NUMERO: 1713A - ANNO: 2015

# A P P U N T I

STUDENTE: Busca Francesco

MATERIA: Meccanica razionale - prof. Delitala (2015)

# MECCANICA RAZIONALE

02/03/'15

Prof. DELITALA Marcello Edoardo

Mercoledì mattina esercitazioni

Lunedì e giovedì lezione

ESERCITAZIONI Marco SCIANNA

Studente aiutante LUN 17:30 →

MAR 14:30 →

GIO 17:30 →

M.R. Anello di congiunzione tra $\underbrace{\text{ANALISI I, II}}_{\text{CORSI DI BASE}}$ + CORSI SPECIFICI DI CIVILE DEGLI ANNI SUCCESSIVI

Scopo: conoscenza di modelli matematici e metodi matematici x descrivere sistemi meccanici, rendere intellegibile realtà fisica attraverso modello matematico, partendo dai principi classici della meccanica classica (fisica), applicato a sistemi di punti o di corpo rigido.

Meccanica razionale: scienza deduttiva

Corpo rigido: distanza tra le varie parti è sempre la stessa

- Definito il modello matematico, si effettua ANALISI QUALITATIVA per studiare proprietà della soluzione
- Considerando sistemi diversi si possono effettuare assunzioni e semplificazioni di fondo. Si hanno diverse meccaniche, quella razionale si occupa del corpo rigido e senza semplificazione della realtà

Meccanica ANALITICA che vedremo in coda al corso → EQUAZIONE DI LAGRANGE/HAMILTON con ipotesi sui vincoli che devono essere IDEALI

" DEL CONTINUI → materia riempie lo spazio che occupa (fluidi) → corpi DEFORMABILI

" STATISTICA → tanti elementi coinvolti

" RELATIVISTICA → corpi con velocità prossima a quella della luce

" QUANTISTICA → molto piccolo il sistema considerato

Meccanica razionale è un capitolo fondamentale della fisica matematica

**Testo:**

- P. Biscari, T. Ruggeri, G. Saccomandi, Vianello "Meccanica razionale per l'ingegneria", edizione 2007 blu
- (esercizi) no testo ufficiale, ((Muracchini, Ruggieri, Secchia "Temi d'esame di MR" Esculapio 2005))

Sul portale carica temi d'esame risolti di due tipi: ① prof. Riganti (vecchi 2000, il corso era da 12 crediti)
② prof. Delitala (anni recenti)

**ESAME:**

Scritto con 1 solo esercizio con + punti

Regole d'esame: Scritto da 2 ore (1 esercizio + 1 domanda di teoria) molto generale e aperta (max 1 pagina)

Più importante l'esercizio della domanda di teoria

Si può portare formulario di 1 pagina in cui mi scrivo formule importanti

Orale facoltativo. ~~Se voto ≥24 e non faccio orale ho massimo 24~~
se voto ≥24

## SISTEMA MASSA-MOLLA

- ASSUNZIONI E SEMPLIFICAZIONI
  - Considero massa puntiforme nel baricentro
  - posizione identificata da ascissa x
  - forza molla si esplichi attraverso legge di Hooke $F = -Kx$
  - trascuriamo attrito, viscosità o altre dissipazioni

⇒ USIAMO II LEGGE DI NEWTON $F = m \cdot a$

$$-Kx = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{M}x = 0$$ oscillatore armonico

↓

ODE (Ordinary Differential Equation) del 2° ordine

**Esempio**

### MODELLO DINAMICA POPOLAZIONI

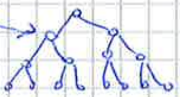
ASSUNZIONI SEMPLIFICATIVE

- TASSO DI NATALITÁ N
- TASSO DI MORTALITÁ M

$p = p(t)$ popolazione (n° individui)

$$\boxed{\frac{dp}{dt} = Np - Mp}$$

variazione n° individui



moltiplico per p perché il tasso è riferito ad un individuo ma devo tenere conto di tutta la popolazione

### LEGGE DI MALTHUS

$$\frac{dp}{dt} = \underbrace{(N-M)}_{\alpha}p = \alpha p$$

$\alpha$ = tasso di nascita al netto della morte

separazione variabili $\frac{dp}{p} = \alpha\, dt$

$$p(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{condizione iniziale}}}{p(0)}\, e^{\alpha t}$$

→ descrive andamento della pop. dal 1700 al 1800 esponenziale

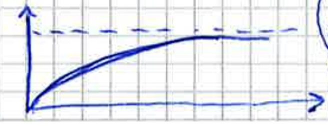
Dal 1900 in poi PROBLEMA DI RISORSE

Tutti i modelli sono perfettibili in base alle esigenze specifiche

**ES** MODELLO LOGISTICO per tenere in conto di risorse limitate

$$\frac{dp}{dt} = (N-M)p - cp^2$$ → COMPETIZIONE PER LE RISORSE

↳ tiene in conto della lotta per la sopravvivenza



SOGLIA O PLATEAU che dipende dalle risorse disponibili (CARRYING CAPACITY dell'ambiente)

$$\frac{dU_N}{dt} = f_N(t, u_1, u_2, \dots U_N)$$ SISTEMA DI N ODE DEL I ORDINE SCALARI

- Un altro classe di modello è descritta da equazioni scalari di ordine elevato

$$\frac{d^N u}{dt^N} = f\left(t, u, \frac{du}{dt}, \dots\dots \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}\right)$$

scritta in forma NORMALE perché ho isolato la derivata di ordine massimo

eq. di ordine N (MASSIMO GRADO DI DERIVAZIONE DELLA VARIABILE DI STATO

Queste equazioni possono essere riscritte come un sistema di N equazioni del I° ordine in N incognite

$u_1 = u$

$u_2 = \frac{du}{dt}$

$u_3 = \frac{d^2u}{dy^2}$

$\vdots$

$u_N = \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}$

$\frac{du_1}{dt} = u_2$

$\frac{du_2}{dt} = u_3$

$\vdots$

$\frac{dU_N}{dt} = f(t, u_1, u_2, u_3, \dots U_{N-1})$

**Esempio** SISTEMA MASSA-MOLLA

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$ 1 EQ. DEL II ORDINE

$u_1 = x$ (POSIZIONE)

$u_2 = \frac{dx}{dt}$ (VELOCITÀ)

trasformato

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{k}{m}u_1 \end{cases}$$ 2 EQ. DEL I ORDINE

IN FUNZIONE DEL CAMPO VETTORIALE f POSSIAMO EFFETTUARE LA SEGUENTE CLASSIFICAZIONE

MODELLO LINEARE $\frac{d\bar{u}}{dt} = f(t, \bar{u})$

$$\bar{f}(t, \bar{u}) = \underbrace{\underline{A}}_{\text{matrice } N\times N}(t)\,\bar{u} + \underbrace{\bar{b}}_{\text{vettore a } N \text{ componenti}}(t)$$

$$\frac{du_1}{dt} = a_{11}(t)u_1 + \dots\dots + a_{1N}(t)u_N + b_1(t)$$

$\vdots$

$$\frac{du_N}{dt} = a_{N1}(t)u_1 + \dots + a_{NN}(t)u_N + b_N(t)$$

MODELLO LINEARE OMOGENEO

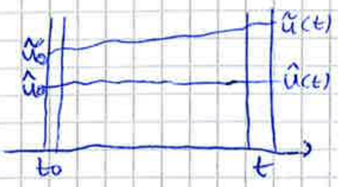
se $\bar{b}(t) = 0$

MODELLO LINEARE A COEFFICIENTI COSTANTI

I coefficienti della matrice A e il termine noto $\bar{b}$ non dipendono dal tempo

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \underline{\underline{A}}\bar{u} + \bar{b}$$

$$\| \hat{u}(t) - \tilde{u}(t) \| \le \| \hat{u}_0 - \tilde{u}_0 \| \, e^{\underset{\text{cost di } L}{L}(t-t_0)}$$



(?)

**Esempio** CADUTA GRAVE SENZA ATTRITO

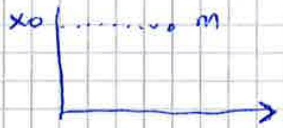
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \qquad \text{integro (1)}$$

$$\frac{dx}{dt} = -gt + \underset{\text{cost}}{A} \qquad \text{integro (2)}$$

SOLUZIONE GENERALE $x(t) = -g\frac{t^2}{2} + At + \underset{\text{cost}}{B}$

le costanti A, B si determinano imponendo le condizioni iniziali



$x(0) = x_0$ posizione

$V(0) = \frac{dx}{dt} = v_0$ velocità

$$x(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0$$

↳ DOPO QUANTO TEMPO IL GRAVE TOCCHERÀ TERRA?

Cerco il tempo $t^*$ : $x(t^*) = 0$

$$x(t^*) = 0 = -g\frac{t^2}{2} + \boxed{v_0 t^*} + x_0 \quad \rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2x_0}{g}}$$

↳ se $v_0 = 0$ inizialmente fermo

**Esempio** CADUTA GRAVE CON ATTRITO

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - \underset{\text{viscosità aria}}{\mu}\frac{dx}{dt}$$

↓

SI PUÒ RISCRIVERE CONSIDERANDO UNA ODE SULLA VELOCITÀ

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{\mu}{m} v$$

verificando esistenza di velocità limite caduta gravi

## CINEMATICA DEL PUNTO

09/03/15

Problema cinematico : descrizione in termini matematici del moto di un generico punto del sistema

- Presupporre di avere scelto un sistema di riferimento (SR)
- Definire le posizioni occupate dal punto:
  - ① Legge oraria : relazione tra coordinata di un punto e il tempo
  - ② Traiettoria (o ORBITA) : luogo geometrico dei punti occupati dal punto materiale nel suo moto

↳ la derivata di $\vec{t}$ è legata alla rapidità con cui cambia direzione la tangente; è naturale definire $c = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}$ la curvatura    $\rho$ = raggio di curvatura

e definire $\boxed{\vec{n} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{1}{c}}$ — $\frac{dt}{ds}$ / modulo versore di $\frac{dt}{ds}$    versore detto NORMALE PRINCIPALE

Si definisce un terzo versore che è il prodotto esterno o vettoriale tra tangente e normale, detto BINORMALE $\vec{b}$

↳ si definisce naturalmente la TERNA INTRINSECA $\{ \vec{t}, \vec{n}, \vec{b} \}$

Questo è un SR ASSOCIATO ALLA CURVA DEL MOTO

Velocità nella terna intrinseca $\boxed{v = \frac{dP}{dt} = \underbrace{\frac{d\hat{P}}{ds}}_{\vec{t}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot{s}} = \dot{s} \cdot \vec{t}}$ velocità lungo la tangente

tempo

accelerazione nella terna intrinseca $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\vec{t}) = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s} \underbrace{\frac{d\vec{t}}{dt}}$ — tangente — tempo

$= \underbrace{\frac{d\vec{t}}{ds}}_{\vec{n} \cdot c} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\dot{s}} =$

$= c\dot{s}\vec{n}$

$$\boxed{a = \ddot{s}\vec{t} + c\dot{s}^2 \cdot \vec{n}}$$

accelerazione ha componente normale e componente tangente

Osservo che, in generale, l'accelerazione non è né tangente né normale alla curva, è sempre rivolta verso il centro di curvatura della traiettoria

In particolare in un moto circolare uniforme $\ddot{s} = 0$

$$\begin{cases} a = c \cdot \dot{s}^2 \vec{n} \\ v = \dot{s} t \end{cases} \quad \text{con } c = \frac{1}{\rho}$$

$\longrightarrow v^2 = v \cdot v = \dot{s}\vec{t} \cdot \dot{s}\vec{t} = s^2 \cdot \underbrace{\vec{t} \cdot \vec{t}}_{1} = s^2$

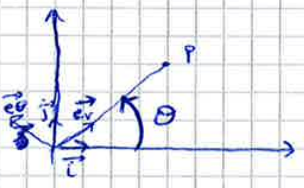
Quindi $\vec{a} = \frac{1}{\rho} v^2 \vec{n} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$ (in fisica $\frac{v^2}{r} \vec{n}$)

che è l'ACCELERAZIONE CENTRIPETA di un MOTO CIRCOLARE UNIFORME

## MOTO PIANO IN COORDINATE POLARI

Il moto è piano se la traiettoria è una curva piana

Introduco coordinate polari



$OP = x_P \vec{i} + y_P \vec{j} = r\cos\theta \vec{i} + r\sin\theta \vec{j}$

Definisco: VERSORI MOBILI

$\vec{e_r} = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$

$\vec{e_\theta} = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}$

Cosa ho fatto per ottenere $\vec{e_\theta}$? $\theta \to \theta + \frac{\pi}{2}$. Infatti $-\sin\theta = \cos(\theta + \frac{\pi}{2})$

e $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}] = \cos\theta$

$\overline{OP} = r \cdot \vec{e_r}$

$$e_k(t) = \sum_{h=1}^{3} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{9 coseni direttori}}}{\alpha_{hk}} \, \vec{i}_h \qquad k = 1..3$$

→ VERSORI della TERNA MOBILE come COMBINAZIONE LINEARE dei VERSORI della TERNA FISSA

Queste 9 quantità non sono totalmente indipendenti o arbitrarie. Infatti il fatto che ~~ta ter~~ il SR mobile sia definito da una terna ortonormale introduce delle 6 condizioni di ortogonalità

$$\delta_{ij} = e_j \cdot e_k = \begin{cases} 1 & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k \end{cases}$$

$$e_1 \wedge e_2 \cdot e_3 = 1$$

Quindi solo 3 quantità dei 9 coseni direttori sono indipendenti (perché le 9-3 (?))

ovvero equivalentemente posso affermare che $\boxed{e_h(t) = \underline{\underline{R(t)}} \cdot i_h}$ **(2)**

con R matrice di trasformazione ortogonale

con $R^T \cdot R = R \cdot R^T = \textcircled{1} \longrightarrow$ matrice identità

Riprendiamo (1)

$$QP(t) = P(t) - Q(t) = OP - OQ$$

$$P(t) = Q(t) + y_1 e_1(t) + y_2 e_2(t) + y_3 e_3(t) = Q(t) + \sum_{h=1}^{3} y_h \bar{e}_h =$$

$$\overset{(2)}{=} Q(t) + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{fuori la} \\ \text{sommatoria}}}{\underline{\underline{R(t)}}} \boxed{\sum_{h=1}^{3} y_h i_h}$$

quantità costante e la chiamo $\hat{p}$ vettore costante

$$P(t) = \underset{\substack{/ \\ \text{ORIGINE} \\ \text{SR SOLIDALE}}}{Q(t)} + \underset{\substack{\llcorner \text{MATRICE DI} \\ \text{ROTAZIONE}}}{\underline{\underline{R(t)}}} \, \hat{p}$$

Sostanzialmente abbiamo solo 3 quantità per determinare l'orientamento del **SR** MOBILE rispetto al SR FISSO

Tra le diverse possibili parametrizzazioni (scelta delle 3 quantità indipendenti) una è quella degli angoli di Eulero oppure un'altra è quella degli angoli di Cardano.

La scelta è dettata da questioni di comodità in funzione dell'applicazione

Gli angoli di EULERO si possono definire quando

$i_3 \wedge e_3 \neq 0$ → si può identificare il VERSORE ASSE DEI NODI

$$n = \frac{i_3 \wedge e_3}{|i_3 \wedge e_3|}$$

Si definiscono allora

- ANGOLO DI PRECESSIONE $\psi$ (psi)
- ANGOLO DI NUTAZIONE $\theta$ (sigma)
- ANGOLO DI ROTAZIONE PROPRIA $\phi$ (phi)

Si può dimostrare che vi è una corrispondenza (biunivoca localmente) tra i valori degli angoli di Eulero e l'orientamento del SR MOBILE e quindi possiamo trasformare la terna fissa $\{i_h\}$ nella terna mobile $\{e_h\}$ attraverso 3 successive

In generale qualunque vettore $\overline{W}$ SOLIDALE al CR

$$\dot{W} = \bar{\omega} \wedge \overline{W} \qquad (4)$$

② II MA legata all'uso della MATRICE DI ROTAZIONE

FORMULA FONDAMENTALE: condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema sia rigido è che valga

$$\boxed{V_P(t) = V_Q(t) + \bar{\omega} \wedge \overline{QP}}$$

dove P, Q generici punti solidali al CR

Il vantaggio è che questa relazione ci permette di ricavare la velocità di un punto in funzione di quella di un altro (scelto in maniera astuta) conoscendo la velocità angolare $\omega$

DIM NECESSITÀ:

Scegliamo in (4) $\dot{W} = \bar{\omega} \vee \overline{W}$, $\overline{W} = \overline{QP} = \overline{OP} - \overline{OQ} = P - Q$

$$\dot{W} = \dot{QP} = \frac{d\,QP}{dt} = \frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} = V_P - V_Q$$

Da (4) $\dot{QP} = \omega \wedge QP \longrightarrow V_P - V_Q = \omega \wedge QP$

$$V_P = V_Q + \omega \wedge QP$$

SUFFICIENTE:

Verifichiamo la rigidità del moto valutando la distanza di una coppia generica di punti

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{VARIAZIONE NEL TEMPO DELLA} \\ \text{DISTANZA DI UNA COPPIA} \\ \text{GENERICA DI PUNTI}}}{\frac{d(QP)^2}{dt^2}} = \frac{d}{dt}(QP \bullet QP) = \frac{dQP}{dt}\cdot QP + QP \cdot \frac{dQP}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{commutatività} \\ \text{del prodotto} \\ \text{scalare}}}{=} 2\frac{dQP}{dt}\cdot QP =$$

$$= 2(V_P - V_Q)\cdot QP \underset{\substack{\uparrow \\ \text{FORMULA} \\ \text{FONDAMENTALE}}}{=} 2(\omega \wedge QP)\cdot QP = 2\omega \cdot (\underbrace{QP \wedge QP}_{0}) = 0$$

Abbiamo dimostrato che la distanza di due punti generici non cambia nel tempo → MOTO RIGIDO

Ovvero abbiamo dimostrato la formula fondamentale

* TORNIAMO ALLE FORMULE DI POISSON PER DIMOSTRARE CHE

$$\dot{e}_h = \left(\frac{1}{2}\sum_k e_k \wedge \dot{e}_k\right) \wedge e_h$$

dove $\{e_1, e_2, e_3\}$

$$\boxed{\begin{aligned} e_1 &= e_2 \wedge e_3 \\ e_2 &= e_3 \wedge e_1 \\ e_3 &= e_1 \wedge e_2 \end{aligned}} \quad (5A)$$

$$\boxed{e_i \cdot e_k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad k = 1,2,3} \quad (5B)$$

$e_k^2 = e_k \cdot e_k = 1$ VERSORE

derivando $\frac{de_k^2}{dt} = \dot{e}_k \cdot e_k + e_k \cdot \dot{e}_k = \frac{d1}{dt} = 0$

!

Equivalentemente $\tilde{p} = \underline{\underline{R}}^{-1} \, QP(t) = \underline{\underline{R}}^{T} \cdot QP(t)$

Derivando$_3$ (8)

$$V_P(t) = V_Q(t) + \dot{R}\,(\underbrace{\tilde{p}}_{R^T\,QP})$$

$$V_P(t) = V_Q(t) + \underbrace{\dot{R}\,R^T}\,QP$$

(a)

si può mostrare che $W = \dot{R}\,R^T$ è una matrice antisimmetrica ovvero

$$W = -W^T$$

$$V_P(t) = V_Q(t) + W\,QP$$

si può mostrare che, ad ogni matrice antisimmetrica, è associato un vettore tale che $W\,QP = \underset{(\text{Omega})}{\omega} \wedge QP$ (b)

Quindi $\boxed{V_P(t) = V_Q(t) + \omega \wedge QP}$ che è la formula fondamentale ⌋

Mostriamo (a)

$W = \dot{R}\,R^T$ dobbiamo mostrare che è antisimmetrica

$R R^{-1} = R \cdot R^T = \underset{\text{matrice IDENTITÀ}}{1}$

Deriviamo ↑

$$\frac{d}{dt} 1 = 0 = \frac{d}{dt}\left(R \cdot R^T\right) = \dot{R}\,RT + R\,\dot{R}T$$

$$\dot{R}\,R^T = -R \cdot \dot{R}^T$$

Se chiamo $W = \dot{R} \cdot RT$ e calcolo $W^T = (\dot{R}R^T)^T = R^{T^T} \cdot \dot{R}T = R \cdot \dot{R}^T$

Quindi $\boxed{W = -W^T}$ → matrice antisimmetrica CVD

Mostriamo (b) ovvero $W\,QP = \omega \wedge QP$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -W_z & W_y \\ +W_z & 0 & W_x \\ -W_y & -W_x & 0 \end{pmatrix}$$ ANTISIMMETRICA dove $a_{ij} = -a_{ji}$

La diagonale è tale da essere $a_{ii} = -a_{ii} = 0$

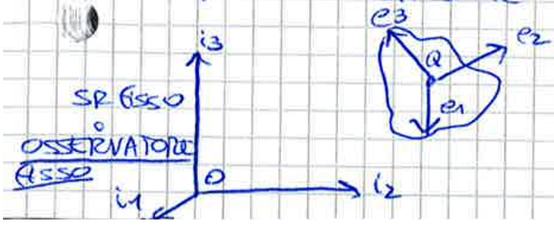
Considero un vettore generico $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$Wu = \begin{pmatrix} \cdot & - \\ - & - \\ - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega \wedge u \quad \text{con} \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

## CINEMATICA RELATIVA

16/03/'15

In teoria all'esame moto in 2 dimensioni.



\+ SR SOLIDALE AL CORPO (MOBILE)

$$\underline{V_A}^P = \underline{V_Q} + \underline{V_R^P} + \underline{\omega} \times \underline{QP}$$

$V_A = V_R$ quando $\underline{V_Q} = 0$ e $\underline{\omega} \parallel \underline{QP}$

## (Th) TEOREMA DI CORIOLIS o LEGGE DI COMPOSIZIONE DELLE ACCELERAZIONI

$$a_A^P = \underline{a_R^P} + \underline{a_{TR}^P} + \underline{a_C^P}$$

$a_C$ = accelerazione di Coriolis

$$\underline{a_{TR}^P} = \underline{a_Q} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{QP} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{QP})$$

$\dot{\omega}$: acc. angolare

$$a_C^P = 2\omega \times V_R^P$$

**DIM:** derivo th Galileo rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt}\underline{V_A}^P = \frac{d}{dt}\underline{V_R^P} + \frac{d}{dt}\underline{V_Q} + \frac{d}{dt}(\underline{\omega} \times \underline{QP})$$

$$\underline{a_A^P} = (\dot{\underline{V}}_R^P)^* + \underline{a_Q} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{QP} + \underline{\omega} \times (\dot{\underline{QP}})$$

$$= (\underline{V_R^P})' + \omega \times V_R^P = (\underline{V_R^P})'$$

$$\underline{a_A^P} = (\underline{V_R^P})' + \underline{\omega} \times \underline{V_R^P} + \underline{a_Q} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{QP} + \underline{\omega} \times (\underset{= V_R^P}{\underline{QP}'} + \underline{\omega} \times \underline{QP})$$

$$\underline{\dot{P}}(t) = \underline{P}'(t) +$$

$P(\cos t, \sin t, 7)$ rispetto O

$P(t, t^2, t^3)$ rispetto Q

$$= a_R^P + \underline{a_Q} + \underline{\dot{\omega}} \times \underline{QP} + \underbrace{2\underline{\omega} \times \underline{V_R^P}}_{\underline{a_C}} + \underbrace{\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{QP})}_{\underline{a_{TR}^P}}$$

$a_Q$: non ha apice P perché SR SOLIDALE si muove anche senza P

Se SR SOLIDALE TRASLA e NON RUOTA $\quad \underline{a_A^P} = \underline{a_R^P} + \underline{a_Q}$ **Th RIVALS** caso particolare

se → RUOTA e NON TRASLA $\quad \underline{a_A^P} = \underline{a_R^P} + \dot{\omega} \times QP + \underline{a_C} + \underline{a_{TR}^P}$

Quando $\underline{a_A^P} = \underline{a_R^P}$ con

$\underline{a_{TR}^P} = 0 \quad + \quad \underline{a_C^P} = 0$

↓ $\qquad$ ↕

$a_Q = 0$ (traslazione uniforme) $\qquad \omega = \dot{\omega} = 0$ (acc. angolare nullo, moto rettilineo)

Quindi quando MOTO RETTILINEO UNIFORME → CASO DI TRASFORMAZIONE DI GALILEO ($a_A^P = a_R^P$)

Sulla parte di cinematica relativa, poco all'esame 19/03/'15

**MOTI RIGIDI** (ripasso)

**Legge fondamentale velocità** (x due punti qualsiasi appartenenti al corpo rigido)

$$V_P(t) = V_Q(t) + \omega \times QP \qquad \forall P, Q \in C.R.$$

**Legge fondamentale accelerazione**

$$a_P(t) = a_Q(t) + \dot{\omega} \wedge QP + \omega \wedge (\omega \wedge QP)$$

Se ad un dato istante di tempo $t = t^*$ $\omega(t^*) = 0$

$$\boxed{V_P(t^*) = V_Q(t^*)}$$

cioè in quell'istante velocità di 2 punti qualsiasi è la stessa.

Si parla di **ATTO DI MOTO TRASLATORIO** cioè tutti i punti del corpo rigido hanno la stessa velocità ma, in generale, diverse accelerazioni

$\dot{\omega}(t^*) \neq 0$ (potrebbe)

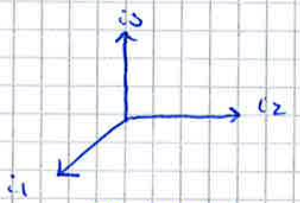
Se per $t = t^*$ $V_Q(t^*)$ allora $V_P(t^*) = \omega(t^*) \wedge QP$ e si parla di **ATTO DI MOTO ROTATORIO** → moto intorno ad un asse che passa per Q e parallelo alla retta definita da $\omega(t^{*})$ che è detto **ASSE ISTANTANEO DI ROTAZIONE**

**CARATTERIZZAZIONE DEI MOTI RIGIDI** ← relativo alle posizioni e non velocità ← nel tempo completo in un intervallo

- Classificare i diversi moti del CR in intervallo di tempo finito $t \in [t_1, t_2]$

**MOTO TRASLATORIO** se ogni retta solidale al CR mantiene orientamento invariabile che avviene se e solo se

$\omega(t) = 0 \qquad \forall t \in [t_1, t_2]$



SR FISSO

SR MOBILE

Pedale della biciletta mantiene orientamento invariabile nel tempo

**DIM.** Vogliamo dimostrare che è moto traslatorio se e solo se $\omega(t) = 0$

se $\Rightarrow$ $\quad \dot{e}_k = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{2} \sum_k e_k \wedge \dot{e}_k = 0 \Rightarrow \omega = 0$

solo se $\Leftarrow$ $\quad \omega = 0 \Rightarrow \dot{e}_k = \underbrace{\omega}_{=0} \wedge e_k = 0$

Quindi la matrice di rotazione che trasforma terna fissa in quella mobile è la matrice identità $R = 1$

Quindi $e_k = i_k$ → $e_k$ rimangono costanti sempre nell'intervallo in cui

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{\theta} e_2 \\ \dot{e}_2 = -\dot{\theta} e_1 \\ \dot{e}_3 = 0 \end{cases}$$

Quindi dalle formule di Poisson

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_k e_k \wedge \dot{e}_k = \frac{1}{2}\left( e_1 \wedge \dot{e}_1 + e_2 \wedge \dot{e}_2 + e_3 \wedge \dot{e}_3 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\theta} (e_1 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_1) \underset{\text{commuto e cambio di segno}}{=} \dot{\theta} (\underbrace{e_1 \wedge e_2}_{\substack{e_3 = i_3 \\ \text{x definizione terna ortonormale}}}) = \dot{\theta} i_3$$

Quindi $\boxed{\omega = \dot{\theta} i_3}$

velocità angolare parallela a $i_3$ e costante CVD

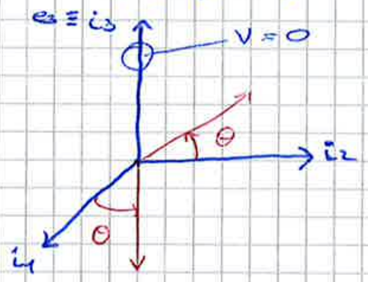
$$\boxed{V_P(t) = V_Q(t) + \dot{\theta} i_3 \wedge QP}$$

SONO NECESSARI 4 PARAMETRI CHE IDENTIFICANO LE COORDINATE DELL' ORIGINE $Q(t)$ e L'ANGOLO $\theta$ CHE IDENTIFICA I VERSORI SOLIDALI.

Un caso particolare del moto rototraslatorio:

**Moto rotatorio**

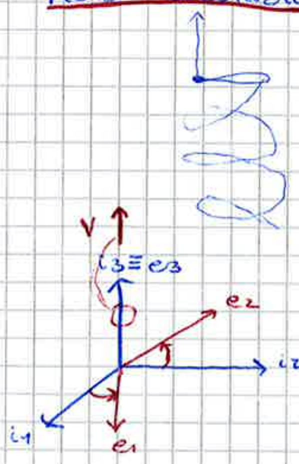
Moto in cui esiste una retta detta ASSE DI ROTAZIONE parallela alla direzione privilegiata indicata da $\omega$ tale che i suoi punti hanno velocità nulla



BASTA 1 PARAMETRO ($\theta(t)$) PER DESCRIVERE IL MOTO ROTATORIO

Per convenzione la direzione di $\omega$ è determinabile attraverso la regola della mano destra in cui le dita si chiudono nella direzione della rotazione e $\omega$ è identificato nella direzione del pollice. Rotazione antioraria identifica $\omega_z$ positiva

**Moto elicoidale**



Esiste una retta parallela alla direzione privilegiata $\omega$ in cui i punti hanno velocità parallela alla retta stessa.

Ex. ascensore che sale, su cui orologio in cui lancette girano

MI BASTANO 2 PARAMETRI X DESCRIVERE IL MOTO ELICOIDALE. Infatti le coordinate $X_Q$, $Y_Q$ sono costanti e devo conoscere $(z, \theta)$

## OSS. ANALOGIA TRA MOTO PIANO DI ROTAZIONE e MOTO PIANO RETTILINEO

### ROTAZIONE CON ASSE FISSO
(1 GRADO DI LIBERTÀ)

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega_z$$

Integro

$$\theta - \theta_0 = \int_0^t \omega_z(\tau)\,d\tau =$$

$$= \omega_z \underbrace{\int_0^t d\tau}_{=t}$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_z t}$$

Se ad esempio accelerazione angolare è costante ($\alpha$)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\omega_z) = \alpha$$

Integro

$$\omega_z(t) = \omega_z(0) + \alpha t$$

Ma $\frac{d\theta}{dt} = \omega_z$

$$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega_z\,d\tau =$$

$$= \theta_0 + \omega_z(0)\,t + \int_0^t \alpha\tau\,d\tau =$$

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega_z(0)\,t + \alpha\frac{t^2}{2}}$$

### TRASLAZIONE 1D
(1 GRADO DI LIBERTÀ)

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = V_x$$

Integro

$$\boxed{x = x_0 + V_x t}$$

Analogalmente al caso rotatorio, se considero accelerazione costante

$$V_x = V_{x_0} + a_x t$$

Integrando

$$\boxed{x = x_0 + V_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2}$$

Quindi effettivamente corpi rigidi con lo stesso n° di gradi di libertà sono descritti in modo ANALOGO → medesime equazioni → soluzione che descrive il moto ANALOGA

Riassumendo abbiamo che:

| | | |
|---|---|---|
| • CR LIBERO nello spazio | $V_P(t) = V_Q(t) + \omega(t) \wedge QP$ | 6 GRADI DI LIBERTÀ = 6 PARAMETRI NECESSARI a descrivere un CR nello spazio |
| • MOTO ROTOTRASLATORIO (spazio) | $\omega = \dot{\theta}$ $(\omega_z = \dot{\theta})$<br>$V_P = V_Q + \dot{\theta} i_3 \wedge QP$ | 4 GRADI DI LIBERTÀ |
| • MOTO TRASLATORIO (spazio) | $\omega_{(t)} = 0$<br>$V_P(t) = V_Q(t)$ | 3 GRADI DI LIBERTÀ |
| • MOTO ROTATORIO (spazio) | $V_P = \dot{\theta} i_3 \wedge QP$<br>(scegliendo $Q \in$ asse di rotazione) | 1 GRADO DI LIBERTÀ |
| • MOTO ELICOIDALE (spazio) | - - - - - - - - | 2 GRADI DI LIBERTÀ |
| • MOTO POLARE | - - - - | 3 GRADI DI LIBERTÀ |

parametri indipendenti (2 coordinate origine terna mobile + angolo di rotazione)

Nel nostro caso con VINCOLO la posizione di qualunque punto dell'asta e' nota conoscendo 2 parametri $\{ s(t), \theta(t) \}$

$$OG(t) = \left(s + \frac{l}{2}\cos\theta\right)\vec{i} + \left(\frac{l}{2}\sin\theta\right)\vec{j} \qquad G = G(s,\theta) = G(s(t),\theta(t))$$

↑ posizione punto medio dell'asta

velocità punto medio $V_G = \frac{d}{dt}G(s,\theta) = \frac{\partial G}{\partial s}\underbrace{\frac{\partial s}{\partial t}}_{\dot{s}} + \frac{\partial G}{\partial \theta}\underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial t}}_{\dot{\theta}} = \frac{\partial G}{\partial s}\dot{s} + \frac{\partial G}{\partial \theta}\dot{\theta}$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \vec{i} + 0\vec{j}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = -\frac{l}{2}\sin\theta\,\vec{i} + \frac{l}{2}\cos\theta\,\vec{j}$$

Quindi $V_G = \left(\dot{s} - \frac{l}{2}\sin\theta\right)\vec{i} + \left(\frac{l}{2}\cos\theta \cdot \dot{\theta}\right)\vec{j}$

$s$ e $\theta$ sono parametri indipendenti ed essenziali

Chiamando $q_1 = s$ $\quad q_2 = \theta$ si ha che la velocità di un generico punto

$$V_P = \frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial P}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial P}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}\dot{q}_2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial P}{\partial q_k}\dot{q}_k$$

In generale vi sono 2 approcci diversi per descrivere il moto di ogni punto del corpo rigido:

① **APPROCCIO LAGRANGIANO** se seguo ogni punto del corpo rigido nella sua evoluzione temporale (approccio seguito nella classificazione dei moti rigidi di giovedì scorso)

② **APPROCCIO EULERIANO** si congela il sistema e si considera il campo di velocità → si considerano i cosiddetti ATTI DI MOTO RIGIDO ad un tempo congelato

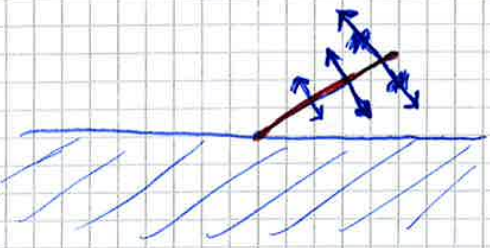
Si definisce un **ATTO DI MOTO VIRTUALE** un atto di moto compatibile con i vincoli nell'istante di tempo considerato

Analogamente si definiscono **VELOCITÁ VIRTUALI** quelle compatibili con i vincoli ad un istante fissato (non necessariamente queste corrispondono alle velocità effettive)

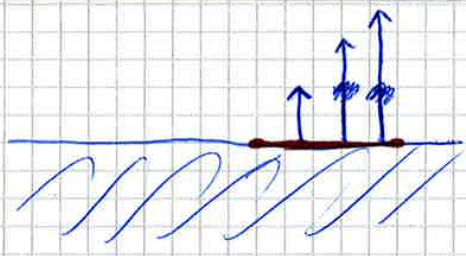
Equivalentemente si definiscono **SPOSTAMENTI VIRTUALI**

Ricordo $V_P = \sum_k \frac{\partial P}{\partial q_k}\dot{q}_k$ $\qquad v = \frac{ds}{dt}$ → SPOSTAMENTO EFFETTIVO

$$ds = v\,dt$$



SPOSTAMENTI VIRTUALI REVERSIBILI



Nelle configurazioni di frontiera ho SPOSTAMENTI VIRTUALI IRREVERSIBILI (quelli opposti non definiti)

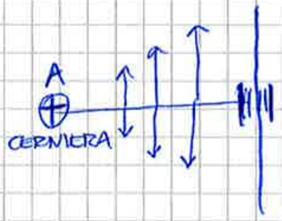
**DEF.** Se il sistema ha configurazioni con spostamenti virtuali non reversibili allora è soggetto a VINCOLI UNILATERI; se invece tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili allora si parla di VINCOLO BILATERO

**N.B.** Tale definizione può essere fatta considerando gli spostamenti virtuali e non quelli effettivi. Ricordando punto su guida mobile

velocità o spostamenti virtuali sono tangenti alla guida e, esclusi gli estremi dell'asta, sono reversibili

Mentre uno spostamento/velocità effettiva avrà una componente ⊥ e concorde con la rotazione del vincolo. Non sarà mai definito l'opposto → IRREVERSIBILITÀ

**N.B.** In generale spostamenti virtuali ed effettivi saranno diversi (non solo per vincoli mobili)



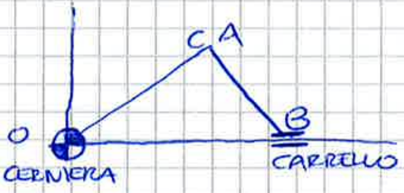
- carrello che vincola B su guida

Effettivamente l'asta non si può muovere ma le velocità virtuali sono perpendicolari all'asta

26/03/15

Esempio

Biella - manovella



2 aste AB e OC

Cerniera → mi dà moto rotatorio in O

Carrello → mi dà moto traslatorio in B

Movimento della manovella in O trasforma moto rotatorio in moto traslatorio in B

## CLASSIFICAZIONE DI VINCOLI

VINCOLI
- BILATERALI o BILATERI → spostamenti virtuali tutti reversibili ①
- UNILATERALI o UNILATERI → spostamenti virtuali (alcuni) irreversibili ②

① – EQUAZIONE (guida circolare $x^2+y^2=R^2$)

② – DISEQUAZIONE ( piano di appoggio $y \geq 0$; dentro palloncino $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$)

VINCOLI
- FISSI
- MOBILI – dipendenza esplicita dal tempo

VINCOLI
- POSIZIONALI – limita le posizioni del sistema ma non le velocità
- NON POSIZIONALI (es. DI MOBILITÀ) – limita la velocità

VINCOLI
- SEMPLICI
- DOPPI
- tripli

in fx di quante equazioni necessarie a descrivere il vincolo → quanti gradi di libertà vengono tolti al sistema

**COORDINATE LIBERE** (PARAMETRI LIBERI) o **LAGRANGIANE** = coordinate essenziali cioè necessarie, tale che nessuna può essere eliminata, e **INDIPENDENTI** (non c'è legame tra loro); servono a descrivere o parametrizzare le configurazioni del sistema in maniera sufficientemente regolare

Supponendo di avere N coordinate lagrangiane posso descrivere un punto generico del sistema

$$P(q_1, q_2, \dots q_N; t) \quad \text{dove} \quad q_i = q_i(t)$$

Assegnate le coordinate lagrangiane $q_i(t)$, abbiamo il moto del sistema.

In particolare la velocità di un generico punto

$$V_P = \frac{dP}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial P}{\partial t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial q_k} \dot{q}_k + \boxed{\frac{\partial P}{\partial t}}$$ – se vincolo mobile (MOBILITÀ DEL VINCOLO)

## SPOSTAMENTI EFFETTIVI

$$dP = V_P dt = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial q_k} \underbrace{dq_k}_{\text{SPOSTAMENTO EFFETTIVO DELLA COORDINATA LAGRANGIANA}} + \boxed{\frac{\partial P}{\partial t}} dt$$

## SPOSTAMENTI VIRTUALI

Uso $\delta$ (delta) x virtuale, $d$ x effettivo

$$\delta P = \underbrace{V_P'}_{\text{velocità virtuale}} dt = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P}{\partial q_k} \underbrace{\delta q_k}_{\text{SPOSTAMENTO VIRTUALE DELLA COORDINATA LAGRANGIANA}}$$

Valutando la reversibilità degli spostamenti virtuali, distinguiamo tra VINCOLI BILATERALI e UNILATERALI

I Vincoli bilaterali (su cui ci concentreremo) impongono un legame tra le coordinate (quella del disco e della guida) siano uguali

~~Istantaneamente~~ Visto che guida (tavolo) é ferma, impongo che $V_C = 0$

cioé istantaneamente ho un atto di moto che é rotatorio intorno a C, centro istantaneo di rotazione (che cambia di istante in istante)

↓

Applicando la legge di distribuzione delle velocitá

$$V_G = \underbrace{V_C}_{=0} + \underbrace{\omega}_{-\dot{\theta}\vec{k}} \wedge \underbrace{CG}_{R\vec{j}}$$

( moto in senso orario, pollice dentro foglio, opposto di $\vec{k}$)
REGOLA MANO DX
↳ segno meno

MOTO ROTATORIO (ripasso)

$$V_G = -\dot{\theta}\vec{k} \wedge R\vec{j} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} = R\dot{\theta}\vec{i}$$

→ IL VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO IMPONE RESTRIZIONE SULLE VELOCITÁ ($V_C = 0$)

CHE É EQUIVALE A $\dot{x}_G = R\dot{\theta}$ con $x_G$ = coordinata lungo $\vec{i}$ del centro del disco

Il vincolo di puro rotolamento é VINCOLO DI MOBILITÁ perché limita le velocitá del sistema.

Tuttavia in questo caso si puó integrare la relazione $\dot{x} = R\dot{\theta}$ ottenendo

$x_G = R\theta + \text{cost}$

⇒ il vincolo di mobilitá é quindi integrabile ed é equivalente ad un vincolo olonomo (vincolo di posizione) che riduce di un'unitá il numero di coordinate libere necessarie

Tale riduzione o integrazione ad un vincolo olonomo NON é una caratteristica generale di tutti i vincoli di mobilitá e quelli che non sono integrabili sono detti di PURA MOBILITÁ o ANOLONOMI.

Noi lavoreremo sempre con vincoli olonomi

GRADI DI LIBERTÁ

Se i vincoli sono bilaterali e olonomi (DI POSIZIONE o DI MOBILITÁ INTEGRABILI), il numero di gradi di libertá é uguale al numero di coordinate libere o lagrangiane

Infatti per assegnare posizione ed atto di moto devo conoscere le $q_k$ e (COORDINATE LAGRANGIANE) le velocitá lagrangiane $\dot{q}_k$ che, nel caso di vincoli olonomi, possono essere assegnate liberamente (VINCOLO SULLE POSIZIONI)

Praticamente nei casi che consideriamo di vincoli olonomi e bilateri, se considero un sistema articolato composto da piú corpi rigidi, il numero di gradi di libertá del

Come preciseremo in seguito, sollecitato da un sistema di forze a risultante nulla.

## SECONDO PRINCIPIO o LEGGE DI AZIONE

$$F = \underbrace{\frac{d}{dt}(mv)}_{\text{variazione quantità di moto}} = m \cdot a \longrightarrow \text{proporzionale accelerazione/forza}$$

forza esercitata sul corpo

## PRINCIPIO DI AZIONE/REAZIONE o TERZO PRINCIPIO

Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria

**N.B.** Stiamo parlando di accelerazioni rispetto a sistemi di riferimento fissi. Tuttavia si possono considerare anche SR in moto traslatorio rettilineo ed uniforme rispetto al SR fisso. (SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI O GALILEIANI)

→ Un SR SOLIDALE con la Terra (a rigore NON INERZIALE) può essere considerato tale visto che la differenza tra le accelerazioni assolute e accelerazioni relative al SR TERRESTRE sono trascurabili per gran parte delle applicazioni ingegneristiche.

- DETERMINISMO MECCANICO

eq. vettoriale

Considerando $\boxed{\vec{F} = m \cdot \vec{a}}$ proiettato sugli assi coordinati → ho sistema di 3 equazioni differenziali del 2° ordine

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

3 eq. scalari

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F_x}{m} \\ \ddot{y} = \frac{F_y}{m} \\ \ddot{z} = \frac{F_z}{m} \end{cases} \longrightarrow$$

a cui associamo ~~le coordinate~~ condizioni iniziali

POSIZIONE INIZIALE

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \\ z(t_0) = z_0 \\ \dot{x}(t_0) = V_{ox} \\ \dot{y}(t_0) = V_{oy} \\ \dot{z}(t_0) = V_{oz} \end{cases}$$

VELOCITÀ INIZIALE

Per forze sufficientemente regolari il modello meccanico ammette una soluzione unica che dipende con continuità dal dato iniziale (problema di Cauchy ben posto)

Quali forze?

Distinguiamo tra forze attive e forze vincolari.

### FORZE ATTIVE

Si dà una rappresentazione matematica (analitica) della forza attraverso modello fenomenologico

→ la forza attiva è nota a priori

**ES.** • FORZE COSTANTI

Indipendenti da posizione o velocità del punto e dall'istante di tempo considerato

$$L = \int_1^2 F \cdot dp = -mg\int_1^2 dz = -mg(z_2 - z_1)$$

se la quota di arrivo è uguale a quella di partenza allora il lavoro è uguale a 0

- FORZA ELASTICA

Legge fenomenologica di Hooke

$$\vec F = -K(r - r_0)\vec u$$

K = costante di elasticità della molla (> 0) che mi dà rigidità della molla

$r - r_0$ = elongazione molla rispetto alla condizione di riposo $r_0$

$\vec u$ = versore lungo la direzione della molla

$$U = -\frac{K}{2}(r - r_0)^2$$

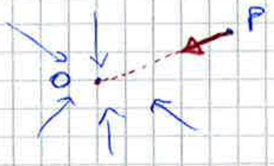
$$L = \int_1^2 F dp = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} -Kx\, dx = -\frac{K}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

→ LAVORO È INDIPENDENTE DALLA TRAIETTORIA SEGUITA e dipende solo da estremo finale ed estremo finale

↑ supponiamo molla con versore parallelo ad $\vec i$ e $r_0 = 0$

- FORZA CENTRALE

Dirette verso un punto fisso, dipendenti dalla distanza da esso



$$\vec F = F(r)\vec u \quad \text{con} \quad \vec u = \frac{OP}{|OP|}$$

$$U = \int F(r) dr$$

Caso classico o celebre di forza centrale è forza gravitazionale

$$F = -\gamma \frac{m_P m_O}{r^2}$$

inversamente proporzionale al quadrato della distanza

↓ costante gravitazionale universale

In particolare la forza peso di un punto sulla Terra si ha scegliendo

$r = R$ raggio della Terra

$m_O = M$ massa della Terra

$$\vec F = m\vec g = \underset{\text{meno}}{-}mg\vec k \quad \text{con} \quad g = \frac{\gamma M}{R^2} = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$$

Il potenziale della forza peso $U = -\int mg\, dr = -mgr = -mgz + cost$

$z = r - R$ = QUOTA DEL PUNTO SULLA TERRA IN SR CON ASSE Z ORIENTATO nel VERSO della VERTICALE ASCENDENTE

In generale chiameremo FORZA ATTIVA quelle forze per cui sono note a priori (attraverso relazioni fenomenologiche) la dipendenza dall'atto di moto (posizione o velocità del punto di applicazione della forza) ed eventualmente la dipendenza esplicita dal tempo

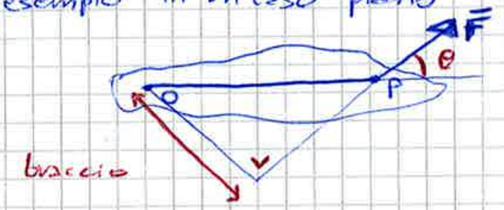
Vale il principio di trasmissibilità per cui una forza può essere applicata in qualunque punto della retta di azione senza modificare gli effetti risultanti

**MOMENTO** di una forza applicata $(A\ F)$ (e comunque di un vettore applicato) rispetto ad un polo O è definito come il vettore

$$\overline{M_O} = \overline{OP} \wedge \overline{F}$$

↑ momento di F rispetto ad O

Ad esempio in un caso piano



$M_O = b F \vec{K}$

con $\vec{K}$ = versore perpendicolare al piano con verso dato dalla regola della mano destra

con $b$ braccio $b = \overline{OP} \cdot \sin\theta$

$$|M_O| = \underbrace{|OP|_{\perp}}\ |F|$$

↳ braccio ovvero componente del vettore $\overline{OP}$ ⊥ a F

In pratica il momento tiene conto del fatto che l'applicazione di una forza oltre a spostarlo nella direzione della forza (non sempre), può farlo ruotare

non ruota

ruota

Dato un sistema di forze applicate $\{(P_i, F_i)\}_{i=1....n}$

si definisce il **RISULTANTE** $\overline{R} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$

e il **MOMENTO RISULTANTE** rispetto al polo O $\overline{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overline{OP_i} \wedge \overline{F_i}$

$\overline{R}$ e $\overline{M_O}$ sono detti **VETTORI CARATTERISTICI** del SISTEMA DI FORZE

- Cosa succede cambiando polo O → Q

$$M_Q = QP \wedge F = (QO + OP) \wedge F = QO \wedge F + \underbrace{OP \wedge F}_{M_O} =$$

$$= QO \wedge F + M_O$$

**N.B.** Solo per scelte particolari di Q (se $QO \parallel F$) ovvero applichiamo il vettore lungo un punto qualsiasi della retta di applicazione) → $M_Q = M_O$

Nel caso di sistemi di vettori $M_Q = \sum QP_i \wedge F_i = \sum_i QO \wedge F_i + \sum_i OP_i \wedge F_i$

## LAVORO DI UN SISTEMA DI FORZE SU UN CR

$$dL = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \underset{\text{spostamento infinitesimo}}{dP_i} \qquad (P_i, F_i) \quad P_1 \quad P_2 \quad Q \quad P_3 \qquad (1)$$

In un corpo rigido sappiamo che vale la formula fondamentale delle velocità

$$\frac{dP_i}{dt} = \overline{V}_{P_i} = \underset{\frac{dQ_i}{dt}}{\overline{V}_Q} + \overline{\omega} \wedge \overline{QP}$$

$$dP_i = dQ_i + \underbrace{\omega dt}_{\varepsilon \text{ (epsilon)}} \wedge QP$$

Sostituendola nella (1)

$$dL = \underbrace{\sum_i F_i}_{L = R} \cdot dQ + \underbrace{\sum_i F_i \cdot \varepsilon \wedge QP_i}_{\substack{\text{PERMUTAZIONI CICLICHE} \\ \text{PRODOTTO } \text{~~ESTERNO~~ MISTO}}} =$$

$$= R \cdot dQ + \underbrace{\left(\sum_i QP_i \wedge F_i\right)}_{M_Q} \cdot \varepsilon$$

$$dL = \underset{\text{risultante}}{R} \cdot dQ + \underset{\substack{\text{momento risultante} \\ \text{rispetto } Q}}{M_Q} \cdot \varepsilon \text{ — } \omega dt$$

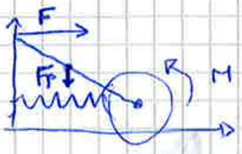
Il lavoro del sistema di forze sul corpo rigido dipende solo dai vettori caratteristici del sistema di forze e quindi non cambia se si sostituisce un sistema di forze equivalente che abbia gli stessi vettori caratteristici

- COPPIA DI FORZA DI MOMENTO $\overline{M} = M(\theta)\vec{k}$ APPLICATA AD UN CORPO RIGIDO CON ASSE DI ROTAZIONE $\parallel \vec{k}$ e ANGOLO DI ROTAZIONE $\theta$

$$dL = \underset{\substack{=0 \\ \text{per definizione} \\ \text{di coppia}}}{\overline{R}} dQ + \underset{\text{indipendente dal polo } (R=0)}{\overline{M}} \cdot d\theta K = M(\theta) K \cdot d\theta K = M(\theta)\, d\theta$$

Ricordando $dL = dU \qquad U(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} M(s)\, ds + \text{cost}$

può capitarmi all'esame



## DINAMICA DEI SISTEMI (SISTEMI DI N PUNTI MATERIALI)

(dotati di massa)

Per l'i-esima particella vale la seconda legge di Newton

$$m_i a_i = \underset{\text{forza attiva}}{F_i} + \underset{\text{forza vincolare}}{\phi_i}$$

Sommando su tutti i punti

$$\sum_{i=1}^{n} m_i a_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_i}_{R^{\text{ATTIVE}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \phi_i}_{R^{V}}$$

$R^A$ = risultante delle forze attive

$R^V$ = " " vincolari

**NB.** Non compaiono le forze interne perché siamo in un sistema equilibrato

$$\Sigma AP_i \wedge m_i a_i = M_A^a + M_A^v = M_A^{EXT} \qquad (3)$$

momento risultante delle forze esterne rispetto al polo arbitrario A

Fine ripasso

Cerchiamo di rendere + operativa la (2) riscrivendola con quantità dinamiche che sono facilmente individuabili arrivando alla 1° EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA.

La quantità di moto del sistema $Q = \sum_i m_i V_i$ $\qquad (\overline{Q} / \overline{V})$ vettori

Ricordando la definizione di baricentro

SISTEMA DISCRETO

$$OG = \frac{\Sigma m_i OP_i}{\boxed{\Sigma m_i}}$$

MASSA TOTALE

ovvero in componenti

$$X_G = \frac{1}{m} \sum_i m_i X_i$$

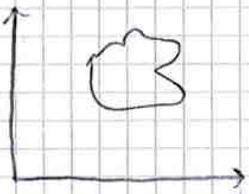
$$Y_G = \text{------}$$

SISTEMA CONTINUO

$$\frac{\int_c \rho \overline{OP}\, d\tau}{\int_c \rho\, d\tau}$$

$\rho$ = densità di massa

$d\tau$ elemento di volume infinitesimo



$$OG = \frac{\Sigma m_i OP_i}{m}$$ massa totale $m = \sum_i m_i$

Quindi $m\,OG = \Sigma m_i OP_i$

Deriviamo rispetto al tempo supponendo che la massa sia costante

$$m \frac{dOG}{dt} = \sum_i m_i \frac{dOP_i}{dt}$$

Ricordiamo che $OG = G - O$

$$m \frac{dOG}{dt} = m\left(\frac{dG}{dt} - \frac{dO}{dt}\right) = m(V_G - \cancel{V_O})$$

$= 0$ perché O è origine del SR

$$\Sigma m_i \frac{dOP_i}{dt} = \Sigma m_i \frac{d}{dt}(P_i - O)$$

$$m \frac{dOG}{dt} = m V_G = \sum_i m_i (V_i - V_o)$$

Quindi $m V_o = \sum_i m_i V_i = Q$ $\qquad$ DEFINIZIONE DI QUANTITÀ DI MOTO TOTALE

$$\boxed{Q = m V_G}$$

La quantità di moto per un sistema generico è uguale al prodotto tra la velocità del baricentro e la massa totale

$$\frac{dK_O}{dt} = \underbrace{V \wedge mV}_{mV \wedge V = 0} + \underbrace{OP \wedge ma}$$

MOMENTO RISULTANTE rispetto ad O delle forze agenti sulla particella ($\Gamma_O$)

$$\boxed{M_O = \frac{dK}{dt}}$$

II EQ. CARDINALE x PARTICELLA SINGOLA E POLO O FISSO

ovvero il momento risultante eguaglia la derivata del momento angolare (o momento della quantità di moto)

16/04/15

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

$$m_i a_i = F_i^{EXT} = \underset{ATTIVE}{F_i} + \underset{VINCOLARI}{\Phi_i} \quad (1)$$

$$\sum_i m_i a_i = R^{EXT} = R^A + R^V$$

QUANTITÀ DI MOTO per sistema discreto $Q = \sum_i m_i V_i \longrightarrow Q = m V_G$ con $m = \sum_i m_i$

$$\boxed{R^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m a_G}$$

1° EQ. CARDINALE

RELAZIONE CAUSA/EFFETTO PER IL MOTO TRASLATORIO

II EQ. CARDINALE

Partendo da (1) e con A polo arbitrario

$$\underbrace{\sum_i AP_i \wedge m_i a_i} = M_A^{EXT} = M_A^{ATT} + M_A^{V}$$

Caratterizzeremo questa quantità introducendo il momento delle quantità di moto o MOMENTO ANGOLARE

$K_A = \sum_i AP_i \wedge m_i V_i$ SISTEMI DISCRETI

$\left( K_A = \int_B AP \wedge \rho \overset{velocità}{V} \, d\overset{volume}{V} \right.$ SISTEMI CONTINUI)

Per cui la (3) si risolve per scelte opportune del polo A (fisso o coincidente con il baricentro)

$$\boxed{M_A^{EXT} = \frac{dK_A}{dt}}$$

II EQ. CARDINALE

Strutturalmente analoga alla (2) e fornisce relazione causa/effetto per il moto rotatorio

In particolare $K_A$ assumerà un'espressione "semplice" per i corpi rigidi e per scelte opportune del polo ad esempio $A \equiv G$ (baricentro)

$K_G = \underset{\text{matrice d'inerzia}}{I_G} \cdot \omega$ — velocità angolare

Le equazioni cardinali sono la "summa" dei principi della meccanica, sono condizioni necessarie per un qualunque problema dinamico (sempre valide) forze considerato $(R^{ext}, M^{ext})$

↳ sistemi di forze equivalenti (con medesimi vettori caratteristici) forniscono la stessa risposta dinamica (interesse ingegneristico)

**N.B.** le eq. cardinali sono necessarie ma non sufficienti a determinare il moto di un sistema generico. (non compaiono le forze interne che sono un sistema equilibrato $R^I = M^I = 0$)

Invece per sistemi rigidi le eq. cardinali sono necessarie ma anche sufficienti a determinare moti rigidi

**N.B.** Sul testo di teoria vi è distinzione tra velocità del punto materiale (attaccato al corpo) e la velocità del punto ~~generico~~ geometrico (punto contatto disco / sfitto) del punto/polo arbitrario.

Supereremo la questione con la formula di trasposizione dei momenti per punti non solidali (punti che non si muovono con il corpo come punto di contatto tra corpo e pavimento).

Dobbiamo caratterizzare $K_A$ e trovare un'espressione esplicita ed agevole e questo si può fare introducendo l'ipotesi che il sistema sia rigido per cui sappiamo la formula fondamentale delle velocità (CINEMATICA RIGIDA)

$$K_A = \sum AP_i \wedge m_i v_i \underset{v_i = v_A + \omega \wedge AP_i}{\overset{\uparrow}{=}} \underbrace{\sum AP_i \wedge m_i v_A}_{(a)} + \underbrace{\sum AP_i \wedge (m_i \omega \wedge AP_i)}_{(b)}$$

dove abbiamo supposto che A sia solidale al corpo rigido così da poter usare la formula fondamentale

(a) $$\sum_i m_i AP_i \wedge v_A \underset{\substack{\text{DEFINIZIONE}\\ \text{BARICENTRO}}}{\overset{\uparrow}{=}} m AG \wedge v_A$$

$$AG = \frac{\sum m_i AP_i}{\underbrace{\sum_i m_i}_{m}}$$

(b) $$\sum_i m_i AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) =$$

introduciamo un SR SOLIDALE AL CR CON ORIGINE IN A $= A(e_1, e_2, e_3)$ e indichiamo le coordinate del punto P rispetto a questo SR SOLIDALE COME $x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}$ e analogamente la velocità angolare $\omega$ rispetto a questa terna $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

$$AP_i \wedge (\omega \wedge AP_i) = \left(\sum_{k=1}^{3} x_{ik} e_k\right) \wedge \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{3} x_{ik} e_k\right) \wedge [(\omega_2 x_{i3} - \omega_3 x_{i2}) e_1 + (\omega_3 x_{i1} - \omega_1 x_{i3}) e_2 + (\omega_1 x_{i2} - \omega_2 x_{i1}) e_3$$

$$= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} \\ (\ldots) & (\ldots) & (\ldots) \end{vmatrix} =$$

→ Quindi la II eq. cardinale ~~del CR~~ per un CR e per scelte opportune di A.

accelerazione angolare

$$M_A^{EXT} = \frac{dK_A}{dt} = \frac{d(I_A\omega)}{dt} \underset{\uparrow}{=} \boxed{I_A}\,\frac{d\omega}{dt} =$$

$I_A$ costante nel moto considerato

resistenza che corpo oppone alla ~~rotazione~~ variazione della ω per cui un dato momento esterno un corpo con termine di inerzia maggiore subirà un'accelerazione angolare minore

Analogalmente al ruolo della ~~prima~~ I eq. cardinale nel caso del moto traslatorio

$$R^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m\,a_G$$

massa, resistenza del corpo ad essere messo in movimento

accelerazione baricentro

20/04/15

EQ. CARDINALI

$$R^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m a_G$$ 1 equazione vettoriale → 3 equazioni scalari

$$M^{EXT} = \frac{dK_A}{dt}$$ se $A \equiv G$ BARICENTRO

$A \equiv O$ punto fisso

1 eq. vettoriale → 3 eq. scalari

EXT = ATTIVE + VINCOLARI

Nel caso di corpo rigido e se $A \equiv G$ o $A \equiv O$

$$\boxed{K_A = I_A\,\omega}$$

ω = velocità angolare

$I_A$ = matrice d'inerzia

ovvero

$$K_A = \sum_{h,\ell=1}^{3} I_{h\ell}\,\omega_\ell\,\bar{e}_k = I_A\,\bar{\omega}$$

$$I_A = \begin{vmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_z \end{vmatrix}$$

MOMENTI D'INERZIA rispetto agli assi coordinati

PRODOTTI D'INERZIA per definizione sono tali che che $I_{hl} = I_{lh}$ → MATRICE SIMMETRICA

- La matrice d'inerzia permette di determinare i prodotti d'inerzia rispetto ad una qualunque retta passante per A
- Inoltre essendo simmetrica e definita positiva, è diagonalizzabile

$$\begin{vmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & \bullet \end{vmatrix}$$ utilizzando una terna principale d'inerzia

di autovettori di $I_A$ detta

e rispetto agli assi principali d'inerzia i momenti non nulli sono detti PRINCIPALI D'INERZIA

Cosa dobbiamo fare se vogliamo calcolare il momento delle quantità di moto rispetto a polo B $(\neq A)$ non solidale al corpo rigido (ad esempio punto contatto disco che rotola senza strisciare

→ USIAMO FORMULA DI TRASPOSIZIONE DEI MOMENTI ANGOLARI

$$K_B = \sum_h BP_h \wedge m_h V_h \underset{\uparrow}{=}$$

$BP_h = P_h - B = P_h - A + A - B = AP_h + BA$
scegliendo A solidale al corpo rigido

$$K_B = \underbrace{\sum_h AP_h \wedge m_h V_h}_{K_A} + \underset{\text{non dipende da } h}{BA} \wedge \underbrace{\sum_h m_h V_h}_{Q}$$

$$K_B = K_A + BA \wedge \underbrace{Q}_{= m V_G}$$

QUANTITÀ DI MOTO TOTALE

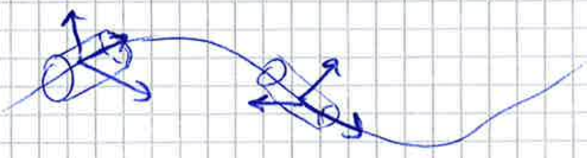
dove $BA \wedge Q$, termine aggiuntivo, si annulla se $V_G = 0$ o se $BA \parallel V_G$

- Per corpi rigidi la derivata del momento della quantità di moto rispetto al baricentro $(K_G = I_G \omega)$ vale in generale

$$\boxed{\dot K_G = \frac{dK_G}{dt} = I_G \cdot \dot\omega + \omega \wedge I_G \omega}$$

Come faccio a ricavarla?

Si individua un SR SOLIDALE al CR con origine nel baricentro



in cui l'osservatore vede il CR in quiete

Ricordando il risultato di cinematica relativa per un vettore generico $\bar C$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata rispetto a} \\ \text{osservatore fisso}}}{\dot C} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata rispetto} \\ \text{osservatore solidale}}}{C'} + \omega \wedge C \quad \text{(Ripasso)}$$

Infatti $C = C_1 e_1 + C_2 e_2 + C_3 e_3$

$$\dot C \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formule di} \\ \text{Poisson}}}{=} \underbrace{\dot C_1 e_1 + \dot C_2 e_2 + \dot C_3 e_3}_{\substack{C' \text{ derivata rispetto} \\ \text{osservatore solidale} \\ \text{che vede } e_1, e_2, e_3 \\ \text{fissi}}} + \underbrace{\omega \wedge C_1 e_1 + \omega \wedge C_2 e_2 + \omega \wedge C_3 e_3}_{\omega \wedge C}$$

Quindi $\dot C = C' + \omega \wedge C$ in particolare se $C = \omega \rightarrow \boxed{\dot\omega = \omega'}$

possono essere sostituiti con il sistema nullo (sistema di forze nullo) e quindi trascurate.

Le equazioni cardinali sono necessarie e sufficienti a determinare il moto di un corpo rigido (invece sono solo necessarie per un sistema generico!) e si devono completare con opportune relazioni costitutive

## CORPO RIGIDO NELLO SPAZIO LIBERO

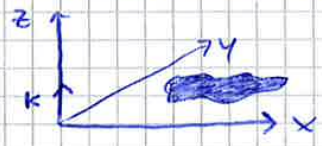
ha 6 gradi di libertà, ovvero 6 parametri liberi o coordinate lagrangiane

$$\bar{q} = q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

$$\begin{array}{l} \text{3 eq. scalari} \leftarrow \\ \\ \text{3 eq. scalari} \leftarrow \end{array} \begin{cases} R^A + R^V = m a_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ \\ M^A + M^V \underset{\substack{\uparrow \\ A \equiv G \\ A \equiv O}}{=} \dfrac{dK_A}{dt} = \sum_k I_{A_k} \dot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) + \omega(q, \dot{q}) \wedge \underbrace{K_A(q, \dot{q})}_{I_A\, \omega(q, \dot{q})} \end{cases}$$

3 + 3 = 6 EQ. SCALARI dette EQUAZIONI DI EULERO

## CORPO RIGIDO NEL PIANO



$$\left.\begin{array}{l} R^A_x + R^V_x = m\ddot{x}_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \\ R^A_y + R^V_y = m\ddot{y}_G(q, \dot{q}, \ddot{q}) \end{array}\right] \quad \text{2 EQ. SCALARI (I EQ. CARDINALE)}$$

$$M^A_{A_z} + M^V_{A_z} = I_{A_z}\dot{\omega}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \quad \text{1 EQ. SCALARE (II EQ. CARDINALE)} \quad (*)$$

(*) Nel caso piano $\omega = \dot{\theta} K$ con $K\ (= \bar{K})$ normale al piano del moto

$$K_A = I_3 \dot{\theta} K \quad \text{e il termine} \quad \omega \wedge K_A = \dot{\theta} K \wedge I_3 \dot{\theta} K$$
$$= I_3 \bar{\theta}\, \underset{}{\boxed{K \wedge K}}\, 0$$
$$= 0.$$

Inoltre,

$$\frac{dK_A}{dt} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{K è costante}}}{=} \frac{d}{dt}(I_3 \dot{\theta})\, K \longrightarrow M_A^{EXT} = \boxed{\frac{dK_A}{dt}} \text{ nella direzione di K} \rightarrow M_z^{EXT}$$

2 + 1 = 3 EQ. SCALARI corrispondenti ai 3 GRADI DI LIBERTÀ di un CR LIBERO NEL PIANO

In generale il n° equazioni scalari è uguale al n° incognite del problema dinamico.

Se ad esempio una componente delle forze esterne è nulla

$$R^{EXT} \cdot e_j = 0$$

Dalla prima eq. cardinale $\frac{dQ}{dt} \cdot e_j = 0$ ⇒ ovvero la corrispondente componente della quantità di moto si conserva

Se poi $R^{EXT} = 0$ (SISTEMA ISOLATO) allora la quantità di moto totale si conserva.

Analogamente per la II eq. cardinale

$M_A^{EXT} \cdot e_j = 0$ ovvero è nulla la componente del momento risultante delle forze esterne rispetto al polo A

$\frac{dK_A}{dt} \cdot e_j = 0$ si conserva la corrispondente componente del momento delle quantità di moto

Se poi $M_A^{EXT} = 0$ allora $\frac{dK_A}{dt} = 0$ ⇒ $K_A$ si conserva

Ritroviamo il I PRINCIPIO DELLA DINAMICA per cui la quantità di moto e il momento delle quantità di moto (momento angolare) ~~rimangono costanti~~ rimangono costanti

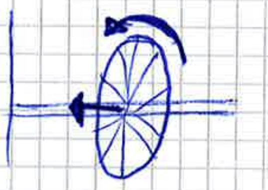
In pratica scegliendo $A \equiv K$ o $A \equiv O$ (fisso)

$$K_A = I_A \omega$$

$$\frac{dK_A}{dt} = M^{EXT} = 0 \Rightarrow K_A = cost$$

$$I_A \omega = cost$$

Se $I_A$ è costante allora $\omega$ è costante, si conserva la velocità angolare



ruota bici, INERZIA GIROSCOPICA per cui asse del giroscopio (o di un corpo rigido posto in rotazione) tende a rimanere costante in direzione

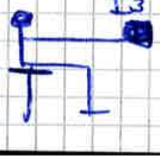
palla da rugby

proiettile

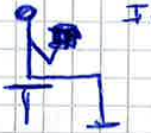
bicicletta

$$K_A = I_A \omega = I_A \dot{\theta} e_3$$

se $K_A$ si conserva $I_A \dot{\theta} = cost$



$I_3$ AUMENTA



$I_3$ DIMINUISCE

matrice d'inerzia $mR^2$

dell'asse di rotazione e lo spostamento dell'asse $\left(\frac{de_3}{dt}\right)$ ha direzione del momento della forza che, per la regola della mano destra, è ortogonale alla forza stessa → TENDENZA AL PARALLELISMO DELL'ASSE GIROSCOPICO con il momento sollecitante.

27/04/'15

## ENERGIA CINETICA

È lo scalare $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$ SISTEMA DISCRETO DI N PUNTI

$$T = \frac{1}{2} \int_{\underset{\text{body}}{B}} \underset{\substack{\text{densità}\\ \text{di massa}}}{\rho} v^2 \, d\tau$$

CORPO B in $R_1, R_2, R_3$

con $\tau \rightarrow$ $dx$, $dx\,dy\,dz$, $dx\,dy$

## ENERGIA CINETICA DI UN CR

le velocità sono distribuite secondo la legge fondamentale delle velocità

$$v_i = v_A + \omega \wedge AP_i$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i \cdot \boxed{v_i} =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i \cdot v_i}_{Q = m v_G} \cdot v_A + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i m_i v_i (\omega \wedge AP_i)}_{\substack{\text{permutando i fattori}\\ \text{del prodotto misto}}} =$$

$$\boxed{a \cdot b \wedge c = c \cdot b \wedge a}$$

$$= \frac{1}{2} m v_G \cdot v_A + \frac{1}{2} \omega \cdot \underbrace{\sum_i AP_i \wedge m_i v_i}_{K_A} =$$

$K_A$ = momento delle quantità di moto rispetto ad A

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_G \cdot v_A + \frac{1}{2} \omega \cdot K_A}$$

ENERGIA CINETICA DI UN CR CON A punto arbitrario ma solidale al corpo rigido

Se in particolare il sistema ha un punto fisso conviene far coincidere la scelta di A polo arbitrario con il punto fisso. Infatti

$$K_A = m AG \wedge \underset{=0}{\boxed{v_A}} + I_A \omega = I_A \omega$$

Quindi se A è fisso ($v_A = 0$)

$$T = \cancel{\frac{1}{2} m v_G \underset{=0}{\boxed{v_A}}} + \frac{1}{2} \omega \cdot \underset{I_A \omega}{\boxed{K_A}}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_A \omega \cdot \omega}$$

ENERGIA CINETICA DI UN CR CON A FISSO

TERNA PRINCIPALE D'INERZIA PER CUI $I_A$ DIAGONALE → $T = \frac{1}{2} \sum_k I_k \omega_k^2$

$\omega_k$: componenti velocità angolari rispetto → terna principale d'inerzia

Ad esempio caso di un moto rotatorio o polare intorno ad una cerniera

- Se invece A coincide con il baricentro del CR ($A \equiv G$)

$$K_G = m \underset{\substack{A \equiv G\\ AG = 0}}{\boxed{AG}} \wedge v_G + I_G \omega \Rightarrow K_G = I_G \omega$$

$$T = \frac{1}{2} m v_G \cdot v_G + \frac{1}{2} \omega \cdot I_G \cdot \omega \rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega \cdot \omega}$$

Quindi il secondo termine è nullo e l'energia cinetica

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \Sigma m_i (V_i^{(G)})^2}_{T^{(G)}}}$$ TH KOENIG

$T^{(G)}$ = energia cinetica relativa al baricentro

in particolare se consideriamo un corpo rigido

$$T = \frac{1}{2} m V_G^2 + T^{(G)}$$

↑ energia cinetica in un SR relativo al baricentro (origine del SR nel baricentro $O \equiv G$) in cui il baricentro è fisso!!

Per cui l'Ecinetica è quella ottenuta nel caso di un punto fisso

$$A \equiv G \rightarrow T^{(G)} = \frac{1}{2} I_G \, \omega \cdot \omega$$

TEOREMA ENERGIA CINETICA (vedremo)

$$\frac{dT}{dt} = \underset{\substack{\text{POTENZA}\\\text{FORZE}\\\text{ATTIVE}}}{\Pi^A} + \underset{\substack{\text{POTENZA}\\\text{FORZE VINCOLARI}}}{\Pi^V}$$

o equivalentemente $dT = dL^A + \underset{=0}{\textcircled{dL^V}}$ =0 nel caso di vincoli ideali

↳ $dT = \textcircled{dL^A}$

$= dU$ × forze conservative

$dT - dU = 0$ $d(T-U) = 0$ $\Rightarrow T = U$ = costante → CONSERVAZIONE ENERGIA (equazione pura, in cui non compaiono reazioni vincolari)

## ENERGIA CINETICA

30/04/15

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\hat{}} m_i V_i^2$$

Se si ha un corpo rigido

↳ $T = \frac{1}{2} m V_G \cdot V_A + \frac{1}{2} \omega \cdot K_A$ ← sostituendo in $V_i$ formula fondamentale

se $A \equiv O$ PUNTO FISSO (SOLIDALE AL CR)

↳ $T = \frac{1}{2} I_A \, \omega \cdot \omega$

se $A \equiv G$ Baricentro

$$T = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \, \omega \cdot \omega$$

## TEOREMA ENERGIA CINETICA

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \sum_i \underset{\substack{\text{ASSUNTA}\\\text{COSTANTE NEL}\\\text{TEMPO}}}{\textcircled{m_i}} \underset{V_i \cdot V_i}{\textcircled{V_i^2}}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_i \frac{dV_i}{dt} \cdot V_i + \sum_i m_i V_i \cdot \frac{dV_i}{dt}\right] \underset{\substack{\text{PRODOTTO}\\\text{SCALARE}\\\text{COMMUTA}}}{=}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \sum_i m_i \underset{a_i}{\textcircled{\frac{dV_i}{dt}}} \cdot V_i \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \sum_i m_i a_i \cdot V_i$$

Ricordando che $m_i a_i = \underset{\substack{\uparrow\\\text{forza}}}{F_i} + \Phi_i$ ← forze vincolari

e ricordando LAVORO = FORZA × SPOSTAMENTO

Ho appena espresso CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA MECCANICA

È naturale definire l'E potenziale $V = -U$

$E = T + V$ ovvero $E_{meccanica}$ = somma $E_{cinetica} + E_{potenziale}$

L'integrale dell'energia (CONSERVAZIONE ENERGIA MECCANICA) è di interesse particolare nello studio di sistemi conservativi ad 1 grado di libertà per cui si ha un'unica coordinata libera o lagrangiana $q$ e un'equazione pura del moto data dalla conservazione dell'energia.

$$T = \frac{1}{2} m \underbrace{\dot{q}^2}_{v^2}$$

$$E(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q) = T + V$$

$$\underbrace{\boxed{T}}_{\frac{1}{2} m \dot{q}^2} = E + U$$

Risolvo rispetto a $\dot{q}$

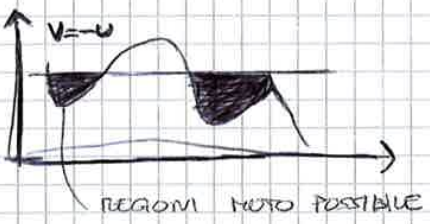
$$\frac{dq}{dt} = \dot{q} = \pm \sqrt{\frac{2(E+U)}{m}}$$

integrando nel tempo

$$q(t) = \int \pm \left(\frac{2(E+U)}{m}\right)^{1/2} dt$$

DETERMINANDO IL MOTO DEL SISTEMA (ovvero il valore dell'unica coordinata lagrangiana per ogni istante di tempo

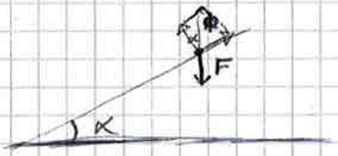
In realtà molte info si possono ottenere da un'analisi qualitativa (ANALISI DI WEIERSTRASS)



BUCHE DI POTENZIALE

## VINCOLI IDEALI

ES. Consideriamo un piano inclinato



$$\Phi = \underbrace{\Phi_T \vec{t}}_{\text{tangente alla superficie}} + \underbrace{\Phi_N \vec{n}}_{\text{normale alla superficie}}$$

Determiniamo il moto del sistema (ovvero il valore dell'unica coordinata lagrangiana per ogni istante di tempo)

- Per gli spostamenti irreversibili si ha che $\delta P$ forma angolo acuto con $\Phi$ (phi)

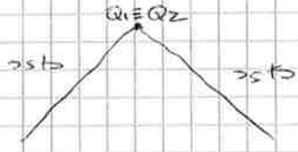
e quindi $\delta L^v = \Phi \cdot \delta P > 0$ (spostamenti irreversibili)

N.B. In questo caso è cruciale che il vincolo sia liscio che ci garantisce che la reazione vincolare $\Phi$ è normale alla superficie

ES. CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO (CERNIERA FISSA IN O)

$$\delta L^v = \Phi \cdot \underset{\overset{\uparrow}{=0 \text{ perché } O \text{ è fisso}}}{\delta O} = 0$$

ES. CERNIERA MOBILE (esempio CERNIERA INTERNA A SISTEMI ARTICOLATI)



$$\delta L^v = \Phi_1 \cdot \delta Q_1 + \Phi_2 \cdot \delta Q_2 = *$$

$\uparrow$
$\delta Q_1 = \delta Q_2$
perché altrimenti le estremità delle 2 aste si allontanerebbero

$$* = \underbrace{(\Phi_1 + \Phi_2)}_{=0 \text{ x principio di A./R.}} \cdot \delta Q_1 = 0$$

$\delta L^v = 0$

ES. VINCOLO DI PURO ROTOLAMENTO → disco che rotola senza strisciare

$V_c = 0$ x evitare strisciamento, quindi anche velocità virtuale è nulla, quindi anche spostamento virtuale è nullo

$$\delta L^v = \Phi \cdot \underbrace{\delta C}_{0} = 0$$

---

Questi esempi ci suggeriscono di introdurre la classe dei VINCOLI IDEALI o PERFETTI t.c. il lavoro virtuale delle forze vincolari è non negativo a partire da una qualunque configurazione. In particolare, per spostamenti reversibili, abbiamo che

$\delta L^v = 0 \qquad \forall \delta P$ REVERSIBILE

↓

ovvero per vincoli ideali bilaterali (tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili)

$\delta L^v = 0$

mentre per vincoli ideali unilaterali (in cui nelle configurazione di confine si hanno spostamenti virtuali irreversibili e nelle conf. di non confine si hanno spostamenti virtuali reversibili)

$\delta L^v \geq 0$

In pratica, considerando vincoli ideali bilaterali (che tratteremo maggiormente):

- VINCOLI DI ATTRITO
- VINCOLI DI RIGIDITÀ
- VINCOLI DI ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO
- VINCOLI INTERNI IN SISTEMI ARTICOLATI COMPOSTI DA + PARTI RIGIDE

$$\begin{cases} F_i = 0 & \forall P_i \text{ LIBERO (non soggetto a vincoli)} \\ F_i + \Phi_i = 0 & \forall P_i \text{ VINCOLATO} \end{cases}$$

↳ ovvero un sistema di punti materiali è in equilibrio se ogni suo punto è in equilibrio

D'altra parte per avere un criterio più agevole per individuare le conf. di equilibrio o statiche di un sistema, osserviamo che la statica ~~dina~~ è un caso particolare della dinamica per cui le equazioni cardinali della dinamica potranno in particolare descrivere il caso statico

<u>I EQ. CARDINALE</u> $R^{EXT} = \frac{dQ}{dt} = m \underset{=0}{\boxed{a_G}} = 0$

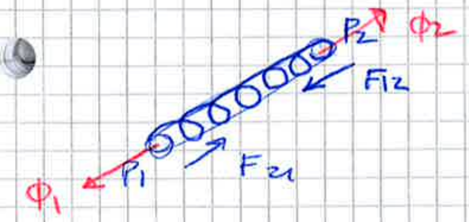
<u>II EQ. CARDINALE</u> $M_A^{EXT} = 0$
(momento forze esterne rispetto al polo A

Le due eq. cardinali della statica sono equivalenti alla richiesta che il sistema delle forze esterne sia equilibrato (vettori caratteristici nulli).

- Per un sistema generico tali equazioni sono necessarie ma <u>non</u> sufficienti per l'equilibrio.

$F_{21} = -F_{12}$ → il sistema delle forze è equilibrato
ma la molla non è in equilibrio

Se invece irrigidisco il sistema



Asta su cui avvolgo la molla
$\Phi_1$ è opposta a $F_{21}$ e $\Phi_2$ opposta a $F_{12}$

↳ GARANTENDOMI L'EQUILIBRIO DEL SISTEMA

le equazioni cardinali della statica sono <u>necessarie e sufficienti</u> all'equilibrio di un sistema <u>rigido</u>

⇓

Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è che l'insieme delle forze esterne sia equilibrato (ovvero valgono le eq cardinali della statica).

<u>Oss.</u> Per un sistema rigido posso sostituire il sistema di forze agenti sul sistema con uno equivalente (stessi vettori caratteristici) senza modificare le configurazioni di equilibrio.

Invece per un sistema generico (anche composto da più parti rigide ma articolato) questo non è possibile perché le eq. cardinali non sono sufficienti.

e in particolare per spostamenti virtuali reversibili (quali quelli di un vincolo bilatero)

si ha $\delta L^V = 0$ per i vincoli ideali e quindi il PLV è

$\delta L^A = 0$

Questa è una relazione pura di equilibrio ovvero una condizione (equazione o disequazione ~~disequazione~~) che caratterizza l'equilibrio in fx delle sole forze attive e non delle incognite vincolari

## PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

07/05/'15

Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione C sia di equilibrio per un sistema generico soggetto a vincoli ideali

$\delta L^A \leq 0$ → in particolare per vincoli ideali e bilaterali (tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili)

LAVORO VIRTUALE FORZE ATTIVE

$$\boxed{\delta L^A = 0}$$

per ogni spostamento virtuale a partire da C

RELAZIONE PURA DI EQUILIBRIO (no incognite vincolari)

Il plv assumerà una forma più agile per sistemi olonomi (sistemi soggetti a vincoli olonomi (DI POSIZIONE) che, ricordiamo, riducono il n° coordinate libere o lagrangiane del sistema ovvero i gradi di libertà)

## LAVORO DI UN SISTEMA DI FORZE AGENTI SU UN SISTEMA OLONOMO

. $P_i$ $i = 1 \ldots\ldots n$ punti

N COORDINATE LIBERE o LAGRANGIANE corrispondenti ai gradi di libertà $(q_1, \ldots q_N)$

$$\delta L^A = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta P_i$$

spostamento virtuale del punto $P_i$

D'altra parte $P_i = P_i(q_1, \ldots q_N)$ ~~[illegible]~~ ovvero la posizione dell'i-esimo punto è esprimibile attraverso le coordinate lagrangiane

Quindi $$\delta P_i = \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \left( \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \delta q_h \right) = \sum_{h=1}^{N} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \right)}_{Q_h} \cdot \delta q_h$$

$Q_h$ COMPONENTE LAGRANGIANA DELLA FORZA ATTIVA o FORZA GENERALIZZATA

$$\boxed{\delta L = \sum_{h=1}^{N} Q_h \delta q_h \quad \text{con} \quad Q_h = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial P_i}{\partial q_h}}$$

oss. questa scrittura mette in luce analogia tra lavoro sistemi punti $\delta L = \sum_{i=1}^{n} \underset{\text{FORZA}}{\boxed{F_i}} \cdot \boxed{\delta P_i}$ spostamento virtuale punto

con lavoro sistema olonomo $\delta L = \sum_{h=1}^{N} \underset{\text{FORZA GENERALIZZATA}}{\boxed{Q_h}} \boxed{\delta q_h}$ spostamento delle coordinate lagrangiane

FORZA GENERALIZZATA $\overline{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots Q_N)$

Ovvero la componente lagrangiana i delle forze Q conservative eguaglia la derivata parziale del potenziale rispetto alla coordinata $q_i$.

## STATICA DI SISTEMI OLONOMI SOGGETTI A VINCOLI IDEALI E BILATERI

Nella configurazione di equilibrio il PLV $\delta L^A = 0$

D'altra parte $\delta L^A = \sum_{k=1}^{N} Q_k \cdot \delta q_k = 0$

SCELTA 1 $\delta q_1 = 1$ $\delta q_2 = 0$ $\delta q_3 = 0$ → $Q_1 = 0$

SCELTA 2 $\delta q_2 = 1$ $\delta q_1 = \delta q_3 = \dots = 0$ → $Q_2 = 0$

Essendo i $\delta q_k$ arbitrari → $Q_k = 0$ $k = 1, \dots N$

ovvero le posizioni di equilibrio sono quelle in cui si annullano le forze generalizzate $\bar{Q} = \bar{Q}(\bar{q}) = 0$

Ritroviamo la dualità con la statica del punto (equilibrio di P se $F(P) = 0$) e la statica dei sistemi olonomi (equilibrio se $Q = 0$)

- Considerando vincoli unilateri ideali, devo distinguere tra configurazioni ordinarie (spostamenti virtuali reversibili) e configurazioni di confine (spostamenti virtuali irreversibili).

Per le conf. ordinarie valgono i ragionamenti fatti e le configurazioni di equilibrio soddisfano $Q(q) = 0$

Mentre per le conf. di confine il PLV si scrive $\delta L^A \leq 0$ e quindi almeno una delle coord. libere ha spostamento virtuale determinato dal vincolo.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Se } \delta q_h \geq 0 \rightarrow Q_h \leq 0 \\ \text{se } \delta q_h \leq 0 \rightarrow Q_h \geq 0 \end{array}\right\}$$ SPOSTAMENTI VIRTUALI IRREVERSIBILI

se $\delta q \gtrless 0 \longrightarrow Q_h = 0$ SPOSTAMENTI VIRTUALI REVERSIBILI

- Sistema soggetto a vincoli ideali bilateri e forze conservative

la ricerca delle configurazioni di equilibrio $Q_h(q) = 0$ $h = 1, \dots N$

$Q_h = \frac{\partial U}{\partial q_h}$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial q_h} = 0}$$

TH DI STAZIONARIETÀ DEL POTENZIALE

LA RICERCA DELLE ~~EQ.~~ CONF. DI EQUILIBRIO equivale a trovare i punti stazionari (massimi/minimi/flessi) del potenziale

ovvero le configurazioni di equilibrio sono quelle in cui si annullano le derivate del come l'opposto del potenziale $V = -U$

MASSIMO — EQUILIBRIO STABILE

In pratica lo studio ~~degli~~ delle configurazioni d'equilibrio e la loro stabilità si riduce a studiare punti critici e natura (massimo o minimo) della funzione potenziale che è una funzione, in generale per sistemi a + gradi di libertà, di + variabili.

↳ HESSIANO (Analisi II)

- In particolare se il sistema olonomo soggetto a vincoli ideali e bilateri è soggetto alla sola forza peso, come forza conservativa

Il potenziale $U = -\underset{\text{massa totale}}{m}\, g\, \boxed{z}(G)$ quota del baricentro

il PLV $\delta U = -mg\,\delta z(G) \leq 0$ (= 0 per VINCOLI BILATERI)

e il teorema di stazionarietà del potenziale si rilegge ~~affermando che le~~ in tal senso:

le configurazioni di equilibrio sono tali che la quota del baricentro risulti stazionaria (massima o minima) e in particolare l'equilibrio stabile (che corrisponde al massimo del potenziale) corrisponde al minimo della quota del baricentro

↳ TEOREMA DI TORRICELLI

11/05/15

## VERSO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE

Il Th energia cinetica si è rivelato uno strumento valido per lo studio di sistemi olonomi ad 1 grado di libertà (1 equazione pura, ovvero senza incognite vincolari, che permette di determinare l'evoluzione dell'unico grado di libertà)

Il Th Ecinetica non è + sufficiente x sistemi a + gradi di libertà

Le equazioni di Lagrange permetteranno di descrivere l'evoluzione di sistema a N gradi di libertà soggetti a vincoli ideali e bilaterali, attraverso equazione pura del moto

Per qualunque sistema materiale

$$F + \Phi = m \cdot a \qquad \text{LEGGE DINAMICA} \qquad (1)$$

$$F - ma + \Phi = 0$$

In statica un punto materiale è in equilibrio se $F + \Phi = 0$

Introducendo la forza di inerzia agente sul punto $F_T = -ma$ FORZA DI TRASCINAMENTO

~~ricordando che in statica~~

$$(F + F_T) + \Phi = 0$$

ovvero la relazione dinamica (1) si può interpretare come una equazione della statica introducendo le forze di inerzia → PRINCIPIO DI D'ALAMBERT che ci permette di passare da un'equazione di equilibrio ad una dinamica introducendo tra le forze agenti sul sistema anche le forze d'inerzia.

Sono definite N coordinate lagrangiane $(q_1, q_2 \dots q_N)$ o coordinate libere che sono essenziali e indipendenti tra di loro

**N.B.** Gli spostamenti virtuali delle coordinate $\delta P_i$ sono tra di loro dipendenti per effetto dei vincoli

Invece gli spostamenti virtuali delle coordinate libere o lagrangiane $\delta q_i$ sono indipendenti tra loro

$\delta P_i$ SPOSTAMENTI VIRTUALI PUNTI MATERIALI che sono dipendenti tra loro

$\delta q_i$ " " COORDINATE LAGRANGIANE che sono indipendenti tra loro

Possiamo riscrivere

$$\delta P_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k$$

$$\uparrow$$

$$P_i = P_i(q_1, q_2, \dots q_N)$$

**N.B.** Abbiamo n punti materiali (coordinate punto)

N gradi di libertà $(N < n)$ (coordinate lagrangiane)

L'equazione simbolica della dinamica

$$\sum_{i=1}^{n} (F_i - m_i a_i)\, \delta P_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (F_i - m_i a_i) \cdot \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left( \sum_{i=1}^{n} (F_i - m_i a_i) \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (Q_k - \tau_k)\, \delta q_k$$

dove

$$Q_k = \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$$ FORZE GENERALIZZATE (introdotte la volta scorsa)

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{n} m_i a_i \frac{\partial P_i}{\partial q_k}$$ COMPONENTE LAGRANGIANA dell'opposto delle forze di inerzia

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} (Q_k - \tau_k)\, \delta q_k = 0$$

Essendo $\delta q_k$ tra di loro indipendenti posso sceglierli opportunamente

$\delta q_{\hat{k}} \neq 0$ e tutti gli altri $\delta q_k = 0$ con $k \neq \hat{k}$

Quindi questa si riduce a

$$\boxed{Q_k = \tau_k \quad \text{con } k = 1 \dots N}$$

che sono N equazioni pure del moto (senza incognite vincolari) tra di loro indipendenti

Introducendo i binomi lagrangiani tali equazioni si riscrivono così

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$ dove T è Energia Cinetica del sistema olonomo

ovvero

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\right) = \frac{\partial}{\partial q_k}\Bigg(\underbrace{\frac{d P_i}{dt}}_{v_i}\Bigg) = \frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

$$\tau_k = \text{- - - -} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\left(v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{i=1}^{n} m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(v_i \cdot v_i)$$

$$v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_k}(v_i \cdot v_i)$$

$$\tau_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}(v_i \cdot v_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial}{\partial q_k}(v_i \cdot v_i) =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i \cdot v_i\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i \cdot v_i\right)$$

Ricordando la definizione di energia cinetica per un sistema di n punti materiali

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i \cdot v_i$$

$$\Rightarrow \tau_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

D'altra parte avevamo che $\tau_k = Q_k$   $k = 1 \text{ --- } N$

$$\boxed{\rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad \forall k = 1 \dots N}$$

dette EQUAZIONI DI LAGRANGE, sono N equazioni pure (senza incognite vincolari) del moto

Tali equazioni sono un sistema di equazioni differenziali del II ordine rispetto al tempo (e non un sistema di equazioni alle derivate parziali)

Tali equazioni possono essere riscritte in forma normale esplicitando le $\ddot{q}_k$ (accelerazioni lagrangiane)

Il problema matematico è ben formulato associando alle N equazioni di Lagrange, 2N condizioni iniziali per le coordinate libere o lagrangiane

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k(q, \dot{q}, t) \\ q_k(t_0) = q_{k0} \\ \dot{q}_k(t_0) = \dot{q}_{k0} \end{cases}$$

Per forze sufficientemente regolari si ha un problema matematico BEN POSTO, quindi la soluzione esiste, è unica e dipende con continuità dal dato iniziale.

Nel caso di vincoli fissi ricordiamo che la posizione di un generico punto non dipende esplicitamente dal tempo

solo dipendenza implicita dal tempo attraverso le coord. lagrangiane

$$P_h = P_h(q_1(t), q_2(t), \dots q_N(t))$$

( In generale per vincoli mobili $P_h = P_h(q_1(t), q_2(t), \dots q_N(t), t))$

dipendenza esplicita dal tempo

e quindi $\frac{\partial P_h}{\partial t} = 0$

da cui segue

$$b_i = b_i(q_1, \dots q_N) = 0$$

$$c = c(q_1, \dots q_N) = 0 \qquad \text{perché } \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Quindi l'energia cinetica per un sistema olonomo soggetto a vincoli ideali fissi

$$T = T(q, \dot q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot q_i \dot q_j$$

no dipendenza esplicita dal tempo

$a_{ij} = a_{ij}(q)$

ovvero l'energia cinetica dipende solo dal termine quadratico nelle velocità lagrangiane (il termine con la matrice di massa)

Ritroviamo così ancora una volta la simmetria tra sistemi olonomi e sistemi di particelle materiali

| | | | |
|---|---|---|---|
| SISTEMA n particelle | $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i V_i V_i$ | $V_i$ | $m$ massa |
| SISTEMA olonomo | $T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \dot q_i \dot q_j$ | $\dot q$ | $\underline{\underline{A}}$ matrice di massa con elementi $a_{ij}$ |

$V_i$ = velocità particella i-esima

$\dot q$ = velocità lagrangiane

In definitiva tornando alle equazioni di Lagrange, l'espressione dell'Ecinetica per un sistema olonomo porta ad una loro riscrittura ~~in forma~~ come segue:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right)$$

$$A \ddot q = F(q, \dot q, t) + Q$$

D'altra parte abbiamo visto che la matrice di massa è invertibile e quindi posso riscrivere l'eq. di Lagrange come

$$\ddot q = A^{-1}\left[F(q, \dot q, t) + Q\right]$$

e quindi avere una riscrittura in forma normale in cui ho esplicitato $\ddot q$ e quindi risolvendo ottengo il moto del sistema se le forze attive sono sufficientemente regolari

- Esteso con PRINCIPIO DI D'ALAMBERT al caso dinamico

$\downarrow$

ottenendo EQUAZIONI DI LAGRANGE $\rightarrow$ N EQUAZIONI PURE DEL MOTO per gli N GRADI DI LIBERTÁ che possono "sostituire" le eq. cardinali se non sono interessato alle incognite vincolari

$\downarrow$

Ci sono integrali primi e quantità conservate?

18/05/'15

RIPASSO

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \qquad \text{con } k = 1 \dots N$$

$$L = L(\underbrace{q}_{q_1, \dots q_N}, \dot{q}, t) = T(t, q, \dot{q}) + U(t, q)$$

Energia cinetica x sistema olonomo

Soggetto a vincoli fissi $\quad T = T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{ij} \underbrace{a_{ij}}_{\text{coefficenti matrice di massa}} \dot{q}_i \dot{q}_j$

In generale non è possibile determinare analiticamente la soluzione delle N equazioni di Lagrange

In alcuni casi della struttura della Lagrangiana ci permette di individuare integrali primi del moto (ovvero quantità conservate) facilitandoci nella ricerca della soluzione del problema dinamico.

In particolare se la lagrangiana non dipende da una coordinata lagrangiana o libera $q_k$ $\longrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

Quindi dalle equazioni di Lagrange $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \overset{=0}{\left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\right)} = 0$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k \quad$ detto MOMENTO CINETICO

Se la lagrangiana non dipende da una coordinata libera $q_k$, cioè se $q_k$ è COORDINATA CICLICA o IGNORABILE, allora il corrispondente MOMENTO CINETICO si conserva ovvero è un integrale primo del moto.

Il vantaggio degli integrali primi del moto è che vanno a sostituire un egual numero di equazioni differenziali del secondo ordine quindi facilitando la ricerca della soluzione del problema dinamico.

$$H = \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}} \dot q_i - L$$

$$\hookrightarrow = \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot q_i} + \underset{=0}{\boxed{\frac{\partial U}{\partial \dot q_i}}}$$

=0 perché U dipende da t e q cioè $U = U(t,q)$

$$= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\dot q_i - (T+U) =$$

$$\uparrow$$
$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

$$= \underbrace{\sum_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot q_i}\dot q_i}_{A} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot q_i}\dot q_i}_{B} + \underbrace{\sum \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_i}\dot q_i}_{C} - (T+U)$$

Ⓐ $\overset{i\leftrightarrow k}{=} \sum_k \frac{\partial T_2}{\partial \dot q_k}\dot q_k = \sum_k \frac{\partial}{\partial \dot q_k}\left(\frac{1}{2}\sum_{ij} a_{ij}\dot q_i \dot q_j\right)\dot q_k =$

$$= \sum_k \left(\frac{1}{2}\sum_i a_{ik}\dot q_i\right) + \sum_k \left(\frac{1}{2}\sum_j a_{kj}\dot q_j\right)\dot q_k \quad =$$

ho che si salva solo $j=k$

abbiamo salvato solo $i=k$ dello $\sum_i \ldots \dot q_i$

↳ la matrice di massa è simmetrica $a_{ik} = a_{ki}$

$$\underset{i\leftrightarrow j}{=} \sum_k \sum_j a_{kj}\dot q_k \dot q_j = \sum_{kj} a_{kj}\dot q_k \dot q_j = 2T_2$$

Ⓑ $= \sum_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot q_i}\dot q_i = \sum_i \boxed{\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\sum_j b_j \dot q_j\right)}\dot q_i = *$

= [illegible] b perché $\frac{\partial}{\partial \dot q_3}\left(\sum b_j \dot q_j\right) =$

$= \frac{\partial}{\partial \dot q_3}\left(b_1 \dot q_1 + b_2 \dot q_2 + b_3 \dot q_3 \ldots\right)$

$= b_3$

$$= * \sum_i b_i \dot q_i = T_1$$

Ⓒ $= \sum_i \frac{\partial T_0}{\partial \dot q_i}\dot q_i \underset{T_0 = c}{=} \sum_i \underset{=0}{\boxed{\frac{\partial c}{\partial \dot q_i}}}\dot q_i = 0$

Quindi

$$H = A + B + C - T - U = 2T_2 + T_1 + 0 - (T_2 + T_1 + T_0) - U =$$

$$H = T_2 - T_0 - U$$

Se i vincoli sono <u>fissi</u> ricordiamo che $T = T_2$ $(T_1 = T_0 = 0)$

Quindi $H = \underset{T}{\underset{\shortparallel}{T_2}} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{T_0}} - U = T - U$

$$H = T - \underset{\text{potenziale}}{U} = T + \underset{\text{energia potenziale}}{V}$$

Quindi se i vincoli sono fissi l'hamiltoniana coincide con l'energia totale del sistema e l'integrale generalizzato dell'energia altri non è che la conservazione dell'E meccanica.

$U = U_{peso P} + U_{peso T} + U_{molla} = mg(d\cos\theta) + 0 - \frac{K}{2}\left(x_G^2 + 2d\,sen\theta\, x_G + d^2 sen^2\theta + d^2\cos^2\theta\right)$

$P = (x + d\,sen\theta, -d\cos\theta)$

$G = (x, 0)$

$U = mgd\cos\theta - \frac{K}{2}\left(x_G^2 + 2d\,sen\theta\, x_G + d^2\right)$

Punto di equilibrio - 2 derivate

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x_G} = -\frac{K}{2}\left(2x_G + 2d\,sen\theta\right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgd\,sen\theta - K d\cos\theta\, x_G = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -Kx_G - Kd\,sen\theta = 0 \quad \longrightarrow \quad x_G = -d\,sen\theta \\ -mgd\,sen\theta + Kd^2\cos\theta\, sen\theta = 0 \end{cases}$$

$d\,sen\theta\,(-mg + Kd\cos\theta) = 0$

$sen\theta = 0$

$\theta_1 = 0 \,;\, \theta_2 = \pi$

$\cos\theta = \underbrace{\frac{mg}{Kd}}_{\alpha}$

$\theta_{3,4} = \pm \arccos(\alpha)$ con $|\alpha| \leq 1$ $\left|\frac{mg}{Kd}\right| \leq 1$

$P_1\,(\overset{\theta}{0}, \overset{x}{0})$

$P_2\,(\pi, 0)$

$P_{3,4}\,\left(\pm\arccos(\alpha), \mp d\sqrt{(1-\alpha^2)}\right)$

Di solito all'esame 4 soluzioni di qst tipo, faccio es. tipo questi con queste 2 coordinate

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_G \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial x_G} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_G^2} \end{pmatrix}$$

Mantengo ordine, se sopra ho scritto i punti di equilibrio con θ come 1° coord. e x_G come 2°, mantengo qst ordine nell'hessiana.

$$H = \begin{pmatrix} +Kd\,x_G\,sen\theta - mgd\cos\theta & -Kd\cos\theta \\ -Kd\cos\theta & -K \end{pmatrix}$$

guarda se è uguale a quello sopra, lo faccio così intanto controllo se ho fatto errori

$dH = \sum_i \boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i}} dq_i + \sum_i \boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i}} dp_i + \boxed{\frac{\partial H}{\partial t}} dt$

Da cui seguono le eq. di Hamilton:

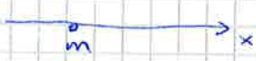
$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \end{cases}$$

2N EQUAZIONI IN FORMA NORMALE DEL I ORDINE

Essendo un problema di Cauchy non devo calcolare soluzione generale, perché mi serve solo quella in particolare. Se mi avesse chiesto eq. generale allora sì.

## PROBLEMA 1

Un punto di massa m vincolato a muoversi lungo asse x; sottoposto a forza d'attrito (crescente). Voglio determinare il moto del punto.



$$F(v) = -\gamma(t) \cdot v(t)$$

$$\gamma(t) = \eta \cdot t$$

formulazione di una forza d'attrito, opposta al verso della velocità, aumenta con aumento della v, si basa su coefficiente $\gamma(t)$

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

tolgo componente vettoriale tanto lungo asse x

$$\underbrace{m v'(t)}_{y'} = -\gamma(t) \cdot v(t) = -\eta t \cdot \underbrace{v(t)}_{y^*}$$

eq. differenziale a variabili separabili

$$a(t) = -\frac{\eta}{m} t$$

$$b(v) = v(t)$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\eta t}{m}$$

$$\lg |v| = -\frac{\eta}{m} \frac{t^2}{2} + c$$

$$v = c e^{\left(-\frac{\eta}{m} \frac{t^2}{2}\right)}$$

## ② EQUAZIONI LINEARI

forma normale $\quad y^n(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, y^k(t) = s(t)$

↳ forzante dell'eq. differenziale

"Lineari" perché date 2 soluzioni, le combinazioni lineari di esse sono ancora soluzioni.

$y_1$ e $y_2$ soluzioni $\longrightarrow$ $\alpha y_1 + \beta y_2$ soluzioni

se $s(t) = 0$ "OMOGENEA" altrimenti "COMPLETA"

↳ variabili separabili

limitiamoci al 1° ordine

$$y'(t) + a(t) \cdot y(t) = s(t) \longrightarrow y(t) = \overset{A}{\text{sol. OMO}} + \overset{B}{\text{sol. PART.}}$$

sol. ↓ ponendo $s(t) = 0$

Le costanti appariranno nella soluzione OMOGENEA e non nella particolare

$A \rightarrow \quad y'(t) + a(t)\, y(t) = 0$

$$\boxed{y_A(t) = c\, e^{-\int a(t) dt}} \quad \text{con} \quad \int a(t) dt = A(t) \longrightarrow y_A(t) = c e^{-A(t)}$$

$B \rightarrow \quad y'(t) + a(t) y(t) = s(t)$

$$\boxed{y_B = e^{-A(t)} \int e^{A(t)} \cdot s(t) \cdot dt}$$

$$y^*(t) = c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \cdot \int e^{A(t)} \cdot s(t) dt$$

$$y(t) = y_0\, e^{-A_0(t)} + e^{-A_0(t)} \int_{t_0}^{t} e^{A_0(t)}\, s(t)\, dt$$

↳ soluzione unica

dove $A_0(t) = \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$

e $\boxed{y(t_0) = y_0}$ CONDIZIONE DI CAUCHY

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$

$\lambda_1, \lambda_2 = 1 \pm \sqrt{9} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$

$y_A(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-2t}$ da cui trovo $c_1 = \frac{1}{3e^4}$ e $c_2 = \frac{2}{3} e^2$ attraverso condizioni iniziali.

## Esempio

$y'' - y = \underbrace{e^t + 2t^2}_{s(t)}$ la spezzo in 2 e poi sommo le soluzioni ovvero

$y'' - y = e^t$

$y'' - y = 2t^2$ } sommo le 2 soluzioni

① $y'' - y = e^t$ $\quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$

$y_A(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

$y_B(t) \Rightarrow p(t) = 1 \;, \; a = 1$

Da formula $\quad y_B(t) = K \cdot \underset{q(t)}{1} \cdot e^t \cdot t^1$

K come lo trovo? Metto nell'eq. generale iniziale $y''_B(t)$ e $y'_B(t)$ e vedo valore di K

$y'_B(t) = K(e^t t + e^t)$

$y''_B(t) = K(e^t \cdot t + e^t + e^t)$

$K(\cancel{e^t} \cdot t + 2e^t) - Ke^t t = \cancel{e^t}$

$2K = 1 \quad \boxed{K = \frac{1}{2}}$

② $y'' - y = 2t^2$

$s(t) = 2t^2$ $\qquad q(t) = k_1 t^2 + k_2 t + k_3$

$a = b = 0$

$p(t) = 2t^2$ $\qquad k_1, k_2, k_3$ le trovo nello stesso modo fatto per K

$2k_1 - k_1 t^2 + k_2 t + k_3 = 2t^2$

$t^2(-k_1 - 2) + k_2 t + 2k_1 + k_3 = 0$

$k_1 = 2$

$k_2 = 0$

$4 + k_3 = 0 \qquad k_3 = -4$

$q(t) = 2t^2 - 4$

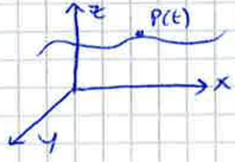
solux $\quad y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^t + 2t^2 - 4$

## ESERCITAZIONE 2

11/03/'15

## CINEMATICA DEL PUNTO

terna CARTESIANA $\quad (x, y, z)$



$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\bar{a}(s(t)) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \left( -\frac{1}{2}\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right) = \left( -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Verifichiamo che sia giusto risostituendo $s = \sqrt{2}t$ $\quad \underset{s_t}{\bar{a}} = (-\cos t, -\sin t, 0)$

Quindi ricordo che serve sempre calcolare la LEGGE ORARIA per passare da coordinate cartesiane a coordinate intrinseche.

Esercizio 2

Determinare la traiettoria di un punto P con $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{velocità cartesiana costante in modulo}}}{|V(x(t), y(t))| = c_1}$ e $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{velocità radiale costante in modulo}}}{\dot{\rho} = c_2}$

$$\begin{cases} x = x(y) \\ y = y(x) \end{cases} \iff \begin{cases} \theta = \theta(\rho) \\ \rho = \rho(\theta) \end{cases}$$

$$e_\rho = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$e_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$\dot{\rho} = c_2 \longrightarrow \boxed{\rho = c_2 t + \underset{\text{raggio iniziale}}{\rho_0}}$$

$$|\bar{v}(t)| = c_1 = |\dot{\rho}\, e_\rho + \underbrace{\rho\dot{\theta}}\, e_\theta| \leq |\dot{\rho}\, e_\rho| + |\rho\dot{\theta}\, e_\theta| \leq c_2 + |\rho\dot{\theta}|$$

$$c_1 = c_2 + K$$

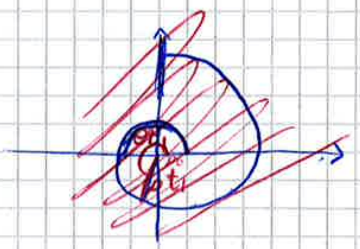
$$\rho\dot{\theta} = K \qquad \dot{\theta} = \frac{K}{\rho} = \frac{K}{c_2 t + \rho_0}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = K \frac{1}{c_2 t + \rho_0} \rightarrow d\theta = K \frac{1}{c_2 t + \rho_0} \cdot dt$$

eq. diff. a variabili separabili

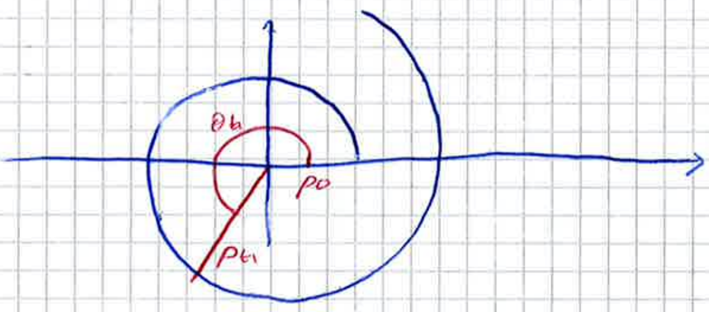
$$\Rightarrow \theta = \frac{K}{c_2} \lg \frac{c_2 t + \rho_0}{\rho_0}$$

$$\theta = \frac{K}{c_2} \lg\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad \text{con } \rho = c_2 t + \rho_0$$



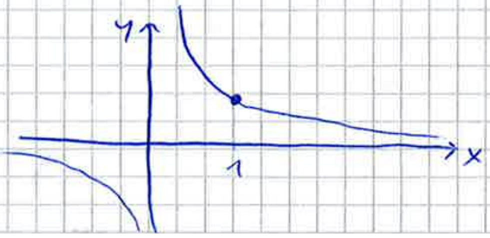
Questo moto è detto SPIRALE LOGARITMICA

Più il tempo aumenta, più $\rho$ aumenta



Esercizio 3

$y = \frac{1}{x}$ $\qquad x(0) = 1 \qquad$ IPERBOLE



$V_x = bt^2 \Rightarrow x = \int_0^t bt^2\,dt = \frac{bt^3}{3}\Big|_0^t = \frac{bt^3}{3} + x(0) = \frac{bt^3}{3}$

$V_y = ct \qquad y = \int_0^t ct\,dt = \frac{ct^2}{2} + 0 \rightarrow t^2 = \frac{2y}{c} \qquad t = \sqrt{\frac{2y}{c}}$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\frac{b^2}{9}t^6 + \frac{c^2}{4}t^4}$

$\dot{\rho} = \dots\dots\dots$ faccio i conti → componente trasversale di v

$\theta = \text{arctg}\,\frac{y}{x} = \text{arctg}\,\frac{ct^2}{2}\,\frac{3}{b\ \ t^3} = \text{arctg}\left(\frac{3c}{2b}\,\frac{1}{t}\right)$

$\rho\dot{\theta} = \rho \underset{\text{calcolo}}{\dots\dots}$

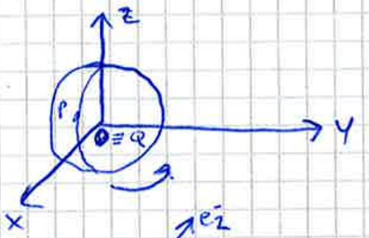
## ESERCITAZIONE 3

16/03/'15

**Es. 1**

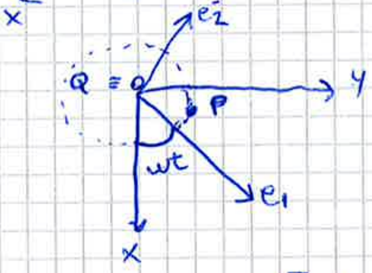
Sfera ruota rispetto SR FISSO

Punto P si muove lungo meridiano della sfera



$\underline{QP}(t)\big|_{e_1e_2e_3} = (0,\ R\cos at,\ R\sin at) = R\cos at\,\underline{e_2} + R\sin at\,\underline{e_3}$

$\underline{w} = (0, 0, \omega)$



$\underline{e_3} = \underline{z}$

$\underline{P}\big|_{xyz} = \underline{\underline{I}}^T P\big|_{e_1e_2e_3}$

matrice di trasformazione (ROTOTRASLAZIONE) che varia nel tempo

dove $\underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & +\sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \underline{e_1} \text{ rispetto xyz} \\ \rightarrow \underline{e_2} \quad '' \\ \rightarrow \underline{e_3} \quad '' \end{matrix}$

$\begin{bmatrix} \underline{e_1} \\ \underline{e_2} \\ \underline{e_3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{I}} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \\ \underline{z} \end{bmatrix}$

$\underline{P}\big|_{xyz} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\sim V_Q + w_Q \ (?)} \begin{bmatrix} 0 \\ R\cos at \\ R\sin at \end{bmatrix}$

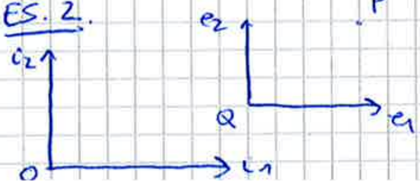
$\downarrow$

$\underline{P}_R$ (relativo)

FINISCE DOPO

18/03/'15

**ES. 2.**



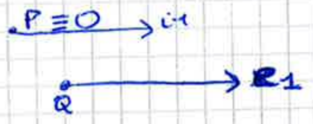
moto di SR SOLIDALE traslatorio

$\underline{OQ} = t^2\,\underline{i_1} + 2t^2\,\underline{i_2}$

$\underline{QP} = (1-t^2)\,\underline{e_1} + 2\,\underline{e_2}$

Di solito sempre 2 modi x fare questi es.

**ES. 3** MOTO UNIDIMENSIONALE



P fermo osservato da SR secondo legge

$x(t) = A\sin\Omega t$ → SR MOBILE

Calcolare velocità accelerazioni fisse e relative

Quale SR scelgo? Centro $O \equiv P$

$\underline{OQ} \equiv \underline{PQ} = +A\sin\Omega t$ perché P fermo rispetto a SR MOBILE

$$\underset{=0}{\underline{V_A^P}} = \underline{V_R^P} + \underset{=0}{\cancel{\underline{\omega} \times \underline{QP}}} + \underline{V_Q} = 0$$

$V_R^P = -\underline{V_Q}$ intuitivo, + Q va avanti, + P rimane indietro xk fermo

~~$V_R^P = 2A\sin\Omega t\ \underline{i_1} = 2A\sin\Omega t\ \underline{e_1}$~~

$V_R^P = -\Omega A\cos\Omega t\ \underline{i_1} = -\Omega A\cos\Omega t\ \underline{e_1}$

$\underline{a_R^P} = \Omega^2 A\sin\Omega t\ \underline{e_1}$ $\qquad \underline{a_A^P} = 0$

$\underline{a_R^P} = -\underline{a_Q}$

È il moto di un sasso che cade su Terra x gravità.

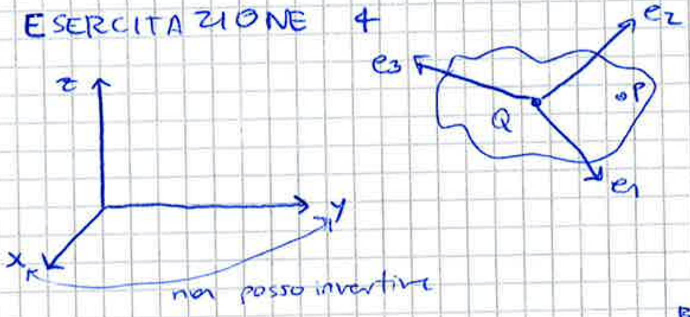
$\underline{V_A} = \underline{V_R} + \underline{V_{TR}}$

Se $\underbrace{\text{P solidale al SR MOBILE}}_{\text{CORPO RIGIDO}}$ $\underline{V_R} = 0$

Velocità di TR è la velocità con cui P si muove rispetto a SR fisso in un istante tale per cui P è congelato nel SR MOBILE. Se P non si muovesse, è trascinato dal SR MOBILE

## ESERCITAZIONE 4

25/03/'15



$$\underline{P}(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in questo caso è centro del SR SOLIDALE ma può essere qualunque punto del CR}}}{\underline{Q}(t)} + \underline{\underline{A}}^T \underline{p} = \overset{\substack{\text{BARICENTRO} \\ \uparrow}}{\underline{G}(t)} + \underline{\underline{A}}^T \underline{p}$$

$\underline{p}$ = coordinate del punto p rispetto allo SR ~~FISSO~~ SOLIDALE

$$P(t) = \underbrace{\underline{G}(t)}_{\substack{\text{componente} \\ \text{TRASL.}}} + \underbrace{\boxed{\underline{\underline{A}}^T \underline{p}}}_{\substack{\text{componente} \\ \text{ROT.}}}$$ — sarebbe $\underline{GP}$ (vedi dopo)

# CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE

$$\underline{GM} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{V_G}}{|\omega^2|} = \frac{1}{a^2} \det \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & a \\ 0 & v & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2}(-av, 0, 0) = \left(-\frac{v}{a}, 0, 0\right)$$

$$GM(t) = \left(-\frac{v}{a}, vt, 0\right)$$

ad un generico istante di t

→ centro trasla con disco lungo asse y.
la formula prima fa riferimento solo al moto rotatorio non componente traslatoria

$$\underline{\text{MOZZI}} = \left(-\frac{v}{a}, vt, 0\right) + \underline{\lambda \omega} = \left(-\frac{v}{a}, vt, \lambda a\right) \qquad \lambda \in R$$

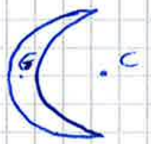
ASSE DI MOZZI parallelo all'asse di rotazione e centrato nel centro di istantanea rotazione

Voglio centro di istantanea rotazione in coordinate polari

equazione della RULETTA = equazione della base in coordinate solidali $= GM|_{e_1,e_2,e_3} =$

$$\underbrace{\underline{GM(t)}|_{e_1,e_2,e_3}}_{\text{eq. della ruletta}} = \underline{\underline{A}}\, \underbrace{\underline{GM}(t)|_{x,y,z}}_{\text{eq. della base}}$$

G non è centro di istantanea di rotazione, è il baricentro → non per forza coincidono (vedi luna)



centro di istantanea rotazione non è detto che sia il punto intorno al quale ruota il corpo (ALLORA COSA CAZZO LO CHIAMI CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE ??)

Se corpo rigido ruota intorno al baricentro e non trasla, baricentro = centro di istantanea rotazione

NON HA SENSO, FANCULO

$$\underline{P}(t) \Rightarrow V_P(t) = \frac{d}{dt}\underline{P}(t)$$

$$V_P(t) = \underline{V_G} + \omega \times \underline{\underline{A}}^T \underline{R}_{e_1 e_2 e_3} = ~~\begin{pmatrix}0\\v\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}R\cos at & -R\sin at \\ R\sin at & R\cos at \\ 0 & 0\end{pmatrix}~~$$

$$= \begin{pmatrix}0\\v\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}R\cos at\\R\sin at\\0\end{pmatrix} =$$

$$= (-aR\sin at, v + aR\cos at, 0)$$

$$\underline{a_P} = \cancel{\underline{a_G}} + \cancel{\underline{\dot{\omega}} \times \underline{GP}} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{GP}) = \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}R\cos at\\R\sin at\\0\end{pmatrix}\right] =$$

$$= (-a^2R\cos at, -a^2R\sin at, 0)$$

Potevo svolgere esercizio in altro modo.

# GEOMETRIA DELLE MASSE

Parte della meccanica che ci permette di individuare simmetria e punti speciali dei corpi.

massa $m(B) = \int_V \rho(\underline{x}) \cdot d\underline{V}$ corpo $= \begin{cases} \int_L \rho(\underline{x})\, d\underline{x} & \text{UNIDIMENSIONALE} \\ \int_S \rho(\underline{x})\, d\underline{s} & \text{BIDIM.} \\ \int_V \rho(\underline{x})\, d\underline{V} \end{cases}$

$\rho$ = densità

Se densità costante, corpo omogeneo

Se CORPO OMOGENEO $m(B) = \rho \int_V dV = \rho V \Rightarrow \rho = \frac{m}{V}$

Per il baricentro, si può pensare come punto in cui è concentrata tutta la massa

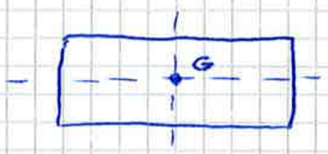
$$\underline{G} = \frac{\int_V \rho(\underline{x}) \cdot \underline{x}\, d\underline{V}}{\int_V \rho(\underline{x}) \cdot d\underline{V}} \rightarrow \text{massa} \overset{\uparrow}{\underset{\text{OMO}}{=}} \frac{\rho \int_V \underline{x}\, d\underline{V}}{\rho \int_V d\underline{V}} = \frac{\int_V \underline{x}\, d\underline{V}}{V}$$

$\underline{G} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$ con $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ SISTEMA DI PUNTI

Non è detto che baricentro sia interno al corpo

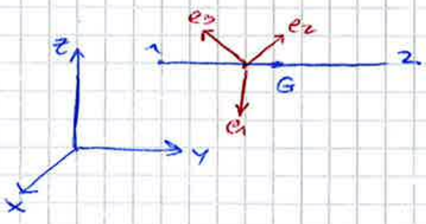
Se ho 2 punti, baricentro sarà interno al segmento che li unisce

$m_2 > m_1$



corpo omogeneo con 2 assi di simmetria

Baricentro è indipendente dal sistema di riferimento



G è sempre lo stesso, cambiano le coordinate in xyz e $e_1 e_2 e_3$ ma applicando matrice di trasformazione, si equivalgono

## ES 1

$\rho(x) = Kx$

$$G = \frac{\int_0^L Kx \cdot x\, dx}{\int_0^L Kx\, dx} = \frac{K\int_0^L x^2 dx}{K\int_0^L x\, dx} = \frac{K\frac{L^3}{3}}{K\frac{L^2}{2}} = \frac{2}{3}L$$

— Perché? Densità aumenta lungo asse x, sarà sicuramente dopo $\frac{1}{2}L$

Se corpo fosse stato omogeneo, $\rho = \frac{m}{L}$