ottenere verticalità

GARANENDO ORIZZONTALITÀ \rightarrow VERTICALITÀ

Verticalità dell'asse si ottiene mettendo in orizzontale 2 direzioni (2 livelle) andando ad identificare un piano

LIVELLA TORICA RETTIFICATA QUANDO TANGENTE CENTRALE \neq PARALLELA ALLA RETTA D'APPROCCIO.

Sposto gli altri due piedi in modo da tenere in orizzontale lo strumento
 Voglio far coincidere cerchi dietro piombo ottico con centro per terra

2° fase mettere in orizzontale strumento con livella sferica (bassa precisione)

Come? Mettendo apposto gambe

Guardando bolle d'aria spostato altezza x ogni gamba

Basta che bolle d'aria stia dietro cerchio, non deve x loro coincidere con punto centrale

strumento ZLS (YGNUS (nuovo di zecca))

Dopo uso livella torica (in slidda) e lo voglio nella direzione di 2 viti

da ruotare guardando sempre bolle d'aria

Regola: dito indice dx → non ho capito

livello rettificato segnato da
 di 200gon la bolle non si
 sposta. Allora è rettificato

Pongo livella a 90° ruoto strumento in modo che sia a 90° con asse che unisce le 2 viti scritte
 rispetto direzione delle 2 viti e se bolle non centrato girare su 3° vite

Strumenti: CANNOCCHIALE + PIOMBO OTTICO + 2 GHIERE (una + piccola e una + grande)
 2 DIOTTRIE una sopra e una sotto il cannocchiale.

Su display

POWER → MENU → F1

Se voglio scrivere lettere e non numeri - di nuovo F1

F4 per fissare dati

x MISURE ZENITALI cerchio degli angoli verticali 18/03/15
 x misure AZIMUTALI cerchio degli angoli orizzontali

Angoli azimutali → regola di Bessel (cerchio a sx + cerchio a dx → media)

nel basamento cerchio x lettura angoli azimutali (in gon)

Alidada si muove per collimare il punto + MOVIMENTO CANNOCCHIALE (24U)

VITI: VITI DI FISSAGGIO + altre viti

x cerchio angoli zenitali (verticali)

cerchio stabilizzato in prossimità del cannocchiale → e + piccolo, si muove con il cannocchiale; indice di qst cerchio si muove con alidada

INDICE: in entrambi casi fissato all'ALIDADA

CERCHIO: x azimutali si trova nel BASAMENTO

x zenitali fissato al CANNOCCHIALE, si muove con il cannocchiale

cerchio a dx e cerchio a sx

POSIZIONE NORMALE → cerchio a sx

= CONIUGATA - operatore ha cerchio testé angoli zenitali a dx

$$k_{cor} = \frac{CS + CD \pm \pi}{2}$$

media delle 2 letture con REGOLA DI BESSEL

REGOLA DEGLI STRATI → nelle teodoliti ottico-meccaniche o teodoliti reiteratori

Non si usa più parlare di essa con teodoliti elettronici

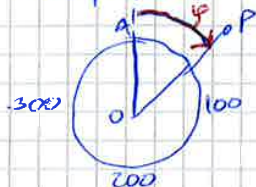
Un tempo strati erano successive misure di uno stesso angolo x maggior precisione (sicuro?)
x opportuno 2 osservazioni (Cs e Cd)

MISURA ANGOLI ZENITALI

Quindi se N strati → 2N osservazioni

Guido slide.

Se asse z1 coincidesse con asse verticale messo da noi (avevo un cerchio costruito in modo perfetto)



cerchio verticale, si muove con compasso

φ (phi) = angolo zenitale

se z1 ≡ DA angoli misura perfetto dell'angolo

Ma a noi ZENIT STRUMENTALE (INDICE STRUMENTALE) (E) = errore strumentale, angolo di differenza tra 0 della graduazione ed asse z1

(cerchio a sx) $C_s = \varphi + E$

→ misura in verso orario

(cerchio a dx) $C_d = 400 - (\varphi - E)$

→ misura in verso antiorario

Integro spiegazione con slide

$C_s + C_d = \varphi + E + 400 - \varphi + E \Rightarrow$

$E = \frac{C_s + C_d - 400}{2}$	ZENIT STRUMENTALE
$\varphi = \frac{C_s - C_d + 400}{2}$	

$C_s - C_d = \varphi + E + 400 + \varphi - E \Rightarrow$

$C_s + C_d \approx 400$ (come fatto nella 1° esercitazione)

Errori su angoli zenitali

Quelli di collimazione ed inclinazione TRASCURABILI

① ERRORE DI VERTICALITÀ + grave in queste misure piuttosto che negli angoli azimutali
~~non~~ INEVITABILE; asse z1 non coincide con verticale, normale al terreno

TEODOLITE ELETTRONICI

che compensare elettronico nei nuovi strumenti che calcolano solo φ e lo converte

② ERRORE DI ZENIT STRUMENTALE (già visto)

③ RIFRAZIONE ATMOSFERICA

(Quindi errori diversi tra misure angoli zenitali e azimutali)

$E = \text{errore} \times \text{rifrazione} = \varphi - \varphi' = \frac{K_d}{2R} \frac{200}{\pi}$

K = coefficiente di rifrazione

IN RADIANTI
 $E = \text{errore di rifrazione atmosferica} = \frac{K_d}{2R}$
in per $\frac{K_d \cdot 200}{2R \cdot \pi}$

PRECISIONE ANGOLI ZENITALI < PRECISIONE ANGOLI AZIMUTALI

TRATTAMENTO DELLE MISURE ANGOLARI slide

$\alpha = \text{media} \pm \text{scarto quadratico medio (VARIANZA)}$ Precisione

Esempio in cui ci sono valori tali da essere al di fuori dell'intervallo $\pm 3\sigma$

$$C_{xx} = E[(X - \mu_x)(X - \mu_x)^T] = \text{operatore matriciale applicato al prodotto } (X - \mu_x)(X - \mu_x)^T \text{ (che è quello che ci ha detto prima)}$$

$$E \left\{ \begin{array}{c|c} x - \mu_x & | \ x - \mu_x \quad y - \mu_y \\ \hline y - \mu_y & \end{array} \right\} \text{ dove } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad X - \mu = \begin{pmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{pmatrix}$$

$$E[\text{matrice } Z X Z] =$$

$$= \begin{vmatrix} (x - \mu_x)^2 & (x - \mu_x)(y - \mu_y) \\ (y - \mu_y)(x - \mu_x) & (y - \mu_y)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E(x - \mu_x)^2 & E(x - \mu_x)(y - \mu_y) \\ E(y - \mu_y)(x - \mu_x) & E(y - \mu_y)^2 \end{vmatrix}$$

LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA COVARIANZA

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \iff \bar{Y} = A \bar{X}$$

$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

$$y_1 = g_1(x_1, x_2)$$

$$y_2 = g_2(x_1, x_2)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

$$C_{yy} = E[(Y - \mu_y)(Y - \mu_y)^T] = E[(Y - A\bar{X})(Y - A\bar{X})^T] =$$

↑
legge di prop. covarianza

$$= E[A(X - \bar{X})(A(X - \bar{X}))^T] = *$$

Ricordo che $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Allora

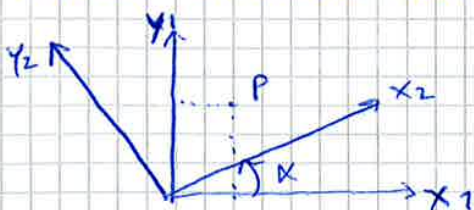
$$* = E[A(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T \cdot A^T] = A \cdot E[(X - \bar{X})(X - \bar{X})^T] \cdot A^T =$$

$$= A C_{xx} A^T$$

Quindi $C_{yy} = A C_{xx} A^T$ C.V.D.

ESERCIZIO

Un sistema di riferimento noto in senso antiorario di angolo α

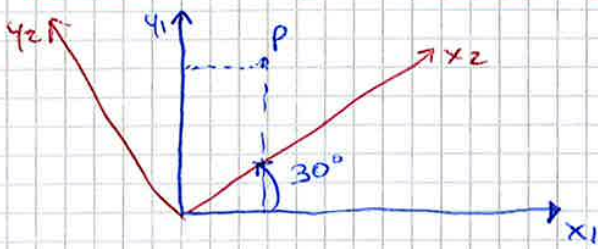


$$P(100 \pm 9,03; 200 \pm 9,05)$$

$$\sigma_{xy} = 0$$

$$C = \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \quad \text{già vista, matrice quadrata simmetrica}$$

ES. 1 LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA COVARIANZA - caso lineare



$$P \begin{cases} x_1 = 100 \pm 903 \\ y_1 = 200 \pm 905 \end{cases}$$

Trova P in (x_2, y_2)

$\sigma_{xy} = 0 \rightarrow$ variabili indipendenti, le ho misurate in modo indipendente

$$\begin{cases} x_2 = \cos \alpha x_1 + \sin \alpha y_1 \\ y_2 = -\sin \alpha x_1 + \cos \alpha y_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$Y = R \cdot X$$

matrice quadrata e ortogonale ($R^T = R^{-1}$)

$$Y = R \cdot X = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 100 \\ 200 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 186,60 \\ 123,21 \end{vmatrix}$$

APPLICAZIONE
TH MEDIA
PROBOLARIO

Esercizio possibile d'esame

$$C_{yy} = R C_{xx} \cdot R^T \quad \text{propagazione covarianza}$$

$$C_{xx} = \begin{vmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 y_1} \\ \sigma_{x_1 y_1} & \sigma_{y_1}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (3 \text{ cm})^2 & 0 \\ 0 & (5 \text{ cm})^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3,9 \\ -3,9 & 21 \end{bmatrix}$$

$$13 = \sigma_{x_2}^2$$

$$\sigma_{x_2} = \sqrt{13}$$

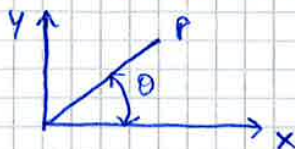
$$21 = \sigma_{y_2}^2$$

$$\sigma_{y_2} = \sqrt{21}$$

$$-3,9 = \sigma_{x_2 y_2}$$

\leftarrow anche se misurato x_1 e y_1 in modo indipendente, viene fuori che x_2 e y_2 sono correlati dopo rotazione

ES. 2 caso non lineare



$$\mu(\rho) = \bar{\rho} = 1 \text{ km} \quad \sigma_\rho = 1 \text{ mm}$$

$$\mu(\theta) = \bar{\theta} = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \quad \sigma_\theta = 2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\sigma_{\rho\theta} = 0$$

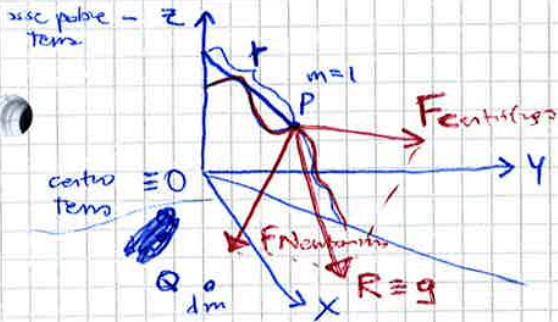
$$C_{xx} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +10^{-10} \end{bmatrix}$$

Livello 0 - livello a cui si trova mareografo

↳ G le misure

RIASSUNDO:

- GEODE = SUPERFICIE EGUALI POTENZIALE PRESSIONE X LIVELLO MEDIO DEL MARE



superficie tenestre

P - massa unitaria 1

soggetto = forze newtoniane

gs Risultante tra FN e Fc = forze di gravità

$$F_c = \omega^2 r$$

$$F_N = g \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

direzione lungo r distanza da asse di rotazione $z = r$

$$U_A - U_B = \int_A^B F ds$$

Forza conservativa

$$dU = F ds$$

potenziale - scalare
forza - vettoriale

$v \rightarrow F_c$ meno potenziale della $F_{centrifuga}$

$V \rightarrow F_N$ potenziale della $F_{newtoniana}$

$W \rightarrow g$ potenziale della forze di gravità

$$W = V + v$$

$$\bullet \quad dv = F_c \cdot dr \rightarrow v = \int \omega^2 r \, dr = \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

$$\bullet \quad dF_N = \frac{G \, dm \cdot \vec{r}^1}{l^2} \Rightarrow ddV = dF_N \cdot dl$$

$$dV = \int dF_N \, dl = \int \frac{G \, dm \cdot dl}{l^2} = \frac{G \, dm}{l}$$

$$V = \iiint \frac{G \, dm}{l} = \iiint \frac{G \, \rho \, dV}{l}$$

$$W = V + v = \iiint \left(\frac{G \, \rho \, dV}{l} \right) + \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

Problema? Non sono sciamo densità terrestre punto per punto \rightarrow conosciamo densità medie

geode (il punto di vista dell'equilibrio matematico rimane)

scorciato, per un modo significato fisico valido

NASCE L'ESIGENZA DELL'ELUSSOIDE, che approssima matematicamente

e anche come forma (in effetti ha 2 schiacciamenti ai poli)

a = semiasse equatoriale

b = semiasse polare

SUPERFICIE INTERMEDIA TRA GEOIDE e ELUSSOIDE: SPEROIDE

Si è rivisti \Rightarrow approssimare $V = U + T$

POTENZIALE NORMALI

costante in certe regioni
valori trascurati

$$W = U + v + T \rightarrow \text{POTENZIALE ANOMALO ANOMALO}$$

Nel passaggio da geode a sferoide la precisione in meno: $\frac{1}{\sigma} \approx 6,07 \cdot 10^{-8}$

$\approx 6378 \text{ km}$

SFEROIDE

Costanti geometriche (semiasse polare c e quello equatoriale a) per definire

forma e dimensioni della superficie di riferimento

$$U = \text{const} = U(\psi = 0^\circ) = U(\psi = 90^\circ)$$

α = schiacciamento = $\frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$ termine geometrico

relazione tra termine geometrico α e termini meccanici come G, M

$\sigma = a(1 - \alpha \sin^2 \psi)$ EQUAZIONE DELLO SFEROIDE o EQ. DELL'ELLISSOIDE IN COORDINATE POLARI

SVILUPPO IN SERIE \rightarrow POTENZIALE NORMALE

----- \rightarrow POTENZIALE ANOMALO

Da questa parte in poi DIMOSTRAZIONI e DOMANDE D'ESAME?

DIM₀

$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ moltiplica per a^2

$x^2+y^2 + \frac{a^2}{c^2} z^2 = a^2$

Ricordo $\alpha = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 - \alpha \rightarrow (\frac{c}{a})^2 = (1 - \alpha)^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha$

$\alpha \approx \frac{1}{300}$ circa $\rightarrow \alpha^2 \approx \frac{1}{90.000} \approx 10^{-5}$

stabilisco di trascurare α^2 facendo errore di 10^{-5} (che si somma ad errore x prima + geode a sferoide, questo errore e' quello per passaggio da sferoide ad ellissoide)

$x^2+y^2 + \frac{z^2}{1-2\alpha} = a^2$

$x^2+y^2 + z^2(1-2\alpha)^{-1} = a^2$

$x^2+y^2 + z^2(1+2\alpha) = a^2$

$x^2+y^2 + z^2 + z^2 2\alpha = a^2$

$x^2+y^2 + z^2 = a^2 - z^2 2\alpha$

In coordinate polari $x^2+y^2+z^2 = \sigma^2$ (ricordo ANALISI II)

$\sigma^2 = a^2 (1 - 2\alpha \frac{z^2}{a^2})$

$z = \sigma \sin \psi$ (ricordo coordinate sferiche - ANALISI II)

$\frac{z^2}{\sigma^2} = \sin^2 \psi$

$\frac{z^2}{a^2} \hat{=} \frac{z^2}{\sigma^2}$

σ = raggio generico terrestre
 a = raggio terrestre equatoriale
 a e σ saranno simili

$\sigma^2 = a^2 (1 - 2\alpha \sin^2 \psi)$

$\sigma = a (1 - 2\alpha \sin^2 \psi)^{1/2}$

$\sigma = a (1 - \alpha \sin^2 \psi)$

SVILUPPO IN SERIE

\rightarrow sono giunto all'ellissoide, sup. di riferimento univale (ris. Costanzo, 2006)

$$z = r \tan \varphi \frac{c^2}{a^2} \rightarrow z \text{ in funzione di } r$$

$$\frac{e^2}{\text{eccentricità}} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} \rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 1 - e^2$$

$$z = r \tan \varphi (1 - e^2)$$

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{r^2 \tan^2 \varphi (1 - e^2)^2}{c^2} = 1$$

sostituzione di z nell'ellisse meridiana

$$r^2 + \frac{a^2 r^2 \tan^2 \varphi (1 - e^2)^2}{c^2} = a^2$$

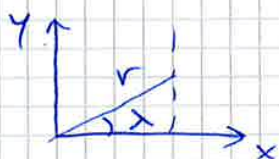
$$r^2 + \frac{r^2 \tan^2 \varphi (1 - e^2)^2}{(1 - e^2)} = a^2$$

$$r^2 + r^2 \tan^2 \varphi \cdot (1 - e^2) = a^2$$

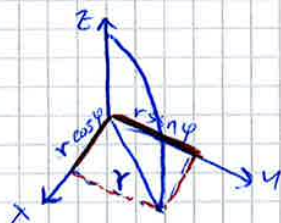
$$r^2 [1 + \tan^2 \varphi (1 - e^2)] = a^2$$

$$r^2 \left[1 + \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} (1 - e^2) \right] = a^2$$

$$r^2 = \frac{a^2}{\frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (1 - e^2)}{\cos^2 \varphi}} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (1 - e^2)} \Rightarrow r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$



$$\begin{cases} x = r \cos \lambda \\ y = r \sin \lambda \end{cases}$$

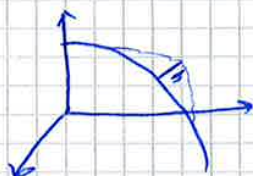


$$w = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a \cos \varphi}{w} \cos \lambda \\ y = \frac{a \cos \varphi}{w} \sin \lambda \end{cases}$$

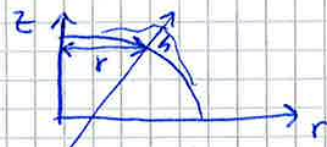
$$z = r \tan \varphi (1 - e^2) = \frac{a \cos \varphi}{w} \frac{\sin \varphi (1 - e^2)}{\cos \varphi}$$

DA SAPERE BENE QUESTO



h = QUOTA ELLISSOIDICA

$$\begin{aligned} r' &= r + h \cos \varphi \\ z' &= z + h \sin \varphi \end{aligned}$$



Quindi in definitiva

$$\begin{cases} x = r \cos \lambda \rightarrow (r + h \cos \varphi) \cos \lambda = \left(\frac{a \cos \varphi}{w} + h \cos \varphi \right) \cos \lambda \\ y = r \sin \lambda \rightarrow (r + h \cos \varphi) \sin \lambda = \left(\frac{a \cos \varphi}{w} + h \cos \varphi \right) \sin \lambda \end{cases}$$

$$\bar{y} = \pm \sqrt{\frac{(y_I - \bar{y})^2 + (y_{II} - \bar{y})^2 + (y_{III} - \bar{y})^2}{3-2}}$$

$$\sigma_m = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{n - (n-1)}}$$

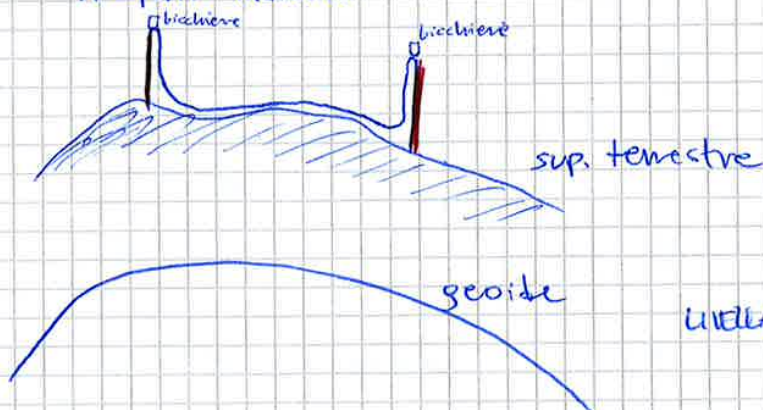
$$\bar{x} + S_m$$

LIVELLAZIONE = dislivello / determinazione tra due punti

$$A_{AB} = Q_B - Q_A$$

B = punto avanti

A = punto indietro



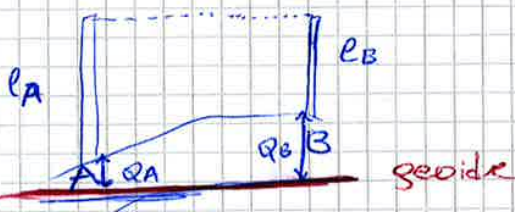
2 staffe che si possono misurare (ASTA GRADUATA O STADIA)

LIVELLAZIONE
 DIRETTA non richiede
 INDIRETTA richiede determinazione delle distanze tra i punti dai quali si vuole conoscere dislivello

Uuseremo LIVELLAZIONE GEOMETRICA (occorreremo anche goniometrica)

Guardo slide

- la + precisa
- open x visuali orizzontali
- errore RESIDUO DIRETTA
- misura differenza di quote di 2 punti
- misura relativa (a partire da misura nota)



IPOTESI DI PARALLELISMO FRA SUPERFICI DI LIVELLO e SUPERFICIE GEOIDE

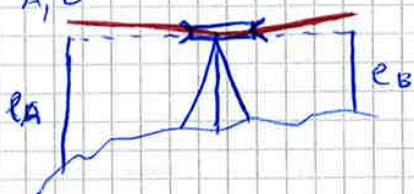
Noi useremo, tra i vari tipi di livello, il LIVELLO DIGITALE

lettura = altezza stadia

$$Q_A + l_A = Q_B + l_B$$

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = l_A - l_B$$

→ Il livello si cerca di mettere in mezz'aria tra le due staffe, fissate sui due punti A, B



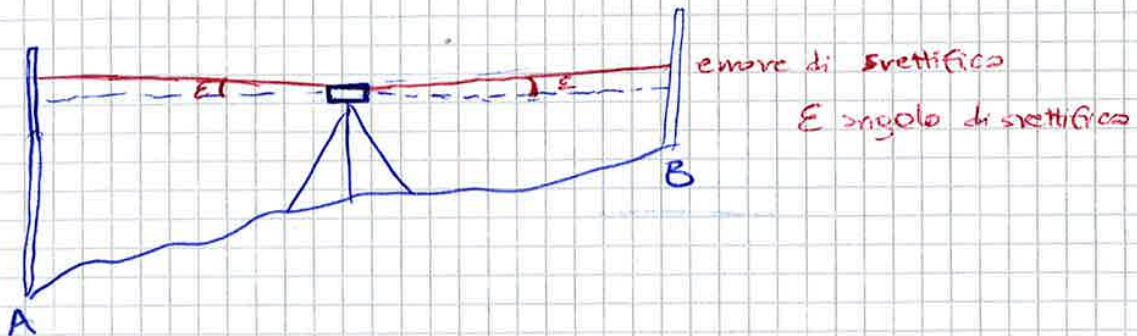
ERRORE RESIDUO DI RETTIFICA

Come distacco si cerca sempre di prendere 100 m. Perché? Si può superare superficie PARA
 > 100 m → considero errore di curvatura
 > 500 m → considero errori di curvatura e errori di rifrazione 2m

Modelli globali vs modelli locali
 ex. italiano

Spiega come funziona la seconda esercitazione

Mettere il livello in mezzena elimina una serie di errori (-----)



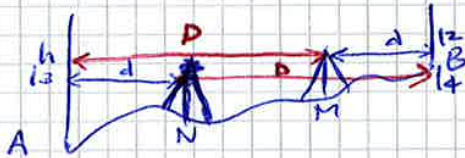
Livello si dice RETTIFICATO quando l'asse di collimazione del cannocchiale è parallelo alla tg centrale della livella torica (tangente alla mezzena della graduazione)

$$\Delta_{AB} = (l'_A - l'_B) = (l_A + Ed) - (l_B + Ed) = l_A + Ed - l_B - Ed = l_A - l_B \rightarrow \text{si eliminano gli effetti di errore di srettifico}$$

LIVELLAZIONE RECIPROCA (quando non posso porre strumento in mezzena)

↳ livello in 2 posizioni (+ vicino ad A la prima e + vicino a B la seconda) in modo simmetrico

Dove metto l_1, l_2, l_3, l_4 ?
 Guardo su livella



$$M) \Delta_{AB} = l_1 - Ed - l_2 + Ed = l_1 - l_2 - E(D-d)$$

$$N) \Delta_{AB} = l_3 - Ed - l_4 + Ed = l_3 - l_4 + E(D-d)$$

$$2\Delta_{AB} = l_1 - l_2 - E(D-d) + l_3 - l_4 + E(D-d)$$

$$\Delta_{AB} = \frac{(l_1 - l_2) + (l_3 - l_4)}{2}$$

$$0 = (l_1 - l_2) - E(D-d) - (l_3 - l_4) - E(D-d)$$

$$2E(D-d) = (l_1 - l_2) - (l_3 - l_4)$$

$$\rightarrow E = \frac{(l_1 - l_2) - (l_3 - l_4)}{2(D-d)}$$

ERRORE RESIDUO DI RETTIFICA

LEGGE di prop. della varianza

$$\sigma^2_{\Delta} = \sigma^2_{l_A} + \sigma^2_{l_B} = 2\sigma_l^2$$

$$\text{mai } \sigma^2_{\Delta} = \sigma^2_{l_A} - \sigma^2_{l_B}$$

Si sommano sempre le varianze, mai si sottraggono

↳ la precisione è la stessa per entrambe le misure

è lo stesso strumento, perché l'angolo sarebbe essendoci!

$$\sigma^2_{\Delta} = \sigma^2_{b_1} + \sigma^2_{b_2} + \dots + \sigma^2_{b_n} =$$

$$= n\sigma_b^2 = 2 \cdot n\sigma_l^2 = \left(\frac{2L}{100}\right) \sigma_l^2 = KL\sigma_l^2$$

costante
 km

↳

con varie linee di livellazione sommo le BATTUTE

① TEOREMA DI EUCLERO

α = azimut tra sezione normale generica e meridiano

$$\frac{1}{\rho \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

ρ = raggio di curvatura generica di una sezione normale nel punto P di un ellissoide di rotazione

Ricordo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \begin{cases} r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a \cos \varphi}{W} \\ z = \frac{a(1-e^2) \sin \varphi}{W} \end{cases}$

Poi in cui prima

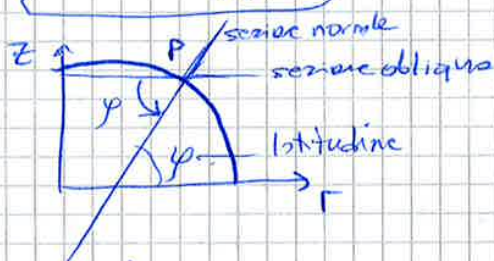


$ds = \rho d\varphi$

$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\frac{dr^2 + dz^2}{d\varphi^2}} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2}$

calcolo $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-2(1-e^2) \sin \varphi}{W^3}$
 $\frac{dz}{d\varphi} = \frac{2(1-e^2) \cos \varphi}{W^3}$

$\rho = \frac{2(1-e^2)}{W^3}$



② TEOREMA DI MUSNIER

$r = N \cos \varphi$

r = raggio di curvatura della sezione obliqua (parallela) che non è altro che un'arco di circonferenza

Intatti nell'ellissoide di rotazione paralleli e circonferenze

$N = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a \cos \varphi}{W \cos \varphi} = \frac{a}{W}$

$\frac{N-\rho}{N} = 1 - \frac{\rho}{N} = 1 - \frac{2(1-e^2)W}{W^3} = 1 - \frac{1-e^2}{W^2} = \frac{W^2 - 1 + e^2}{W^2} =$
 $= \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi - 1 + e^2}{W^2} = \frac{e^2(1 - \sin^2 \varphi)}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$

Geodetiche in generale è curva gobba, non appartenere ad un piano, non è quindi "materializzabile" sul terreno e questo comporta dei problemi nelle misure di distanze e angoli → teodolite come pure gli altri strumenti di misura fanno riferimento a sezioni normali e non geodetiche, anche se sarebbe meglio lavorare con geodetiche.

Quindi si nel calcolo di distanze che di angoli azimutali, fanno riferimento ad archi di sezione normale

PROBLEMA: MISURE ANGOLARI e DISTANZE solo tra sezioni normali e non geodetiche

~~Geodesia operativa~~
 ↓
 GEODESIA OPERATIVA

SCHEMA RILEVAMENTO CLASSICO

geoido - altimetria

ellissoide di rotazione - planimetria

risultato in Italia come riferimento

In Italia ellissoide usato è quello di Hayford (1940)

pag. 74 → ellissoide orientato a Monte Mario - Roma, è stato reso tangente al geoido in quel punto → deviazione della verticale è nulla

CALCOLO DELL'AZIMUT P1-P2

$$\alpha' = \alpha + \pi + \theta$$

trasporto delle coordinate (non da sapere formule)

di coordinate

mi sto semplicemente a significare che faccio riferimento alla tangente al meridiano nel punto rispetto al quale faccio la misura, ~~misurazioni~~ in senso orario

TEOREMA DI CLAIRAUT

$$r \sin \alpha = \text{cost}$$

A partire da ϕ, λ misurati (pur essendo geocentrici, considerati ellissoidici)

\downarrow
 S, α

= 1° PROBLEMA DIRETTO (x presi che non hanno rete di inguadrimento)

① LA RETE TRIGONOMETRICA (ottocentesca)

punti ottenuti x triangolazione, ... su slide

menzioni russo + cinese

② NUOVA RETE IGM 95 tramite elemento satellitare GNSS, e non col metodo classico

tutti i 2 metodi sono utilizzabili

ellissoide geocentrico usato da GNSS

DA SAPERE su ripasso: ellissoide ha curve piane

sezioni normali
sezioni oblique

+ curve golbe (non sono in 1 solo piano)

meridiani = sono tutte sezioni normali principali

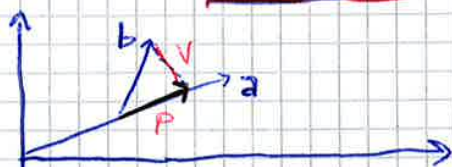
$$P = \dots$$

N = gsa normale, raggio di curvatura di sezione principale perpendicolare alla prima (pg. 22)

Th DI MEINER (? scritto giusto?) (Menier)

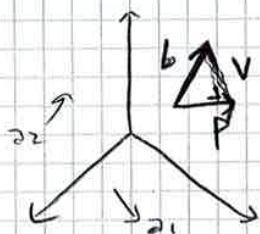
raggio di curvatura sezione obliqua = raggio di curvatura sezione normale ... (p. 25)

PAG. 163 - METODO DEI MINIMI QUADRATI (fondamentale per l'esame)



$$\vec{p} = \hat{x} \cdot \vec{a} \quad (\text{proiezione di } \vec{b} \text{ su } \vec{a})$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{b} - \vec{p} \\ \vec{p} = A\hat{x} \end{cases}$$



Perché minimi quadrati? Minimizzano scarto al quadrato, in realtà minimizzano somma degli scarti al quadrato.

Nel nostro caso specifico significa ~~minimizzare~~

MINIMIZZARE lunghezza vettore scarto $v \equiv$ massimizzare sommatoria

PAG. 163-164

delle componenti del vettore
 scarto
 $E = \sum v_i^2$

$$v = (b - p) \perp \text{piano}$$

$$\begin{cases} (b - p) \perp a_1 \\ (b - p) \perp a_2 \end{cases}$$

$$a_1^T (b - A\hat{x}) = 0$$

$$a_2^T (b - A\hat{x}) = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix} = A^T$$

$$A^T (b - A\hat{x}) = 0$$

$$A^T b - A^T A x = 0$$

$$A^T (b - A x) = 0$$

$$A^T b - A^T A \hat{x} = 0 \rightarrow \hat{x} = (A^T A)^{-1} \cdot (A^T b)$$

RIPASSO

$$A x = b$$

$$m > n$$

combinazioni lineari delle colonne di A

29/04/15

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \hat{x}_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \hat{x}_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots$$

una colonna di A

Nel sottospazio vettoriale di A cerco il + vicino possibile a b, nel caso in cui b non verifichi la condizione $Ax = b$

SPAZIO VETTORIALE = tutte le comb. lineari della matrice A

SOTTOSPAZIO VETTORIALE = sottoinsieme dello spazio vettoriale, tutte le combinazioni delle colonne di matrice A t.c. somma di 2 qualsiasi vettori (colonne) mi dà vettore contenuto in A, stessa cosa x moltiplicazione x scalare.

Retta disegnata e RETTA DI INTERPOLAZIONE

$$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = \hat{a} + \hat{b} \cdot 1 \\ 2 = \hat{a} + \hat{b} \cdot 2 \\ 2 = \hat{a} + \hat{b} \cdot 3 \end{cases}$$

3 eq. in 2 incognite
NON È RISOLVIBILE, ma
se sono sicuro che lineare,
uso minimi quadrati

$$\boxed{\sum v_i^2 = \min} \iff V^T \cdot V = \min$$

Trasformo sistema di 3 eq. in forma matriciale

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{vmatrix}}_{\hat{x}} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{vmatrix}$$

$$\vec{b} = y = A \hat{x}$$

$$A^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{vmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{42-36} \begin{vmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$$

↑ si scambiano termini sulla diagonale e si cambiano i segni su
diagona secondaria

termini noti normalizzati

$$T_n = A^T \cdot T$$

dove $T = b = y$ in generale
2 volte $y = Ax + c$

Ricorda $b =$ termini osservati iniziali

$$P = \hat{y}$$

$$T_n = A^T \cdot T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{vmatrix} = N^{-1} \cdot T_n = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 \\ 11 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 70-66 \\ -30+33 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{vmatrix}$$

Minimi quadrati hanno avuto successo xk una volta che ho matrice disegna
poi tutto calcolo.

~~osservazioni~~

INIZIO $y = b = Ax$
FINE $\hat{y} = P = Ax$

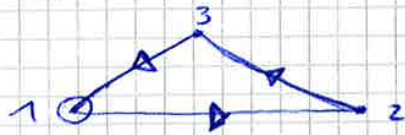
$$\hat{v} = \hat{y} - y = (P - \vec{b})$$

osservazioni
stimate osservazioni
osservate

$$\hat{y} = Ax \rightarrow \text{quello che ottengo}$$

$$\hat{v} = \hat{y} - y$$

Esercizio rete altimetrica con livelli esbide



$Q_1 = nota = 0$

$\Delta_{12} = 1,5734$

$\hat{Q}_2 ?$

$\Delta_{23} = -0,4205$

$\hat{Q}_3 ?$

$\Delta_{31} = -1,1526$

NO COMPONENTE DEL
RESO PERCHÉ DISTANCE
TRA PUNTI TUTTI
UGUALI

$$\begin{cases} Q_2 - Q_1 = 1,5734 \\ Q_3 - Q_2 = -0,4205 \\ Q_1 - Q_3 = -1,1526 \end{cases}$$

3 eq. x 2 incognite

$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} \Delta_{12} \\ \Delta_{23} \\ \Delta_{31} \end{bmatrix}$ $A = m \times n = 3 \times 2$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

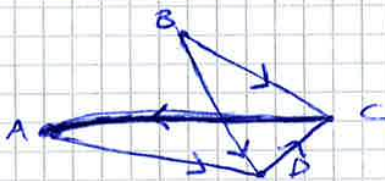
$N = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$N^{-1} = \frac{1}{4-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,666 & 0,333 \\ 0,333 & 0,666 \end{bmatrix}$

$A^T \cdot b = \begin{bmatrix} 1,8839 \\ 0,7310 \end{bmatrix}$

$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5733 \\ 1,1529 \end{bmatrix}$ $\sigma^2 = 3 \cdot 10^{-8}$

Esercizio



$Q_B = 250 \text{ m}$ $Q_A = 100 \text{ m}$

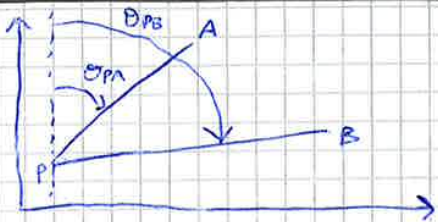
$\hat{Q}_C = ?$

$\hat{Q}_D = ?$

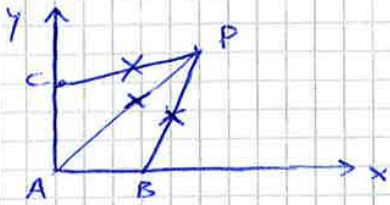
misure $\{\Delta_{AD}, \Delta_{DC}, \Delta_{BD}, \Delta_{CA}, \Delta_{BC}\}$

- ③ $Q_D - Q_A = \Delta_{AD}$ $Q_D = \Delta_{AD} + Q_A$
- ④ $Q_C - Q_D = \Delta_{DC}$ $Q_C - Q_D = 5 - 2 = 3$
- ⑤ $Q_D - Q_B = \Delta_{BD}$ $Q_D = Q_B + \Delta_{BD}$
- ② $Q_C - Q_D = \Delta_{BC}$ $\rightarrow Q_C = \Delta_{BC} + Q_D$
- ① $Q_A - Q_C = \Delta_{CA}$ $\rightarrow -Q_C = \Delta_{CA} + Q_A$

$T = \begin{bmatrix} \Delta_{CA} - Q_A \\ \Delta_{BC} + Q_B \\ \Delta_{AD} + Q_A \\ \Delta_{DC} \\ \Delta_{BD} + Q_B \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



$$\alpha = \theta_{PB} - \theta_{PA} = \arctg \frac{y_B - y_P}{y_P - y_A} - \arctg \frac{y_A - y_P}{y_A - y_P}$$



Note
 x_A y_A
 x_B y_B
 x_C y_C

Misure
 d_{AP}
 d_{BP}
 d_{CP}

\hat{x}_P ?
 \hat{y}_P ?

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{(x_P - x_C)^2 + (y_P - y_C)^2} \\ d_2 = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} \\ d_3 = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} \end{cases}$$

\hat{x}_P, \hat{y}_P cosa sono? Valori approssimati quando $\epsilon \sim$

$$\begin{aligned} d_1 &= \hat{d}_1 + \frac{d d_1}{d x_P} \delta \hat{x}_P + \frac{d d_1}{d y_P} \delta \hat{y}_P \\ d_2 &= \hat{d}_2 + \frac{d d_2}{d x_P} \delta \hat{x}_P + \frac{d d_2}{d y_P} \delta \hat{y}_P \\ d_3 &= \hat{d}_3 + \frac{d d_3}{d x_P} \delta \hat{x}_P + \frac{d d_3}{d y_P} \delta \hat{y}_P \end{aligned}$$

SULL'USO DI TAYLOR
 APPROSSIMAZIONE AL 1° ORDINE

$$f(x) = f(\hat{x}) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta \hat{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta \hat{x}^2$$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \hat{f}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \hat{f}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) &= \hat{f}_m + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 - \hat{d}_1 &= T_1 \\ d_2 - \hat{d}_2 &= T_2 \end{aligned}$$

conosciamo d_1, d_2 e il valore approssimato \hat{x} otteniamo
 valore stimato \rightarrow

$$\begin{aligned} \hat{x}_P &= \hat{x}_P + \delta \hat{x}_P \\ \hat{y}_P &= \hat{y}_P + \delta \hat{y}_P \end{aligned}$$

conosciamo d_1, d_2 e il valore approssimato \hat{x} otteniamo
 valore stimato

matrice disegna $A =$ matrice jacobiana $J =$

$\frac{\partial d_1}{\partial x_P}$	$\frac{\partial d_1}{\partial y_P}$	funzione 1
$\frac{\partial d_2}{\partial x_P}$	$\frac{\partial d_2}{\partial y_P}$	funzione 2
$\frac{\partial d_3}{\partial x_P}$	$\frac{\partial d_3}{\partial y_P}$	funzione 3
rispetto a x		
rispetto a y		

ES. 1

$$y = t^{-\hat{\alpha}}$$

non è lineare, uso MQ non lineari:

$$t = 2, 3, 4$$

$$y = \begin{vmatrix} 0,709107 & t=2 \\ 0,580350 & t=3 \\ 0,501532 & t=4 \end{vmatrix}$$

1^a FASE:

linearizzazione dei valori approssimati

$$\begin{vmatrix} \tilde{y}_1 = 2^{-0,49} \\ \tilde{y}_2 = 3^{-0,49} \\ \tilde{y}_3 = 4^{-0,49} \end{vmatrix} = \tilde{y}$$

con $\tilde{\alpha} = 0,49$ $\Delta\hat{\alpha}?$

$$\tilde{y} = \begin{vmatrix} 0,712025 \\ 0,583728 \\ 0,50698 \end{vmatrix}$$

$$y_{mis} = y_0 = \hat{y} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial \hat{\alpha}} \Delta\hat{\alpha}$$

$$y' = \frac{dy}{d\alpha} \quad (y = 2^x \rightarrow y' = 2^x \ln 2)$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = -t^{-\alpha} \ln t$$

$$J = A = \alpha = \begin{vmatrix} -2^{-0,49} \ln 2 \\ -3^{-0,49} \ln 3 \\ -4^{-0,49} \ln 4 \end{vmatrix}$$

non è una matrice ma semplicemente un vettore (meglio)

$$A \Rightarrow \bar{\alpha} = \begin{vmatrix} -0,49354 \\ -0,64729 \\ -0,70282 \end{vmatrix}$$

$$\alpha^T \cdot \alpha = 1,14879$$

$$(\alpha^T \cdot \alpha)^{-1} = 0,870447$$

$$T = y - \hat{y}$$

$$y = \hat{y} + \int_T d\hat{x}$$

siamo in un modello

$$y = A\hat{x} + C$$

\hat{y}

$$T = y - \hat{y} = \begin{vmatrix} 0,709107 - 0,712025 \\ 0,580350 - 0,583728 \\ 0,501532 - 0,50698 \end{vmatrix}$$

$$T_n = \alpha^T \cdot T$$

$$\hat{\alpha} (0 \hat{x}) = |\Delta\hat{\alpha}| = N^{-1} T_n = 0,007435$$

$$\hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + \Delta\hat{\alpha} = 0,49 + 0,007435 = 0,497435$$

$$J \equiv A = \begin{pmatrix} \frac{\hat{x}_P - x_A}{d_1} & \frac{\hat{y}_P - y_A}{d_1} \\ \frac{\hat{x}_P - x_B}{d_2} & \frac{\hat{x}_P - y_B}{d_2} \\ \frac{\hat{x}_P - x_C}{d_3} & \frac{\hat{y}_P - y_C}{d_3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{10\sqrt{2}} & \frac{10}{10\sqrt{2}} \\ -\frac{20}{10\sqrt{5}} & \frac{10}{10\sqrt{5}} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,7 \end{bmatrix} = N$$

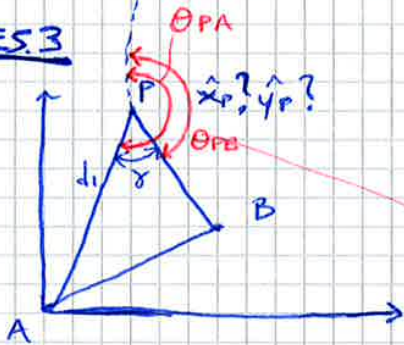
$$N^{-1} = \frac{1}{1,6} \begin{bmatrix} 0,7 & -0,1 \\ -0,1 & 3,3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} = \begin{bmatrix} \partial \hat{x}_P \\ \partial \hat{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,0478 \\ -0,3310 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\hat{x}_P = \tilde{x}_P + \partial \hat{x}_P = 10 + 7,0478 \cdot 10^{-4} = 10,00070478$$

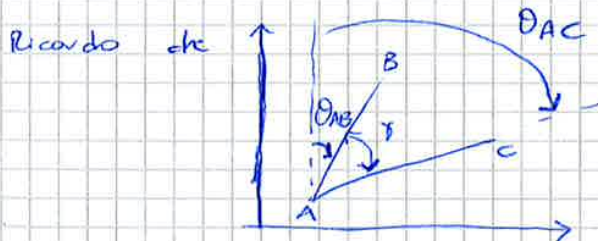
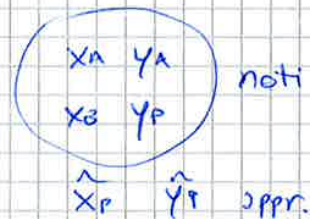
$$\hat{y}_P = \tilde{y}_P + \partial \hat{y}_P = 10 - 0,3310 \cdot 10^{-4}$$

ES.3



Misure

d_1
d_2
γ



$$\theta_{AC} - \theta_{AB} = \gamma$$

$$\gamma = \theta_{PA} - \theta_{PB} = \arctan \frac{x_A - \hat{x}_P}{y_A - \hat{y}_P} - \arctan \frac{x_B - \hat{x}_P}{y_B - \hat{y}_P}$$

$$\theta_{AC} = \arctan \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A}$$

$$\theta_{AB} = \arctan \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

$$\begin{cases} d_1 = \tilde{d}_1 + \frac{\partial d_1}{\partial x_P} \delta \hat{x}_P + \frac{\partial d_1}{\partial y_P} \delta \hat{y}_P \\ d_2 = \dots \\ \gamma = \tilde{\gamma} + \frac{\partial \gamma}{\partial x_P} \delta \hat{x}_P + \frac{\partial \gamma}{\partial y_P} \delta \hat{y}_P \end{cases}$$

livellazione simultanea PRECISA
 " a r fsi di un estremo - PRECISA

$$\odot = 1-2 \text{ cm } D (\text{Km})$$

$$\odot = 2-5 \text{ cm } D (\text{Km})$$

CAMPO GEODETICO ALTIMETRIA

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma &= 2 \text{ cm} \times 15 \text{ Km} \approx 30 \text{ cm} \\ \Delta z &= 60 \text{ mm} \end{aligned} \right. \quad 60 \text{ mm} < 30 \text{ cm}$$

σ precisione

Nel campo geodetico fino a 15 Km di distanza dal punto $\sigma \rightarrow \Delta z$

ovvero errore di misura e non di misure della precisione stessa

Nel campo topografico a 10 Km più $\Delta z \rightarrow \sigma$

CAMPO TOPOGRAFICO ALTIMETRIA

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma &= 2 \text{ cm} \times 10 \text{ Km} \approx 20 \text{ cm} \\ \Delta z &= 8 \text{ cm} \end{aligned} \right. \quad \text{NO!}$$

$$L = 1 \text{ Km} \quad d = 100 \text{ m} \quad n = \frac{1000}{100} = 10$$

$$\sigma_L = 0,2 \text{ mm}$$

$$\sigma_L^2 = 2 \sigma_i^2 \rightarrow \sigma_L^2 = 2 n \sigma_i^2$$

$$\sigma_L = \sqrt{2n} \sigma_i = \sqrt{20} 0,2 \hat{=} 0,894 \text{ mm} \approx 1 \text{ mm}$$

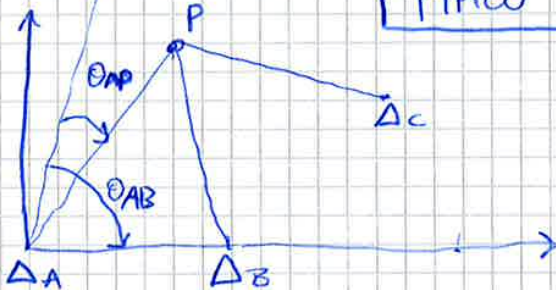
$$\sigma_{\Delta m}^2 = \frac{1}{4} \sigma_{\Delta A}^2 + \frac{1}{4} \sigma_{\Delta R}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta}^2$$

$$\Delta m = \frac{\Delta A + \Delta R}{2} \quad \begin{matrix} \text{A sinistra} \\ \text{B a destra} \end{matrix}$$

$$\sigma_{\Delta m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} 0,894 = 0,63 \text{ mm}$$

TIPICO PROBLEMA D'ESAME

13/05/14



misure	θ_{AP}
d_{AP}	θ_{AB}
d_{BP}	$m = S$
d_{PC}	

NOTI

$$A \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 0 \end{cases} \quad B \begin{cases} x_B = 250 \\ y_B = 0 \end{cases} \quad C \begin{cases} x_C = 350 \\ y_C = 150 \end{cases}$$

$$\hat{x}_P = 150 \quad \hat{y}_P = 400$$

$$\left\{ \begin{aligned} d_{AP} &= \sqrt{(x_A - \hat{x}_P)^2 + (y_A - \hat{y}_P)^2} + \frac{x_P - x_A}{d_{AP}} \delta \hat{x}_P + \frac{y_P - y_A}{d_{AP}} \delta \hat{y}_P \\ d_{BP} &= \sqrt{(x_B - \hat{x}_P)^2 + (y_B - \hat{y}_P)^2} + \frac{y_P - y_B}{d_{BP}} \delta \hat{x}_P + \frac{y_P - y_B}{d_{BP}} \delta \hat{y}_P \\ d_{PC} &= \dots \end{aligned} \right.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

R

Pongo $\begin{cases} \lambda \cos \alpha = a \\ \lambda \sin \alpha = b \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = \hat{T}_x + \hat{\lambda} x_1 + \hat{b}_y \\ y_1 = \hat{T}_y - \hat{b} x_1 + \hat{\lambda} y_1 \\ x_2 = \hat{T}_x + \hat{\lambda} x_1 + \hat{b} y_2 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\vec{O}_{\text{osserv}} = \begin{pmatrix} 290 \\ 150 \\ 420 \\ 80 \\ 540 \\ 200 \\ 390 \\ 300 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \hat{T}_x \\ \hat{T}_y \\ \hat{\lambda} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} T_x & T_y & \lambda & b \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & y_1 - x_1 & \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & y_2 - x_2 & \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \\ 0 & 1 & y_3 - x_3 & \\ 1 & 0 & x_4 & y_4 \\ 0 & 1 & y_4 - x_4 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & 40 \\ 0 & 1 & 40 & -30 \\ 1 & 0 & 100 & 40 \\ 0 & 1 & 40 & -100 \\ 1 & 0 & 100 & 130 \\ 0 & 1 & 130 & -100 \\ 1 & 0 & 30 & 130 \\ 0 & 1 & 130 & -30 \end{pmatrix}$$

soluzioni

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 30 & 40 \\ 0 & 1 & 40 & -30 \\ 1 & 0 & 100 & 40 \\ 0 & 1 & 40 & -100 \\ 1 & 0 & 100 & 130 \\ 0 & 1 & 130 & -100 \\ 1 & 0 & 30 & 130 \\ 0 & 1 & 130 & -30 \end{pmatrix}$$

$$N = A^T \cdot A$$

$$N^{-1}$$

$$A^T \cdot O_b = T_n$$

$$\hat{\text{sol}} = N^{-1} \cdot T_n$$

soluzioni:

$$\hat{T}_x = 196,6154$$

$$\hat{T}_y = 178,2308$$

$$\lambda = 16,885$$

$$b = 121,92$$

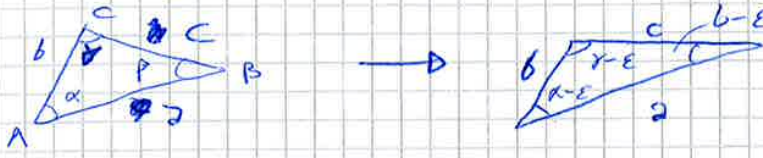
$$\text{tg } \alpha = \frac{\lambda \sin \alpha}{\lambda \cos \alpha} = \frac{b}{\lambda} = \frac{121,92}{16,885} = 0,8$$

$$\alpha = \arctg 0,8 = 36^\circ$$

$$\frac{\alpha^0}{180} = \frac{\alpha \text{ rad}}{\pi} = \frac{\alpha \text{ sen}}{200}$$

$$\alpha^0 = \frac{\alpha \text{ rad}}{\pi} \cdot 180$$

LEGENDE pg. 40



$$3\epsilon = \frac{\delta}{R^2}$$

$$\left(\frac{1}{R}\right)^4 \leq 10^{-6} \Rightarrow R \geq 200 \text{ km}$$

20/05/15

CARTOGRAFIA

Ellissoide e superficie non direttamente applicabile sul piano
Deformazioni di 3 tipi:

- LINEARI \rightarrow modulo di def. lineare = $\frac{\text{elemento su carta}}{\text{elemento su ellissoide}}$
- AREALI \rightarrow modulo di def. areale = \dots
- ANGOLARI \rightarrow $\delta = \text{modulo di def. angolare} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \text{ su carta}}{\alpha_1 - \alpha_2 \text{ su ellissoide}}$

Carte con $\delta = 0 \rightarrow$ CARTE CONFORMI
o ISOGONICA

cioè α_1 su carta = α_1 su ellissoide
 \downarrow
SI MANTENGONO GLI ANGOLI

Carte di Gauss e quelle x navigazione sono

CARTE CONFORMI \rightarrow non mantengono aree e linee molto distorte

Mappamondo \rightarrow molto distorto (Africa + grande, Europa + piccola)

Carte con $m_a = 1$ CARTE EQUIVALENTI (carte tematiche)
(ma) modulo def areale

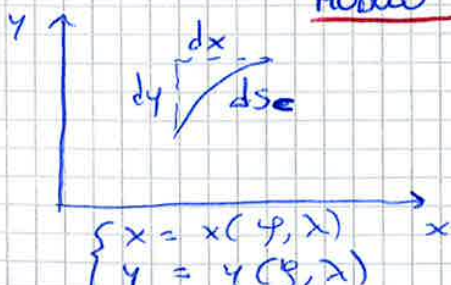
carte con $m_l = 1$ CARTE EQUIDISTANTI
(lineare)

Non esistono carte compl. equidistanti (solo in alcune zone, su alcune linee)

CARTA AFILATTICA - contenere tutte le def. di piccole entità
(carte tematiche)

A monte si sceglie che cosa mantenere costante e cosa deformare
Carte sono propr. analitiche cioè sono caratterizzate da equazioni

MODULO DI DEF. LINEARE

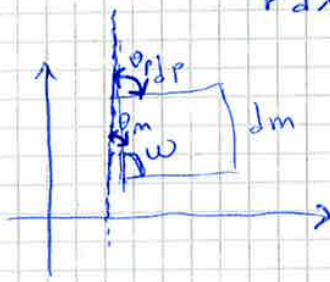


$$ds_c^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial y} dy + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda \\ dy = \frac{\partial y}{\partial y} dy + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda \end{cases}$$

$$dm = (\rho dy) \frac{ve}{\rho} = ve dy$$

$$m_o = \frac{dm d\rho \sin w}{r d\lambda \rho dy} = \frac{ve d\rho \sqrt{g} d\lambda \sin w}{r d\lambda \rho dy} = \boxed{\frac{\sqrt{g} \sin w}{r \rho}}$$



$$w = \theta_m - \theta_p$$

$$\operatorname{tg} w = \frac{\tan \theta_p - \tan \theta_m}{1 + \tan \theta_p \tan \theta_m}$$

$$\tan \theta_p = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda}{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda}$$

$$\tan \theta_m = \frac{\frac{\partial x}{\partial \rho}}{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}$$

$$\sin w = \frac{\operatorname{tg} w}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 w}}$$

$$m_o = \frac{1}{r \rho} \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \quad \text{finale}$$

MODULO DI DEFORMAZIONE ANGOLARE



$$\tan \alpha = \frac{d\rho}{dm}$$

$$d\rho = m_e r d\lambda = \frac{\sqrt{g}}{r} r d\lambda = \sqrt{g} d\lambda$$

$$dm = m_e \rho dy = \frac{\sqrt{g}}{\rho} \rho dy = \sqrt{g} dy$$



$$r d\lambda = dse \sin \alpha$$

$$\rho dy = dse \cos \alpha$$

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \frac{\rho}{r} = \tan \alpha \frac{\rho}{r}$$

$$S = \alpha' - \alpha$$

$$\tan S = \tan(\alpha' - \alpha) = \frac{\tan \alpha' - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha' \tan \alpha}$$

$$m = \tan S = \frac{\left(\frac{\sqrt{g}}{r} \cdot \frac{\rho}{r} - 1 \right) \tan \alpha}{1 + \frac{\sqrt{g}}{r} \frac{\rho}{r} \tan^2 \alpha}$$

CONDIZIONI: $m = 0$ modulo di def. angolare S o $\tan S$ o m
 deve essere uguale a 0 $\left(\frac{\sqrt{g}}{r} \cdot \frac{\rho}{r} - 1 \right)$

EQUAZIONE DELLE CARTE ISOGONICHE

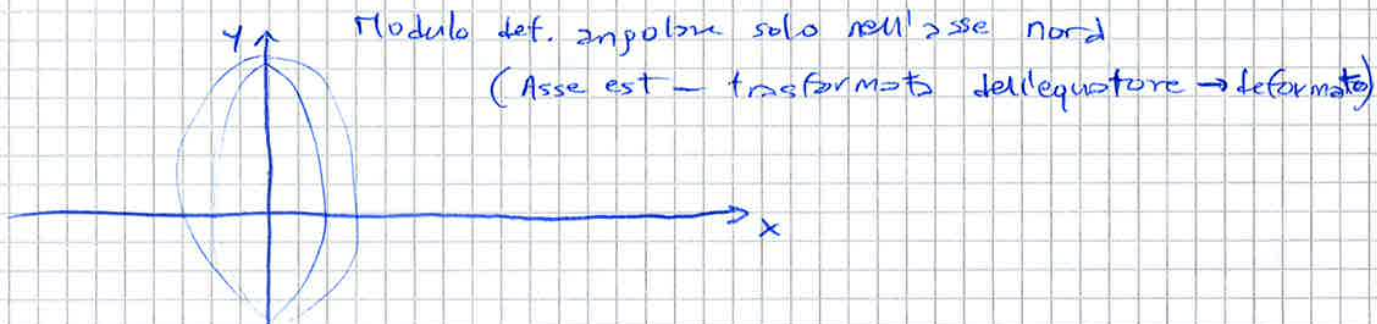
$$y + ix = f(u) + f'(u) i \lambda + \frac{f''(u)}{2!} (i \lambda)^2 + \frac{f'''(u)}{3!} (i \lambda)^3 + \frac{f^{IV}(u)}{4!} (i \lambda)^4 + \frac{f^V(u)}{5!} (i \lambda)^5 + \dots$$

$$i^2 = -1 \quad i^3 = -i \quad i^4 = 1 \quad i^5 = i$$

$$y + ix = f(u) + f'(u) i \lambda - \frac{f''(u)}{2!} \lambda^2 - \frac{f'''(u)}{3!} i \lambda^3 + \dots$$

$$y + ix = f(u) + f'(u) - \frac{1}{2!} f''(u) \lambda^2 - \frac{1}{3!} f'''(u) i \lambda^3 + \frac{1}{4!} f^{IV}(u) \lambda^4 + \frac{1}{5!} f^V(u) i \lambda^5 + \dots$$

Carta di Gauss → trasformato ~~del~~ del meridiano centrale ~~deve~~ deve essere in vera lunghezza (rispetto alla scala)



$$dy = \int \underbrace{r}_{f(u)} du = \int \rho dy$$

$$f'(u) = \int d \dots$$

$$f''(u) = \frac{dr}{du} = \frac{dr}{dy} \frac{dy}{du} = \dots$$

Vuole sapere il procedimento, non le formule

Carta di Gauss può assomigliare a proiezione cilindrica trasversa, cioè su cilindro tangente meridiano centrale o MERIDIANO DI TANGENZA.

Carta stereografica polare è una carta conforme a proiezione cilindrica dritta geometrica

Carta di Gauss policentrica → specchio di 6° , ~~ogni~~ ogni fuso ha sistema di riferimento indipendente (ogni fuso 6°)

$$m=1 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} m=99996 \text{ al centro} \\ m=1,0004 \text{ ai bordi} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \times \text{ riduce deformazione,} \\ \text{intorno sul meridiano} \\ \text{centrale } 1,0000 \\ \text{e ai bordi } 1,0008 \end{array} \right.$$

~~CORPIA 1 e 4~~

$$\frac{y - 5,19}{128,90 - 5,19} = \frac{x - 1}{5 - 1}$$

~~$$4(y - 5,19) = 7,7x - 7,7$$

$$4y - 20,76 = 7,7x - 7,7$$

$$y = 1,93x + 3,27$$

1) $y_2 = 1,93 \cdot 3 + 3,27 = 9,06$
scarto = $19,21 - 9,06 = 9,15$

3) $y_3 = 1,93 \cdot 4 + 3,27 = 10,99$
scarto = $0,97$~~

~~media = $\frac{9,15 + 0,97}{2} = 5,06$~~

TORINO
SCHIFO
ALBA
PURE

1 e 4

$$\frac{y - 5,19}{128,9 - 5,19} = \frac{x - 1}{5 - 1}$$

$$4(y - 5,19) = 123,71(x - 1)$$

$$4y - 20,76 = 123,71x - 123,71$$

$$y = 30,93x - 25,74$$

$$y_2 = 30,93 \cdot 3 - 25,74 = 67,05$$

$$\text{scarto} = 67,05 - 9,21 = 57,84$$

$$y_3 = 30,93 \cdot 4 - 25,74 = 97,98$$

$$\text{scarto} = 97,98 - 10,92 = 87,06$$

$$\text{media} = 72,45$$

2 e 3

$$\frac{y - 9,21}{10,92 - 9,21} = \frac{x - 3}{4 - 3}$$

$$y - 9,21 = 1,71(x - 3)$$

$$y - 9,21 = 1,71x - 5,13$$

$$y = 1,71x + 4,08$$

$$y_1 = 1,71 \cdot 1 + 4,08 = 5,79$$

$$\text{scarto} = 15,79 - 5,19 = 9,60$$

$$y_4 = 1,71 \cdot 5 + 4,08 = 12,63$$

$$\text{scarto} = 128,80 - 12,63 = 116,17$$

$$\text{media} = 58,435$$

3 e 4

$$y = 117,98x - 461$$

$$y_1 = -343,02$$

$$\text{scarto} = 398,21$$

$$\text{media} = 232,24$$

$$y_2 = -109,06$$

$$\text{scarto} = 116,77$$

① $\|A\|_1 = 5,999$
 $\|A\|_\infty = 5,999$
 $\|A\|_2 = \sqrt{9 + (5,999)^2} = 6,707$

$|\det A| = -9,001$

$A^{-1} = \frac{1}{-0,001} \begin{vmatrix} 3,999 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3999 & +2000 \\ +2000 & -1000 \end{vmatrix}$

$\|A^{-1}\|_1 = ~~1999~~ 1999$

$\|A^{-1}\|_\infty = 1999$

$\|A^{-1}\|_2 =$

$\|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 11997,001$

② $\frac{1}{\det} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = A^{-1}$ $A^{-1} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$
 $\det A = -1$

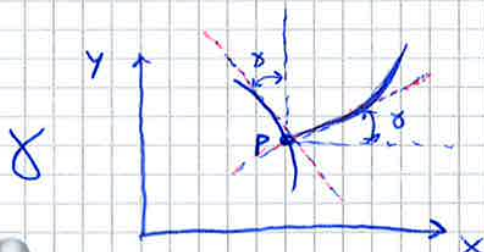
$\|A^{-1}\|_\infty = 1$

$\|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty = 5$

$\|A^{-1}\|_1 = 1$

$\|A^{-1}\|_1 \|A\|_1 = 5$

27/05/195



$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi}$

$$\begin{cases} x = \lambda N \cos \varphi + \frac{1}{6} \lambda^3 N \cos^3 \varphi (\dots) \\ y = \lambda \phi + \frac{1}{2} \lambda^2 N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{24} \lambda^4 \cos^3 \varphi \sin \varphi (\dots) \end{cases}$$

$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{1}{2} \lambda^2 N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{24} \lambda^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi (\dots)$

$\frac{dx}{d\lambda} = N \cos \varphi + \frac{3}{6} \lambda^2 N \cos^3 \varphi (\dots)$

$\tan \alpha = \lambda \sin \varphi (1 + \frac{\lambda^2}{3} + \dots)$

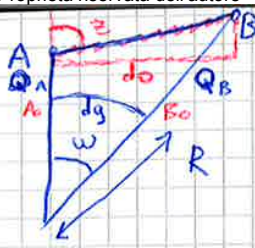
$\alpha = \arctan (\lambda \sin \varphi (1 + \frac{\lambda^2}{3} + \dots))$

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

$\alpha = \lambda \sin \varphi + \frac{\lambda^3}{3} \sin^3 \varphi$

$\alpha = \lambda \sin \varphi [1 + \frac{1}{3} \lambda^2 - \frac{1}{3} \lambda^2 \sin^2 \varphi + \dots]$

$\alpha = \lambda \sin \varphi (1 + \frac{1}{3} \lambda^2 - \frac{1}{3} \lambda^2 \sin^2 \varphi + \dots)$



d'inclinato \overline{AB}

d_0 distanza orizzontale

$$R = \sqrt{\rho N}$$

$$d_0 = d_c \sin \epsilon$$

$$d_g = R \cdot w$$

$$\sin w \approx w = \frac{d_0}{R + Q_0}$$

Q_0	Q_0/R
6000 m	$\frac{6000 \text{ m}}{6000 \text{ km}} = 10^{-3}$
600 m	$\frac{600 \text{ m}}{6000 \text{ km}} = 10^{-4}$
60 m	10^{-5}
6 m	10^{-6}

$\varphi = 45^\circ$ $\lambda = 8^\circ$ $h = 300 \text{ m}$

~~scribble~~

$$d_g = d_0 \left(1 - \frac{h}{R}\right) \rightarrow \rho = \frac{2(1-e^2)}{(\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi})^3} = \frac{2(1-e^2)}{w^3}$$

$$\Rightarrow N = \frac{2}{w} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$R = \sqrt{\rho N} = 6378101,03$$

$$d_g = d_0 \left(1 - \frac{h}{R}\right) = 2000 \left(1 - \frac{300}{6378101,03}\right) = 1999,72$$

$$m_e = 0,99996 \left[1 + \frac{\left[\left(\frac{8-9}{180}\right)^2\right]}{2} \cdot \frac{1}{2}\right]$$

$$m_e = 0,99996 \left(1 + \frac{\lambda^2 \cos^2 \varphi}{2}\right) = 0,99996 \left(1 + \frac{(0,01745329)^2}{2}\right)$$

$$d_c = m_e \cdot d_g = 1999,07$$

flessione

UTM-ED 50 \rightarrow F.O. = 500 km

0,9996 coefficiente di contrazione introdotto xK ai bordi

03/06/15

di un qualsiasi fuso con $\lambda = \pm 3^\circ$, le deformazioni sono superiori a . . .

carta 1:25.000 \rightarrow $d_c = \frac{14000 \text{ m}}{560 \text{ mm}}$ 14 km \downarrow 560 mm

di precisione

$m_e = 1$ $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m_e = 1,00008$

$d_g \times m_e$
 $14000 \times 1,00008 = 14011 \approx 560,44 \text{ mm}$

errore di gonfiamento $\approx 0,25$ inferiore a 0,44 mm = errore introdotto

Allora cosa si è fatto? $0,25 \text{ mm}$

$$m = \frac{e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi$$

ITALIA $8^\circ \leftrightarrow 15^\circ$ con lungi tubine
UTM

$$\lambda = -1,338721 \text{ (trasformo)} \leftarrow \lambda_{TO} = 9^\circ$$

$$\gamma = -0^\circ 9' 5748$$

} meridiano di riferimento

$$E_{TO-AVI} = \frac{(N_{TO} - N_{AVI})(2X_{TO} - X_{AVI})}{GPN(0,9996)^2} = +0^\circ 00' 225$$

segno ϵ $\left\{ \begin{array}{l} \text{negativo se incontro prima carta e poi geodetica} \\ \text{positivo se ...} \end{array} \right.$

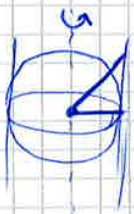
$$\alpha = \theta + \gamma + \epsilon = 278^\circ 28' 601 - 0^\circ 9' 5748 - 0^\circ 00' 225 = 277^\circ 32' 628$$

α su carta = α su ellissoide

~~SAV...~~ Fine esercizi

carta di MERCATORE - deriva da ^{carta piana} proiezione cilindrica diretta (cilindro tangente allequatore)
↳ carta conforme ma proiezione piana (?)

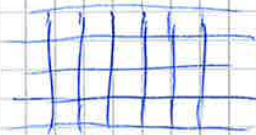
La nostra rispetto a cilindro tangente = meridiano centrale (?)



$$\begin{cases} x = a\lambda \\ y = a \tan \varphi \end{cases}$$

AFILATICA (1500 MERCATORE)

x navigazione



$$\begin{cases} x = a\lambda \\ y = a \ln \left[\frac{(1 - e \sin \varphi)^{e/2}}{(1 + e \sin \varphi)} \right] \tan(\dots) \end{cases}$$

$$dp = dsc = r d\lambda$$

$$dsc = a d\lambda$$

$$m_e = \frac{dsc}{dsc} = \frac{a d\lambda}{r d\lambda} = \frac{a W}{r \cos \varphi} = \frac{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi}$$

* stereografica polare - ortodromia retta

CARTE DI PETERS (1870) - EQUIVALENTE $m_e = 1$

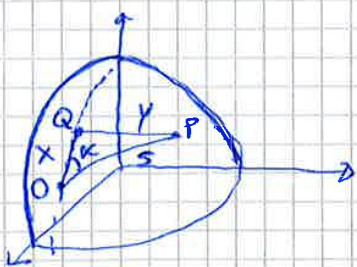
Contestato xk dicera che se continuiamo a far credere alla gente che Africa + piccola di quanto e e Europa + grande, alla fine tutti crediamo sia vero.

COORDINATE CATASTALI, "CASSINER SOLDNER"

→ coord. geodetiche rettangolari

O punto origine/emanazione → su meridiano

Raggiungo P tramite α e s



Q piede della geodetica passante P e \perp al meridiano per O

area QI \odot \odot
tratto meridiano \odot \odot

Ritardo dovuto alla propagazione nel fenomeno dovuto al percorso che fa l'onda riflessa $2d$

$$S_r = A \sin(\omega(t - \Delta t) + \varphi_0) = A \sin(\omega t - \underbrace{\omega \Delta t}_{\text{sfasamento } \varphi} + \varphi_0)$$

misurato da DISCRIMINATORE di FASE presente all'interno della stazione totale (strumento elettronico)

sfasamento φ tra onda riflessa ed emessa

$$\varphi = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \frac{2d}{c} = \frac{2\pi \cdot 2d}{\underbrace{T \cdot c}_{\text{lunghezza d'onda } \lambda}} = \frac{2\pi \cdot 2d}{\lambda}$$

$$D = \frac{\varphi}{2\pi} \frac{\lambda}{2} + n \frac{\lambda}{2}$$

distanza tra strumento e prisma, se minore della metà di λ
 ambiguità, numero di mezze lunghezze d'onda

Lunghezze d'onda piccole modulate da una più grande



$$\sigma_n^2 = \left(\left(\frac{\partial d}{\partial \varphi} \right)^2 \sigma_\varphi^2 \right) + \left(\frac{\partial d}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial n} \right)^2 \sigma_n^2$$

$$\sigma_d = \frac{\lambda}{4\pi} \sigma_\varphi = \frac{2\pi}{1000} : \frac{2\pi}{2000} = \frac{\lambda}{2000}$$

PRECISIONE

$$\sigma_d = \frac{\lambda}{2} \cdot 10^{-3} \quad \sigma_d = 1 \text{ dm} \Rightarrow \lambda = 2 \text{ cm} \cdot 10^3 = 2000 \text{ cm} = 20 \text{ m}$$

Se voglio precisione 1 cm $\rightarrow \lambda = 20 \text{ m}$

$\lambda = \text{pochi } \mu$

n ambiguità si misura con z λ simili in modo che Δn sia di un'unità in più.

2 distanze simili avranno una distinzione limite

Metodo delle decadi $10 \rightarrow 100 \rightarrow 1000$
 10λ

$$\sigma_d = C_0 + C_1 \cdot d$$

C_1 varia tra $(1 - 1,5) \cdot 10^{-6} \text{ mm}$
 C_0 varia tra 1 mm e 10 mm = cost $\rightarrow C_0 = 1 \text{ mm} - 1 \text{ cm}$

Ripasso distanziometri

10/06/15

• DISTANZIOMETRI ELETTRO-OTTICI (EODM)

sfasamento tra onda emessa e onda riflessa

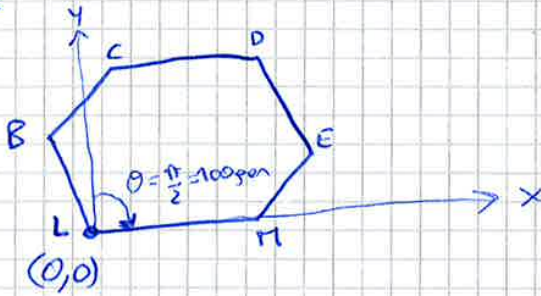
~~metodo~~ formule su onda emessa e onda riflessa

COMPENSAZIONE RETI CON STARNET

11/06/15

Programma che Compensa sia rete 2D che 3D
 ↳ si compenso insieme planimetria che altimetria (faremo in GEOMETRIA)

Slide



$$\begin{cases} x_L = 0 \\ y_L = 0 \end{cases}$$

$$\theta_{LM} = 0$$

A = angolo azimutale

C = coordinate

1000

1000!!

↳ coordinate (vincolo di osservazione)

χ^2

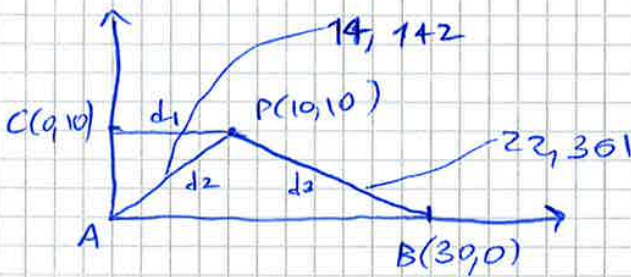
Elisse Kemmerling dove ho il 39% di probabilità di trovare l'ellisse
 ↳ devono essere ellissi circolari

Formule di BESSEL (chiede all'esame) su slide

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - \hat{x})^2}{n(n-1)}}$$

scarto quadratico medio

do = di sin y medio



$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (m-n) \approx \chi^2_{\nu=m-n}$$

