



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1709A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Busca Francesco

MATERIA: Analisi II - prof. Baciotti (2015)

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

ANALISI II

6 crediti, prof BACIOTTI

Esame:

4 esercizi su 4 argomenti (2 x integrazione, 1 serie, 1 sistema di eq. differenziali)

ORARIO:

- giovedì 14:30 - 17:30 teoria
- venerdì 13 - 14:30 esercitazioni (prof. Marco ABRATE)

Esercizi + compiti su Internet (cerco su Jida Hira online)

DATE ESAMI:

1° appello 5 febbraio 2015

3° appello 1 luglio 2015

2° appello 20 febbraio 2015

4° appello 14 settembre 2015

Consulenza: 8:30 - 10 lunedì

11-12 mercoledì

(numero telefono 7548)

Testo: "Integrali in più variabili", Baciotti, CELID

TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

Integrali per funzioni di n variabili

Passaggio da 1 funzione ad 1 sola variabile ad 1 funzione a n variabili

MISURA DEI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}^n$

$n=1$ già visto in Analisi I

$n=2, n=3$ da vedere

MISURA DELLE FIGURE PIANE $\rightarrow$ AREA ($n=2$)

MISURA DEI SOLIDI $\rightarrow$ VOLUME ($n=3$)

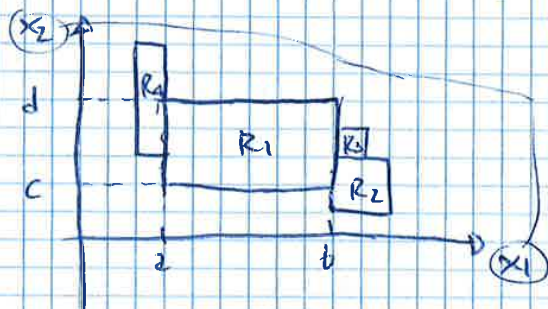
L'area non è la figura piana ma la sua misura, idem per il volume

PROPRIETÀ DELLA MISURA

$A \subset \mathbb{R}^n$ LIMITATO (A è un sottoinsieme limitato, non infinito)

$m(A)$ = misura di A

- ① $m(A)$ è un numero reale positivo o nullo
- ② $A \subseteq B$ allora $m(A) \leq m(B)$
 A e B sono insiemi, $m(A)$ e $m(B)$ sono numeri
- ③ $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$ ← formula dell'additività della misura



RICORDO!

$$m(R) = (b-a)(d-c)$$

$R_1 + R_2 + R_3 + R_4$ è un

PLURIRETTANGOLO = unione finita di rettangoli sovrapposti (per parti) (sotto) del loro perimetro

numeri che sono irrazionali

Qualsiasi rettangolo cerchi di togliere da A , incontro sempre un numero razionale su x_1 o x_2

$l_R = 1$ (mai di meno, perché cercando di togliere qualche rettangolo incontro un punto che appartiene ad A)

$l_S = 0$ (perché se cerco di approssimare per difetto, appena creo un piccolo rettangolo prendo un numero irrazionale che non posso prendere $\rightarrow$ posso solo prendere rettangoli degeneri, ovvero punti che hanno Area $= 0$)

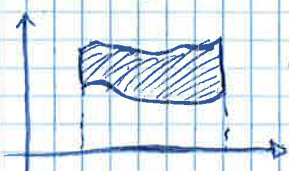
ESEMPIO DI INSIEME NON NUMERABILE

La misura vista fino ad ora è MISURA DI PEANO-JORDAN

Insiemi numerabili sono parecchi, + dei non numerabili

PROPOSIZIONE $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile se e solo se la frontiera dell'insieme ha misura 0 (frontiera = linea che delimita l'insieme)

In particolare sono misurabili le regioni del piano che sono delimitate da grafici di funzioni continue



← esempio di 2 funzioni continue

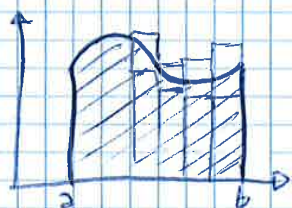
La definizione di misura è sempre legata al concetto di limite (solo introducendo il concetto di limite si è potuto dare una definizione generale di area)

INTEGRALE DEFINITO DI UNA FUNZIONE A VARIABILE REALE (di Riemann)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

INTEGRALE DEFINITO $\int_{[a, b]} f(x) dx$

Supponiamo che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$



$T_{f, I} = \{ (x, y) : x \in I, 0 \leq y \leq f(x) \}$
T sta per trapezoide

DEFINIZIONE f si dice INTEGRABILE (nel senso di Riemann) se $T_{f, I}$ è misurabile e in tal caso, si definisce

$$\int_I f(x) dx = m(T_{f, I})$$

DEF. Sia $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Si dice che è integrabile se risulta misurabile il trapezoide di $(-f)$ ovvero $T_{-f, I}$

Definisco in tal caso $\int_I f(x) dx = -m(T_{-f, I})$

INTEGRALE $\neq$ AREA (solo se integrale è positivo, se è negativo è l'opposto)

DEF. $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Introduco $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$

ex.



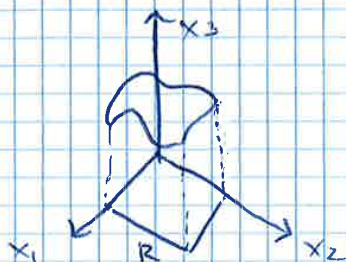
$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) > 0 \end{cases}$$

L'INTEGRALE DEFINITO NEL SENSO DI RIEMANN PER FUNZIONI $f(x_1, x_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_1, x_2) \geq 0, \quad \text{dom } f = R = [a, b] \times [c, d]$$

st'è per rettangolo

Grafico di f sopra sottoinsieme di $\mathbb{R}^3 \rightarrow \text{gr}(f) \subset \mathbb{R}^3$



L'analogo del trapezoide di prima ora è un solido

$$T_{f,R} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1, x_2) \in R, 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2)\}$$

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ LIMITATO

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] = \text{parallelepipedo}$$

$$m(R) : (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3) \text{ è un volume}$$

PLURI PARALLELEPIPEDI = UNIONI FINITE DI PARALLELEPIPEDI

$$m(R) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) + \dots + m(R_k)$$

$$m(A) = l_R = l_S \rightarrow \text{misurabile}$$

$$l_S < l_R \rightarrow \text{non misurabile}$$

In tal caso

$$\iint_R h(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = m(A) \quad \text{Messa } h \equiv m(A) \cdot 1 = m(A)$$

È intuitivo perché l'altezza è 1, quindi bisognerebbe moltiplicare per 1 (inutile)



che legamento integrale doppio e misure in R^2

Non abbiamo ancora rimesso la condizione che il dominio sia un rettangolo

$f(x_1, x_2) : A \rightarrow \mathbb{R}$ A sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ limitato, R rettangolo che contiene A

$$\iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = ?$$

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = \begin{cases} f(x_1, x_2) & \text{se } (x_1, x_2) \in A \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) \in R \setminus A \end{cases}$$

$\tilde{f}(x_1, x_2)$ ha come dominio rettangolo $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Per $\tilde{f}$ stesse cose di prima.

DEF. Si dice che f è integrabile nel senso di Riemann su A se $\tilde{f}$ è integrabile su R

In tal caso si definisce

$$\iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_R \tilde{f}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

PROPRIETÀ INTEGRALE DOPPIO

① ADDITIVITÀ RISPETTO ALLE FUNZIONI INTEGRANDE

Summa di integrali = integrale di ogni addendo e poi somma

② OMOGENEITÀ

$$\iint k f(x_1, x_2) = k \iint f(x_1, x_2)$$

③ MONOTONIA o MONOTONICITÀ

$$f(x_1, x_2) \leq g(x_1, x_2) \quad \text{su tutto dominio } (\forall x_1, x_2 \in A)$$

$\Downarrow$

$$\iint f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \leq \iint g(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

④ ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO

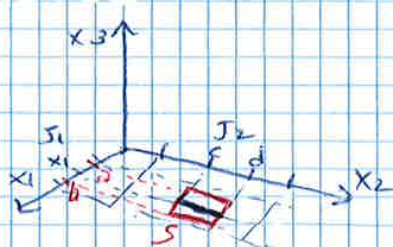
$$\iint_{A \cup B} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \iint_B f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

a condizione che $m(A \cap B) = 0$

Per funzioni in 1 variabile, non c'è quella corrispondenza diretta, come in 1 variabile, to denota e $f(x)$ primitiva. Introduciamo caso degli integrali parziali.

CALCOLO DI UN INTEGRALE DOPPIO

$x_3 = f(x_1, x_2)$ definita su un rettangolo $R = J_1 \times J_2$ (prodotto cartesiano di 2 intervalli aperti)



Fissato $[c, d] \in J_2$

Fissato $x_1 \in J_1$

$$F(x_1) = \int_c^d f(x_1, x_2) dx_2 \rightarrow \text{con l'integrale } x_2 \text{ sparisce (perché?)}$$

$\downarrow$
 x_1 si è come parametro

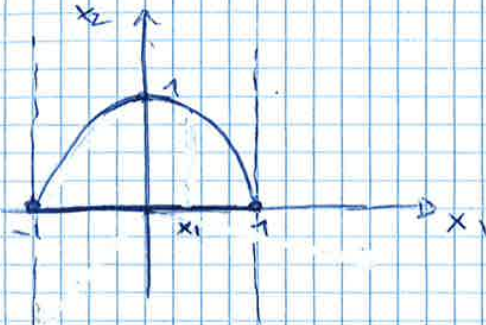
Se A è sia verticalmente che orizzontalmente convesso le due procedure danno lo stesso risultato

$$x_3 = f(x_1, x_2) = 1 - x_2$$

$$A = \{ (x_1, x_2) : -1 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1^2 \}$$

$$\iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Almeno il dominio disegno, perché aiuta molto graficamente



$$\iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x_1^2} (1-x_2) dx_2 \right) dx_1$$

↑
Formula di riduzione per A verticalmente convesso

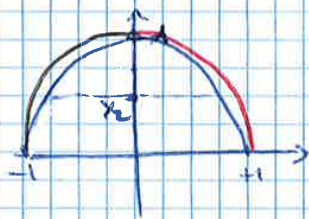
$$= \int_{-1}^1 \left[(x_2 - \frac{x_2^2}{2}) \right]_0^{1-x_1^2} dx_1 = \int_{-1}^1 \left[(1-x_1^2) - \frac{(1-x_1^2)^2}{2} \right] dx_1$$

F(x1)

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x_1^4}{2} \right) dx_1 = \frac{4}{5}$$

Impostiamo almeno l'integrale come fosse A orizzontalmente convesso

$$\iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x_2}}^{+\sqrt{1-x_2}} (1-x_2) dx_1 \right) dx_2 = *$$



$x_2 = 1 - x_1^2 \rightarrow$ voglio in funzione di x_2 perché lo guardo come fosse ruotato di 90°

$$x_1^2 = 1 - x_2$$

$$x_1 = +\sqrt{1-x_2}$$

$$x_1 = -\sqrt{1-x_2}$$

$$* = \int_0^1 \left[(x_1 - x_2 x_1) \right]_{-\sqrt{1-x_2}}^{+\sqrt{1-x_2}} dx_2 = \int_0^1 \left(\sqrt{1-x_2} - x_2 \sqrt{1-x_2} + \sqrt{1-x_2} - x_2 \sqrt{1-x_2} \right) dx_2$$

Il limite di queste formule di riduzione è che il dominio descrittore è verticalmente o orizzontalmente (o entrambe le cose) convessi

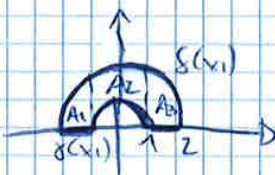


ne' vert. ne' orizz. convesso

FORMULA DI ADDITIVITÀ RISPETTO AL DOMINIO

$$C = A \cup B$$

A = semicircolo superiore
B = semicircolo inferiore



$$x_1^2 + x_2^2 = 4$$

$$x_2 = \sqrt{4 - x_1^2}$$

è elemento o tratti (ovvero definibile tramite una funzione)

A come unione di 3 insiemi

Con integrali semplici, con sostituzione l'intento è di facilitare la ricerca della primitiva

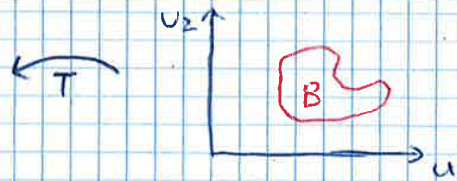
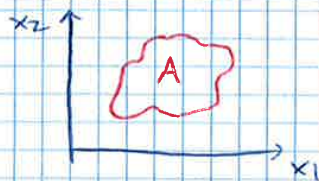
CALCOLO DI INTEGRALI DOPPI CON L'USO DI SOSTITUZIONI

(CAMBIAMENTI DI COORDINATE)

Scopo: SEMPLIFICARE la FORMA del DOMINIO
di INTEGRAZIONE quindi
RENDERE + SEMPLICE la RIDUZIONE

Formula di sostituzione o cambiamento di coordinate x integrali doppi in $\mathbb{R}^2$

16/10/14



l'opposto delle espressioni
che vanno a sostituire x_1
e x_2

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(u_1, u_2) \\ x_2 = \varphi_2(u_1, u_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \varphi_1(x_1, x_2) \\ u_2 = \varphi_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

① T deve essere un'applicazione biunivoca (invertibile)

② $T \in C^1$ (continua e derivabile univ. rel. a tempo continuo)

③ $\det(JT)(u_1, u_2) \neq 0 \quad \forall (u_1, u_2)$

JT = matrice jacobiana di T

$$JT = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

↳ ③ condizione rende implicito la ① (perché in questo caso è un'applicazione lineare, allineata e giusta metterla)

$$\iint_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_B f(\varphi_1(u_1, u_2), \varphi_2(u_1, u_2)) \cdot |\det JT(u_1, u_2)| du_1 du_2$$

A insieme misurabile
f continua

$$B = T^{-1}(A)$$

Come mai valore assoluto?

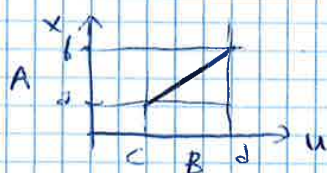
$$\text{Ricordo } \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) du$$

↓
integrali orientati

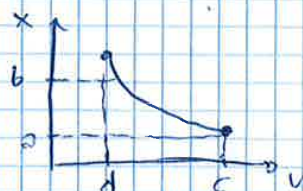
$$c = \varphi^{-1}(a)$$

$$d = \varphi^{-1}(b)$$

Non è detto che $d > c$



funzione crescente, derivata positiva



funzione decrescente, derivata negativa

Il valore assoluto a volte, se siamo in integrali definiti (non orientati)

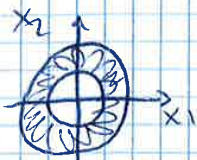
$$\int_{[a,b]} f(x) dx = \int_{\pm} f(\varphi(u)) \cdot |\varphi'(u)| du$$

$$I = \begin{cases} [c, d] & d > c \\ [d, c] & d < c \end{cases}$$

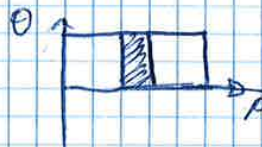
Ci vuole un nome a derivata e un nome a $d < c$
già detto e d nell'orientamento

$$JT = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

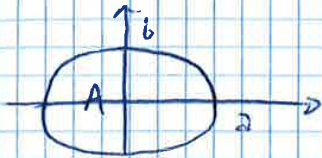
$$\det(JT) = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$



ρ sempre positivo

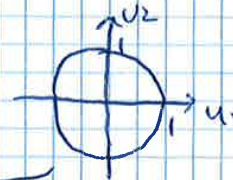


Se stessi preso contorno con 2 raggi + angoli, veniv solo spostato a dx il secondo grafico



ellisse

$$\begin{cases} x_1 = a u_1 \\ x_2 = b u_2 \end{cases}$$



Trasformo ellisse in cerchio, poi trasformo in coordinate polari (è un modo)

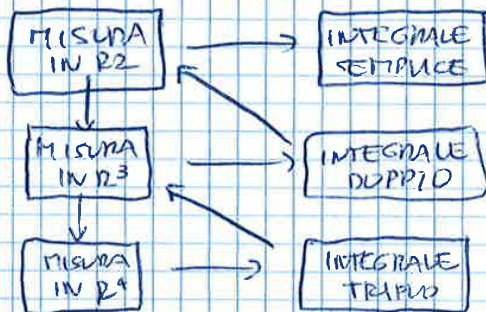
$$\begin{cases} x_1 = a \rho \cos \theta \\ x_2 = b \rho \sin \theta \end{cases}$$

CAMBIAMENTO DI COORDINATE ELLIPTICO

$$\det(JT) = ab\rho$$

Calcolare integrale doppio $\rightarrow$ formule di riduzione (2 integrali semplici)

INTEGRALI TRIPLI



mettere fondamentale: RETTANGOLO (come riferimento x calcolo area)

mettere: PARALLELEPIPEDO (riferimento x calcolo volume)

mettere: non facile, si parla di IPERRETTANGOLO

$\mathbb{R}^4 (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow$ no, lo immagino nellamente

IPER-RETTANGOLO = prodotto cartesiano di 4 intervalli

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times [a_4, b_4]$$

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot (b_3 - a_3) \cdot (b_4 - a_4)$$

$A \subset \mathbb{R}^4$ LIMITATO

$$s_0 \subset s_1 \subset \dots \subset A \subset \dots \subset R_2 \subset R_1 \subset R_0$$

idem ma
destra

pluri-iper-rettangoi = unione finit di iper-rettangoi

$$m(s_0) \leq m(s_1) \leq \dots \leq m(R_1) \leq m(R_0)$$

successioni in $\mathbb{R}$ (il punto di vista logico è come prima)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(s_k) = l^- \leq l^+ = \lim_{k \rightarrow \infty} m(R_k)$$

Se esiste un modo di costruire gli s e gli R (pluri-iper-rettangoi) in modo che

$$l^- = l^+ \text{ allora } A \text{ è misurabile in } \mathbb{R}^4 \text{ e } m(A) = l^- = l^+$$

Se invece, comunque si costruiscono i pluri-iper-rettangoi, si ha sempre $l^- < l^+$ allora A non è misurabile.

$$\begin{aligned}
 * &= \iint_Q \left[x_1 x_3 + x_2 x_3 + \frac{x_3^2}{2} \right]_0^1 dx_1 dx_2 = \iint_Q (x_1 + x_2 + \frac{1}{2}) dx_1 dx_2 = \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^1 (x_1 + x_2 + \frac{1}{2}) dx_1 \right) dx_2 = \int_0^1 \left[x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{x_1^2}{2} \right]_0^1 dx_2 \\
 &= \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

Quell'atto è una riduzione per fili (prima un integrale semplice poi doppio).

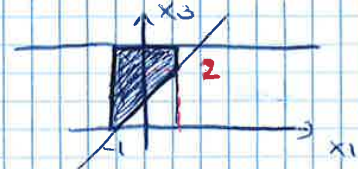
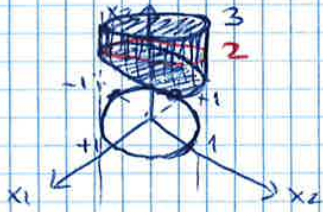
$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \left(\iint_Q (x_1 + x_2 + x_3) dx_1 dx_2 \right) dx_3 = \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 (x_1 + x_2 + x_3) dx_2 \right) dx_1 \right] dx_3 \quad \dots = \frac{3}{2} \quad \text{per strati}
 \end{aligned}$$

ESEMPIO 2

$$\iiint x_2 dx_1 dx_2 dx_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2$$

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_1 + 1 \leq x_3 \leq 3\}$$



cilindro su cui è stato dato taglio in diagonale

Tagliando diagonalmente un cilindro → ellisse

$$\begin{aligned}
 &\iint (---) dx_1 dx_2 = \iint_E \left(\int_{x_1+1}^3 x_2 dx_3 \right) dx_1 dx_2 = \iint_E [x_2 x_3]_{x_1+1}^3 dx_1 dx_2 = \\
 &= \iint_E (3x_2 - x_2(x_1+1)) dx_1 dx_2 = \iint_E (2x_2 - x_1 x_2) dx_1 dx_2 = \text{passaggio coordinate polari} \\
 &\Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \theta \\ x_2 &= \rho \sin \theta \end{aligned} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\rho \sin \theta - \rho^2 \cos \theta \sin \theta) \rho d\rho d\theta = 0
 \end{aligned}$$

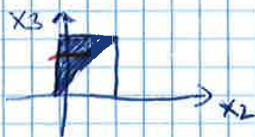
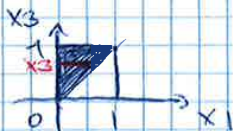
Funzione dispari con dominio simmetrico

ESEMPIO 3

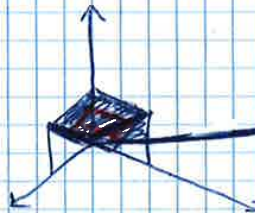
$$\iiint_A x_1^2 dx_1 dx_2 dx_3$$

$$0 \leq x_1 \leq x_3 \leq 1$$

$$0 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$$



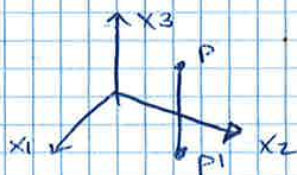
Lo faccio io.



Una sorta di piramide inclinata

CAMBIAMENTI DI COORDINATE - INTEGRALI TRIPOLI

① CILINDRICHE



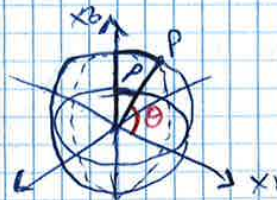
$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos \theta \\ x_2 = \rho \sin \theta \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\det JT = \rho$$

una coordinata rimane la stessa, per le altre due cambiamento di coordinate nel piano

② SPERICHE

ρ = distanza di P da O

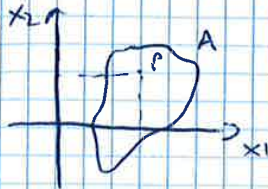


φ = angolo tra asse x_3 e il vettore OP

$$\mathbb{R}^2 \quad G = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$g_1 = \frac{1}{M} \iint_A x_1 \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$g_2 = \frac{1}{M} \iint_A x_2 \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$



$g_1 \rightarrow$ media fatto su distanza rispetto ad un asse di riferimento

$\rightarrow$ DENSITA' UNIFORME E UNITARIA
sempre uguale uguale a 1

$$\rightarrow \rho^{(m)}(x_1, x_2) \equiv 1$$

$$g_1 = \frac{1}{M} \iint_A x_1 dx_1 dx_2$$

$\uparrow$
 $m(A)$

$$M = \iint_A dx_1 dx_2 = m(A)$$

Coordinate uniforme e unitarie, baricentro parte senso fisico e soprattutto senso geometrico
ovvero baricentro dipende da forma del corpo.

Considero il caso di densità di P da un punto fisso

$$I = \iint_A (x_1^2 + x_2^2) \mu(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$



MOMENTO D'INERZIA (I)

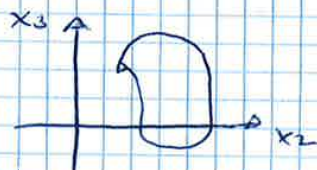
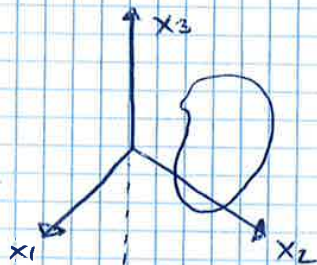
momento d'inerzia (moti rotatori) $\hat{=}$ massa (moto lineare)

Come ruolo e la stessa resistenza a movimento in seguito

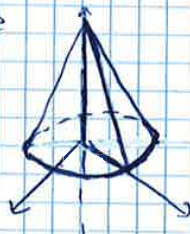
da applicazione di una forza

APPLICAZIONE DELL'USO DI BARICENTRA

AI SOLIDI DI ROTAZIONE



Caso particolare TRIANGOLO



Solidi di rotazione, ci sarà un asse intorno al quale
solido ruota

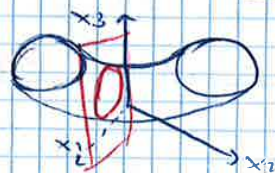
Asse di rotazione = asse x_3

Figura per cui solido giace nel semipiano $x_2 \geq 0$
 $x_3 \in \mathbb{R}$

Scelgo semipiano altrimenti potrei avere
figura sovrapposta su se stessa

La figura prima che faccio ruotare si dice

SEZIONE MERIDIANA S



Sezione meridianale lo
immagino nel semipiano
 $x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}$ mi poi
svolgere discorso?
qualsiasi semipiano
(quello esempio)

A = solido generato da una rotazione completa (2π)

S insieme misurabile $\subset \mathbb{R}^2$

TEOREMA SUL VOLUME DEI SOLIDI DI ROTAZIONE (GULDINO, PAPPO)

$$m(A) = \iiint_A dx_1 dx_2 dx_3 = 2\pi \iint_S x_2 dx_2 dx_3 = 2\pi m(A) |y_G|$$

CURVE IN FORMA PARAMETRICA in $\mathbb{R}^n$

è una funzione da un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

CURVA SEMPLICE se γ è INIETTIVA (ma valori di t che hanno la stessa immagine)
IMMAGINE IN $\mathbb{R}^n$ di γ si dice SOSTEGNO

SENSO DI PERCORRENZA - modo in cui viene percorso la curva con il valore di t da 0
a 2π (di solito), modo in cui varia il sostegno in pratica

$[a, b] \subset I$ arco di curva (aperto o chiuso, in questo caso chiuso)



$\gamma(a), \gamma(b) \in \mathbb{R}^n =$ estremi della curva

a, b estremi dell'intervallo

$\neq$

Può succedere che $\gamma(a) = \gamma(b)$ (caso circonferenza) $\rightarrow$ CURVA CHIUSA

A rigor di logica, curva chiusa non è semplice ma si fa un'eccezione per questo

Quindi una curva chiusa è semplice se l'unico caso in cui due sostegni sono uguali è per gli estremi della curva

EX.



non è semplice

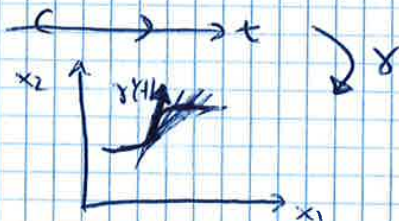
{ Curva si dice REGOLARE quando funzione che definisce la curva è continua con
derivate continue.

se $\forall i = 1, \dots, n$

$\forall t \in I$ e inoltre

$$\gamma(t) \text{ è continua, derivabile con derivate continue } (C^1)$$

$$\begin{pmatrix} \gamma'_1(t) \\ \vdots \\ \gamma'_n(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$



$$\gamma'(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

vettore tangente alla
curva

mi dice la velocità istantanea
del punto e la direzione dello
spostamento

Se $\gamma' = 0$ velocità si annulla $\rightarrow$ vettore diventa un punto $\rightarrow$ perdo info su vettore
tangente

impongo che $\gamma' \neq 0$ volente dire che, se derivata funzione continua, non cambia
segno.

RETTA

$$\begin{cases} x_1 = at + b \\ x_2 = ct + d \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_1 = a \\ x'_2 = c \end{cases}$$

vettore tangente costante

Calcolo degli INTEGRALI nel caso di CURVE REGOLARI

$$\gamma(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[a, b]$$

$$\gamma'(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma'_1(t))^2 + (\gamma'_2(t))^2 + \dots + (\gamma'_n(t))^2}$$

NORMA EUCLIDEA

modulo $\|\gamma'(t)\|$ = valore numerico della velocità

$$\int_{\gamma} f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

$ds = \text{spazio} = \text{velocità} \times \text{tempo}$



La presenza di $\gamma'(t)$ sta a dimostrare che l'integrale è indipendente dalla parametrizzazione (2)

Riprendo INTEGRAZIONE DI 1° TIPO

30/10/14

$$\tau = s(t) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt$$

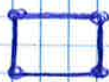
$$\frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\| \rightarrow ds = \|\gamma'(t)\| dt$$

CAMBIAIMENTO DI PARAMETRO

$$\|\gamma'(t)\| > 0 \quad \forall t$$

$\tau =$ parametro d'arco

γ regolare
a tratti



In corrispondenza dei vertici diventa combi di colpo,
discontinua anche della funzione



$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f ds$$

una parte della curva, non le componenti di γ come in altri casi

2) Integrali lungo curve del 2° tipo

$$\int_{\gamma} F \cdot t$$

1° differenza: F campo vettoriale $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mentre 1° tipo campo scalare $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

2° differenza: t che ricorda il vettore tangente, $F \cdot t$ prodotto scalare

Insomma, questi integrali del 2° tipo, x applicazioni fisiche: CALCOLO DEL LAVORO
compiuto da una FORZA PER SPOSTARE PUNTO MATERIALE



FORZA PERZIONALE

Scompare F lungo direzione normale e tangente al moto

Su binario gioca solo componente tangente, quella normale non ha peso

$$F(x) \cdot \gamma'(t) \quad x = \gamma(t)$$

Ottengo vettore che si proietta sulla tangente, ma non è la componente di F lungo quella direzione

Allora $F(x) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} =$ lunghezza con segno cioè componente di F nella direzione tangente
~~adeguata componente F lungo direzione tangente~~ $\rightarrow$ curva in x

$$\int_a^b \frac{F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

DEF.

$$\int_{\gamma} F \cdot t = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Questi particolari combinazioni di operatori differenziali produce sempre 0

DIM. $f(x_1, x_2, x_3)$

↓ grad

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

↓ rot

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ - \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI SCHWARZ, ricordando che, se funzione è di classe C^2 non importa l'ordine di derivazione.

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\text{dom } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$F = (f_1, \dots, f_n) \text{ continue}$$

A aperto

DEF. Un campo scalare $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice potenziale di F se g è di classe C^1 e $\text{grad}(g(x)) = F(x)$ in ogni $x \in A$

con $n \geq 2$ esempio

$$F(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$$

$$g(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\text{grad } g = (x_1, x_2)$$

altro esempio

$$F(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$$

$$g(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) = (x_2, x_1)$$

$$F(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$$

NON AMMETTE POTENZIALE: cioè non esiste alcuna funzione g che abbia proprietà richiesta ovvero $\frac{\partial g}{\partial x_1} = x_2$, $\frac{\partial g}{\partial x_2} = -x_1$

Teorema (condizione necessaria affinché campo ammetta potenziale)

Se Un campo vettoriale $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ammette potenziale allora $\text{rot } F = 0$ in ogni punto del dominio

DIM. $\exists g$ campo scalare f.c. $F = \text{grad } g$

$$\text{rot } F = \text{rot}(\text{grad } g) = 0$$

$$F(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, 0) \text{ caso precedente}$$

$$\text{rot } F = (0, 0, -1-1) = (0, 0, -2) \neq 0$$

(perché componente x_3 non compare mai)

Campi della fisica di solito ammettono potenziale, eccetto CAMPO MAGNETICO

F è campo conservativo se ammette potenziale

TEOREMA (condizione necessaria)

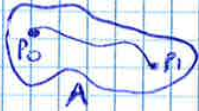
Se F è un campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$ con $\text{dom } F = A$ è chiuso (cioè si conserva...)

$\oint_C F \cdot t \rightarrow$ integrale su curva chiusa = CIRCUITAZIONE

COROLLARIO Se F conservativo qualunque sia γ chiusa,
 $\oint F \cdot t = 0$

DEF. Supponiamo che $\text{dom } F = A$ aperto CONNESSO

A Connesso se dati due punti arbitrari $P_0, P_1 \in A$, esiste una curva γ di classe C^1 che ha come estremi P_0 e P_1 e tale che il suo sostegno sia tutto contenuto in A .



CONNESSO $\neq$ CONVENSO

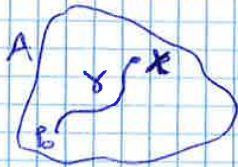
ex.

Connesso concetto + generale di CONVENSO



è connesso ma non convenso

TEOREMA Se F è un campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$ con dominio A aperto e connesso e se f e g sono due potenziali di F su A , esiste una costante K tale che
 $\forall x \in A \quad f(x) = g(x) + K$



$$\int_{\gamma} F \cdot t = \left(g(x) - g(P_0) \right) = f(x) - f(P_0)$$

$\uparrow$
 è un vettore, per questo in parentesi

$$\text{Allora } g(x) - g(P_0) = f(x) - f(P_0)$$

$$g(x) - f(x) = g(P_0) - f(P_0) = K \text{ costante}$$

$$\forall x \quad g(x) = f(x) + K$$

CONDIZIONI NECESSARIE PER CAMPO CONSERVATIVO:

06/11/14

① $F \in C^1$

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

$$\forall x \in \text{dom } F = A$$

$\forall i, j$ diversi tra loro

② $F \in C^0$

INDIPENDENZA DAL CAMMINO

$$\int_{\gamma} F \cdot t = \int_{\delta} F \cdot t$$

$\forall \gamma, \delta$ con gli stessi estremi

$$\oint_{\gamma} F \cdot t = 0$$

$\forall \gamma$ chiusa

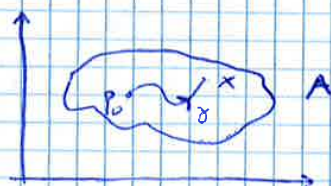
Abbiamo dimostrato che ① sia condizione sufficiente

Teorema $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuo e se A è aperto e connesso e se vale la proprietà di indipendenza dal cammino (per tutte le curve con sostegno contenuto in A) allora F è conservativo

DIM.

1^a - fare una costruzione $g: A \rightarrow \mathbb{R}$

2^a - fare una verifica che $\nabla g = F(x) \quad \forall x \in A$



$$\int_{\gamma} F \cdot t = g(x) = \int_{\delta} F \cdot t$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = f_i(x)$$

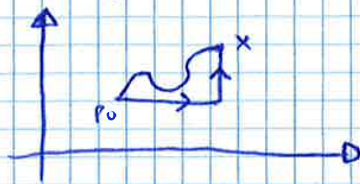
Costruzione del potenziale

Trovare p :

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = f_1$$

1° modo

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = f_2$$



$$p(x) = \int F \cdot \mathbf{t}$$

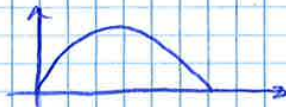
2° modo

$$\int F \cdot \mathbf{t} = \iint_K \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \right) dx_1 dx_2$$

primo caso in modo che fissi 1

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

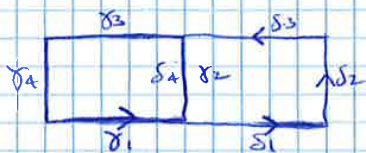
CICLOIDE = punto fisso su ruote che rotolano su un piano



Posso scrivere la sua espressione analitica con parametrizzazione

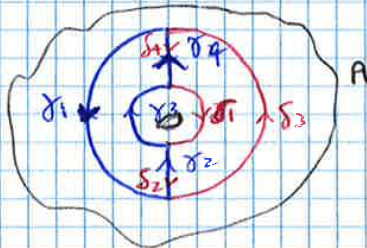


GENERALIZZAZIONI DEL TEOREMA DI GREEN



$$\oint_{\partial K} F \cdot \mathbf{t} = \int_{\gamma_1} F \cdot \mathbf{t} + \int_{\gamma_2} F \cdot \mathbf{t} + \int_{\gamma_3} F \cdot \mathbf{t} + \int_{\gamma_4} F \cdot \mathbf{t}$$

$$\oint_{\partial K} F \cdot \mathbf{t} = \int_{\gamma_1} F \cdot \mathbf{t} + \int_{\gamma_2} F \cdot \mathbf{t} + \int_{\gamma_3} F \cdot \mathbf{t} + \int_{\gamma_4} F \cdot \mathbf{t}$$



$$\int_{\gamma_1} F \cdot \mathbf{t} + \int_{\gamma_2} F \cdot \mathbf{t} = 0$$

Conclusione x teorema di Green:

posso prendere γ_1 e γ_2 definite da due curve come in



$$\text{figura} \rightarrow \oint_{\text{interno}} F \cdot \mathbf{t} + \oint_{\text{esterno}} F \cdot \mathbf{t} =$$

INTEGRALI SU SUPERFICI

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

(non tratteremo n dimensioni)

analogia col caso delle curve

SPERA in forme cartesiane

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 = \cos \varphi \sin \theta \\ x_2 = \sin \varphi \sin \theta \\ x_3 = \cos \theta \end{cases}$$

mi fanno lo stesso caso

sfera in forma parametrica, al variare di φ, θ

$$N(u_1, u_2) = I_1 i + I_2 j + I_3 k$$

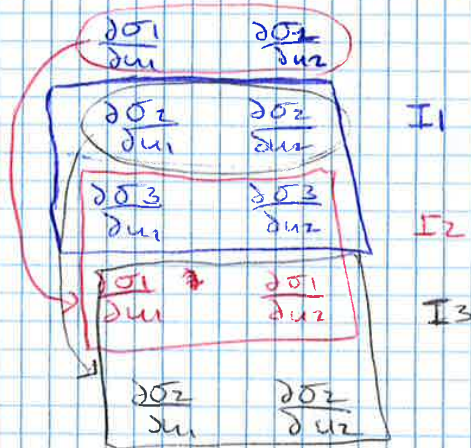
$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial u_2} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_3} \end{pmatrix} =$$

$$I_1 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

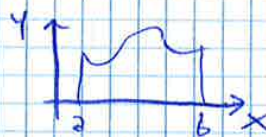


PIANO TANGENTE IN $\bar{P} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$

$$I_1 (x_1 - \bar{x}_1) + I_2 (x_2 - \bar{x}_2) + I_3 (x_3 - \bar{x}_3) = 0$$

$$\text{Sarebbe uguale a: } N \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \\ x_3 - \bar{x}_3 \end{pmatrix} = 0$$

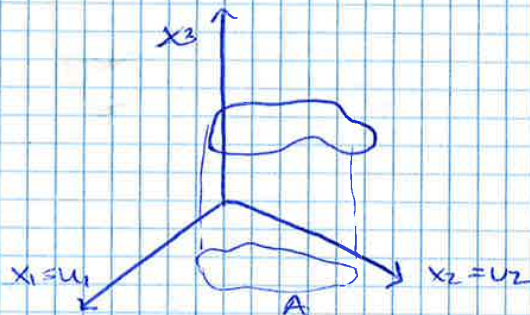
CASO PARTICOLARE
delle superfici che sono
grafici



$$y = f(x) \xrightarrow{\text{parametrizzazione}} \begin{cases} y = f(t) \\ x = t \end{cases}$$

Superficie si dice che è un grafico quando

$$\sigma(u_1, u_2) = \begin{cases} x_1 = u_1 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = f(u_1, u_2) \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

rango 2 e l'ho
x forma

ogni grafico
è sempre regolare

$$N = \left(-\frac{\partial f}{\partial u_1}, -\frac{\partial f}{\partial u_2}, 1 \right)$$

Piano tangente

$$x_3 = f(u_1, u_2) + \frac{\partial f}{\partial u_1}(u_1, u_2)(x_1 - u_1) + \frac{\partial f}{\partial u_2}(u_1, u_2)(x_2 - u_2)$$

INTEGRALE DI SUPERFICIE

curva $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$
 arco di curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\nearrow$ differenza
 $a < c < d < b$

superfici $\sigma: A \rightarrow \mathbb{R}^3$

con A aperto $\subset \mathbb{R}^2$

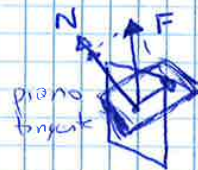
Brayn ha fatto l'analogo di arco di curva e superfici: CALOTA

Integrale del 2° TIPO

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dove F contiene il sostegno della superficie

INTEGRALE DI FLUSSO $\int_{\sigma} F \cdot n = \iint_K F(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) \cdot N(u,v) \, du \, dv$
 fluido che si muove con velocità F dipendente dalla posizione rappresentata da F

$$F(x_1, x_2, x_3) \cdot \frac{N(P)}{\|N(P)\|} \cdot \|N(P)\|$$

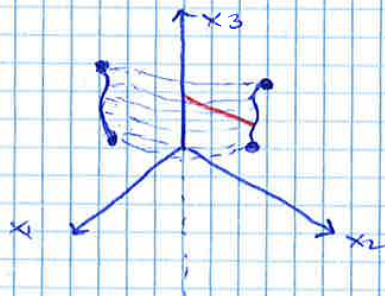


F avrà 2 componenti, una lungo N , l'altra tangente

INTEGRALE DI FLUSSO non dipende dalla parametrizzazione purché $\det(JT)(u,v) > 0$

SUPERFICI DI ROTAZIONE = calcolo dell'area

Teorema di GULDINO per le superfici



curva in (x_2, x_3) con $x_2 \geq 0$

SEZIONE MERIDIANA

$$\gamma(t) = (0, \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

positivo

$t \in [a, b]$

$$\int_{\sigma} 1 \, dS = 2\pi \int_{\gamma} x_2 \, dS = 2\pi \underbrace{e_{\gamma}}_{\substack{\text{distanza del punto} \\ \text{generico sulla curva} \\ \text{dall'asse di rotazione}}} \underbrace{\int_{\gamma} x_2 \, dS}_{\substack{\text{componente del baricentro} \\ \text{di } \gamma \text{ rispetto all'asse } x_2 \\ \text{baricentro della curva}}}$$

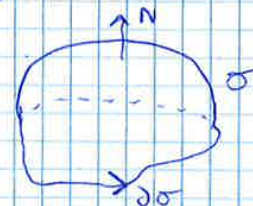
TEOREMA DI STOKES trasforma integrale di (superficie) $\int_{\sigma} F \cdot n$ in integrale di curva $\int_{\partial\sigma} F \cdot \tau$

V sottinsieme di $\mathbb{R}^3$ e sia F un campo vettoriale di classe C^1 , dominio $F = V$.
 o un solido di $\mathbb{R}^3$ con sostegno contenuto in V

$$\int_{\partial\sigma} F \cdot \tau = \int_{\sigma} \text{rot } F \cdot n$$

campo vettoriale $G = \text{rot } F$

$$\text{div } G = \text{div } \text{rot } F = 0$$



In $\mathbb{R}^n$ (in particolare in $\mathbb{R}^3$) se F è campo conservativo allora $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ ($\text{rot } F = 0$)

V semplicemente connesso in $\mathbb{R}^3$ se per ogni curva chiusa regolare a tratti con sostegno contenuto in V , esiste un solido σ con sostegno contenuto in V il cui bordo $\partial\sigma$ coincide con la curva data

Se V semplicemente connesso e se F è irrotazionale

successione diverge positivamente se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > N$ e tale che $y_n > \varepsilon$

diverge negativamente

$$y_n < -\varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$$

Successione che non è né convergente, né pos. né neg. divergente, allora si dice che y_n non ammette limite (né finito né infinito)

SUCCESSIONE MONOTONA CRESCENTE

$$n_1 \leq n_2 \Rightarrow y_{n_1} \leq y_{n_2}$$

SUCCESSIONE MONOTONA DECRESCENTE

$$n_1 \leq n_2 \Rightarrow y_{n_1} \geq y_{n_2}$$

Se $\{y_n\}$ monotona crescente allora il limite di y_n o esiste finito oppure è $+\infty$. Non può accadere che limite non esista.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \begin{cases} l \\ +\infty \end{cases}$$

Una successione si dice limitata se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a \leq y_n \leq b$

a = limitazione inferiore
 b = limitazione superiore

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema Se $\{y_n\}$ monotona crescente allora:

(1) se è superiormente limitata allora converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} y_n$

(2) se non è superiormente limitata, allora diverge positivamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

SERIE

Operazione che si fa su successione

Si data una successione di numeri reali $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

DARE UN SENSO ALL'ESPRESSIONE "SOMMA DI TUTTI GLI a_n "

L'OPERAZIONE DI "SERIE" SI INDICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

DEFINISCO NUOVA SUCCESSIONE

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

$\vdots$

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

TERMINE GENERALE
DELLA SERIE

SUCCESSIONE DELLE SOMME
PARziali o RIDOTTE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

s_n σ_n p_n

$$p_n = s_n + \sigma_n$$

SERIE SOMMA (non confondo con somma della SERIE)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{Costante}$$

se convergen $\rightarrow$ converge
se divergen $\rightarrow$ diverge

STUDIO DEL COMPORTAMENTO

Condizione necessaria di convergenza

TEOREMA

Dato una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, se converge allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$ esiste finito $\neq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$(A) \Rightarrow (B)$$

Se (B) non verificato, è sicuro che (A) non è.
In se (B) verificato non è detto che (A) ci sia

DIM.

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \forall n$$

$$a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n =$$

$$= S - S = 0$$

lo posso fare se limite esiste finito
i due addendi hanno limite finito

CONTROESEMPIO $\times$ Gr vedere che non è condizione sufficiente

Travò serie in cui termine generale tende a 0 ma serie diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \text{limite } e^{-1}$$

$$s_1 = \log 2$$

$$s_2 = \log 2 + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \log 2 + \log \frac{3}{2} = \log 2 + \log 3 - \log 2 = \log 3$$

$$s_3 = \log 3 + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \log 3 + \log 4 - \log 3 = \log 4$$

$$s_n = \log(n+1) \quad \text{che tende a } \infty$$

Condizioni sufficienti per la convergenza (o divergenza)

SERIE A TERMINI POSITIVI (non cambia il segno di a_n) cioè $a_n \geq 0$
o tutti pos. o tutti neg.
Non li prendiamo tutti positivi

Vantaggio di serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n \geq 0$$

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

$$\{s_n\} \text{ crescente cioè } s_{n+1} \geq s_n$$

la successione non può divergere a $-\infty$ e non può essere indeterminata (VANTAGGIO)

Due possibilità: o converge o diverge a $+\infty$
 $a \leq \sup s_n \quad \forall n$

Se $\{s_n\}$ è limitata converge, altrimenti diverge

TEOREMA CRITERIO DEL CONFRONTO PER LE SERIE

Siano date due serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ a termini positivi ($a_n \geq 0, b_n \geq 0, \forall n$)

Supponiamo che $a_n \leq b_n \quad \forall n = 0, 1, 2, 3, \dots$

(la serie $\sum b_n$ si dice MAGGIORANTE, $\sum a_n$ MINORANTE)

$$\frac{1}{n(n-1)} \geq \frac{1}{n^2} \rightarrow \text{SERIE ARMONICA } \sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge se } \alpha > 2$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{con } \alpha > 2 \rightarrow \text{serie armonica generalizzata converge}$$

↑
minorente

$$\begin{array}{c} 1 \\ \text{diverge} \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ ? \end{array} \quad \begin{array}{c} 2 \\ \text{converge} \end{array} \rightarrow \alpha$$

$$\frac{1}{n^\alpha} \quad \text{infinitesimi comparsi per } n \rightarrow \infty$$

① CRITERIO DEL RAPPORTO, ② CRITERIO DELLE RADICI

① Limite per se non sempre funziona e per se richiedono ipotesi: $a_n > 0$

SERIE A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \text{per questo } \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Se il limite esiste finito l

① se $l < 1$ la serie converge

② se $l > 1$ la serie diverge

per $l = 1$ nessuna conclusione

$$\sum \frac{1}{n} \quad \sum \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{diverge}$$

$$\frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1 \quad \text{converge}$$

D.M.

È un criterio limitato ma può servire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$$

$$\frac{l-\epsilon}{1-\epsilon} < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{l+\epsilon}{1+\epsilon}$$

$$\epsilon = \frac{1-l}{2} \geq 0 \text{ massimo e } l+\epsilon > 1$$

$$l-\epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l+\epsilon$$

$$\boxed{a_{n+1} < (l+\epsilon) a_n} \quad \forall n > \bar{n}$$

$$n = \bar{n} \quad a_{\bar{n}+1} < (l+\epsilon) a_{\bar{n}}$$

$$n = \bar{n}+1 \quad a_{\bar{n}+2} < (l+\epsilon) a_{\bar{n}+1} < (l+\epsilon)^2 a_{\bar{n}}$$

$$n = \bar{n}+2 \quad a_{\bar{n}+3} < (l+\epsilon) a_{\bar{n}+2} < (l+\epsilon)^3 a_{\bar{n}}$$

$$\forall m \quad a_{\bar{n}+m} < (l+\epsilon)^m a_{\bar{n}}$$

$$\epsilon a_{\bar{n}+m} \text{ MINORANTE DI } \epsilon (l+\epsilon)^m a_{\bar{n}} = a_{\bar{n}} \underbrace{\epsilon (l+\epsilon)^m}_{\text{const}}$$

quindi converge! CVD

se $l > 1$ trovare minovente con rigore > 1 che diverge o diverge tutto

② CRITERIO DELLA RADICE

Data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini positivi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l \quad \begin{cases} l < 1 & \text{serie converge} \\ l > 1 & \text{serie diverge} \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x) dx$$

LIMITE DI UNA SUCCESSIONE

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(x) dx$$

LIMITE CON x CHE VARIA CONTINUAMENTE

$$f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^x f(x) dx \text{ crescente}$$

Allora ho finito dimostrazione

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

SERIE A SEGNI ALTERNI (DEFINITIVAMENTE)

$$a_n = (-1)^n b_n$$

$$b_n = |a_n| > 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$$

CRITERIO DI LEIBNIZ

(CONDIZIONE SUFFICIENTE NON NECESSARIA) per la convergenza

$$\text{Se } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

e inoltre $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n$ allora la serie converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$$

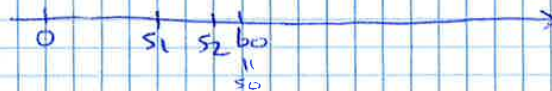
$$b_n > 0$$

$$s_0 = b_0$$

$$s_1 = b_0 - b_1$$

$$s_2 = b_0 - b_1 + b_2$$

...



$$s_{2n} - s_{2n+1} = b_{2n+1} \rightarrow 0$$

$$|s - s_n| \leq b_{n+1}$$

Questo criterio dà anche un'idea dell'errore

Assumendo s_n come approssimazione della somma s , l'errore che si commette non è più grande del primo termine trascurato cioè b_{n+1}

CONVERGENZA ASSOLUTA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

$\hookrightarrow$ termini positivi

TEOREMA

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e in caso di convergenza,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

estensione alle serie di

DEFINIZIONE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

CONVERGE ASSOLUTAMENTE SE

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

CONVERGE

LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

CONDIZIONE SUFFICIENTE MA NON NECESSARIA

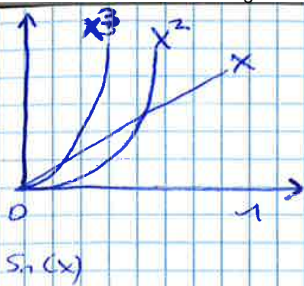
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{n} \right)^{nn} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{nn}}{n} \right|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Posso usare Leibniz per verificare:

- ① forma serie a segni alterni
- ② $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ dato $b_n = \frac{1}{n}$
- ③ $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n$ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n \leq n+1$



La funzione limite può essere discontinua anche se le $f_n(x)$ sono regolari

$$C_0 = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \}$$

$C = \{ x \mid \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \text{ esiste finito} \}$
cioè la serie converge

$$C \subseteq C_0$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ esempio semplice di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

DEFINIZIONE

serie di potenze centrata nell'origine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

centro

Una somma finita di potenze è un POLINOMIO

Serie geometrica si ottiene ponendo tutti gli $a_n = 1$

$$x \in (-1, 1)$$

Teorema

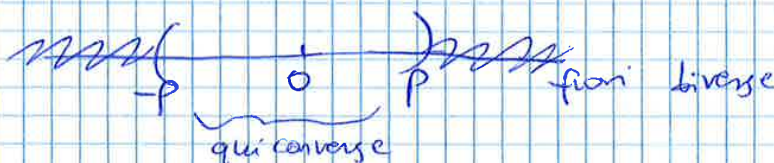
Sia data una serie di potenze centrata nell'origine

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Qualunque siano i coefficienti si hanno 3 possibilità:

- 1) Un punto solo in cui la serie converge detto CENTRO quindi per $x=0$
- 2) Esiste ρ positivo detto ρ tale che la serie converge per ogni x tale che $|x| < \rho$
- 3) La serie converge qualunque sia x

Per punto due (2) vuol dire che viene verificato intervallo



C nel caso 2)
insieme di convergenza

$$\left\{ \begin{array}{l} (-p; p) \\ [-p; p) \\ (-p; p] \\ [-p; p] \end{array} \right\}$$

ρ nel caso 2) si chiama
RAGGIO DI CONVERGENZA

ci possono essere 4 insiemi
l'insieme va scelto tra uno di questi

Es. 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n!) x^n$$

fissato x positivo

studio la serie con criteri pratici

così la serie

è a termini positivi e posso usare criteri

non è limitativo perché quello che ottengo x termini positivi

lo rifletto su termini negativi

① $C = \{0\}$ $\nearrow$ se non è cost, esiste almeno un $x \neq 0$ in cui la serie converge
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow$ il termine generale tende a zero
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \bar{x}^n = 0$

$\Rightarrow \exists M > 0$ t.c. $a_n \bar{x}^n \in [-M, M]$

$$|a_n \bar{x}^n| < M \quad \forall x$$

da un certo M in poi stanno tutti lì dentro e fuori vuol dire che ce ne sono alcuni numeri ~~non~~ in numero finito

Allora prendo un M grande tale che contenga $[-M, M]$ tutti i punti!

Sia x : $|x| < |\bar{x}|$

$$|a_n x^n| = |a_n \bar{x}^n| \frac{\left|\frac{x}{\bar{x}}\right|^n}{\left|\frac{\bar{x}}{\bar{x}}\right|^n} = |a_n \bar{x}^n| \frac{|x|^n}{|\bar{x}|^n} \leq M \left(\frac{|x|}{|\bar{x}|}\right)^n \quad \forall n$$

Supponiamo: $\bar{x} \neq 0$ multiplico e divido per $\bar{x}$

perché so

$$\frac{|x|}{|\bar{x}|} < 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ è maggiorata dalla serie } \sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{|x|}{|\bar{x}|}\right)^n$$

Porto M fuori perché non dipende da n , quello che rimane è una serie geometrica

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|x|}{|\bar{x}|}\right)^n$$

è convergente perché è serie geometrica di ragione < 1

$$\frac{-|\bar{x}|}{|\bar{x}|} \rightarrow \frac{1}{|\bar{x}|}$$

$$\forall x: |x| < |\bar{x}|$$

Se $\bar{x} \neq 0$ fosse un punto in cui $\sum a_n \bar{x}^n$ non converge

$\forall x: |x| > |\bar{x}|$ la serie $\sum a_n x^n$ non converge

$\Rightarrow$ definisco $\rho = \sup \{ x > 0 : \text{la serie } \sum a_n x^n \text{ converge} \}$

$$\rho = +\infty$$

$$\text{se } 0 < \rho < +\infty$$

siamo nel caso secondo e si

definire insieme di convergenza

Per ogni serie esiste $\rho \geq 0$

$$\text{se } \rho = 0$$

serie converge es. $(2n+1)!$

solo quando $x=0$ (diverge) per ogni altro x

non converge

04/12/14

$$\text{se } \rho > 0$$

serie converge es. $2n+1$

$\forall x \in (-\rho, \rho)$, non converge $\forall x \in (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty)$

$$\text{se } \rho = +\infty$$

serie converge

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{es. } a_n = \frac{1}{n!}$$

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{non può essere approssimato in termini elementari}$$

Come faccio ad usare questo funzione facendo dei calcoli? Cerco di scriverlo come serie (serie servono anche a questo)

CALCOLARE CON FUNZIONI ASSEGNATE COME SOMMA DI UNA SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_1(x) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_2(x)$$

SOMMA ALGEBRICA

Sia p_1 il raggio di convergenza di $\sum a_n x^n$

Sia p_2 " " di $\sum b_n x^n$

TEOREMA La "serie somma" $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ converge, con raggio di

convergenza $\rho = \min\{p_1, p_2\}$ e, $\forall x \in (-\rho, \rho)$ la somma della "SERIE SOMMA" è $S_1(x) + S_2(x)$

Dato $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S_1(x)$ con raggio di conv. p_1 , $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = S_2(x)$ con p_2

Voglio trovare C_n : $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = S(x) = S_1(x) \cdot S_2(x)$

$$\left(\sum_{n=0}^N a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^M b_m x^m \right) = \sum_{i=0}^{M+N} C_i \cdot x^i$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N) \cdot (b_0 + b_1 x + \dots + b_M x^M) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) x^3 + \dots$$

$$C_i = \sum_{n=0}^i a_n b_{i-n}$$

PRODOTTO ALLA "CAUCHY"

TEOREMA La serie che ha per somma $S_1(x) \cdot S_2(x)$ è la serie $\sum_{i=0}^{\infty} C_i x^i$ dove C_i è con raggio di convergenza $\rho = \min\{p_1, p_2\}$

DERIVATE E INTEGRALI

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x), \quad \rho > 0 \text{ o } \infty$$

$$S'(x)?$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1}$$

quinto si deriva (si prende un indice) DERIVO TERMINE A TERMINE

IL RAGGIO DI CONVERGENZA NON È CAMBIATO DERIVANDO

Provo col metodo del rapporto

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{n} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow 1$$

$$\rho = \frac{1}{1}$$

SERIE DI POTENZE → SVILUPPO DI TAYLOR (POLINOMIALI)

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots$$

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$$

intervallo (x_0-p, x_0+p)

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + (3 \cdot 2) a_3(x-x_0) + \dots$$

$$S'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} = (3 \cdot 2) a_3 + (4 \cdot 3 \cdot 2) a_4(x-x_0) + \dots$$

$$S^{(k)}(x) = \dots$$

MI INTERESSANO I VALORI DI
DERIVATA PER $x = x_0$

$$S(x_0) = a_0 = 0! a_0$$

$$S'(x_0) = a_1 = 1! a_1$$

$$S''(x_0) = 2a_2 = 2! a_2$$

$$S'''(x_0) = 6a_3 = 3! a_3$$

$$S^{(4)}(x_0) = 24a_4 = 4! a_4$$

RICORDO CHE $0! = 1$
 $1! = 1$

Da qui $\forall k \geq 0, \dots$

$$S^{(k)}(x_0) = k! a_k \rightarrow a_k = \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$$

DATO

$f(x)$
DATO

CANDIDATO NATURALE È (supponendo $f \in C^\infty(I)$
 I intorno di x_0)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$$P_n = \sum_{n=0}^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

POLINOMIO DI TAYLOR
DI $f(x)$

In ANALISI $\lim_{x \rightarrow x_0} |P_n(x) - f(x)| = 0$
 $f(x) = P_n(x) + dx^n$

DATO $f \in C^\infty(I)$, I contenente x_0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

converge?
quante volte P ?
A cosa converge?

Esistono funzioni tali che $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 0, 1, 2, \dots$

$$y = f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n$$

$$\sum 0 (x-x_0)^n = 0 \quad \forall x$$

Esistono funzioni C^∞ per le quali $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ converge con
 $\rho > 0$ ma la funzione limite non è $f(x)$

$f(x)$ $\xrightarrow{\text{SERIE DI TAYLOR}}$ $\rightarrow$ convergente a $g(x) \neq f(x)$

modo univoco di identificare funzione con propria serie di Taylor

CRITERIO DI ANALITICITÀ (criterio sufficiente)

$$\text{Se } \exists \delta \exists M : |f^{(n)}(x)| < M \quad \forall n \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Allora $f(x)$ analitico

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \rho = \infty$$

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \rho = \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \rho = 1$$

$$f(x) = \log(1+x)$$

$$f(x) = \arctg(x)$$

$x_0 = 0$ SERIE DI
MACLAURIN

Primi esempi di Sviluppi Notevoli

① Regole di calcolo

② Casi notevoli

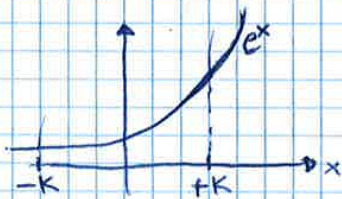
Dato una funzione qualunque (ma elementare)

Dato $f(x)$ analitico, problema: calcolarne la serie di Taylor

$$f(x) = e^x$$

$$f^{(n)}(0) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x \quad \forall x \quad \rho = \infty$$



$$f(x) = e^x$$

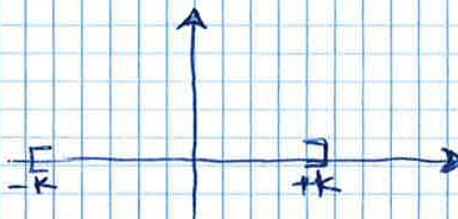
$$\forall x \in [-K, K]$$

$$|e^x| = e^x \leq e^K$$

$$\boxed{|f^{(n)}(x)| \leq M \quad \forall n \quad \forall x \in [-K, K]}$$

vol dire che $f(x)$ converge almeno in $[-K, K]$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



Quindi aggiungo e^x agli sviluppi notevoli

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

NO ALTERNANZA DI SEGNO!

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x) \dots (1+x)$$

n volte

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

coefficienti binomiali

FORMULA DEL BINOMIO DI
NEWTON

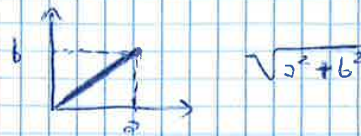
$$x \in \mathbb{R}^n \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$x \cdot x = \|x\|^2$$

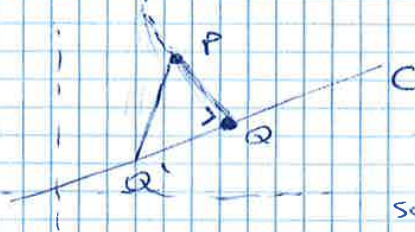


Problema di minima distanza

Dati $P \in \mathbb{R}^n$, $C \subset \mathbb{R}^n$

Trovare e caratterizzare un punto $Q \in C$ tale che $d(P, Q) = \min_{x \in C} d(P, x)$

C sottospazio di $\mathbb{R}^n$



PQ minima distanza di P da C

Se esistesse Q' tale che

$$d(P, Q') < d(P, Q), \text{ non avrebbe Teorema di Pitagora}$$

La soluzione è il punto Q dove perpendicolare a C passante per P interseca C

Conviene prendere BASI ORTONORMALI $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$

$$(1) \|e_i\| = 1$$

$$(2) e_i \cdot e_j = 0 \quad i \neq j$$

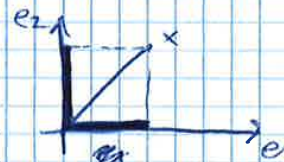
Esistono Procedure di ortonormalizzazione

Se C è sottospazio di $\mathbb{R}^n$, $\dim C = m < n$, esiste sempre una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ tale che $e_1, \dots, e_m$ costituiscono una base di C

Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $e_1, \dots, e_n$ ortonormale

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \boxed{x_i = x \cdot e_i}$$

VALE SOLO SE BASE ORTONORMALE!!!



Dopo tutte queste premesse

TEOREMA DELLA PROIEZIONE (in $\mathbb{R}^n$)

Dati $P \in \mathbb{R}^n$ e sottospazio $C \subset \mathbb{R}^n$, $\dim C = m$, $P \notin C$ (eventuale)

Sia $e_1, \dots, e_m$ base ortonormale tale che $e_1, \dots, e_m$ costituiscono una base di C . Siano $p_i = P \cdot e_i$

(1) l'unico punto che risolve il problema della minima distanza di P da C è il punto $Q = \sum_{i=1}^m p_i e_i = p_1 e_1 + \dots + p_m e_m$

(2) il vettore $P - Q$ è ortogonale a ogni $x \in C$

$$(3) [d(P, Q)]^2 = \|P - Q\|^2 = \sum_{i=1}^m p_i^2 = \|P\|^2 - \|Q\|^2$$



$$\|P\|^2 = \|P - Q\|^2 + \|Q\|^2$$

(3) Non è altro che Teorema di Pitagora

$PCR([0, T])$ - funzioni definite su intervallo $[0, T]$ periodiche
continue e regolari

18/12/14

PCR SPAZIO VETORIALE SUI REALI

struttura metrica : norma $\rightarrow \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T (f(t))^2 dt}$
in media
quadratica
di $f \in L^2_0 d.f$

l'importante che ha differenza tra T , perché
non essere $-\frac{T}{2}$ e $+\frac{T}{2}$

$$f \cdot g = \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$$

$$\|f\|_2^2 = f \cdot f$$

distance fra due funzioni $d(f, g) = \|f - g\|_2$

MINIMA DISTANZA, TEOREMA PROIEZIONE

INDIVIDUARE L'ANALOGO DELLA "BASE" ORTONORMALE

$$g_0(t) = \sqrt{\frac{w}{2\pi}}$$

non c'è nulla che è dispari

$$\int_0^{2\pi} \frac{w}{2\pi} = 1 \quad \text{ok!}$$

$$T = \frac{2\pi}{w} \quad w \neq 0$$

$\frac{w}{2\pi}$ frequenza
fondamentale

$$g_1(t) = \sqrt{\frac{w}{\pi}} \cos(wt)$$

$$h_1(t) = \sqrt{\frac{w}{\pi}} \sin(wt)$$

FREQUENZE FONDAMENTALI
($w \neq 0$)

$$g_2(t) = \sqrt{\frac{w}{\pi}} \cos(2wt)$$

$$h_2(t) = \sqrt{\frac{w}{\pi}} \sin(2wt)$$

ancora sempre
di + frequenza

↑
doppio
il periodo o meno
il doppio (frequenza)

$$g_m(t) = \sqrt{\frac{w}{\pi}} \cos(mt)$$

$$h_m(t) = \sqrt{\frac{w}{\pi}} \sin(mt)$$

FUNZIONI ARMONICHE DI ORDINE m

$$\|g_m\| = 1, \quad \|h_m\| = 1$$

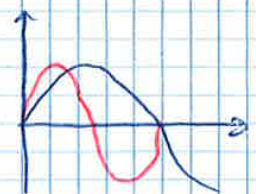
$$m = 1, 2, \dots$$

$$g_m \cdot h_m = 0 \quad \forall m, n$$

$$g_m \cdot g_n = 0$$

$$h_m \cdot h_n = 0$$

$$m \neq n$$



$$a_k = \frac{w}{\pi} \int_0^{2\pi/w} f(t) \cdot (\cos kut) dt$$

$\forall k$

$$b_k = \frac{w}{\pi} \int_0^{2\pi/w} f(t) \cdot \sin(kut) dt$$

COEFFICIENTI DI FOURIER DI $f \in \text{PCR}([0, \frac{2\pi}{w}])$



In Analisi I

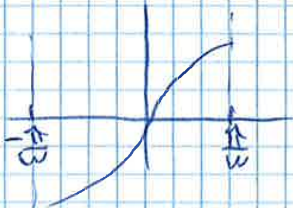


$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \text{ è la media integrale}$$

20 È l'analogo della media integrale

f PARI

Se moltiplico $f_{\text{pari}} \times f_{\text{dispari}}$ ottengo f_{dispari}



integrale di f_{dispari} su intervallo simmetrico è 0.

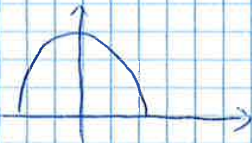
Allora se f_{pari} , $b_k = 0 \quad \forall k \neq 0$

Se f dispari $\rightarrow a_k = 0$ (perché prodotto tra f_{pari} e f_{dispari})

$\forall k = 0, 1, 2, \dots$

Se f pari posso integrare solo su metà intervallo

$$f_{\text{dispari}} \cdot f_{\text{dispari}} = f_{\text{pari}}$$



I coefficienti di Fourier di $f+g$ si ottengono sommando i coefficienti di Fourier di f e g dello stesso indice

I coefficienti di Fourier di $c \cdot f(t)$ sono $c \cdot a_0, c \cdot a_k, c \cdot b_k$...

costante

Dato $f(t) \in \text{PCR}([0, \frac{2\pi}{w}])$

Sono a_0, a_k, b_k i suoi coefficienti di Fourier

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kut) + b_k \sin(kut))$$

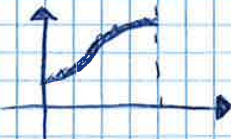
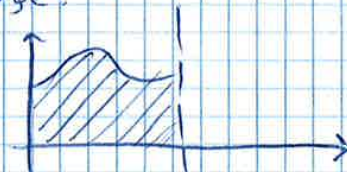
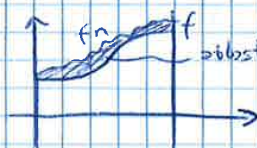
Le cui ridotte (somme parziali) coincidono con i polinomi trigonometrici $Q_m(t)$

SERIE DI FOURIER GENERATA DA f

Converge? In che senso converge? A cosa converge?

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi/w} (f(t))^2 dt}$$

$$\|f - f_n\|_2$$



$$\|f - g\|_2 = 0$$

per identità
di Parseval

$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$

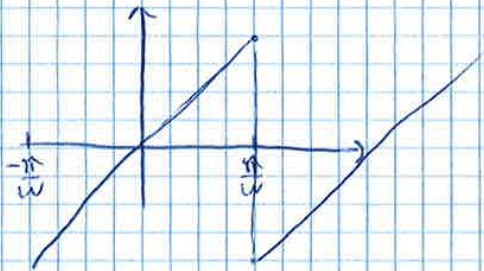
perché
le funzioni sono
normalizzate

Questo corollario è il PRINCIPIO D'IDENTITÀ PER LE SERIE DI FOURIER
 $f, g \in \text{PCR}([0, \frac{2\pi}{w}])$ $f+g \in C$

DERIVAZIONE E INTEGRAZIONE

$\text{PDR}([0, \frac{2\pi}{w}]) \subset \text{PCR}$ formate da funzioni ovunque continue e derivabili con
 derivata $f'(t) \in \text{PCR}([0, \frac{2\pi}{w}])$

$f(t) = t$ $t \in [-\frac{\pi}{w}, \frac{\pi}{w}]$ non è continua ovunque e periodica



$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kwt) + b_k \sin(kwt)$$

$$f'(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(kwt) + d_k \sin(kwt)$$

PROPORZIONE

$$c_0 = 0, \quad c_k = b_k \cdot k \cdot w, \quad d_k = -k \cdot w \cdot a_k$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{w}{2\pi} \int_0^{2\pi/w} f'(t) dt = \frac{w}{2\pi} f(t) \Big|_0^{2\pi/w} = 0$$

$$\int_0^{2\pi/w} f'(t) \cdot \cos(kwt) dt$$



$\Rightarrow$ SERIE DI FOURIER sono sempre derivabili termine a termine, purché $f \in \text{PDR}([0, \frac{2\pi}{w}])$

CONVERGENZA IN MEDIA ~~NON~~ CONV. PUNTUALE

PSUDO DERIVATA f x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ esiste finito} \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

Manca ultimo quarto d'ora che d'è uguale sul libro

SISTEMI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE

Tanto anche avessi 2° ordine potrei, aumentando n° incognite, ridurre ordine
 Dunque non è restrittivo considerare solo fino a 1° ordine

SISTEMA DI N. EQUAZIONI IN N. INCOGNITE (LINEARE)

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

~ coefficiente della matrice a risolvere equazione

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X' = AX}$$

Soluzioni

Si intende $x = \varphi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

solo che viene inteso in senso
 vettoriale non + scalare

Problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Strategia

- Formule che rappresenti tutte le soluzioni integrate generale

$$\Phi(t, c)$$

c è una costante

- Si impongono le condizioni iniziali

$$\Phi(0, c) = x_0$$

Risolvere rispetto a c $\rightarrow$ risolvendo c come incognita

La natura lineare delle equazioni ha certe conseguenze:

Somme di soluzioni

Supponiamo di aver trovato 2 soluzioni particolari

$$x = \varphi_1(t)$$

$$x = \varphi_2(t)$$

$$\text{Se la somma: } x = \varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$$

Applico la definizione di soluzione

$$\boxed{\frac{d\varphi(t)}{dt} = A\varphi(t)}$$

Otengo:

$$\varphi_1'(t) + \varphi_2'(t) = A\varphi_1(t) + A\varphi_2(t)$$

derivata somma e
 somma di derivate

CASO 1① λ_1, λ_2 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ autovalori distinti

Se autovalori distinti, autovettori linearmente indipendenti

$$\lambda_1 \rightarrow u_1$$

$$\lambda_2 \rightarrow u_2$$

$$x = \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} u_1$$

$$x = \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} u_2$$

$$\Phi(t, c_1, c_2) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2$$

Per ogni valore di c_1 e c_2 ottengo tutte le soluzioni

Integrale generale contiene tutti i valori? Guardiamo se contiene informazioni

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{condizione iniziale} \end{cases}$$

$$\Phi(0, c_1, c_2) \text{ se posso } t=0$$

$$\text{Con } t=0 \text{ da } \bar{x} = c_1 e^{\lambda_1 \cdot 0} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 \cdot 0} u_2 = \bar{x}$$

$$\text{ottengo } c_1 u_1 + c_2 u_2 = \bar{x}$$

uguaglianze di vettori

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

 $u_1, u_2, \bar{x}$ vettori (u_1, u_2) matrice del sistema ha per colonne u_1 e u_2 ma u_1 e u_2 sono l.i. dunque questa matrice è invertibile

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2)^{-1} \bar{x} \quad \left. \vphantom{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}} \right\} \text{ci dice che } c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2 \text{ è l'integrale generale}$$

trovo c_1 e c_2 dunque il problema di Cauchy ammette soluzioni**CASO 2**L'equazione caratteristica ha una sola radice λ e di molteplicità 2Esistono due autovettori u_1 e u_2 entrambi corrispondenti a λ e linearmente indipendenti $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{autovettori di } A \end{matrix}} \right\}$ come nel 1° caso

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = e^{\lambda t} u_1 \\ x = \varphi_2(t) = e^{\lambda t} u_2 \end{cases}$$

Esiste un solo autovettore relativo a λ ho una matrice in cui ogni autovettore è uno il multiplo dell'altro $\rightarrow$ linearmente dipendenti dunque NO MATRICE INVERTIBILE

$$\begin{cases} x = \varphi_1(t) = e^{\lambda t} u \\ x = \varphi_2(t) = e^{\lambda t} (ut + v) \end{cases}$$

questo è la 2° soluzione che dobbiamo trovare

 $x' = Ax \rightarrow$ verifichiamo se $x = \varphi_2(t)$ è una soluzione

$$\lambda e^{\lambda t} (ut + v) + e^{\lambda t} u = A e^{\lambda t} (ut + v)$$

 $\rightarrow$ DERIVIAMO

$$= e^{\lambda t} (\lambda (ut + v) + u) = e^{\lambda t} (t \lambda u + \lambda v + u)$$

$$\lambda e^{\lambda t} (ut + v) + e^{\lambda t} u = e^{\lambda t} (t \lambda u + \lambda v + u)$$

$$\lambda t u + \lambda v + u = t \lambda u + \lambda v + u$$

tempo posso partor fuori da A perché è uno scalare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$c+d=1$ dato che seconda equazione è uguale a meno del segno

Scelgo ad esempio $c=1$ e $d=0$

$$x_2 = y_2(t) = e^{-t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

CASO 3

$$\lambda = \alpha + i\beta$$

$$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$$

$$y_1(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t)u - (\sin \beta t)v$$

$$y_2(t) = e^{\alpha t} ((\cos \beta t)v + (\sin \beta t)u)$$

Utilizzo parte immaginaria e nei uniti immaginaria

β altera la periodicità delle funzioni seno e coseno

$\beta = b$ frequenza

$$x'' = -x$$

$$\begin{cases} x_1' = x \\ x_2' = x_1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{equivalente sistema} \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{se calcolo autovettori} \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} \rightarrow x^2 + 1 = 0$$

$$x' = Ax$$

A matrice a elementi reali

$$x = y(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x = y(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

Se ho trovato autovettore λ complesso e ho un autovettore complesso
Ho sempre una soluzione $e^{\lambda t}u$ solo che λ e u sono complessi e
l'altra soluzione è un complesso coniugato

Adesso ritorno alla trattazione in campo reale e non complesso, per fare questo faccio riferimento al fatto che soluzioni sono coniugate e mi ricordo la formula:

$$e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

$$e^{(\alpha - i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t)$$

Da queste due soluzioni per somma ricavo una soluzione senza la parte immaginaria. L'altra soluzione la trovo moltiplicando tutto per i e così da una parte ottengo $i^2 = -1$ e poi sommo e la parte immaginaria si cancella.
Ho ottenuto due soluzioni reali

$$w = u + iv$$

$$\begin{cases} \alpha u - \beta v = Au \\ \alpha v + \beta u = Av \end{cases}$$

Relazioni che u e v devono determinare
 $\downarrow$
 x trova u e v

$$\begin{cases} \Phi(t, c) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + c_3 \varphi_3(t) \\ c_1 \varphi_1(0) + c_2 \varphi_2(0) + c_3 \varphi_3(0) = X_0 \end{cases}$$

risolvibile

autovalori di A

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

polinomio in λ di grado 3

autovettori

CASO (1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reali distinti

u_1, u_2, u_3 autovettori linearmente indipendenti

$$x = \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot u_1$$

$$x = \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot u_2$$

$$x = \varphi_3(t) = e^{\lambda_3 t} \cdot u_3$$

CASO (2) λ_1 reale λ_2 complesso λ_3 coniugato di λ_2 ($\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$) ^{con parte imm. $\neq 0$}
 u_1 reale u_2 $u_3 (= \bar{u}_2)$

$$x = \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} u_1$$

$$\varphi_2(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot u - \sin \beta t \cdot v)$$

$$\lambda_2 = \alpha + i\beta$$

$$\varphi_3(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot v + \sin \beta t \cdot u)$$

$$\begin{cases} \alpha u - \beta v = Au \\ \alpha v + \beta u = Av \end{cases}$$

(3) λ di molteplicità 2 reale, $\downarrow$ di molteplicità 4
 $\downarrow$ u
 $\downarrow$ w

due autovettori u_1 e u_2

linearmente indipendenti

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} u_1$$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t} u_2$$

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} w$$

(4) λ con molteplicità 2

Si ha un unico autovettore

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} u$$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t} (ut + v)$$

Come si trova v ?

$$(A - \lambda I)v = u$$

v è autovettore in senso generalizzato

(5) unico autovalore λ con molteplicità 3

Caso più semplice: autovettori associati linearmente indipendenti u_1, u_2, u_3

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} u_1$$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t} u_2$$

$$\varphi_3(t) = e^{\lambda t} u_3$$

(6) in corrispondenza di questo λ ci sono due "unici" autovettori u

(7) in corrispondenza di λ ci sono due autovettori linearmente indipendenti u_1 e u_2

CASO (6) $\varphi_1(t) = e^{\lambda t} u$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t} (ut + v)$$

$$(A - \lambda I)v = u$$

Se ne trovano n soluzioni $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ tali che $\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)$ sono linearmente indipendenti.

1^a FASE

$$\dot{x} = Ax$$

2^a FASE

$$\psi(t, c) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) + \psi_0(t)$$

↓
integrale generale dell'equazione completa → TUTTE LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE COMPLETA

$\psi_0(t)$ soluzione dell'equazione completa non omogenea

TROVARE ALMENO UNA $\psi_0(t)$ che sia soluzione dell'equazione completa

$$\dot{x} = Ax + b(t)$$

Il metodo fornisce $\psi_0(t)$ a seconda della forma di $b(t)$

1^o CASO $b(t)$ costante $= b$

Ci sarà una soluzione $\psi_0(t)$ costante?

Poniamo $\psi_0(t) = K \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = A\psi_0(t) + b$$

$$0 = AK + b$$

(det A $\neq 0$, $\lambda = 0$ non autovalore)

$$AK = -b$$

sistema lineare non omogeneo

Se A è invertibile esiste una soluzione costante $\psi_0(t) = K$

Se A non è invertibile, la soluzione solo se b appartiene all'immagine di A (costante) ($b \in \text{Im } A$)

Se b non appartiene all'immagine di A , no soluzioni costanti.

Allora proviamo con polinomi di grado 1.

$$\psi_0(t) = Kt + h \quad K, h \text{ vettori}$$

$$K = A(Kt + h) + b = tAK + Ah + b \quad \text{identicamente rispetto a } t$$

$$(AK)t + Ah + b - K = 0 \Rightarrow \begin{cases} AK = 0 \rightarrow \text{trova } K \\ Ah = K - b \end{cases}$$

Se non riesce questo tentativo

$$\psi_0(t) = Kt^2 + ht + m \quad K, h, m \text{ sono vettori}$$

$$\begin{cases} AK = 0 \\ Ah = 2K \\ Am = h - b \end{cases}$$

Caso in cui molteplicità dell'autovettore 0 di A ha grado almeno 2

Imporre le condizioni iniziali e l'ultima cosa da fare

① SCRIVO E RISOLVO IL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO

② CERCO LA SOLUZIONE PARTICOLARE $\psi_0(t)$

③ FORMO L'INTEGRALE GENERALE $c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) + \psi_0(t)$

④ IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI e RICAVO LE COSTANTI

$$c_1 \varphi_1(0) + \dots + c_n \varphi_n(0) = x_0$$

$$\alpha \mathbf{u} - \beta \mathbf{v} = A \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \alpha \mathbf{v} - \beta \mathbf{u} = A \mathbf{v}$$

Alternativamente, $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ possono essere calcolate prendendo la parte reale e la parte immaginaria della soluzione complessa $\mathbf{x} = e^{\lambda t} \mathbf{w}$, essendo $\mathbf{w}$ un autovettore (complesso) dell'autovalore λ .

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (lo svolgimento è lasciato per esercizio).

Stabilità. Ogni sistema di equazioni differenziali del tipo (1) ammette la soluzione costante $x_1 = x_2 = 0$. Si dice che tale soluzione è asintoticamente stabile se per ogni soluzione $\varphi(t)$ si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0.$$

Teorema 1 *La soluzione nulla del sistema (1) è asintoticamente stabile se e solo se gli autovalori della matrice A sono tutti strettamente negativi (nel caso siano reali) oppure se hanno parte reale strettamente negativa (nel caso siano complessi coniugati).*

Sistemi non omogenei.

Un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{9}$$

dove l'incognita $\mathbf{x}$ e la matrice A sono come in (5) e $\mathbf{b}(t)$ è una funzione continua definita per $t \in \mathbf{R}$ e a valori in $\mathbf{R}^2$, si dice *lineare non omogeneo*. L'equazione (5), definita dalla stessa matrice A che compare nella (9), si dice anche il sistema omogeneo associato alla (9). Si noti che gli elementi di A sono costanti, mentre è ammesso che le componenti di $\mathbf{b}(t)$ dipendano da t .

Per determinare l'integrale generale della (9), è necessario trovare due soluzioni $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ del sistema omogeneo associato, tali che i vettori $\varphi_1(0)$ e $\varphi_2(0)$ siano linearmente indipendenti. Quindi bisogna determinare almeno una (qualunque) soluzione $\psi_0(t)$ della (9). L'integrale generale prende la forma

$$\psi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \psi_0(t)$$

dove c_1, c_2 sono costanti reali arbitrarie. Se è richiesta la soluzione particolare che soddisfa al dato iniziale $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$, dopo aver determinato l'integrale generale si individueranno i valori opportuni delle costanti c_1, c_2 risolvendo il sistema algebrico

$$c_1 \varphi_1(0) + c_2 \varphi_2(0) = \bar{\mathbf{x}} - \psi_0(0).$$

Si noti che la soluzione di questo sistema esiste in quanto $\varphi_1(0)$ e $\varphi_2(0)$ sono linearmente indipendenti.

Per poter applicare effettivamente la procedura descritta, dobbiamo ancora precisare come si fa a calcolare una soluzione $\psi_0(t)$ della (9).

Cominciamo dal caso particolare in cui $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b} \in \mathbf{R}^2$ è costante. Potrebbe apparire ragionevole congetturare che, tra tutte le soluzioni, almeno una sia costante. In realtà questo è vero solo a certe condizioni. Infatti, se $\psi_0(t) = \mathbf{k} \in \mathbf{R}^2$ è una soluzione della (9), si dovrà avere $0 = A\mathbf{k} + \mathbf{b}$. Una soluzione costante esiste quindi solo se $-\mathbf{b}$ appartiene¹ all'immagine di A . In particolare, soluzioni costanti potrebbero venire a mancare se A è singolare (cioè se almeno uno degli autovalori di A è zero).

¹Si noti che se esiste un vettore $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^2$ tale che $-\mathbf{b} = A\mathbf{c}$, allora la sostituzione $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{c}$ trasforma il sistema $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ nel sistema omogeneo $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$; la soluzione nulla di quest'ultimo corrisponde alla soluzione costante del sistema non omogeneo dato.

ESEERCITAZIONI

Prof. Marco Abiate

NO DIARIO DI CONSUENZA

→ marco_abiate @ polito.it

ES. 1

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{16-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$$

DOMINIO?

$$\begin{cases} 16-x^2-y^2 \geq 0 \\ x^2+y^2-9 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-16 \leq 0 \\ x^2+y^2 > 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 16 \\ x^2+y^2 > 9 \end{cases}$$

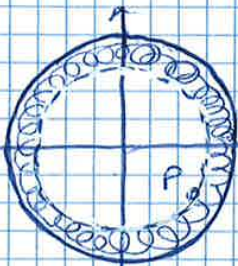
$\frac{0}{0}$ ≠ INDETERMINATO ma impossibile

INSIEME CHIUSO, il suo interno è aperto e limitato, l'esterno è aperto e illimitato

FRONTIERA: equazione $x^2+y^2=16$

circonferenza in $\mathbb{R}^2$

$$C(0,0) \quad r=4$$



P appartiene alla frontiera anche se non appartiene al dominio

SISTEMI SIA APERTI CHE CHIUSI: VUOTO E TUTTO

ES. 2

$$D = \{ \sqrt{x^2+y^2} < z < x+z \mid (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \}$$

$$\begin{cases} z > \sqrt{x^2+y^2} \\ z < x+z \end{cases}$$

$$\text{oppure } \{ (x,y,z) \mid z > \sqrt{x^2+y^2} \} \cap \{ (x,y,z) \mid z < x+z \}$$

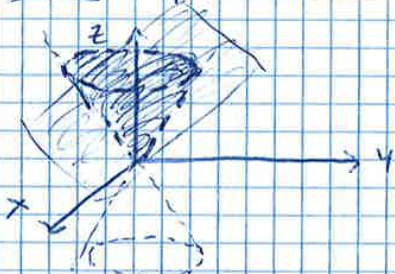
$$z > \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \text{C.E. } z \geq 0$$

$$z < x+z \rightarrow x^2+y^2-z^2 \leq 0$$

polinomio omogeneo di grado 2 (termine noto o nullo e tutti i termini hanno grado 2)

CONO (ricordi!!)

CONO: polinomio omogeneo di grado 2



(ricorda sempre così la disposizione degli assi)

ASSE DEL CONO è l'asse delle z (perché quello con segno diverso da x e y)

Se $z > 0$ allora prendo solo la falda superiore del cono

IL CONO HA SEMPRE 2 FALDE!!

$$z < x+z$$

$$z \leq x+z$$

$$x-z+z=0 \text{ è un piano}$$

Sezionando un cono con un piano avrò un'ellisse di intersezione tra cono e piano

(3) $I = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 4 \}$ è un tubo, se $<$ dentro, se $>$ fuori, se $= 0$ contorno
 $\partial(I) : x^2+y^2 = 4$ nello spazio è un CILINDRO

$$= [e^x]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 (-x^2 e^x) dx + \left[\frac{3}{2} x\right]_{-1}^1 + [-x^3]_{-1}^1 + \left[\frac{3}{10} x^5\right]_{-1}^1 = *$$

$$\int (x^2 e^x) dx = x^2 e^x - \int (2x e^x) dx = -2x e^x + x^2 e^x + \int 2e^x dx =$$

$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f = 2x$	$f' = 2$	$= -2x e^x + x^2 e^x + 2e^x$
$g(x) = e^x$	$g' = e^x$	$g' = e^x$	$g = e^x$	

$$* = e - e^{-1} + [-x^2 e^x + 2x e^x + 2e^x]_{-1}^1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - x^3 - (-x^3) + \frac{3}{10} x^5 + \frac{3}{10} =$$

$$= e - e^{-1} - e + 2e - 2e - (-e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1}) + 3 - 2 + \frac{3}{5} =$$

$$= -e^{-1} + e^{-1} + 2e^{-1} + 2e^{-1} + \frac{8}{5} = 4e^{-1} + \frac{8}{5}$$

ES. 3

$$\int_A e^{x+y} dx dy \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$

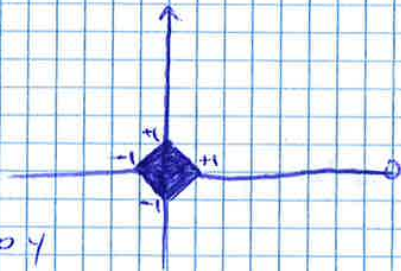
Cerca di rappresentare il dominio: $|x| + |y| \leq 1$

I quadrante $x+y=1 \rightarrow y \leq -x+1$

II quadrante $-x+y=1 \rightarrow y \leq x+1$

III " $-x-y=1 \rightarrow y \leq -x-1$

IV " $x-y=1 \rightarrow y \leq x-1$



È un integrale connesso sia rispetto x sia rispetto y

Come fare? Posso dividerlo così in 2:

D₁ $-1 \leq x < 0$ faccio integrale rispetto y tra $-x-y=1$ e $-x+y=1$

D₂ $0 \leq x \leq 1$ faccio integrale rispetto y tra $x+y=1$ e $x-y=1$

$$\int_{-1}^0 \left(\int_{-x-1}^{-x+1} (e^{x+y} dy) \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{x+1} (e^{x+y} dy) \right) dx =$$

Anzi potuto pensare a fare più, farlo una volta sola, ma devo assicurarmi che sia dominio sia funzione siano pari (il dominio lo è ma la funzione no)

$$I_1 = \int_{-1}^0 [e^{x+y}]_{-x-1}^{-x+1} dx = \int_{-1}^0 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx = \int_{-1}^0 \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} - \frac{1}{2} e^{-1} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} e - 0 - \frac{1}{2} e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{-1}$$

$$I_2 = \int_0^1 [e^{x+y}]_{x-1}^{x+1} dx = \int_0^1 (e^{2x+1} - e^{-1}) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} e^{2x+1} - \frac{1}{2} e^{-1} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{-1}$$

$$I_1 + I_2 = e - e^{-1}$$

Anzi potuto farlo considerandolo connesso rispetto y. Impostazione:

$$\int_{-1}^0 \left(\int_{-x-1}^{-x+1} (e^{x+y} dx) \right) dy + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{x+1} (e^{x+y} dx) \right) dy =$$

17/10/14

ES. 1.

$$\int_C (x+y) dx dy$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$$

ES. 3

I componenti di coordinate standard sono i due visti in ES. 1 e ES. 2. A volte capiterà di doverli inventare o sostituire.

Nell'es. 2 in $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$. Con $X = \frac{x}{\sqrt{3}} \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{3} = X^2 \\ y = y \end{cases}$

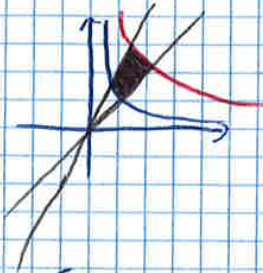
cambio di coordinate x $\rightarrow$ nuova ellisse $\rightarrow$ circonferenza

$X^2 + Y^2 \leq 1$. Bisogna poi, però, modificare anche

$x < y$, $x < -y$ e tutte le altre con quella sostituzione.

Questo è un altro soluzione, se non ricordassi come si cambia la jacobiana.

$$\int_{\Omega} \frac{1}{x^2} dx dy$$



$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq xy \leq 4, x \leq y \leq 2x, x > 0, y > 0\}$$

$$\begin{aligned} xy &= 1 & y &\leq \frac{1}{x} \\ \rightarrow xy &= 4 & y &\leq \frac{4}{x} \\ \rightarrow y &= x \\ \rightarrow y &= 2x \end{aligned}$$

$$1 \leq \frac{y}{x} \leq 2$$

Anche concesso da entrambi i lati.

$$\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$$

perché xy compreso tra 2 costanti $\rightarrow u \in [1, 4]$

$\rightarrow v \in [1, 2]$ v come fosse un ventaglio tra $y < x$ e $y < 2x$

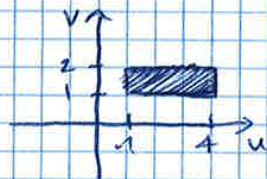
$$\begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ u = \frac{y^2}{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{uv}}{v} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &\in [1, 4] \\ v &\in [1, 2] \end{aligned}$$

Lo scopo è ottenere x e y in funzione di u e v .

$$\Omega' \Rightarrow$$



Prova a farlo io!

$$\int_{\Omega'} \frac{1}{u} |\det J| du dv$$

RISULTATO:

$$\det J = -\frac{1}{4v}$$

Nella jacobiana prendere prima u e poi v o il contrario,

non cambia perché al massimo cambia il segno, ma abbiamo il modulo $\rightarrow$ È UGUALE

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{2} v^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}}$$

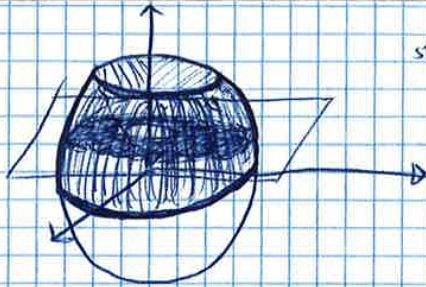
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \end{matrix}$$

RICORDO!

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{pmatrix}$$



sfera però senza capo cioè ha una sfera con uno scavo
→ forma conica

Integrazione per fili? È complicato, entrassempre da sfera,
ma a volte esce la sfera, altre volte da cono.

Integrazione per STRATI. Topologia con piano

Gli estremi per z sono $z \leq 0$ e $z \geq$ quota della circonferenza sfera/cono

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$$

circonferenza
d'intersezione
tra cono e sfera

Lo strato → quota z_0

con cono circolare

circonferenza interna è stabilita dal cono

" esterna è stabilita da sfera

$$\begin{cases} z = z_0 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

intersezione del piano scelto
con cono

$$z_0 = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = z_0^2 \quad \text{circonferenza di raggio } z_0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 4 - z_0^2 \quad \text{circonferenza di raggio } \sqrt{4 - z_0^2}$$

Lo strato è l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / z \leq x^2 + y^2 \leq 4 - z^2\}$

$$\begin{aligned} \int_{\text{strato}} z \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_{z_0}^{\sqrt{4-z^2}} z \, \rho \, d\theta \, d\rho = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{(x,y) \in \text{strato}} z \, dx \, dy \right) dz = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_z^{\sqrt{4-z^2}} z \, \rho \, d\rho \right) d\theta \right) dz = \int_0^{\sqrt{2}} \left(z \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_z^{\sqrt{4-z^2}} d\theta \right) dz = \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(z \int_0^{2\pi} \frac{4 - z^2 - z^2}{2} d\theta \right) dz = \int_0^{\sqrt{2}} (2z - z^3) dz \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{2z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \\ &= 2\pi \left(2 - 1 \right) = \boxed{2\pi} \end{aligned}$$

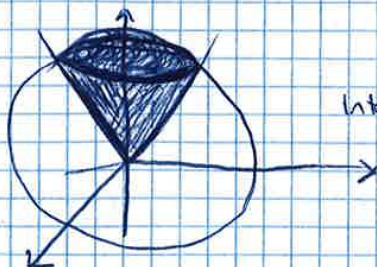
ES. 3

Volume di A?

$$A = \{(x, y, z) : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z^2 \geq x^2 + y^2\}$$

$$\downarrow \\ z^2 \geq x^2 + y^2$$

cono, dentro
solo fili superiori



Integrazione per fili: posso farlo

$$V(A) = \int_A dx \, dy \, dz \quad \text{per esercizio}$$

Proviamo alcune coordinate sferiche

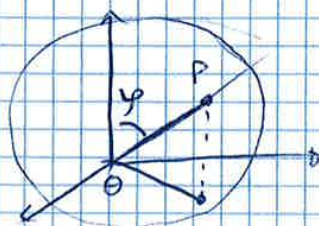
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\rho \in [0, 2]$$

$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

Il solito ^{cono} ~~latente~~ cono dentro con raggio $\frac{\pi}{4}$



$$\int_{-1}^1 [t^2 + t + 1 - t^2 + t - 1] \cdot ||\gamma'(t)|| dt$$

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2t-1 \end{pmatrix}$$

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{(2t+1)^2 + (2t-1)^2} = \sqrt{8t^2 + 2} = \sqrt{2} \sqrt{4t^2 + 1} = \sqrt{2} \sqrt{t^2 + 1} \sqrt{2} = 2\sqrt{t^2 + 1}$$

$$\int_{-1}^1 2t \sqrt{8t^2 + 2} dt = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 16t \sqrt{8t^2 + 2} dt =$$

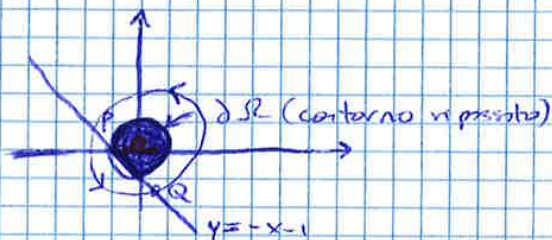
$$= \frac{1}{8} \left[\frac{2(8t^2 + 2)^{3/2}}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3} 10^{3/2} - \frac{2}{3} 10^{3/2} \right) = \frac{1}{8} \cdot 0 = 0$$

ES. 3

$$F(x, y) = (5x, 8y^3 + 2)$$

$$\int_{\partial R} F \cdot dP$$

∂R = bordo di R , orientato in senso positivo



$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq -x - 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\int_{\partial R} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \cdot dt = \int_{\gamma_1} F dP + \int_{\gamma_2} F dP$$

γ_1 = pezzo di circonferenza
 γ_2 = pezzo di retta

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = r \cos t = \cos t \\ y = r \sin t = \sin t \end{cases}$$

$$t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi] \text{ e non } [\frac{3}{2}\pi, \pi]$$

↑ non ha senso che $\rightarrow$

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} = \int_{-\pi/2}^{\pi} F(\gamma_1) \cdot \gamma_1' dt$$

$$F(\gamma_1) = (5 \cos t, 8 \sin^3 t + 2)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi} F(\gamma_1) \cdot \gamma_1' = \int_{-\pi/2}^{\pi} (-5 \sin t \cos t + 8 \cos t \sin^3 t + 2 \cos t) dt =$$

$$= \left[\frac{5 \cos^2 t}{2} + \frac{8 \sin^4 t}{4} + 2 \sin t \right]_{-\pi/2}^{\pi} = \frac{5}{2} - 2 + 2 = \frac{5}{2}$$

$\textcircled{2}$ Parametrizzazione di un segmento? Iniziamo tutto con il verso giusto

$$\gamma_2 : P + t(Q - P)$$

$\leftarrow$ vettore della retta

$$t \in [0, 1]$$

$$P(-1, 0)$$

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 0 - t \end{cases}$$

$$Q(0, -1)$$

$$\begin{cases} x = 0 - t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

$$t \in [0, 1]$$

sempre
con $t=0 \rightarrow P$
con $t=1 \rightarrow Q$
con altri punti P e Q

$$\gamma_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

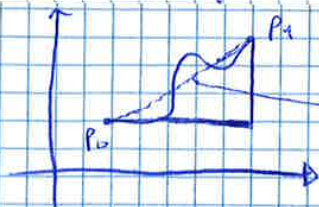
$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2' = (5(-1+t), -8t^3 + 2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -5 + 5t + 8t^3 - 2$$

$$\int_0^1 (8t^3 + 5t - 7) dt = \left[2t^4 + \frac{5}{2}t^2 - 7t \right]_0^1 =$$

$$= 2 + \frac{5}{2} - 7 = -\frac{5}{2}$$

RIPASSO QUESTE COSE IN GEOMETRIA

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} = 0$$



$P_0(0,0)$

(quelli + quelli)

2 percorsi differenti, uso quello della retta passante per P_0 e P_1

(tx, ty) $t \in [0,1]$

parametrizzazione di un segmento

$$g(x,y) = \int_0^1 *$$

$$F(g(t)) = (5tx + 2t^4y^4, 8t^4xy^3 + 2)$$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$F(g) g' = 5tx^2 + 2t^4xy^4 + 8t^4xy^3 + 2y = 5tx^2 + 10t^4xy^4 + 2y$$

$$* \int_0^1 (5tx^2 + 10t^4xy^4 + 2y) dt = \left[\frac{5t^2x^2}{2} + \frac{10t^5}{5}xy^4 + 2yt \right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{2}x^2 + 2xy^4 + 2y$$

È un integrale di linea, tutti i poteri sono 1 meno 1 = costante

Tutti poteri sono 1 meno 1 = costante

$$g(x,y) = \frac{5}{2}x^2 + 2xy^4 + 2y + C$$

ES. 3

$$\int_{\gamma} F \cdot dP, \quad F = (xy, xy^2)$$

Per la frontiera di $A = \{(x,y) / x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$ percorso in senso antiorario



$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP_1 + \int_{\gamma_2} F \cdot dP_2$$

Lower (trae 2 x i due tratti diversi (circonferenza e retta))

Allora uso TEOREMA DI GREEN quando con la troppa troppa o campo complicato

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy = *$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = y^2 - x$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0,1] \\ \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \end{matrix}$$

$$* = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 (\rho^2 \sin^2 \theta - \rho \cos \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \sin^2 \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos \theta \right]_0^1 d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\sin^2 \theta}{4} - \frac{\cos \theta}{3} \right) d\theta = *$$

ricordo: $\int \sin^2 \theta d\theta = \int \sin \theta \cdot \sin \theta d\theta = -\sin \theta \cos \theta + \int (1 - \sin^2 \theta) d\theta =$

$$f = \sin \quad f' = \cos$$

$$= -\sin \theta \cos \theta + \theta - \int \sin^2 \theta d\theta$$

$$g' = \sin \quad g = -\cos$$

$$\int \sin^2 \theta = \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{2}$$

$$* = \left[\frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) - \left(-\frac{1}{3} \right) =$$

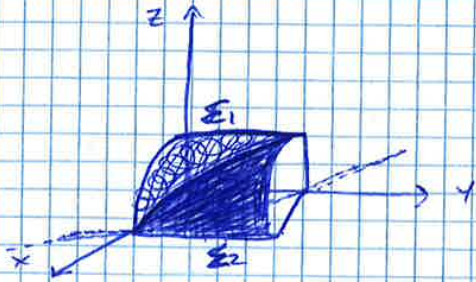
$$= \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{\pi}{8} - \frac{2}{3}}$$

ES. 1

19/11/14

Considero la calotta definita da

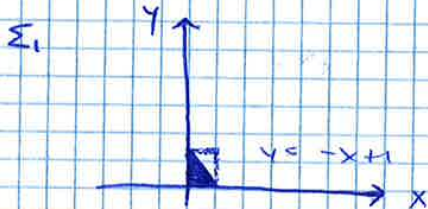
$$\Sigma: x^2 + z^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 1$$

Calcolo l'area delle due parti di calotta ~~definite~~ in cui viene divisa dal piano $x+y=1$ calotta e solo la superficie sottostante
piano ma sezione calotta

$$A_i = \int_{\Sigma_i} 1 d\sigma = \int_D 1 \|\vec{N}\| du dv$$

$$z = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Sigma_1: \begin{cases} x \leq x \\ y = y \\ z = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

così prendendo tutta la parte superiore di
cilindro
allora $0 \leq y \leq -x+1$
 $0 \leq x \leq 1$ 

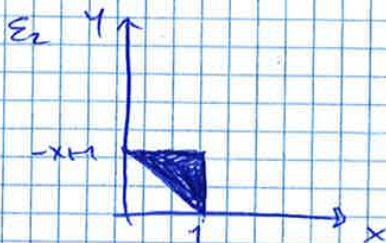
$$\int_{\Sigma_1} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{-x+1} \|\vec{N}(x,y)\| dy dx$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix} \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \vec{i} - \vec{k} \right) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2} + 1} = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^{-x+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [-x+1-0] dx = \int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} \right]_0^1 + \left[\arcsin(x) \right]_0^1 = 0 - 1 + \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$



$$-x+1 \leq y \leq 1$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\int_{\Sigma_2} d\sigma = \int_0^1 \int_{-x+1}^1 \|\vec{N}(x,y)\| dy dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{-x+1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} [1+x-1] dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} \right]_0^1 =$$

$$= +1$$

$$\text{rot } F(x, y) \cdot \vec{N} = -1$$

$$\int_E \vec{F} \cdot d\vec{P} = \int_E \text{rot } F \cdot \vec{n} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -1 \rho d\rho d\theta = -\pi$$

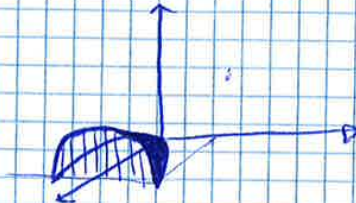
E' veloce in questo caso Stokes

Stokes si usa x: curve strane, rotore bello, superfici le cui aree facili da calcolare

~~ES. 2~~ ES. 3

$$\int_E \vec{F} \cdot \vec{n}, \quad F(x, y, z) = (4z, 4z^2, y^2 z)$$

E' la superficie del solido $\Omega = \{(x, y, z) / x \geq z^2 + y^2, z \geq 0, x \leq 1\}$



$$\int_E \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_{E_1} \vec{F} \cdot \vec{n} + \int_{E_2} \vec{F} \cdot \vec{n} + \int_{E_3} \vec{F} \cdot \vec{n}$$

parabolica mezzo disco piano

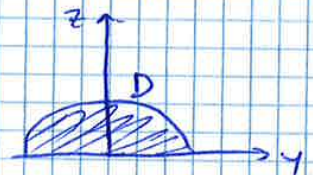
GAUSS

$$\int_E \vec{F} \cdot \vec{n} = \int_\Omega \text{div } F \cdot dx dy dz$$

$$\text{div } F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 + z^2 + y^2 = z^2 + y^2$$

$$\int_{D_{1/2}} \left(\int_{z^2+y^2}^1 (z^2 + y^2) dx \right) dy dz =$$

D_{1/2} proietta l'ombra su yz → mezzo disco



$$= \int_0^1 (z^2 + y^2) (1 - z^2 - y^2) dy dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho^2 (1 - \rho^2) \rho d\rho \right) d\theta =$$

$$= \pi \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{12} \pi$$

$$\begin{cases} y = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta \\ \rho \in [0, 1] \\ \theta \in [0, \pi/2] \end{cases}$$

Altrimenti avrei dovuto fare 3 integrali separati

* ripendo ES. 4 del 31/10/14 (SIAMO SICURI SIA GIUSTO?)

$$g(x, y) = \int \frac{2y}{x} dx = 2y (\log|x| + C(y)) = 2y \log x + C(y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2 \log(x, y) + \phi'(y) = 2 \log(x, y) - 1$$

$$\phi(y) = 2 \log(x, y) - 1 - 2 \log x$$

$$\begin{aligned} \phi(y) &= (2 \log(x, y) - 1 - 2 \log x) = \int (2 \log y - 1) dy - (2 \int \log y - \int y \cdot \frac{1}{y} \cdot dy) - \int dy = \\ &= 2y \log y - y - y = 2y \log y - 2y + C \end{aligned}$$

$$\boxed{g(x, y) = 2y \log x + 2y \log y - 2y + C}$$

ES. 4

21/11/14

$$F(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} + 2z, \frac{2y}{x^2 + y^2}, 2x - 6z \right)$$

Determinare se esiste un insieme in cui F conservativo e calcolare potenziale

$$\text{Dom } F: x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\pi \left(\frac{-18 + 3^4 + 2 \cdot 9}{6} \right) = \pi \left(\frac{3^4 - 25}{6} \right)$$

flusso $\rightarrow \int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_{\text{cono}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \int_{\text{cilindro}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} + \int_{\text{cilindro}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$

Prova con Gauss

$$\int_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \int_V \text{div } \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz$$

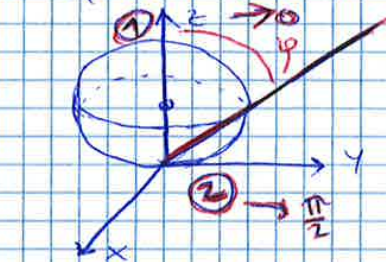
$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = -6xz + 4 + 12xz - 6xz = 4$$

$$\int_V 4 \, dx \, dy \, dz = 4 \text{Vol}(V) = 4 \cdot \frac{\pi}{6} (3^4 - 25) = \frac{2}{3} \pi (3^4 - 25)$$

ES. 3 (es. presente su esercizi Internet)

Calcolo baricentro della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ con densità uguale al quadrato della distanza
dall'origine (baricentro verso alto)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$$



$$C = (0, 0, 2)$$

$$M_{\text{massa}} = \int_{\text{sfera}} \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \int_{\text{sfera}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

distanza²
dall'origine

Passo $\rightarrow$ coordinate
sferiche centrate
nell'origine

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

- $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow$ φ parte da ① e arriva a ② dove sfiora la sfera ad asse y

- θ angolo di rot. intorno asse z $\in [0, 2\pi]$

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ equazione sfera mi dà superficie bordo

$$\rho^2 \leq 4 \rho \cos \varphi \rightarrow \rho \leq 4 \cos \varphi \rightarrow 0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi$$

$$\rho \in [0, 4 \cos \varphi]$$

perché φ è tra 0 e $\frac{\pi}{2}$
dove $\cos$ positivo

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \varphi} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^{4 \cos \varphi} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2}{5} \pi \int_0^{\pi/2} 4^5 \cos^5 \varphi \cdot \sin \varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{5} \pi \cdot 4^5 \left[-\frac{\cos^6 \varphi}{6} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{5} \pi \cdot 4^5 \left(+\frac{1}{6} \right) = + \frac{4^5}{15} \pi$$

$$x_G = \frac{\int_V x \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}$$

$$y_G = \frac{\int_V y \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}$$

$$z_G = \frac{\int_V z \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{M}$$

$$\text{Calcolo } z_G \cdot M = \int_V z \, \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_V z (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

Passo $\rightarrow$ coordinate sferiche

Gli estremi di parametrizzazione non dipendono da funzione da integrare ma da

Calcolo somma di una serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

dunque $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{5}{3} + 2 = \frac{11}{3}$

Es. 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}$$

$$a^n = \frac{3^n}{5^{n+1}} = \frac{3^n}{5 \cdot 5^n} = \frac{1}{5} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

è geometrica di ragione $\frac{3}{5}$ e dunque converge



Se converge, converge anche in suo multiplo

$$\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

→ se converge, converge anche una serie che manca pochi termini

$$\frac{1}{5} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \text{CONVERGE}$$

Calcolo la somma

lo conosco la somma di $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}$



perché la formula la conosco solo x serie geometriche

Però io me serve la serie che inizia da $n=2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^0 - \left(\frac{3}{5}\right)^1$$

$$= \frac{5}{2} - 1 - \frac{3}{5} = \frac{25-10-6}{10} = \frac{9}{10}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{50}$$

Es. 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

studio convergenza e somma

$$\text{su } \frac{1}{4n^2-1}$$

quando $n \rightarrow \infty$

$$1 = O(n^2) \rightarrow 1 \text{ è piccolo di } n^2$$

$$\sum \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{n^2}$$

converge

perché è armonica con $a > 1$

Per il confronto asintotico $\sum \frac{1}{4n^2-1}$ converge

Se è geometrica o telescopica si calcola la somma. Questo è armonica

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

FRATTI SEMPLICI

$$\frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} = \frac{2nA + A + 2nB - B}{4n^2-1}$$

$$= \frac{6}{\sum n^{3/2}} = \frac{3}{n^{3/2}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ Serie armonica con $\alpha > 1 \rightarrow$ converge

Quindi convergerà anche $\sum \frac{3}{n^{3/2}}$

Per confronto asintotico $\sum \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n}$ Converge

Es. 5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{\sqrt{n^3}}$ Serie a segni alterni $\rightarrow$ si studia o convergenza o con convergenza assoluta

Prova a studiare con convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n^3}} \quad b_n = \frac{\log n}{n^{3/2}}$$

Quando n tende a ∞ il $\log n$ è debole rispetto a n , non è così forte da far divergere

$$\log n = O(n^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$$

Dobbiamo trovare un α giusto

Prova con $\alpha \leq 1$!

$$\log n = O(n^\alpha) \quad \text{diventa} \quad \frac{\log n}{n^{3/2}} = \frac{O(n)}{n^{3/2}} = O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)$$

Dato che la serie di $\frac{1}{n^{1/2}}$ diverge, non posso usare il criterio del confronto

che richiederebbe avere se maggiorante b^n con un termine che converge

CAMBIO α ! $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\log n = O(n^{1/2})$$

$$\frac{\log n}{n^{3/2}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

continua a non avere quello che voglio
 $\rightarrow$ diverge

Prova con $\alpha \leq \frac{1}{4}$!

$$\log n = O(n^{1/4})$$

$$\frac{\log n}{n^{3/2}} = O\left(\frac{1}{n^{3/2 - 1/4}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right) \text{ CONVERGE}$$

$\sum \frac{1}{n^{5/4}}$ converge xk armonica con $\alpha = \frac{5}{4} > 1$

$$\frac{\log n}{n^{3/2}} < \frac{1}{n^{5/4}}$$

uso confronto normale (no asintotico perché asintotico lo uso quando ho un uguale)

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^{3/2}}$ converge (e' ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE)

Dato che ho $\frac{1}{n^{3/2}}$ devo prendere un qualunque α più piccolo di

$\frac{1}{2}$
 $\alpha < \frac{1}{2}$ (esponente $n. -1$)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad x \rightarrow 0$$

$$3^x = 1 + x \log 3 + o(x) \quad x \rightarrow 0 \quad \text{RIPASSO!}$$

$$3^x = e^{\log 3^x} = e^{x \log 3} \rightarrow 1 + x \log 3 + \frac{1}{2} x^2 (\log 3)^2 + o(x^2)$$

$$3^{\frac{1}{n}} = 3^x \sim 1 + \frac{1}{n} \log 3 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0$$

$$3^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{1}{n} \log 3 + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim \frac{1}{n} \log 3 + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$(\sum \frac{1}{n} \log 3)$ SERIE DI $\frac{1}{n}$ DIVERGE! $\Rightarrow \sum (3^{\frac{1}{n}} - 1)(-1)^n$ ~~non~~ ^{potrebbe} divergere

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3^{\frac{1}{n}} - 1)$ non converge assolutamente ma non so se converge

Provo con LEIBNIZ

Controllo ipotesi LEIBNIZ: 1) serie a termini alterni s'ì

2) $b_n = 3^{\frac{1}{n}} - 1$ ~~non~~ ^{tende} ~~tendere~~ a 0 s'ì

3) b_n monotona?
decrescente

$$3^{\frac{1}{n+1}} < 3^{\frac{1}{n}} \quad \text{base} > 1$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \text{s'ì}$$

$$n+1 > n \quad \text{s'ì}$$

Le ipotesi del CRITERIO DI LEIBNIZ sono verificate $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3^{\frac{1}{n}} - 1)$ CONVERGE!

ES. 5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2+2)}{3^n} x^n \quad \text{SERIE DI POTENZE}$$

Come capisco che è serie di potenze? $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ centrato nell'origine

L'insieme di convergenza è un intervallo simmetrico rispetto a $x_0 (=0)$

$$[-R, R], (-R, R), [-R, R), (-R, R]$$

Calcolo R:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2+2}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{NO RAGGIO DI CONVERGENZA}$$

PROVO CON CRITERIO RADICE

$$\text{Raggio di conv. } (R) = \frac{1}{\lambda} = 3$$

SERIE DI POTENZE CONVERGE per $x \in (-3, 3)$ ma non so se converge per $x = 3$ o $x = -3$ (nell'intervallo aperto ma non in quello chiuso)

- $x = 3$ (scrivo negli estremi destro per primo)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2}{3^n} \cdot 3^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+2) \quad b_n = n^2+2 \quad \times \quad 0$$

serie non può convergere

Esercizio

12/12/14

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} (2 \cos(2x))^n$$

Determinare insieme di convergenza e somma. Non è una serie di potenze x^n ma una funzione elevato ad n .

$$z = 2 \cos(2x)$$

Così la serie è: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} z^n$ $a^n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+1}$

Cerco il raggio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}^{n+1}} =$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}^{n+1}}{\sqrt{3}^{n+2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad R = \sqrt{3}$$

per $z = \sqrt{3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}^{n+1}} (\sqrt{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow b_n \quad b_n \text{ tende a } \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$

Per la condizione necessaria, non converge dato che ho una serie a termini positivi che o converge o diverge, dato che non può convergere $\rightarrow$ diverge

$$z = -\sqrt{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{3})^{n+1}} \cdot (-1)^n (\sqrt{3})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3}}$$

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_1 = S_0 + b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S_3 = 0$$

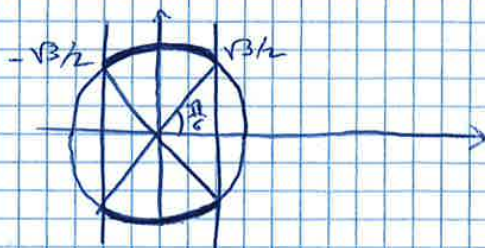
Non esiste il limite di s_n perché oscilla tra 0 e $\frac{1}{\sqrt{3}}$

La serie z converge per $-\sqrt{3} < z < \sqrt{3}$

$$\text{dunque } -\sqrt{3} < 2 \cos 2x < \sqrt{3}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\cos$ è in mezzo quindi guardo tra due stacche



$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

oppure posso scrivere

$$\frac{\pi}{6} + k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + k\pi$$

$$\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$$

Questi sono infiniti intervalli:



Devo fare somma di questa serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n (2 \cos(2x))^n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2 \cos(2x)}{\sqrt{3}}\right)^n$$

È una serie geometrica di ragione $\frac{2 \cos(2x)}{\sqrt{3}}$