



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1703-2A-

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Aimar Mauro

MATERIA: Tecnica delle costruzioni - prof. Mancini, Allaix
(2015) - Parte 2

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Sicurezza strutturale

DEFINIZIONE

Cos'è la sicurezza strutturale?

La definizione di sicurezza ha diversi significati in funzione dell'ambito in cui ci si trova ma, in questo caso, quando si parla di sicurezza, vengono in mente

- possibilità che si verifichi un evento di crollo
- CONSEGUENZE del crollo, legate al valore economico e al ruolo sociale (perdite di vite umane, perdite socio-economiche e ambientali)

Da qui si può dare la definizione di **sicurezza strutturale**:

essa è il **grado di protezione offerta dalla struttura nei confronti delle conseguenze di un collasso strutturale**.

Una struttura è tanto più sicura quanto più protegge vite umane e beni economici dalle conseguenze di un collasso strutturale.
 Dunque la definizione di sicurezza è legata alle **CONDIZIONI ULTIME DELLA STRUTTURA** (es. crollo)

VALUTAZIONE

Come si valuta la sicurezza strutturale (si può dare un numero)?

Data la definizione, ora si vede come si valuta la sicurezza strutturale e lì esistono 2 approcci diversi

→ **approccio deterministico**:

in esso le grandezze, cioè le azioni agenti sulla struttura, sono assunte come **GRANDEZZE NOTE** in ogni caso.

In questo caso, si possono usare le regole di progettazione delle normative, dimensionare la trave e da qui la trave non può mai crollare.

→ **metodo delle tensioni ammissibili**



Si consideri una struttura caricata in un certo modo. Dal carico q , si calcolano ad es M e T e poi si passa alla sezione trasversale, dove si calcolano le tensioni σ , τ in ogni punto di tale sezione

$$q \rightarrow M, T \rightarrow \sigma, \tau \quad \forall P$$

Da qui poi si passa alla tensione ideale, ad es. mediante Von Mises

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

e da qui si fa la VERIFICA, rappresentata dalla disuguaglianza

$$\sigma_{id} \leq R_{adm} = \frac{R_k}{\gamma}$$

R_k = valore caratteristico della resistenza
 γ = Fattore di sicurezza

Il valore P_r target dipende dal tipo di struttura e, in caso di condizioni ultime, dal tipo di rottura (fragile - più pericolosa perché può avere conseguenze maggiori - o duttile). Esso è fissato dalle normative.

ad es la rottura x taglio del calcestruzzo e di schianto

→ metodo di livello 2:

è più semplice dal punto di vista numerico e lì la verifica si traduce nel calcolo dell'indice di affidabilità della struttura β (legato a P_r) e da qui verificare che superi il valore di target

$$\beta_{struttura} \geq \beta_{target}$$

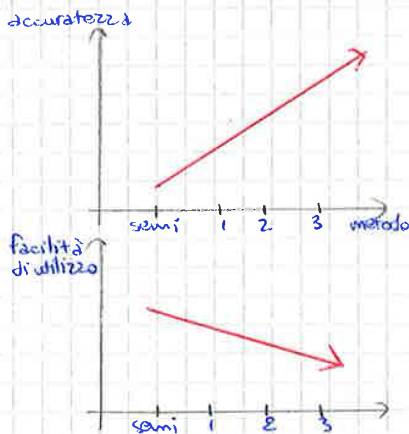
$$\rightarrow \beta_{target} = 3,8 \text{ x edifici}$$

→ metodi di livello 1 e semiprobabilistico:

la verifica è una verifica più "secca", in cui si prendono un valore di calcolo della resistenza e un valore di calcolo delle sollecitazioni e si confronta

$$R_d \geq S_d$$

Come si distinguono i vari metodi?



Si consideri un diagramma accuratezza nella verifica della sicurezza - metodo usato. Se si vuole sapere la probabilità che una struttura crolli, allora il metodo di livello 3 è più accurato perché stima la vera probabilità (non scende a un indice di affidabilità o a un valore). Dunque x sapere la vera sicurezza, occorre applicare il metodo di livello 3.

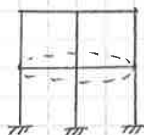
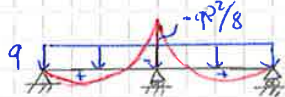
Ma quanto sono utilizzabili questi metodi? Il metodo semiprobabilistico è il più semplice da utilizzare perché il progettista può prendere dei valori di calcolo. Invece, se c'è da calcolare una probabilità, la questione diventa più complessa.

in genere si usa il metodo semiprobabilistico (gli altri solo x motivazioni particolari)

APPLICAZIONI

→ METODO SEMIPROBABILISTICO: è usato dai progettisti in situazioni ordinarie

→ METODO DI LIVELLO II: è usato x problemi di rilevanza tecnica ed economica (verifica della stabilità dei ponti).

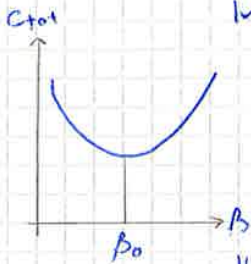


Ad es si immagini una trave continua soggetta a un carico q e avente 2 campate di lunghezza l . Facendo una verifica strutturale (elastica e lineare) si ha un momento $-q l^2 / 8$ e questo deriva dal modello strutturale che si è considerato, cioè sotto ipotesi di elasticità lineare e vincoli che impediscano completamente il moto. Se, infatti, si prendesse la trave da un edificio, questa potrebbe essere studiata anche come in un telaio e lì si avrebbe un modello strutturale diverso che dà risultati diversi. Dunque questo modello non dà la distribuzione reale delle sollecitazioni, x cui nella verifica della sicurezza bisogna considerare l'incertezza relativa ai carichi, alla resistenza del materiale e quella relativa al modello che si studia.

Questa è la base della ricerca che si fa nell'ambito delle strutture esistenti, costruite con modelli e criteri diversi. Per rinforzare in modo da garantire un livello di sicurezza adeguato alla nuova normativa, i costi di intervento sono molto più alti rispetto a quelli di un edificio nuovo.

↓
aggiungere qualcosa in progettazione e ha costo limitato, mentre nel costruito costa molto di più.

Così, x determinare la resistenza di una struttura, sono importanti da un lato le conseguenze e dall'altro un parametro, cioè il **costo della struttura**. In una struttura, il costo totale vale



$$C_{tot} = C_{struttura} + C_{rottura}$$

$C_{struttura}$ = costo di realizzazione e, legata al materiale e alla geometria
 $C_{rottura}$ = costo x gli effetti delle conseguenze della rottura della struttura (indennizzi)

Il costo totale è una funzione che dipende dalla probabilità P_r , analogamente, da β ed essa presenta un minimo in corrispondenza di un indice ottimale β_0 . Perché x $\beta < \beta_0$ la funzione è decrescente?

Questo perché il costo è somma di 2 contributi e nel primo ramo pesa il costo delle conseguenze, in quanto c'è alta probabilità di rottura e dunque alto rischio di portare conseguenze economiche importanti.

Dopo il valore β_0 , sul II ramo avviene una crescita perché, se il costo di rottura è minore (c'è più sicurezza), all'aumentare della sicurezza, aumentano i costi.

Metodi probabilistici per la valutazione dell'affidabilità strutturale

Da qui in poi non si parla più di sicurezza ma di **affidabilità**, perché l'edificio deve comportarsi bene non solo nei confronti del collasso ma anche in riferimento alle condizioni normali di esercizio.
Infatti l'edificio può trovarsi in condizioni di:

→ **stato limite ultimo (SLU)**: stato limite relativo all'utilizzo

→ **stato limite di esercizio (SLE)**: stato limite relativo al collasso (SLE)

Es (ruolo del SLE)

Il Millennium Bridge a Londra è una passerella pedonale, con una struttura molto sottile. Questo però è stato subito chiuso perché, a effetto della camminata, vibrava sia in piano verticale che orizzontale.

Qui il problema non è il SLU (il ponte non sarebbe crollato) ma, al tempo della progettazione, non erano conosciute le vibrazioni orizzontali.



il concetto di affidabilità contiene il concetto di sicurezza come caso particolare

Cos'è l'affidabilità?

Dunque nell'ambito delle strutture, ci sono problemi legati alla sicurezza (SLU) e, se si prendono anche i problemi in condizioni di esercizio, l'insieme di tutto questo definisce l'**AFFIDABILITÀ DELLA STRUTTURA**:

una struttura deve essere affidabile sia in condizioni ultime che in condizioni di esercizio.

L'affidabilità di una struttura è la capacità della struttura stessa di soddisfare i requisiti per i quali è stata progettata la struttura, per l'intera vita di progetto.

In questa definizione ci sono due parole chiave

→ **requisiti**: si legano al buon comportamento sia in condizioni di esercizio che ultime

→ **vita di progetto**: si associa ai valori target e alla probabilità P_r . Questi valori non valgono a un qualunque periodo di tempo ma devono essere soddisfatti a l'intera vita di progetto della struttura, poiché le norme sono studiate a soddisfare la sicurezza e il comportamento in esercizio relativamente alla vita, cioè a un durata di 50 anni. Qualunque ragionamento sulla sicurezza e sull'affidabilità ha sempre riferimento al periodo, che è il tempo di vita dell'edificio

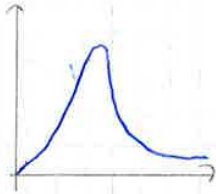
Dunque si vogliono applicare dei metodi probabilistici a valutare se l'edificio è affidabile o meno, in riferimento al SLU e al SLE e, in particolare, vedere

→ cos'è la funzione di stato limite

→ come applicare il metodo di livello 3 (L3) a stimare direttamente la probabilità P_r , mediante calcolo diretto o metodo Montecarlo

→ come stimare β mediante il FORM

→ trattare FORM e AFORM



→ nella normale, x valori sufficientemente alti di σ , si nota che ci sono valori negativi di resistenza a probabilità non nulla e ciò non ha significato fisico. Così, se la normale è molto usata ma in alcuni casi porta a risultati insensati, si usa la DISTRIBUZIONE LOGNORMALE. Essa non ammette valori negativi e, x questo, è indicata x rappresentare le resistenze.

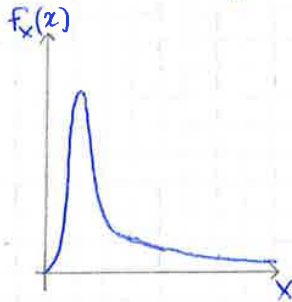
Dal punto di vista pratico, non è molto importante usare la normale o la lognormale perché il COEFFICIENTE DI VARIAZIONE (cioè il rapporto σ/μ) è molto limitato e dunque conviene usare la distribuzione normale.

Il coefficiente di variazione, che x una v.a. X si definisce come

$$V = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$$

vale nell'acciaio 8% e nel calcestruzzo 15%. Essa è un numero che dà subito l'idea di come sia la distribuzione e sull'INCERTEZZA (coefficiente di variazione maggiore \Rightarrow a parità di μ , maggiore incertezza).

Nel calcestruzzo è maggiore perché è un materiale a più fasi, buona parte di esso è gettato in opera (e nel viaggio si può aggiungere più o meno acqua) e c'è meno controllo di qualità in cantiere. Esistono però stabilimenti che fanno elementi prefabbricati e qui il coefficiente può ridursi a $5 \div 8\%$.



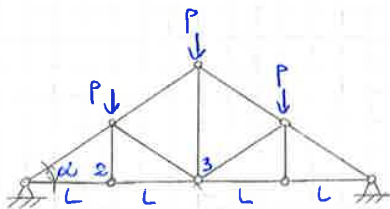
Andando sulle **azioni**, queste sono descritte via

→ DISTRIBUZIONE NORMALE x CARICHI PERMANENTI, con coefficiente di variazione dell'ordine di $5 \div 10\%$

→ DISTRIBUZIONE DI GUMBEL x CARICHI VARIABILI (in cui c'è maggiore variabilità - 20%). Essa è una cosiddetta "distribuzione di estremo", che presenta un picco molto spostato verso sinistra e una coda molto lunga.

Dunque con la funzione di stato limite si separa il dominio in cui la struttura non è affidabile da dove lo è.

ES (SCRITTURA DELLE FUNZIONI DI SLU E SLE)



Si consideri una capriata in acciaio, soggetta a carichi applicati in corrispondenza dei nodi e trasmessi dalla copertura.

È nota la geometria (forse l'angolo dipende dal montaggio e dalla precisione con cui è fatta l'unione).

Sono da trattare come **incertezze casuali** (e da descrivere come v.d.).

→ carichi esterni

→ tensione di snervamento f_y

} le incertezze sono rappresentate mediante lo sforzo normale con un parametro ricavato x via sperimentale

Ora si valuta la condizione di SLU dell'asta 2-3. Questa è soggetta a solo sforzo normale

↓ si ha una struttura e si sta fissando su una condizione ben precisa di SLU (non si controlla la struttura ma ci si focalizza su una condizione specifica).

Metodi di livello 3:

una volta scritta la funzione di SLU (x problemi di sicurezza), si può fare una stima della probabilità P_r .
Il metodo di livello 3 prevede di verificare la relazione

$$P_r \leq P_{target}$$

Però, se prima si parlava direttamente di probabilità di rottura, nel contesto più generale dell'affidabilità strutturale si parla di **probabilità di insuccesso** P_i .

$$P_i \leq P_{i,target}$$

La probabilità di insuccesso si definisce come probabilità che la funzione g sia negativa

$$P_i = P(g(x_1, \dots, x_n) \leq 0) = \int_{D_i} f_x(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

→ nella copriata si ha quando $U_S \geq U_R$
(rappresenta dominio di insuccesso e frontiera)

→ le proprietà della pdf congiunta
(D_i = dominio dove $g(x) \leq 0$)

$$P_i = \int_{D_i} f_x(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Dal punto di vista pratico, c'è un problema: spesso si conoscono le pdf delle v.a. prese singolarmente (ci sono indicazioni sulla resistenza del calcestruzzo, sui carichi permanenti, etc.) ma, appena si mettono le variabili nella funzione di stato limite, si definisce una pdf congiunta. Questa, nel caso di 2 v.a. x_1 e x_2 , rappresenta la probabilità che x_1 stia tra x_1 e $x_1 + dx_1$ e che x_2 abbia valore compreso tra x_2 e $x_2 + dx_2$

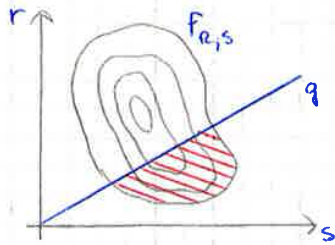
$$f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = P(x_1 \leq X_1 \leq x_1 + dx_1 \cap x_2 \leq X_2 \leq x_2 + dx_2)$$

La costruzione di questa pdf è complicata e spesso non è ottenibile in forma chiusa, eccetto in qualche caso particolare.

Dal punto di vista operativo, la probabilità può essere calcolata mediante

→ INTEGRAZIONE DIRETTA, in cui si risolve analiticamente o numericamente l'integrale

→ METODO MONTE CARLO, se non si sa scrivere la pdf congiunta.



Dal punto di vista grafico, questo integrale ha una sua rappresentazione: si immagina di conoscere la pdf congiunta e di vederla dall'alto. La funzione stato limite $g = r - s$ divide il piano secondo la sua bisettrice e allora l'integrale corrisponde al volume sotteso alla pdf congiunta nel dominio di insuccesso.

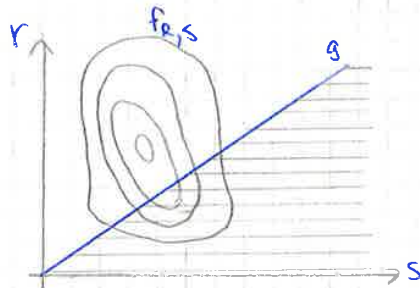
Il calcolo diventa difficile quando non si conosce la pdf.

Si tratterà però un caso semplice, cioè quando **le variabili R e S sono indipendenti tra di loro.**

Ad es. nella capriata R e S sono indipendenti tra di loro perché $R = N_R$ dipende solo da A e f_y mentre $S = N_S$ dipende solo da P.

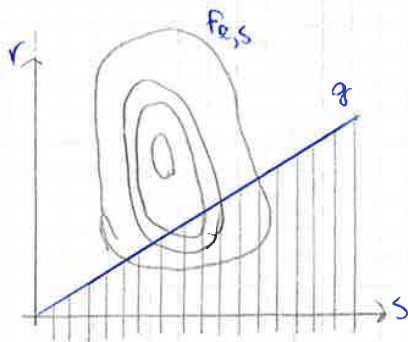
In questo caso, la pdf congiunta può essere espressa come prodotto delle pdf marginali e allora l'integrale si può risolvere x

→ STRISCE ORIZZONTALI



$$\begin{aligned} P_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_r^{+\infty} f_{R,S}(r;s) ds \right) dr = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) \underbrace{\left(\int_r^{+\infty} f_S(s) ds \right)}_{1 - F_S(r)} dr = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) [1 - F_S(r)] dr \end{aligned}$$

$F_S(s) = \int_{-\infty}^s f_S(t) dt$



→ STRISCE VERTICALI

$$\begin{aligned} P_i &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^s f_{R,S}(r;s) dr \right) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^s f_R(r) dr \right)}_{F_R(s)} ds = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) F_R(s) ds \end{aligned}$$

$$P_i = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) [1 - F_S(r)] dr = \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) F_R(s) ds$$

Il calcolo poi si semplifica ulteriormente immaginando che le pdf siano note

→ R e S sono variabili aleatorie normali. Allora è noto che una loro combinazione lineare è anch'essa una v.a. normale e dunque si definisce la v.a. Z come

$$Z \sim N(\mu_Z, \sigma_Z^2), \quad \mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad \sigma_Z^2 = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

(x l'indipendenza)

Da qui la probabilità di insuccesso vale

$$\begin{aligned} P_i &= P(R \leq S) = \\ &= P(Z \leq 0) = \quad \text{si standardizza} \\ &= P\left(\frac{Z - \mu_Z}{\sigma_Z} \leq -\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = \Phi\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right) \end{aligned}$$

Si suppone che

$$M_R \sim U(119; 11,9) \text{ kNm}$$

$$M_S \sim U(84; 8,4) \text{ kNm}$$

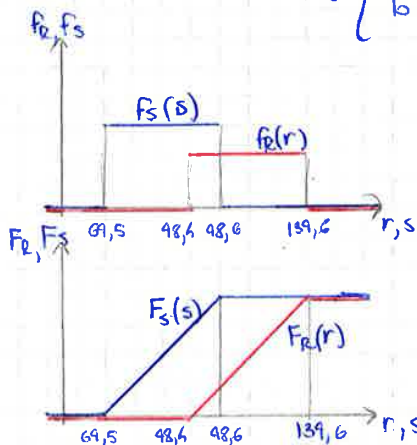
Da qui si possono disegnare le pdf di R e S, calcolando i parametri a e b

$$\begin{cases} a = 2\mu - b \\ b = a + 5\sqrt{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \mu - 5\sqrt{3} \\ b = \mu + 5\sqrt{3} \end{cases}$$

Così si ha

$$M_R \begin{cases} a_R = 119 - 11,9\sqrt{3} = 98,6 \text{ kNm} \\ b_R = 119 + 11,9\sqrt{3} = 139,6 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$M_S \begin{cases} a_S = 84 - 8,4\sqrt{3} = 69,5 \text{ kNm} \\ b_S = 84 + 8,4\sqrt{3} = 98,6 \text{ kNm} \end{cases}$$



A questo punto, si tracciano sullo stesso diagramma le pdf di R e S e si vede quanto si sovrappongono. Ci si aspetta che la probabilità $P_I = P(R \leq S)$ sia positiva, perché le due pdf si sovrappongono e, qualitativamente, più queste si sovrappongono, più la probabilità è alta

\Rightarrow è possibile un crollo e ciò non avviene a uno sbaglio nel progetto ma a la variabilità di R e S.

A questo punto, si tracciano le funzioni di ripartizione x R e S (è immediato)

Ora si integra, ad es. x strisce orizzontali

$$\begin{aligned} P_I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) [1 - F_S(r)] dr = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) dr - \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(r) F_S(r) dr = \\ &= 1 - \int_{a_R}^{b_R} f_R(r) F_S(r) dr = 1,66 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Questo valore, x le condizioni di SLU, è sensato (l'ordine di grandezza è giusto).

Si può ottenere lo stesso risultato integrando x strisce verticali

$$\begin{aligned} P_I &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_S(s) F_R(s) ds = \\ &= \int_{a_S}^{b_S} f_S(s) F_R(s) ds = 1,66 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$

Metodo di Monte Carlo:

è una strada x risolvere il metodo LZ quando la soluzione è più complicata. In particolare, essa è un metodo di simulazione molto comodo quando la pdf congiunta non è nota o ricavabile.

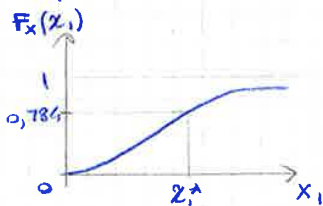
Data l'espressione della funzione di stato limite, questa dipende da N va, di cui si deve conoscere la distribuzione, media, varianza (dispersione) e di eventuali correlazioni tra le variabili, che sono misura di quanto le variabili sono legate linearmente tra di loro (se la correlazione è positiva, sperimentalmente si nota che al crescere di una variabile, cresce l'altra).

Note le va, si fa un ciclo di N simulazioni. Il valore N non è fisso ma dipende dalla verifica che si vuole fare. Se c'è un certo valore target (nota), ci si aspetta che la probabilità sia di quell'ordine e si deve fare un certo numero di simulazioni. Nella realtà, si tende a fare più simulazioni, anche $10^7 \div 10^8$ simulazioni (contro 10^6), in modo da avere una stima più affidabile della soluzione.

↳ al crescere del numero di simulazioni, la probabilità P_T tende a convergere al valore corretto

Nella simulazione

→ si genera un valore casuale x ogni va, tramite un elaboratore e con valore compreso tra 0 e 1



→ si sa che la funzione di ripartizione è sempre compresa tra 0 e 1. Allora si considera la va x_1 e nota la funzione di ripartizione (perché è nota la distribuzione), se il computer genera ad es. 0,784, lo si mette sull'asse delle ordinate, si entra in orizzontale nel grafico e si esce in verticale con il valore x_1^*

→ in questo modo si hanno delle REALIZZAZIONI delle va, che sono tutte indipendenti tra di loro (se si usa lo stesso valore 0,784, ci sono n valori che dipendono fortemente da questo 0,784).
Si ottiene dunque un insieme di valori casuali:

$$x_1^* ; \dots ; x_n^*$$

e si valuta la funzione di stato limite in corrispondenza di essi

$$g(x_1^* ; \dots ; x_n^*) \quad \rightarrow \text{lo si fa in ogni simulazione}$$

Se la funzione è negativa o nulla, significa che il punto considerato sta nel dominio di insuccesso o al più sulla frontiera. In questo caso, si prende un contatore N_R , cioè il numero di insuccessi inizializzato a 1 e lo si incrementa di 1

$$N_R + 1$$

→ fatte le N simulazioni, si hanno tutti i casi sfavorevoli e si calcola la probabilità P_r usando la definizione frequentistica

$$P_r = \frac{N_r}{N}$$

Spesso nella realtà ciò non accade e dunque, nei casi pratici, Z non può essere scritta come differenza di due u ma come funzione di stato limite di X_1, \dots, X_n .

$$Z = g(X_1, \dots, X_n)$$

Qui la definizione di β non cambia.

Per stimare μ_Z e σ_Z , si approssima la funzione di stato limite con uno sviluppo del 1° ordine e centrato nei valori medi delle diverse u e così

$$\mu_Z \approx g(\mu_{X_1}, \dots, \mu_{X_n})$$

$$\sigma_Z^2 = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i} \frac{\partial g}{\partial X_j} \text{cov}(X_i, X_j) \stackrel{\text{ipotesi di var. tutte indipendenti}}{\approx} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2$$

ipotesi di var. tutte indipendenti;

Se si fa riferimento ai risultati di Cornell, si nota che $R = X_1$ e $S = X_2$ e così

$$\mu_Z = g(\mu_R, \mu_S) = \mu_R - \mu_S \quad \rightarrow g = R - S$$

$$\sigma_Z^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial S} \right)^2 \sigma_S^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2$$

i risultati sono corretti;

→ AFOSH (Hasofer & Lindt):

il punto di partenza è che il MVFOSH si basa sulla definizione di β ma i termini μ e σ dipendono da come è fatta la funzione di stato limite e coinvolge le sue derivate.

Se però c'è un problema fisico (es. rottura di una sezione), una stessa condizione di stato limite può essere scritta con n funzioni di stato limite che sono fisicamente equivalenti (rappresentano la stessa cosa).

Es. Si immagina di considerare una SLU e di considerare due variabili R e S .

Si suppone che questa condizione di SLU si riferisca alla sezione di mezzeria A di una trave appoggiata e sia relativa a un momento flettente.

Allora R è il momento $M_{R,A}$ e S è il momento sollecitante $M_{S,A}$, dovuto al carico nella sezione di mezzeria.

Così la funzione di stato limite si può scrivere come

$$g_1 = R - S$$

e, nota questa, si può tracciare il dominio di insuccesso.

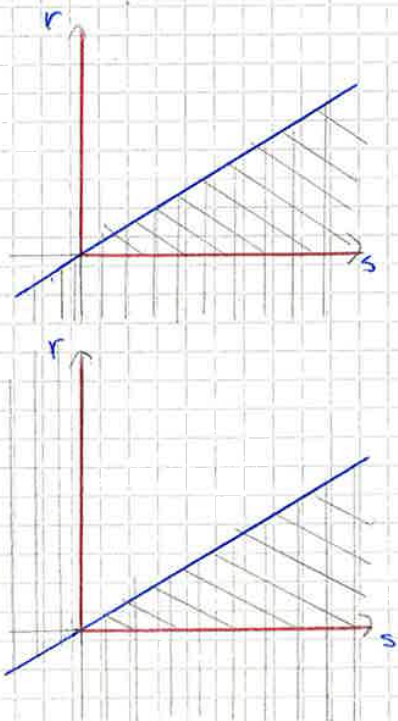
Se però ci sono carichi gravitazionali, etc., il momento M_S è positivo e il momento M_R offerto dalla sezione trasversale è anch'esso positivo. Dunque ci si focalizza sui valori $r, s > 0$ e così ci si limita a una certa porzione del dominio di insuccesso.

Data poi una funzione di stato limite di questo tipo, si applica il MVFOSH e si ottiene un certo valore β_1 .

Dopo che, sempre a la stessa condizione di SLU (x flessione in mezzeria), si può scrivere la funzione di stato limite come

$$g_2 = \frac{R}{S} - 1 \quad \rightarrow \text{stessa fisica, diversa funzione}$$

si osserva allora che il dominio di insuccesso è dato da



La va Y_1 è una va normale che dipende da un'unica variabile, x cui

$$\mu_{Y_1} = \frac{L}{250} I \mu_{E_s} = \frac{6}{250} \cdot 5790 \cdot 210 \cdot 000 = 291,8 \text{ kNm}^{-3}$$

$$\sigma_{Y_1} = \frac{L}{250} I \sigma_{E_s} = \frac{6}{250} \cdot 5790 \cdot 8'600 = 11,7 \text{ kNm}^{-3}$$

$$\Rightarrow Y_1 \sim N(291,8; 11,7) \text{ kNm}^{-3}$$

La va Y_2 si lega innanzitutto alla variabile q_{tot} , definita come

$$q_{tot} = q + q \sim N(\mu_{q_{tot}}; \sigma_{q_{tot}}) \begin{cases} \mu_{q_{tot}} = \mu_q + \mu_q = 13,1 \text{ kNm}^{-2} \\ \sigma_{q_{tot}} = \sqrt{\sigma_q^2 + \sigma_q^2} = 1,72 \text{ kNm}^{-2} \end{cases} \Rightarrow q_{tot} \sim N(13,1; 1,72) \text{ kNm}^{-2}$$

↓
sono indipendenti

Da qui la va Y_2 si comporta come

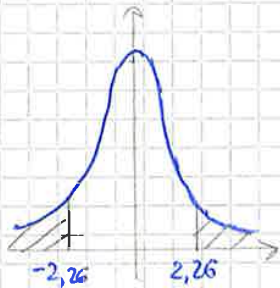
$$Y_2 \sim N(\mu_{Y_2}; \sigma_{Y_2}) \begin{cases} \mu_{Y_2} = \frac{5}{384} L^4 \mu_{q_{tot}} = 221,1 \text{ kNm}^{-3} \\ \sigma_{Y_2} = \frac{5}{384} L^4 \sigma_{q_{tot}} = 29,1 \text{ kNm}^{-3} \end{cases} \Rightarrow Y_2 \sim N(221,1; 29,1) \text{ kNm}^{-3}$$

$$\Rightarrow Y_2 \sim N(221,1; 29,1) \text{ kNm}^{-3}$$

A questo punto, si può fare il calcolo di P_r , indicando la va Z come

$$Z = Y_1 - Y_2 \sim N(70,8; 31,4) \text{ kNm}^{-3}$$

Così P_r si scrive come



$$P_r = P\left(v \geq \frac{L}{250}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0) =$$

→ si standardizza

$$= P(Z' \leq -2,26) =$$

$$= \Phi(-2,26) =$$

$$= 1 - \Phi(2,26) = 1,2 \cdot 10^{-2}$$

Ora, a fare la verifica di affidabilità della struttura, si confronta il valore P_r (dipendente dalla struttura) con il valore target

$$P_r = 1,2 \cdot 10^{-2} < P_{r, \text{target}} = 6 \cdot 10^{-3}$$

\Rightarrow a livello 3, la struttura è affidabile

→ METODO DI LIVELLO 2

→ MVFOSH: si basa sulla definizione di β come rapporto tra media e varianza della Z che rappresenta la funzione di stato limite. Ricordandosi che

$$g = \frac{L}{250} E_s I - \frac{5}{384} (g+q)L^4$$

da qui μ si esprime come valutazione della funzione g nelle varie medie e σ^2 come somma dei quadrati delle derivate in corrispondenza delle medie moltiplicati \times le σ^2 (x va in dipendenti)

$$\mu_z = g(\underline{\mu}) = 70,8 \text{ kNm}^{-3}$$

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 = 31,4 \text{ kNm}^{-3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = 2,26$$

Da qui si potrebbe calcolare P_r , ma in genere la va possono non essere normali e l'accuratezza della stima di P_r con il metodo FORM dipende molto dalla linearità della funzione di stato limite

→ AFOSH

si considera la funzione di stato limite

$$g = \frac{L}{250} E_s I - \frac{5}{384} (g+q)L^4$$

Si standardizzano le va e si calcola β come distanza tra superficie di stato limite e origine dello spazio standard. Si scrivono così le va standard

$$q'_{tot} = \frac{q_{tot} - \mu_{tot}}{\sigma_{tot}} \quad E'_s = \frac{E_s - \mu_{E_s}}{\sigma_{E_s}}$$

ora si riscrive la funzione, sostituendo i valori in termini di valori standardizzati

$$g(q'_{tot}; E'_s) = \frac{L}{250} (\mu_{E_s} + E'_s \sigma_{E_s}) I - \frac{5}{384} (\mu_{q_{tot}} + q'_{tot} \sigma_{q_{tot}}) L^4$$

Si riporta poi la funzione e stato limite nello spazio delle variabili standardizzate. Si nota che la funzione di stato limite è lineare in termini di E_s e q_{tot} . Quando si fa la standardizzazione (trasformazione lineare), si ottiene nuovamente una funzione lineare. Così, quando la funzione è lineare e le va sono normali, il β calcolato con AFOSH è lo stesso del MVFOSH.

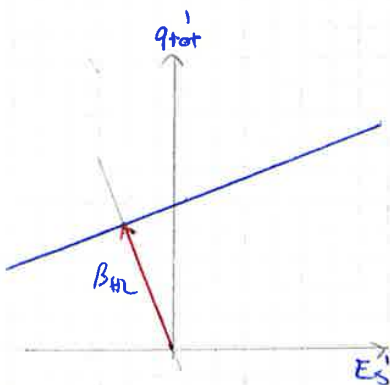
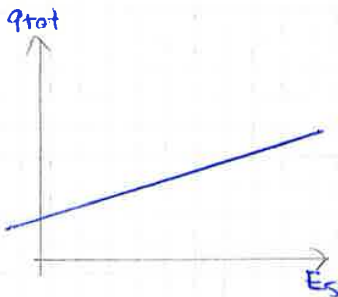
Non resta che calcolare la distanza rispetto all'origine. Il punto d'intersezione si può ottenere tenendo conto che la funzione di stato limite $g=0$ è una retta di equazione

$$q'_{tot} = a E'_s + b$$

e β_{HL} si associa a una retta perpendicolare, di equazione

$$q'_{tot} = -\frac{1}{a} E'_s$$

Note le coordinate del punto, si può calcolare la distanza e dunque β .



METODO SEMIPROBABILISTICO:

quando si usa questo metodo, si effettua la verifica mediante una disuguaglianza, in cui si confronta il valore di calcolo dell'effetto delle azioni E_d in mezzeria con il valore limite (qui sono spostamenti verticali)

$$E_d \leq \frac{L}{250}$$

La normativa prevede di considerare le **combinazioni caratteristiche dell'azione**, cioè il valore di calcolo dello spostamento è calcolato come lo spostamento verticale di una trave caricata da un'azione permanente, da compressione (se c'è), da un'azione variabile principale (quella che da sola, determina lo spostamento verticale maggiore) e altre azioni variabili (se presenti) con il loro valore caratteristico moltiplicata x un coefficiente di combinazione $\psi < 1$

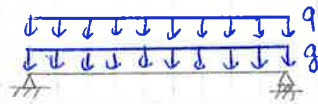
$$E_d = E (G_{k,j}; P; Q_{k,i}; \psi_{0,i} Q_{k,i})$$

La presenza di ψ si lega al fatto che, se ci sono più azioni variabili, esiste una probabilità molto piccola che queste si verifichino in contemporanea sulla struttura con la massima intensità.

In questo caso, c'è solo un'azione variabile (che, a forza, è principale) e dunque si usa la formula dello spostamento in mezzeria

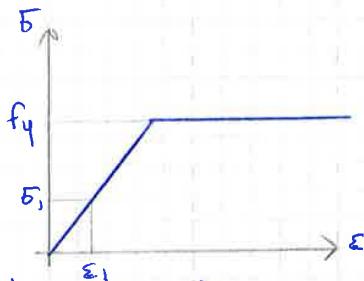
$$E_d = \frac{5}{384} \frac{(g_k + q_k) L^4}{E_s I} = 0,022 \text{ m} < \frac{L}{250}$$

La struttura ha un buon comportamento in mezzeria nei confronti dello SLE



Ora, x la stessa trave, si passa alla condizione di SLU x flessione in mezzeria (si trascura sempre il taglio), x cui si confrontano il momento sollecitante M_s dato da q e g e il momento resistente della sezione in acciaio

CALCOLO DEL MOMENTO M_r :



si suppone di avere **comportamento elastico perfettamente plastico**, in modo da considerare i vantaggi nel passare da elasticità lineare a elasto-plasticità. Le proprietà sono le stesse ma ora, come ulteriore σ_s , si considera la TENSIONE DI SNERVAMENTO f_y , in quanto la legge costitutiva ora presenta un tratto lineare e un tratto orizzontale.

In questo caso, si usa un acciaio S235

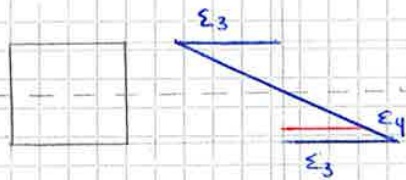
→ S = acciaio x scopi strutturali e carpenteria metallica (un altro usato è il S335)

→ 235 = valore caratteristico di snervamento f_{yk} , in Nmm^{-2} (x barre x le armature, si usa il S500; x acciaio da precompressione - alte resistenze -, si usa il S1600).

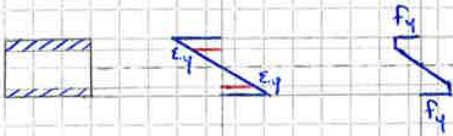
La tensione di snervamento è nota e vale

$$f_y \sim N(280; 22,4)$$

→ i dati vengono fuori dall'analisi statistica su campioni in acciaio effettuate in laboratorio



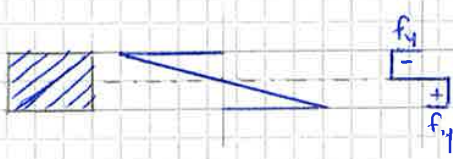
Orasi immagina di INCREMENTARE ULTERIORMENTE IL MOMENTO, in modo che nelle fibre superiori e inferiori si esperisca una deformazione ancora più grande rispetto a quella di snervamento (al lembo inferiore vale ϵ_3). In corrispondenza di ϵ_3 , nella legge costitutiva, c'è sempre la tensione f_y (il materiale non può dare più di f_y , ma può continuare a deformarsi). Se poi al centro la deformazione è nulla, allora da qualche parte, a una certa altezza, c'è una fibra con deformazione ϵ_y e tensione f_y . Così, se si disegna la sezione trasversale, la parte esterna ha deformazione $\epsilon \geq \epsilon_y$ e dunque lì c'è solo deformazione plastica, mentre nella parte centrale le deformazioni vanno da 0 a ϵ_y e dunque ci sono deformazioni elastiche. A livello di diagramma delle tensioni, questo non è più lineare perché nelle zone estreme (dove $\epsilon \geq \epsilon_y$) alle deformazioni si associa sempre f_y (si è nella parte di legge costitutiva dove $\epsilon \geq \epsilon_y$).



⇒ nei lembi, il diagramma è piatto, mentre in mezza è di tipo lineare



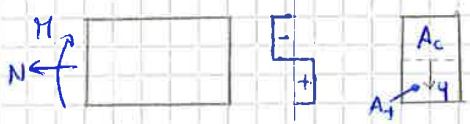
Se si incrementa ulteriormente il momento, si arriva a una situazione in cui di lembi si ha ϵ_6 . Ci si aspetta che la zona di plasticizzazione aumenti, poiché è il diagramma è più pendente e dunque f_y si trova in una fibra più prossima. Così il diagramma ha una zona più grande soggetta alla tensione f_y .



Incrementando ancora, si arriva a una situazione dove la deformazione è estremamente grande e c'è una situazione limite dove c'è una DISTRIBUZIONE RETTANGOLARE DELLA TENSIONE

questa è una condizione teorica e rappresenta il massimo che la sezione può dare in termini di tensione

Da questo, si ricava il momento M_R , considerando comportamento elastico perfettamente plastico.



Per fare ciò si guarda il diagramma degli sforzi e si scrive l'equazione di equilibrio tra N e M_x e la distribuzione di tensioni che c'è:

Se si immagina un cono soggetto a sforzo normale N e momento M_x , questo deve equilibrarsi con la tensione σ sulla sezione trasversale opposta.

$$N = \int_A \sigma dA = 0$$

$N = 0$, a cui la distribuzione delle tensioni deve farsi equilibrio da sola

Una porzione di sezione trasversale è soggetta a una tensione costante pari a f_y e l'altra alla tensione costante $-f_y$.

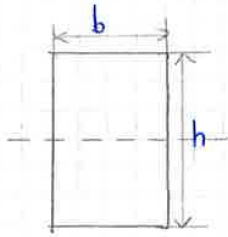
Si indica con A_t l'area tesa e A_c l'area soggetta a sforzo normale di compressione. Allora si può scrivere

$$\int_A \sigma dA = f_y \int_{A_t} dA - f_y \int_{A_c} dA = f_y (A_t - A_c) = 0 \Rightarrow A_t = A_c$$

$$A_t = A_c$$

MODULO PLASTICO PER UNA SEZIONE RETTANGOLARE

I VIA: GEOMETRIA DELLE AREE



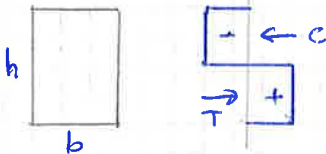
Nella sezione rettangolare si trova subito l'asse neutro plastico e così il momento statico della porzione tesa è pari al momento statico di un rettangolo rispetto alla sua base

$$S_T = \frac{1}{2} \frac{bh^2}{4} \quad S_C = -\frac{1}{2} \frac{bh^2}{4}$$

Da qui si ha

$$W_{pe} = \frac{bh^2}{4}$$

II VIA: PASSAGGIO PER LA CONDIZIONE LIMITE (con distribuzione birettangolare)



Si valuta la risultante delle forze di trazione e di compressione. Per la trazione, si ha

$$T = \frac{1}{2} f_y bh$$

ed essendo la distribuzione delle tensioni uniforme, T agisce nel baricentro.

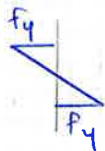
Stesso risultato vale x la compressione c .

Così ci sono 2 forze uguali e contrarie che danno la coppia che è proprio M_R

$$M_R = \left(\frac{1}{2} f_y bh\right) \cdot \frac{1}{2} h = \frac{1}{4} \cdot f_y bh^2 \Rightarrow W_{pe} = \frac{1}{4} bh^2$$

$$W_{pe} = \frac{1}{4} bh^2$$

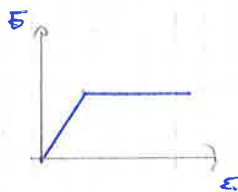
Una volta visto come si calcola M_R , si guarda il GUADAGNO RISPETTO AL COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE:



si è visto che, nel calcolo del momento, si è arrivati a una situazione con un diagramma delle tensioni con valore massimo f_y . Ci si è individuato il momento di PRIMA PLASTICIZZAZIONE M_L , pari a $f_y W_{el}$ (x un rettangolo, $W_{el} = bh^2/6$).

Questo è il massimo momento che la sezione può portare se si considera solo il tratto elastico lineare della legge costitutiva (come se la legge avesse solo il tratto lineare).

Se si considera anche il tratto plastico, si arriva al momento M_R , che vale $f_y bh^2/4$.



Ora si fa un confronto tra le resistenze, considerando un comportamento elasto-plastico contro la resistenza nel caso di sola elasticità lineare

$$\frac{M_R}{M} = \frac{f_y \frac{bh^2}{4}}{f_y \frac{bh^2}{6}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Ora si passa ai METODI DI LIVELLO 2, in cui si stima l'indice di affidabilità β

→ MVFOSM: qui β è il rapporto tra media μ e varianza σ della funzione di stato limite, calcolate come

$$\mu \approx g(\mu_g; \mu_q; \mu_{fy}) = 76,7 \text{ kNm} = \mu_z \quad \rightarrow \text{perché } g \text{ è funzione lineare}$$

$$\sigma \approx \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial g}\right)^2 \sigma_g^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial q}\right)^2 \sigma_q^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial f_y}\right)^2 \sigma_{f_y}^2} = 13,3 \text{ kNm} = \sigma_z$$

Da qui β vale

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z} = 5,7$$

Questo valore da confrontare con il valore target, valido x edifici civili con vita di progetto di 50 anni

$$\beta = 5,7 > \beta_{\text{target}} = 3,8$$

La struttura è molto affidabile nuovamente perché nell'acciaio il progetto non è governato dalla SLS ma dalla SLE.

→ AFOSM: in questo caso, si scrive la funzione di stato limite in funzione delle variabili standardizzate e da qui si calcola la distanza tra curva e origine dello spazio normale standard. Si trova che

$$\beta_{NL} = 5,7$$

che è lo stesso valore di prima, poiché le u_i sono tutte normali e la funzione di stato limite è lineare.

Infine si applica il METODO SEMIPROBABILISTICO, in cui si ricorre ai valori di calcolo

→ MOMENTO SOLLECITANTE:

il valore di calcolo M_{sd} del momento in mezzera è ricavato sulla base della combinazione delle azioni persistenti e transitorie (poiché nella vita la struttura è soggetta ad azioni brevi-es. terremoto - che diventano però situazioni in cui progettare x far sì che non ci sia crollo). Le azioni persistenti sono quelle di tipo ordinario. In questo caso, la struttura si trova in situazioni diverse e la norma dice che nei valori caratteristici dei carichi permanenti e variabili, nel calcolo degli effetti, sono coinvolti anche fattori parziali di sicurezza, oltre ai coefficienti di combinazione

$$E_d = E \left\{ \gamma_{G,j} G_{k,j}; \gamma_P P; \gamma_{Q,1} Q_{k,1}; \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i} \right\} \quad \begin{matrix} \gamma_G = 1,35 \\ \gamma_Q = 1,5 \end{matrix}$$

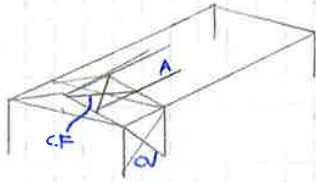
Da qui si calcolano i valori caratteristici e il valore di calcolo degli effetti e'

$$M_{sd} = \frac{(\gamma_G g_k + \gamma_Q q_k) L^2}{8} = 98,2 \text{ kNm}$$

Es (APPLICAZIONE : verifica di sicurezza in un capannone in acciaio)

Un capannone in acciaio è caratterizzato dalla presenza di un insieme di travi reticolari appoggiate su pilastri e ripetute in sequenza a coprire tutta l'area del capannone.

La larghezza (Luce) è importante e vale 15 m.
Nella struttura si riconoscono



→ arcarecci A, che si appoggiano sulla capriata e su cui si appoggia la copertura

→ controventi di falda CF (sulla copertura) e verticali CV, che prendono l'azione del vento e la trasferiscono ad altri elementi e stabilizzano le capriate tenendole fisse (essendo in acciaio, ci sono elementi snelli che possono dare instabilità in compressione)

Sul capannone agiscono

- carichi verticali (peso proprio degli elementi strutturali - limitato perché in acciaio)
- carichi permanenti portati (es. carri ponte)
- carico neve (significativo in una struttura in acciaio - attorno a 100 kg/m^2)
- carichi orizzontali (vento, sismi e carichi generati dalle attrezzature - es. frenatura del carro ponte)

Questi carichi sono applicati negli elementi strutturali stessi (capriate) o in copertura e dalla copertura devono arrivare alle fondazioni (passando dagli arcarecci, alle capriate e alle pile di fondazione).

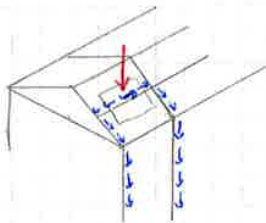
↓ il progettista deve avere in mente il carico, dove è applicato e come si trasferisce, e sapere ~~le~~ gli elementi della struttura interessate dal percorso di carico e le sollecitazioni.

Ora ci si concentra sulle AZIONI VERTICALI e si immagina che sulla copertura agisca una forza concentrata.

Il pannello della copertura si appoggia su 2 travi secondarie, che rappresentano un vincolo allo spostamento del pannello. Così la reazione vincolare è trasmessa dal pannello della copertura all'arcareccio e, allo stesso modo, va dalla trave secondaria alla capriata (poiché si appoggia su essa).

L'arcareccio si appoggia con uno schema di trave appoggiata o trave continua.

La capriata poi si appoggia sul pilastro (vincolo con cerniera) e scarica sul pilastro un'azione verticale.



COPERTURA :

per evitare la pioggia, è fatta in lamiere grecate contenente all'interno uno strato di coibentazione, spesso a seconda delle condizioni climatiche.

Questa si appoggia sugli arcarecci (con profilo a C o IPE) e sono collegati mediante bullonatura, dove si farà l'anima dell'arcareccio, si appoggia una piastra e si serrano i bulloni. Allo stesso modo lo si collega alla capriata.

Così, se c'è un carico agente sulla copertura come la neve, questa trasferisce il carico a ciascun arcareccio e ciascuno di essi trasmette una forza concentrata in un nodo della capriata. Ovviamente, in una struttura in acciaio occorre saper fare bene i collegamenti perché attraverso essi si fa l'unione.



In questo caso,

$$C_e = 1$$

→ C_T = coefficiente termico, che dice che sulla copertura c'è minore carica neve se, al suo interno, ci sono attività che producano calore e inducano lo scioglimento (dipende dalla tipologia di costruzione).
 qui non si sa, a cui si pone

anche quando l'isolamento della copertura è poco efficiente

$$C_T = 1$$

→ q_{sk} è determinato a seconda della quota sul livello del mare e della zona (zona alpina)

$$q_{sk} = 1,5 \text{ kN/m}^2$$

Si nota che su m^2 cadono 150 kg, contro gli 8 kg del pannello, a cui sulla copertura le azioni variabili hanno un ruolo importante

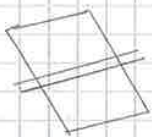
Da qui si ha

$$q_s = 1,2 \text{ kN/m}^2$$

La normativa dice anche le condizioni di carico da applicare:

Se la struttura ha due angoli arbitrari, bisogna considerare lo schema di carico uniformemente distribuito (essendo gli angoli uguali, i carichi saranno uguali)

Ora però il produttore si riferisce a kN/m , a cui bisogna passare da kN/m^2 a kN/m

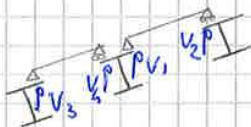


⇒ data la copertura, se ne prende una banda di 1 m di larghezza e così, avendo un carico al m^2 , lo si moltiplica x questo metro e si ottiene il carico al metro che agisce lungo il segmento di trave appoggiata

↓ se ne prende un metro e dalla larghezza si ha il carico che agisce in direzione della trave

A questo punto, si fa la verifica delle TRAVI SECONDARIE:

si sa che i pannelli di copertura appoggiano sulle travi secondarie e dunque i vincoli di cerniera e carrello ~~sono~~ sono rappresentati da queste travi verticali.



Dunque le reazioni vincolari sono l'effetto della presenza della trave secondaria sulla copertura, cioè sono forze applicate dalle travi secondarie sulla copertura perché è appoggiata su di esse.

Per il principio di azione e reazione, questi sono i carichi (cambiati di segno) che il pannello di copertura trasmette alla trave secondaria ed è ciò che serve a farne la verifica di sicurezza.

Questo è il primo passaggio del percorso di carico, dal pannello alle travi secondarie. Conoscendo il percorso, si sa come ogni carico è riportato alle fondazioni e dunque quali sono le sollecitazioni.

Le travi secondarie sono poi appoggiate sulla capriata, a cui i carichi che passano nella trave secondaria sono passati alla trave principale, esattamente dove è vincolata.

→ x la tensione di snervamento, ci sono modelli probabilistici e si usa un acciaio S235.

A questo punto, si considera la verifica di SLU x flessione e si confrontano momento sollecitante con momento resistente (in questo caso, ci sono 2 componenti di momento x la flessione deviata).

Inanzitutto, si determinano i momenti sollecitanti M_{sx} e M_{sy} e poi i momenti resistenti (dati dal prodotto di modulo plastico e tensione di snervamento).
Si scrive poi la funzione di SLU, data dalla norma

$$g(g_1; g_2; q; f_4) = 1 - \left(\frac{M_{sx}}{M_{Rx}} + \frac{M_{sy}}{M_{Ry}} \right) \rightarrow \text{se } \geq 0, \text{ c'è sicurezza}$$

Dopo che si applicano i vari metodi

↓

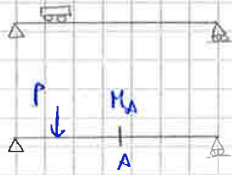
nell'ambito del metodo semiprobabilistico, x l'EN1990

→ le azioni g e q sono considerate secondo l'azione di combinazione del carico in situazioni persistenti e transitorie

→ i fattori parziali x le azioni permanenti sono γ_g e γ_q

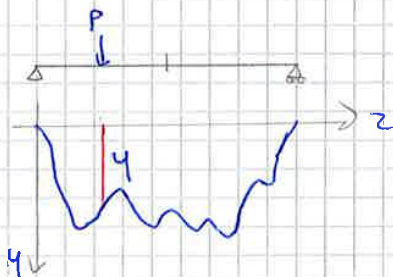
Linee di influenza

Tra le azioni, esistono azioni fisse (come il peso proprio) e azioni con un carico mobile (es persone e traffico veicolare)



Il problema del progettista è che, con un ponte assunto come trave appoggiata su cui circolano veicoli (ai fini statici, rappresentabili con il loro peso proprio), se si vuole progettare la sezione trasversale e la flessione, bisogna sapere come varia la flessione in funzione della posizione del veicolo e soprattutto la posizione che dà flessione massima. Da qui si progetta la sezione e, se occupa altre posizioni, s'induce un momento flettente minore del massimo e dunque si è coperti da tutte le situazioni.

Per trovare la sollecitazione, si potrebbe considerare un grande numero di posizioni e trovare quella che dà massimo momento flettente. Ciò è possibile ma non conviene applicare questo procedimento iterativo in strutture complesse.



Dunque, in questo caso, si vorrebbe avere un diagramma generico tale che, se si ha un carico P applicato in un punto e si sta studiando il momento nella sezione di mezzo a A, il momento nella sezione A dovuto a P vale

$$M_A = P y$$

dove y è l'ordinata del diagramma in corrispondenza del punto di applicazione del carico P.

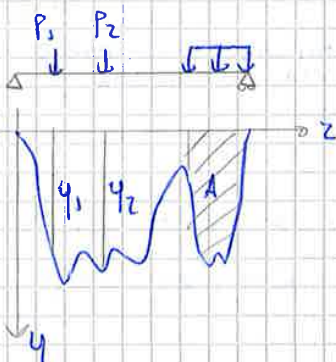
Così, conoscendo questo diagramma, diventa tutto più semplice perché in funzione della posizione del carico, basta considerare l'ordinata, moltiplicare x P e ottenere così M_A .

Il diagramma ottenuto si dice **linea di influenza del momento M_A per forze verticali**.

La cosa importante è che si possono disegnare L.I. x diverse strutture, caratteristiche della sollecitazione, tipologie di carico e si possono tracciare senza neanche sapere dove il carico è applicato.

⇒ **data una struttura e lo schema di carico, si può tracciare la linea di influenza senza sapere il punto di applicazione.**

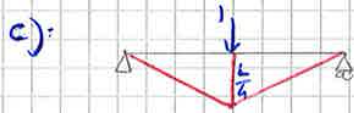
Questa è la potenza del diagramma, perché bastano queste due informazioni.



Inoltre, esso permette, sempre sullo stesso schema ma con forze P_1 e P_2 e un carico q, di usare le L.I. x determinare il momento M_A come prodotto di

$$M_A = P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots$$

e il contributo di q che, se costante, è dato dal prodotto dell'intensità di carico per l'area della L.I. del momento M_A sulla porzione di struttura dove è applicato q. Infatti, tale carico è visto come un insieme successivo Δx di cui si considerano le risultanti, che vanno sommate con l'ordinata della L.I. e, x $\Delta x \rightarrow 0$, questa somma diventa q-A.



Si sposta verso destra e si pone il carico sulla mezzeria, x cui il carico si ripartisce allo stesso modo sui vincoli. Il diagramma di momento è triangolare e l'ordinata di interesse è

$$M_A = \frac{L}{4}$$



Si sposta la forza unitaria a una distanza $L/4$ dall'appoggio a destra e il momento ha un diagramma triangolare con massimo M corrispondenza della sezione d'applicazione del carico e

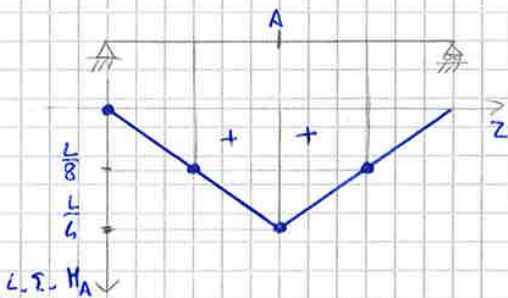
$$M_A = \frac{L}{8}$$



Forza unitaria che si scarica completamente sull'appoggio a destra, x cui

$$M_A = 0$$

II Ora si prendano i vari valori e li si diagrammano M modo da ottenere la L.I. del momento flettente nella sezione di mezzeria x carichi verticali



- a) Forza su $z = 0 \Rightarrow M_A = 0$
- b) Forza su $z = L/4 \Rightarrow M_A = L/4$
- c) Forza su $z = L/2 \Rightarrow M_A = L/8$
- d) Forza su $z = 3/4 L \Rightarrow M_A = L/4$
- e) Forza su $z = L \Rightarrow M_A = 0$

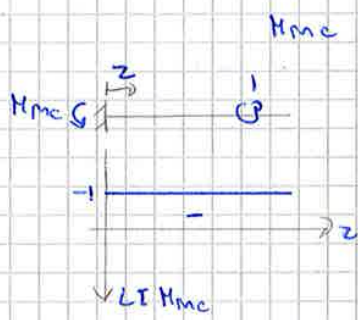
Si è così ottenuto il diagramma e, avendo una sollecitazione P , allora il momento in A vale

$$M_A = P y$$

PROPRIETÀ DELLA L.I.

- se c'è un'unica forza verticale P applicata, x conoscere la posizione che dà il massimo momento basta vedere l'ordinata massima della L.I.
- la L.I. è tutta positiva, x cui se le forze sono tutte applicate verso il basso, allora tutte queste danno un contributo positivo di momento flettente
- si è tracciata la L.I. senza sapere dove è applicata la forza
- ⇒ data una forza, si può tracciare la L.I. senza sapere dove sia esattamente applicato il carico e ciò è un vantaggio perché, dal diagramma, si può applicare il carico in modo da massimizzare il momento
- LA L.I. del momento flettente nella sezione A È DIVERSO DAL DIAGRAMMA di momento flettente perché questo dice come varia il momento flettente in tutte le sezioni x una posizione prefissata di P , mentre la L.I. dà il momento M_A dovuto a un carico unitario che cambia posizione
- ↳ l'uno dà la caratteristica della sollecitazione e in una sezione prefissata con carico unitario mobile, l'altro x una posizione prefissata di carico (i diagrammi sono simili solo x lo schema statico e la posizione del carico)

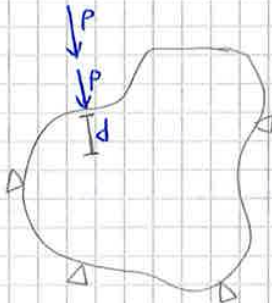
ES (L.T. del momento all'incastro di una mensola x coppia unitaria d'azione)



Fissata la convenzione dei segni, partizionando la coppia a una generica z, il momento è sempre -1

Metodo indiretto:

è un metodo complicato usato x strutture complesse.



Innanzitutto, x introdurre il teorema di riferimento (cioè Betti), bisogna trattare il **lavoro di deformazione**:

Innanzitutto, si considerano strutture con **COMPORTAMENTO ELASTICO LINEARE**.

S'immagini un corpo vincolato al terreno, soggetto a una forza P. Per effetto della deformazione, il punto di applicazione della forza P subisce uno spostamento d nella direzione della forza stessa.

Allora, x il teorema di Clapeyron, il lavoro di deformazione che la forza P induce sul corpo vale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} P d$$

Ora si aggiunge un'altra forza P, esattamente dove era la forza di prima e con la stessa direzione, che agisce sul corpo già deformato x effetto della forza. Allora il lavoro di deformazione totale x azione delle 2 forze applicate in successione vale

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} P d + \frac{1}{2} P d + P d$$

↳ lavoro della prima forza
 ↳ lavoro di deformazione della II forza come se agisse da sola sul corpo
 ↳ quando si applica la II forza, il punto di applicazione della I forza si sposta perché si deforma ulteriormente il corpo e questa compie un lavoro Pd

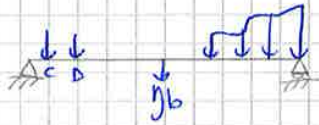
Ci sono così 2 contributi di lavoro diretto, cioè contributi di lavoro dovuti alle singole forze come se fossero applicate indipendentemente, e di lavoro **MUTUO** perché la II forza determina lo spostamento del punto di applicazione della prima forza.

⇒ non vale il principio di sovrapposizione degli effetti (valido x caratteristiche della sollecitazione, spostamenti e reazioni).

A questo punto, si può vedere l'enunciato del **teorema di Betti**:

date 2 deformazioni di un corpo elastico dovute a 2 diversi sistemi di forze, il lavoro che le forze del primo sistema compirebbero qualora di loro punti di applicazione fossero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la seconda deformazione, è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema compirebbero qualora di loro punti di applicazione fossero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la prima deformazione.

APPLICAZIONE ALLE C.I.:



Si suppone di avere una struttura soggetta a un sistema b di forze e si suppone che il sistema di forze determini uno spostamento verticale η_b ad es. nella sezione di mezzaria che si vuole calcolare

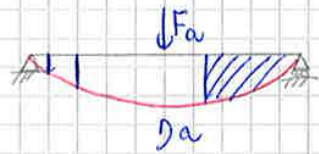
$$b \rightarrow \eta_b$$

Nel teorema di Betti, si è ricavata la relazione

$$\sum F_a \eta_b = \sum F_b \eta_a$$

dove η_b è l'incognita e a destra c'è la somma dei prodotti delle forze F_b x degli spostamenti di un sistema a e sono coinvolti dei lavori.

Dunque, x calcolare η_b , bisogna inventare **un sistema di forze a che produca lavoro con il sistema di forze b.** In questo caso, l'unico sistema di forze che permette di avere lavoro con lo spostamento η_b è una sola forza concentrata verticale F_a applicata in mezzaria



questo perché si passa attraverso il teorema di Betti, dove ci sono dei lavori e bisogna mettere tutte le cose che lavorino insieme

Per effetto delle forze F_a , c'è una deformata η_a di cui interessano gli spostamenti dei punti C e D di applicazione di F_b poiché è con questi spostamenti che tali forze compiono lavoro. Nel caso di carichi distribuiti, si deve considerare l'area compresa tra dove inizia e finisce il carico.

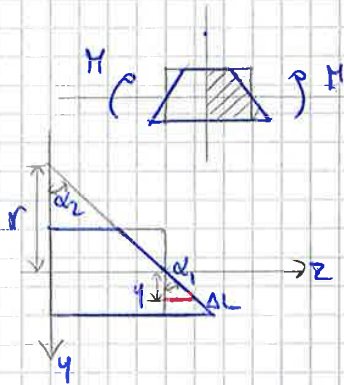
Così si può scrivere

$$F_a \eta_b = \sum F_b \eta_a$$

Ora, si parla di

- **effetto incognito (E.I.)**: è lo spostamento η_b , che interessa calcolare
- **sistema esplorativo (S.E.)**: è la forza F_a
- **cause date (C.D.)**: è il sistema che determina l'effetto incognito, cioè F_b
- **funzione d'influenza (F.I.)**: è lo spostamento η_a

Per calcolare y_a , occorre introdurre il concetto di **linea elastica di una trave inflessa**:



Si consideri un concio infinitesimo di trave, soggetto alle estremità di momento M e, a effetto di M , si deforma in un certo modo.

A questo punto, si consideri una sola delle 2 porzioni del concio.

Si fissa un asse y rivolto verso il basso e un asse z longitudinale e si indica con r il raggio di curvatura del concio e con dz la sua lunghezza iniziale.

A questo punto, si consideri una fibra con profondità y rispetto all'asse neutro e si indica con ΔL l'allungamento che il concio subisce in corrispondenza di quella fibra.

Si nota che i due angoli α_1 e α_2 sono uguali, e cui

$$\alpha_2 = \frac{dz}{r} = \frac{\Delta L}{y} = \alpha_1$$

$$\frac{\Delta L}{dz} = \frac{y}{r}$$

Il rapporto dell'allungamento della fibra rispetto alla lunghezza iniziale è la deformazione ϵ_z

$$\epsilon_z = \frac{y}{r}$$

Da qui la tensione σ_z vale

$$\sigma_z = E \epsilon_z = E \frac{y}{r}$$

Poiché si considera un concio soggetto a momento, le tensioni valgono

$$\sigma_z = E \frac{y}{r} = \frac{M}{I} y$$

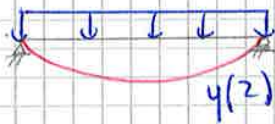
$$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

Il primo membro non è altro che la curvatura e, poiché si vuole ottenere lo spostamento verticale (e avere y_a), bisogna esprimere questo in funzione dello spostamento verticale. Usando la geometria differenziale, si ottiene

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Poiché si è nel campo dei piccoli spostamenti, la rotazione $\frac{dy}{dz}$ è piccola e così

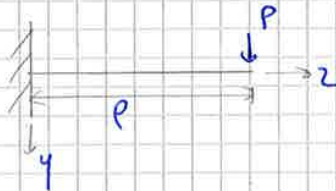
$$\frac{1}{r} \approx \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M}{EI}$$



Così si è stabilito lo spostamento verticale in funzione di z e si nota che, se M è funzione quadratica di z , y è funzione quadratica di z .
 Conoscendo questa funzione, si può calcolare lo spostamento a ogni sezione.
 Nella sezione in mezzeria vale

$$y(z = \frac{l}{2}) = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}$$

Es. (SPOSTAMENTO IN UNA MENSOLO)



Si parte dall'ODE

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = - \frac{M_x(z)}{EI}$$

Si risolve la struttura e determinare il momento

$$M_x(z) = P(z-l)$$

Così l'ODE diventa

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{EI} P(l-z)$$

Si integra

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{EI} P(lz - \frac{1}{2} z^2) + C_1$$

$$y = \frac{1}{EI} P(\frac{1}{2} l z^2 - \frac{1}{6} z^3) + C_1 z + C_2$$

Per le condizioni al contorno

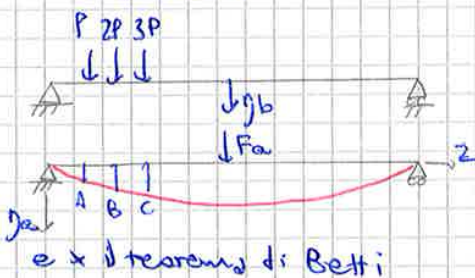
→ l'incastro non consente spostamenti verticali

$$y(z=0) = C_2 = 0$$

→ l'incastro non consente rotazioni

$$\frac{dy}{dz}(z=0) = C_1 = 0$$

Ora si torna al problema della trave appoggiata, dove si voleva calcolare lo spostamento in mezzeria y_b



Si sa che

$$E.I. : y_b \rightarrow S.E. : F_a$$

$$C.D. : F_b \rightarrow F.I. : y_a$$

e x il teorema di Betti

$$F_a y_b = \sum F_b y_a$$

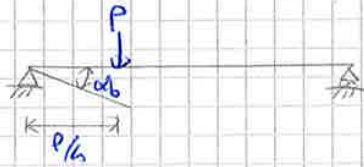
Si sa che F.I. è la ~~la~~ C.I. dell'effetto incognito x le cause date, x cui y_a è lo spostamento verticale in mezzeria x le forze verticali.

$$\Delta \eta_b = 0,01 P \frac{\Delta a l^3}{EI} + 0,032 P \frac{\Delta a l^3}{EI} + 0,057 P \frac{\Delta a l^3}{EI}$$

$$\eta_b = 0,099 \frac{P l^3}{EI}$$

Si nota che η_b non dipende dal S.E. perché è solo lo strumento usato e il teorema di Betti

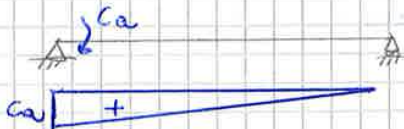
Es



Si considera una struttura appoggiata dove si applica il carico P in corrispondenza di $z = l/4$. Quanto vale la rotazione in corrispondenza della cerniera a sinistra.

L'E.I. è la rotazione α_b e il S.E. che deve compiere lavoro, è la coppia C_a in corrispondenza dell'cerniera a sinistra

$$E.I. : \alpha_b \rightarrow S.E. : C_a$$



Le C.D. sono costituite dalla forza P_b e cui la F.I. è lo spostamento η_a

$$C.D. : P_b \rightarrow F.I. : \eta_a$$

Lo spostamento η_a è la L.I. della rotazione α_b e effetto dei carichi verticali e così, ogniqualvolta si vuole conoscere la rotazione, si applica una forza verticale (c'è la stessa F.I. perché c'è la stessa C.D.)

Si risolve la struttura, e cui il momento vale

$$M_a = C_a - \frac{C_a}{l} z$$

Si scrive l'ODE della linea elastica

$$\frac{d^2 \eta_a}{dz^2} = \left(-C_a + \frac{C_a}{l} z \right) \cdot \frac{1}{EI}$$

$$\frac{d\eta_a}{dz} = \frac{1}{EI} \left(-C_a z + \frac{1}{2l} C_a z^2 \right) + C_1$$

$$\eta_a = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} C_a z^2 + \frac{1}{6l} C_a z^3 \right) + C_1 z + C_2$$

Le condizioni al contorno sono

$$\rightarrow \eta_a(z=0) = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 0$$

$$\rightarrow \eta_a(z=l) = 0 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} C_a l + \frac{1}{6} C_a l \right)$$

$$\Rightarrow \eta_a(z) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2} C_a z^2 + \frac{C_a z^3}{6l} \right) + \frac{C_a l}{3EI} z$$

↳ si fa lavorare il sistema B x gli spostamenti dovuti all'intervento del sistema A

$$\sum F_{b_j} \gamma_a + \sum R_{b_i} \delta_a = \int_V +\vec{b}_b \vec{\epsilon}_{el,a} dV + \int_V +\vec{b}_b \vec{\epsilon}_a dV$$

Si hanno così 2 equazioni di lavoro, prodotte dal sistema A e B dove le forze interagiscono con gli spostamenti indotti dall'altro sistema.

Per il teorema di Betti, gli integrali con le deformazioni elastiche sono uguali perché, considerando un elemento di trave, si ha

$$\int_V +\vec{b}_a \epsilon_{el,b} dV = \int_L N_a \frac{N_b}{EA} dz + \int_L M_a \frac{M_b}{EI} dz + \int_L T_a \frac{T_b}{GA} dz$$

Si hanno così 2 equazioni con il II termine uguale e permettono di mettere in relazione i lavori

$$\begin{cases} \sum F_{a_j} \gamma_b + \sum R_{a_i} \delta_b = \int_V +\vec{b}_a \vec{\epsilon}_{el,b} dV + \int_V +\vec{b}_a \vec{\epsilon}_b dV \\ \sum F_{b_j} \gamma_a + \sum R_{b_i} \delta_a = \int_V +\vec{b}_b \vec{\epsilon}_{el,a} dV + \int_V +\vec{b}_b \vec{\epsilon}_a dV \end{cases}$$

Si può notare che il teorema di Betti generalizzato comprende il teorema di Betti perché A e B sono 2 sistemi di forze, dunque sono definiti come

A) $F_a \neq 0$

$$\vec{\epsilon}_a = 0$$

$$\gamma_a = 0$$

B) $F_b \neq 0$

$$\vec{\epsilon}_b = 0$$

$$\gamma_b = 0$$

Sostituendo nella prima espressione si ottiene

$$\sum F_{a_j} \gamma_b = \int_V +\vec{b}_a \vec{\epsilon}_{el,b} dV$$

Nella II equazione, si ottiene invece

$$\sum F_{b_j} \gamma_a = \int_V +\vec{b}_b \vec{\epsilon}_{el,a} dV$$

Il teorema generalizzato dice che i 2 termini a destra sono uguali, x cui si ottiene sempre

$$\sum F_{a_j} \gamma_b = \sum F_{b_j} \gamma_a$$

Tra l'altro, quando si usa il teorema generalizzato x risolvere i problemi, si segue questo sistema

I due lavori di deformazione (gli integrali nel volume) sono uguali tra di loro, x cui

$$F_a \eta_b + R_a \gamma_b = 0$$

$$\Rightarrow F_a \eta_b = -R_a \gamma_b = \frac{F_a}{2} \gamma_b$$

↓
 $R_a \gamma_b < 0$ perché è lavoro tra R_a (verso l'alto) e γ_b (verso il basso)

$$\Rightarrow \eta_b = \frac{1}{2} \gamma_b$$

ES (DEFORMAZIONE IMPRESSA)



Si consideri una mensola alla cui sezione trasversale è applicata una variazione termica uniforme ΔT .
 Calcolare lo spostamento orizzontale η_b

In questo caso l'E.T. è lo spostamento η_b , x cui il S.E. è la forza F_a orizzontale agente sull'estremo libero della mensola



$$E.T.: \eta_b \rightarrow S.E.: F_a$$

Le C.D. sono la variazione termica uniforme, che determina la deformazione impressa $\bar{\epsilon}_b$. Allora, x capire la F.T., nella scrivere l'equazione con il P.V. la deformazione $\bar{\epsilon}$ compie lavoro con la tensione integrata sul volume. Visto che si studia un elemento di trave, si può scrivere

$$\int_V \bar{\epsilon}_b \bar{\epsilon} dV \rightarrow \int_V \sigma \bar{\epsilon} dV = \int_L \left(\int_A \sigma dA \right) dz$$

Dunque come F.T. si sceglie l'integrale delle tensioni sulla sezione A md, Sapendo che $\bar{\epsilon}$ compie lavoro con una tensione, per la F.T. dev'essere N_a

Si servono così i due sistemi:

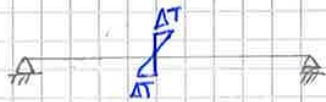
→ il S.E. è costituito dalla sola forza orizzontale

$$a) F_a \neq 0 \quad \bar{\epsilon}_a = 0 \quad \gamma_a = 0$$

→ le C.D. sono la deformazione $\bar{\epsilon}$ causata dalla variazione termica

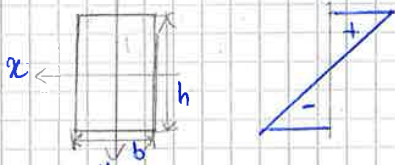
$$b) F_b = 0 \quad \bar{\epsilon}_b \neq 0 \quad \gamma_b = 0$$

E_s



Ora si considera una ^{trave appoggiata} ~~membr~~ soggetta a variazione a farfalla:

si applica una variazione termica con estremi ΔT e si suppone che la sezione sia rettangolare di base b e altezza h



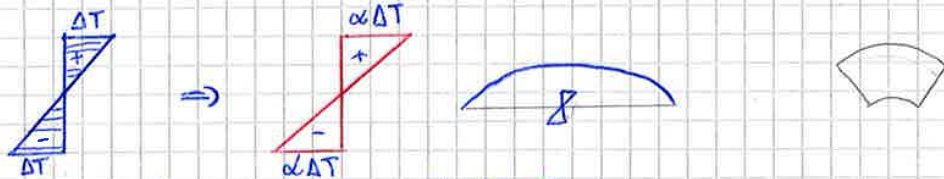
Si vuole calcolare lo spostamento verticale η_b in mezz'aria di una trave appoggiata soggetta a una variazione di temperatura a farfalla

In questo caso, a η_b si associa una grandezza statica che compia lavoro cioè una forza F_a applicata in mezz'aria

$$E \cdot I \cdot \eta_b \rightarrow S \cdot E \cdot F_a$$



Le C.D. che danno η_b sono una variazione termica a farfalla che, moltiplicata linea \times linea, ~~da h~~ \times il coefficiente di dilatazione, si ottiene il diagramma di deformazione impressa



La C.D. deve compiere lavoro con la F.I.:

la deformazione impressa ha valori positivi sul lembo superiore e negativi sul lembo inferiore e dunque, fisicamente le fibre inferiori tendono ad allungarsi e quelle inferiori ad accorciarsi

⇒ se si traccia la deformata, questa presenta uno spanciamento e, prendendo un cono, questo si deforma in un certo modo

Così, se prima si sceglieva come F.I. la risultante della σ_a (cioè N_a) perché tutte le fibre si allungano, ora in questo caso è dato dal diagramma M_a (le tensioni danno luogo a un momento)

$$C.D. \bar{\epsilon}_b \rightarrow E \cdot I : M_a$$

Si sono individuati così i 6 attori

Ora si scrivano i 2 sistemi A e B e si applica il PLU

a) $F_a \neq 0$

$$\bar{\epsilon}_a = 0$$

$$\gamma_a = 0$$

↓

è costituito solamente da una forza in mezz'aria (è il S.E.)

b) $F_b = 0$

$$\bar{\epsilon}_b \neq 0$$

$$\gamma_b \neq 0$$

Ora si sostituisce

$$\int_V \sigma_a \bar{\epsilon}_b dV = \int_L \left(\int_A \underbrace{M_a(z)}_{\sigma_a} \cdot \underbrace{\frac{y}{I_x}}_{\bar{\epsilon}_b} \cdot \bar{\mu}_b y dA \right) dz =$$

$$= \frac{\bar{\mu}_b}{I_x} \int_L M_a(z) \left(\int_A y^2 dA \right) dz$$

→ M_a è solo funzione di z e $\bar{\mu}_b$ è costante perché ΔT è applicato su tutta la sezione

Perché il sistema di riferimento è baricentrico,

$$\int_A y^2 dA = I_x$$

e così

$$\int_V \sigma_a \bar{\epsilon}_b dV = \bar{\mu}_b \int_L M_a(z) dz$$

Si riscrive l'equazione

$$F_a \eta_b = \bar{\mu}_b \int_L M_a(z) dz = \bar{\mu}_b \frac{1}{2} L \cdot \frac{1}{4} F_a L$$

↓
area sottesa

$$F_a \eta_b = \bar{\mu}_b \cdot F_a \cdot \frac{L^2}{8}$$

→ il S.E. si semplifica (l'E.I. è indipendente dall'intensità del S.E.)

$$\eta_b = - \frac{2\alpha \Delta T}{h} \cdot \frac{L^2}{8}$$

Tutto torna perché si è scelto uno spostamento ipotizzato verso l'alto, mentre la variazione fa spacciare verso l'alto e dunque è negativo

OSSERVAZIONE: in presenza di variazione termica a trapezio, questa può essere vista come somma di componenti uniformi (che lavora con M_a) e componente a farfalla (con M_a)

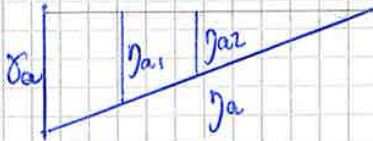
Ora si uniscono le due equazioni:

$$\sum F_b y_a + \sum R_b \gamma_a = 0$$

$$\Rightarrow R_b \gamma_a = - \sum F_b y_a$$

Interessiamo gli spostamenti y_a in corrispondenza delle sezioni di applicazione delle forze F_b .

La deformata y_a è tutta positiva con massimo γ_a e dunque le ordinate di interesse γ_{a1} e γ_{a2} valgono:



$$\gamma_{a1} = \frac{2}{3} \gamma_a \quad \gamma_{a2} = \frac{1}{2} \gamma_a$$

Ora si valutano i due contributi di F_b e i segni:

la reazione R_b è rivolta verso l'alto, mentre il cedimento (cioè lo spostamento del vincolo) γ_a è verso il basso, x cui

$$R_b \cdot \gamma_a < 0$$

Di conseguenza, si riscrive

$$R_b \cdot \gamma_a = F_b y_a \quad \rightarrow \text{considero } R_b \gamma_a \text{ in valore assoluto}$$

Così il segno della reazione R_b dipende solo dal segno del lavoro $F_b y_a$. In questo caso, il cedimento γ_a è verso il basso (anche se la scelta del S.E. è arbitraria) e il diagramma di spostamento è positivo, x cui

$$F_b y_a > 0 \quad \rightarrow \text{hanno lo stesso verso}$$

così il valore dato al cedimento è arbitrario e qui si è scelto un cedimento verso il basso, che ha portato alla relazione $R_b \gamma_a = + F_b y_a$ e il vantaggio è che la relazione ha tutti segni "+" (c'è una relazione tra lavori senza segni "-").
 Dunque ogni volta che si traccia la C.T. di una reazione, il S.E. è un cedimento e ipotizzato in segno positivo x la reazione, si fa avvenire il CEDIMENTO NELLA DIREZIONE OPPOSTA.
 Così:

$$R_b \gamma_a = P \cdot \gamma_{a1} + P \gamma_{a2}$$

$$R_b \gamma_a = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) P \gamma_a$$

$$R_b = \frac{7}{6} P$$

Il diagramma tracciato è la C.I. della reazione verticale x forze verticali (come si è visto con il metodo diretto).

Si parte dall'equazione

$$R_b \delta_a = -F_b \eta_a$$

(-)

poiché δ_a è orientata verso il basso

Essendo $R_b \delta_a < 0$, si può scrivere

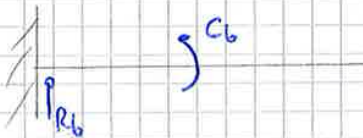
$$R_b \delta_a = F_b \eta_a$$

→ $F_b \eta_a > 0$ perché F_b è una forza verso il basso e η_a (spostamento all'estrema) è concorde con la forza

$$\Rightarrow R_b \delta_a = P \delta_a$$

$$R_b = P$$

ES



Dato una mensola, si applica una coppia C_b e si vuole calcolare la reazione verticale R_b :

calcolare la reazione verticale R_b x effetto di una coppia antioraria

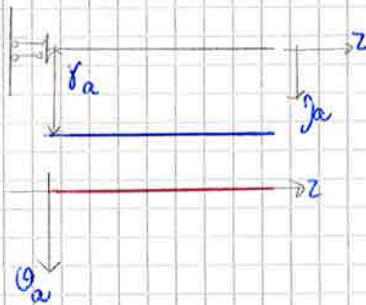
~~Così l'E.I.~~

Fisicamente, applicando una coppia all'incastro, la reazione è nulla e l'E.I. comunque è R_b , x cui il S.E. è il cedimento verticale δ_a

$$E.I. R_b \rightarrow S.E. \delta_a$$

Le C.D. sono una coppia C_b , x cui la F.I. è la rotazione φ_a nella sezione di applicazione e di C_b

$$C.D. C_b \rightarrow F.I. \varphi_a$$



Si immagina di sostituire all'incastro un pattino e così si può tracciare il diagramma di spostamenti verticali δ_a

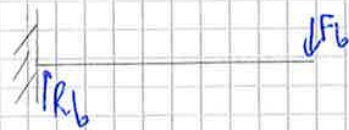
In realtà, le C.D. sono diverse e interessa la rotazione ma questa è la pendenza del diagramma di spostamento in ogni punto, cioè

$$\varphi_a = \frac{d\delta_a}{dz}$$

Qui si ha

$$\varphi_a = 0 \text{ x ogni punto}$$

Tracciamento qualitativo delle linee di influenza per reazioni vincolari



Si riprende l'esempio della mensola soggetta a una forza verticale.
Quando si doveva calcolare la reazione verticale x effetto di forze verticali, si è visto che

$$E.I. R_b \rightarrow S.E. \delta_a$$

$$C.D. F_b \rightarrow F.I. \eta_a$$

Poi si è detto che η_a è la L.I. della reazione verticale R_b (l'E.I.) x forze verticali (l.c.d.).

Aunque, seguendo questo schema, x tracciare questa L.I., basta applicare ^{alla struttura} il S.E. e poi tracciare il diagramma della F.I.
Infatti, si sono tutti gli elementi e, capito il teorema di Betti, Sapendo le C.D., si sa da cosa rappresentare la F.I.
Nel caso di forze verticali, la F.I. è il diagramma dello spostamento verticale.
Nel caso di reazioni verticali x coppie, allora la F.I. è il diagramma di rotazione.

In particolare, x tracciare la L.I. della reazione R_b x forze verticali

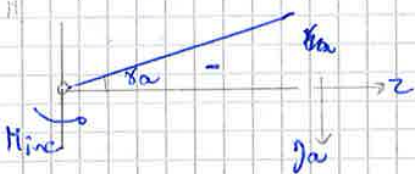


1) Si APPLICA IL S.E. che è il duale dell'E.I. (in questo caso, è il cedimento δ_a)

2) Si traccia il DIAGRAMMA DEGLI SPOSTAMENTI verticali poiché lo schema aveva forze verticali

Il diagramma ottenuto è la L.I. cercata

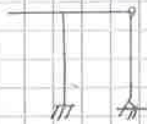
Es



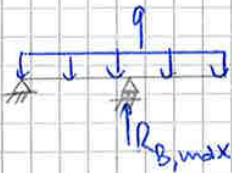
Tracciare la L.I. del momento all'incastro di una mensola x forze verticali

1) Il S.E. è il duale della reazione (momento all'incastro), x cui è un cedimento rotazionale che avviene nella direzione opposta al verso assunto positivo x il momento

2) Si traccia il diagramma degli spostamenti verticali, poiché le C.D. sono forze verticali. Anche qui, sostituendo il vincolo, la struttura diventa labile e dunque il diagramma è rettilineo

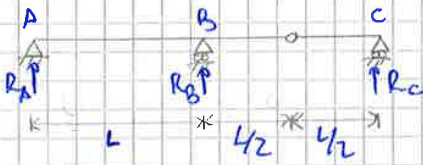


un'applicazione delle travi a sbalzo può essere la copertura di una tribuna, in cui si determinano i valori massimi e minimi di reazione in A, che danno la massima compressione e trazione nella trave verticale.



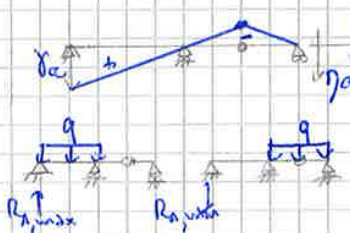
nel II caso, per ottenere il valore massimo di reazione in B, si carica tutta la struttura (questa è la disposizione di carichi che dà $R_{B,max}$). Poiché un qualunque carico verticale dà valore R_B positivo, non ha senso cercare $R_{B,min}$ e dunque c'è una sola condizione peggiore su cui dimensionare.

E_s



Si calcoli la L.I. delle reazioni vincolari e forze verticali della struttura in figura.

L.I. - R_A



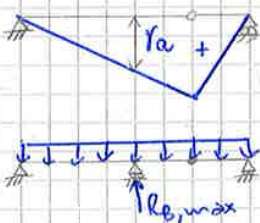
In questo caso, il S.E. è un cedimento verticale δ_a applicato nel vincolo A, che va verso il basso.

Di conseguenza, la F.I. è data dal diagramma degli spostamenti η_a verticali (poiché la forza è verticale) e, vista che quando si toglie un vincolo in A, la struttura diventa labile, allora il diagramma è lineare.

per avere $R_{A,max}$, si dispone il carico sulla I campata; per avere $R_{A,min}$, lo si dispone tutto sulla II.

è un insieme di tratti rettilinei che rispetta i vincoli e ha i segni dello spostamento (i carichi sulla II campata danno reazioni negative).

L.I. - R_B



In questo caso, il S.E. è un cedimento verticale verso il basso δ_b applicato in B.

Poiché ci sono forze verticali, la F.I. è data dal diagramma di spostamenti verticali η_b , costituito da un insieme di tratti lineari che rispettano i vincoli.

La L.I. è tutta positiva, a cui con qualunque disposizione di carico verso il basso, R_B è verso l'alto e ha senso parlare solo di disposizione massima.

L.I. - R_C



In questo caso, il S.E. è un cedimento verticale verso il basso δ_c applicato in C.

Poiché si parla di forze verticali, si traccia il diagramma di spostamenti verticali η_c , con tratti lineari che rispettano i vincoli (passa per A e C).

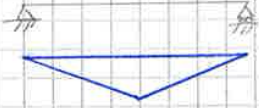
In questo caso, a qualunque carico verticale applicato tra A e la cerniera, la reazione in C è nulla (poiché l'ordinata della L.I. è nulla).

Dunque la disposizione di carico a avere $R_{C,max}$ prevede di avere un carico tutto tra cerniera e C.

Il valore di momento è

→ x la forza unitaria applicata in mezziera è triangolare

$$M_1 = \frac{L}{4}$$



→ x lo schema (a), è il momento flettente nella struttura reale, data dalla somma del contributo dei carichi esterni applicati (valutati sul sistema sostitutivo) più X volte il momento M_1

$$M_0 = M_{\text{carichi}} + X M_1 = X M_1$$

↓
non ci sono carichi

$$\Rightarrow 1 \cdot \gamma_a = \int_0^L M_1 \frac{X M_1}{EI} dz$$

$$1 \cdot \gamma_a = \frac{2X}{EI} \int_0^L \frac{1}{2} M_1^2 dz = \frac{2X}{EI} \cdot \frac{1}{6} \frac{L}{2} \left[0 + 4 \frac{L^2}{64} + \frac{L^2}{16} \right] =$$

$$1 \cdot \gamma_a = \frac{X}{EI} \cdot \frac{1}{48} L^3$$

A questo punto, visto che il valore del S.E. è arbitrario (cioè γ_a), si ricava l'incognita iperstatica

$$X = \frac{48EI}{L^3} \gamma_a$$

Questa è la forza che, applicata in mezziera, dà lo spostamento verticale γ_a in mezziera.

Da qui si può esprimere il momento M_0 , come

$$M_0 = X M_1$$

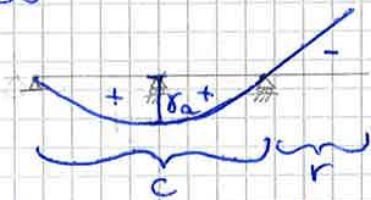
e dunque ricavare lo spostamento

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI}$$

e ricavare l'espressione analitica dell' d. l. i.

Non sempre la C.T. è curvilinea nelle strutture iperstatiche

Es



Alla struttura di partenza si aggiunge uno sbalzo:

calcolare la C.T. della reazione R_B x forze verticali

Si applica un cedimento in corrispondenza del vincolo in B e da qui si traccia la deformata della struttura soggetta a cedimento δ_a .

In un tratto è curvilinea, mentre sullo sbalzo è rettilinea

In fatti prima si cercava la forza X che, in corrispondenza del vincolo B, dava uno spostamento δ_a e il momento reale sulla struttura M_0 vale XH_1 , con H_1 l'incastro.

Se si aggiunge lo sbalzo, non cambia niente perché la forza X si chiude tra i due vincoli e in quel tratto il momento M_0 è nullo

Da qui si ha

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_0}{EI} = 0$$

$$\frac{dy}{dz} = C_1$$

$$y(z) = C_1z + C_2$$



Gli spostamenti verticali sono funzione lineare di z

⇒ con struttura iperstatica con sbalzo, la C.T. è in parte lineare e in parte curvilinea

Casi ~~le~~ linee di influenza delle reazioni vincolari sono generalmente curvilinee e, a seconda della struttura, questa può diventare rettilinea

Es



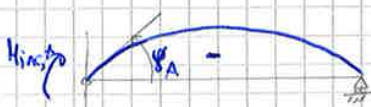
Calcolare la C.T. x reazioni vincolari x forze verticali di una mensola soggetta a carrello

→ C.T. $R_{v,A}$

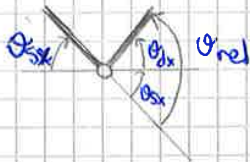


→ C.T.

Si applica, in corrispondenza dell'incastro, unicamente un cedimento verticale δ_a e cioè si fa introducendo un doppio pendolo. Da qui si deduce il diagramma di spostamento e la C.T. è tutta positiva



Qui il S.E. è costituito da un cedimento angolare antiorario (opposto al verso ipotizzato x il momento) e si traccia l'andamento qualitativo



Ora che si è posta una scomposizione, si può introdurre la rotazione relativa, data dalla differenza delle rotazioni a sinistra e a destra

$$\theta_{rel} = \theta_{Dx} - \theta_{Sx}$$

Dunque bisogna tracciare poi il diagramma degli spostamenti verticali, poiché le c.d. sono forze verticali

=> II PASSO: si applica in S la rotazione relativa

III passo: si traccia il diagramma degli spostamenti verticali



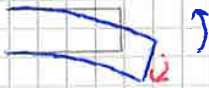
Per tracciarlo, poiché la struttura è labile, è costituito da tratti rettilinei e segue i vincoli e la rotazione relativa applicata. Si ottiene così la C.Z., negativa a sinistra e positiva a destra

A questo punto, si applica il PUV e calcolare il momento M_S dovuto a una forza verticale unitaria.

Il momento M_S compie lavoro \times la rotazione relativa.

~~Essa è positiva se~~

Il momento è positivo secondo la convenzione, ma la rotazione ha verso opposto rispetto al momento positivo sulla faccia di sinistra, \times cui quel contributo è positivo



Guardando a destra, il momento positivo è verso l'alto \times convenzione, mentre la porzione ha subito una rotazione verso il basso, cioè in \times verso opposto rispetto al momento.

Così ci sono 2 contributi di lavoro negativi, \times cui la somma (che è il prodotto momento \times rotazione relativa) è negativa perché le aste ruotano in direzione opposta alla convenzione positiva \times il momento.

Per la forza unitaria, lo spostamento vale y .

Così \times il PUV si ha

$$-M_S \theta_{rel} + 1 \cdot y = 0$$

$$M_S \theta_{rel} = 1 \cdot y$$

Se si pone, \times arbitrarietà, che la rotazione relativa abbia modulo unitario, allora

$$M_S = y$$

\downarrow intera 1 rad è grande, ma serve solo a semplificare

Dunque il momento M_S \times effetto di una forza unitaria è pari all'ordinata della deformata nella sezione \times di applicazione della forza ma questa allora, \times definizione, è la C.Z. del momento M_S \times una forza verticale

C.I. - M_c x forze verticali



Nella sezione C c'è una cerniera, a cui la C.I. del momento flettente x forze verticali è sempre nulla (poiché non trasmette momento)

C.I. - M_D x forze verticali



S'introduce in D una cerniera e si applica una rotazione relativa. Così la struttura è diventata labile e, poiché interessa la C.I. x forze verticali, si traccia il diagramma degli spostamenti verticali che è costituita da tratti lineari

Ora si vede il TAGLIO

Es



Data una trave appoggiata, si considera la sezione di mezzetta S:

tracciare la C.I. del taglio x forze verticali

Applicando il teorema di Betti, se l'E.I. e il taglio T_s , esso compie lavoro con uno spostamento trasversale relativo

$$E.I. : T_s \rightarrow S.E. : \Delta$$

Poi le C.D. sono forze verticali, a cui la F.I. è un diagramma di spostamenti verticali

C.D. : Forze

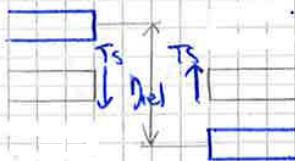
Dunque, in analogia a prima, si introduce una connessione che consenta uno spostamento trasversale relativo (solo questo perché è solo con esso che il taglio compie lavoro)



Passo I Si introduce un doppio pendolo

Passo II Si applica uno spostamento trasversale relativo

Come è fatto questo spostamento relativo?



Se si taglia la trave in S, si ha un taglio T_s positivo secondo la convenzione e questo compie lavoro con lo spostamento orizzontale delle 2 facce e ci sono 2 possibilità

→ si può far avvenire uno spostamento della parte sinistra verso l'alto e destra verso il basso, a cui avviene in direzione opposta alle direzioni positive del taglio

$$\Rightarrow T_s \Delta_{rel} < 0$$



In questo caso, conviene tracciare la L.I. x una generica sezione ed esportare il tutto fino ad arrivare alla sezione immediatamente prima di B.
In questo caso, si allunga la parte superiore mentre si accorcia quella inferiore.

L.I. - $T_{B, dx}$ e T_c



a sinistra è isostatica

Si traccia la L.I. x una generica sezione e poi si esporta il diagramma a sinistra.
In corrispondenza del doppio pendolo, avviene uno spostamento nella parte a sinistra ma così si avrebbe un diagramma di spostamento che, x passare nei vincoli, non può essere una retta. Dunque lo spostamento relativo avviene in modo diverso. Se il diagramma è lineare, x rispettare i vincoli a sinistra è orizzontale fino al doppio pendolo. Poi al doppio pendolo c'è lo spostamento relativo e la parte a destra si abbassa, prendendosi tutto lo spostamento relativo.

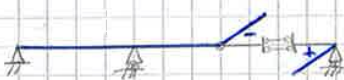


Molte, poiché non consente rotazione relativa, il diagramma prosegue orizzontale e cambia pendenza alla cerniera interna, x poi chiudersi.

Ora si prende il diagramma e si sposta tutto a sinistra fino a B e lì il diagramma continua orizzontale fino alla sezione subito a destra dell'appoggio.

Si nota che, a sinistra e a destra si ottengono diagrammi diversi poiché, x necessità di soddisfare l'equilibrio, ci sono discontinuità nel diagramma di taglio.

L.I. - T_E x forze verticali



Si inserisce il doppio pendolo e la struttura diventa labile.
Così la L.I. è orizzontale a sinistra della cerniera, che consente di dare un'inclinazione e si ottiene una certa deformata.

L.I. - T_D



Da qui si può tracciare la L.I. del taglio in D, facendo traslare a sinistra il diagramma x la sezione E. Così il ramo inferiore si allunga fino ad arrivare a D, mentre il ramo superiore scompare.
Per il diagramma degli spostamenti in teoria, la pendenza non dovrebbe cambiare ma l'effetto del doppio pendolo si combina con quello della cerniera, x cui può avvenire cambio di pendenza.



Ora si consideri una sezione S nella campata a sinistra e si immagina di applicare una forza unitaria nella campata di destra.

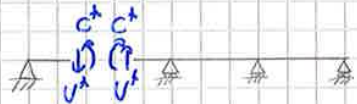
Si vuole studiare la C.I. del momento M_S :

studiare la C.I. del momento M_S dovuto a una forza verticale applicata nella sezione A



Si immagina allora di tagliare la trave in corrispondenza di S e in essa si ripartano le caratteristiche della sollecitazione di momento M_S e taglio T_S dovute alla forza unitaria applicata in A

si nota che, dal punto di vista statico, lo schema (a) e (b) sono equivalenti

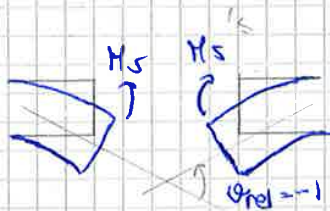


Ora, nello schema (b), si rimuove la forza unitaria e si applica in corrispondenza di S due coppie uguali e contrarie C^* e due forze V^* . Il sistema C^* e V^* rappresenta un sistema di azioni distorcenti (b)

Cherulo ha questo sistema?

Si vuole applicare il teorema di Betti e il sistema C^* e V^* sono tali da determinare una distorsione unitaria e negativa nella sezione S. In questo caso, poiché si sta studiando la C.I. di M_S , la distorsione è una rotazione relativa in S di ampiezza unitaria e negativa (poiché dal lavoro negativo con M_S)

Cosa si intende x DISTORSIONE NEGATIVA E UNITARIA?



Data la sezione S con momento M_S , si ottiene una distorsione (rotazione) negativa se si fa ruotare ogni parte di struttura in senso opposto al verso positivo del momento

→ nella parte a sinistra, x avere distorsione negativa la si fa ruotare in verso orario

→ nella parte a destra, ruota in verso antiorario

Di conseguenza, la rotazione relativa è negativa

si può ragionare sui lavori x le rotazioni

Ora, il sistema (b) deve dare solo una rotazione negativa, dunque si può tracciare la deformata della struttura soggetta al solo sistema (b)



Se in S c'è rotazione relativa, si ottiene una certa deformata dove la rotazione relativa vale -1

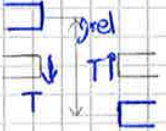
CASI

→ **MOMENTO FLETTENTE**: la distorsione che bisogna ottenere mediante le coppie C^* e le forze V^* e la rotazione relativa

$$\varphi_{rel} = -1$$

e si ottiene facendo ruotare le porzioni di struttura con verso opposto a quello assunto x il momento flettente

→ **TAGLIO**: la distorsione da applicare è uno spostamento trasversale unitario e negativo



$$j_{rel} = -1$$

e dunque, dati i versi convenzionalmente positivi, si sposta verso la porzione a sinistra verso l'alto rispetto alla sezione S e viceversa x la porzione a destra (così il taglio compie lavoro negativo)

→ **SFORZO NORMALE**: se lo sforzo normale è positivo (se di trazione, x avere lavoro negativo con la distorsione, la porzione a sinistra si sposta verso sinistra e viceversa la porzione a destra)



$$f_{rel} = -1$$

Il fatto di scegliere distorsioni di ampiezza unitaria viene comodo perché così viene

$$M_S = \gamma_A$$

e il segno è negativo consente di ottenere una relazione diretta, senza segno. Si poteva scegliere una distorsione positiva, ma qui si sarebbe ottenuto

$$M_S = -\gamma_A$$

e dunque, data un'ordinata della L.T., bisognerebbe ricordarsi che il momento ha segno opposto.

Dunque la L.T. è data dalla deformata che, in genere, è curvilinea ma a volte è tabile (in rettilinea (in presenza di sbalzi))

⇒ L.T. in genere curvilinea

Ora si lavora sulla sezione del primo appoggio

Inanzitutto, si traccia la C.I. di M_s .



Si introduce una cerniera \times consentire la rotazione relativa imposta con le due coppie.
In posta la rotazione relativa, sapendo che ~~deve~~ la deformata passa \times i vincoli, si traccia la deformata

↓ la rotazione dà le tangenti



$M_{s,max}$ → si applica il carico sulla campata a destra, poiché la C.I. è positiva



$M_{s,min}$ → il carico variabile è spostato laddove la C.I. ha ordinata negativa, cioè sulle campate a sinistra

Si nota che le 2 C.I. hanno delle differenze:

In entrambi i casi, c'è una cerniera e si applicano 2 coppie uguali e contrarie \times avere una rotazione relativa unitaria e negativa.
Però nell'appoggio di continuità c'è un appoggio che non consente spostamenti verticali \times cui la C.I. parte dall'appoggio con ordinata nulla e poi prosegue con tratti curvilinei

Ora si vede la C.I. del TAGLIO



Si considera la sezione S sulla prima campata.



Bisogna fare in modo che ci sia uno spostamento verticale relativo unitario e negativo tagliando la sezione e imponendo coppie e forze C^A e V^A (come nel teorema) o, \times semplicità, si applica un doppio pendolo alle cui facce è applicata solo V^A .
Si impone dunque lo spostamento relativo o (parte sinistra verso l'alto e parte destra verso il basso) e si ottiene così l'andamento della C.I.

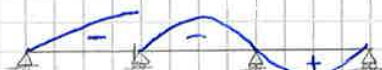


→ $T_{s,min}$: si carica la struttura con il carico variabile dove la C.I. ha segno negativo



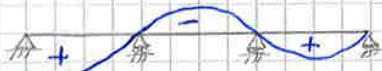
→ $T_{s,max}$: si carica la struttura dove la C.I. è positiva

In genere, a livello progettuale, conta il valore di taglio in corrispondenza dei vincoli



Nel caso di un vincolo, si può porre il doppio pendolo lungo una campata e spostarla fino al vincolo, esportando la C.I.

si nota che un ramo cresce mentre l'altro scompare e così si ottiene una certa C.I. \times la parte sinistra



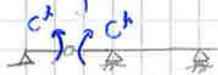
Nel caso del taglio di una sezione a destra del I appoggio, il primo ramo scompare e l'altro si estende il diagramma ottenuto non si stepisce perché il taglio equilibra la reazione e dunque si lega alla sua C.I.

Ora si vede la forma della L.T. x collegare la deformata individuata dalla coppia alle concavità

(I) Sapendo che le coppie danno una rotazione relativa pari a -1 , si applica il PLV x trovare il valore di tali coppie.

(II) Nota il valore delle coppie, si può poi sostituire nell'equazione della linea elastica e ricavare la L.T. del momento M_s

(I) Finora il PLV era applicato x passare dalle forze agli spostamenti ma si può applicare anche al contrario, partendo dal valore di spostamento noto e ricavare le forze

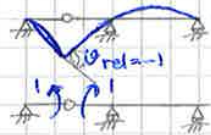


(a) Si dice (a) il sistema reale.

Si introduce poi uno schema fittizio con coppie unitarie applicate alla cerniera

Per il PLV si ha

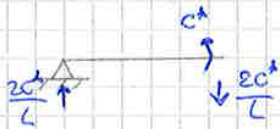
$$\theta_{rel} - 1 = \int_0^{2L} M_0 \frac{M_1}{EI} dz$$



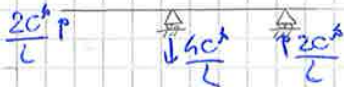
Il lavoro compiuto dalla forza unitaria x la rotazione relativa è negativa (poiché tale rotazione compie lavoro con la convenzione positiva), x cui negativo

$$-1 - 1 = \int_0^{2L} M_0 \frac{M_1}{EI} dz$$

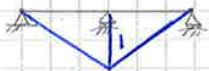
" θ_{rel}



Per determinare il diagramma di M_0 , si valutano le reazioni vincolari x ogni porzione e poi si traccia il diagramma di M_0 , che è un diagramma positivo di forma triangolare.



Ora si determina il diagramma di M_1 , ma confrontando lo schema di carico (a) con (i), si nota che c'è sempre una coppia applicata sulla cerniera edunque il diagramma è lo stesso



Ora si calcola l'integrale ma si nota che entrambi i diagrammi sono simmetrici, x cui

$$\begin{aligned} \int_0^{2L} \frac{M_0 M_1}{EI} dz &= 2 \int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} dz = \\ &= \frac{2}{EI} \cdot \frac{L}{6} (0 + 4 \cdot C^A \cdot 1 + 2 \cdot 2C^A) = \frac{8}{3} \frac{L C^A}{EI} \end{aligned}$$

$$y(z) = \frac{c^*}{3EI} \cdot \frac{z^3}{3} + c_3 z + c_4$$

Ora si individuano le 4 condizioni al contorno

→ appoggio a sinistra

$$z=0 \Rightarrow y(z=0) = c_2 = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0$$

→ appoggio di continuità

$$z=L \Rightarrow y(z=L) = \frac{c^* L^2}{3EI} + c_3 L + c_4 = 0$$

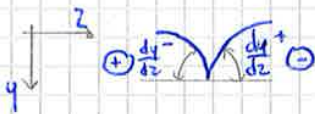
→ continuità della funzione spostamento nella cerniera interna

$$y\left(z = \frac{L}{2}^-\right) = y\left(z = \frac{L}{2}^+\right)$$

$$\frac{c^* L^2}{3EI} + c_3 \frac{L}{2} + c_4 = \frac{c^* L^2}{3EI} + c_3 \frac{L}{2} + c_4$$

→ rotazione relativa unitaria nella cerniera interna

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(z = \frac{L}{2}^+\right) - \left(\frac{dy}{dz}\right)\left(z = \frac{L}{2}^-\right) = -1$$



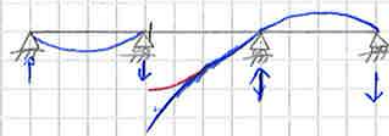
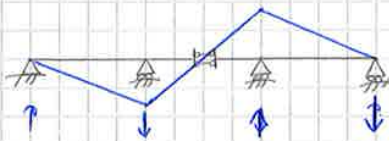
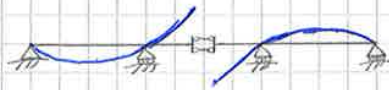
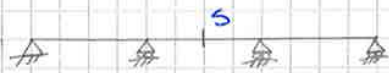
Per determinare il segno della rotazione relativa, si seguono le convenzioni della deformata. Si nota che nel ramo a destra gli spostamenti y decrescono al crescere di z , a cui la pendenza dy/dz è negativa. Invece a sinistra gli spostamenti y crescono al crescere di z , a cui a sinistra la pendenza dy/dz è positiva. Se a qualcosa di negativo si sottrae qualcosa di positivo, si ottiene qualcosa di negativo.

$$\frac{c^* L}{3EI} + c_3 = \frac{c^* L}{3EI} + c_3 = -1$$

$$\begin{cases} c_3 = c_1 - 1 \\ c_1 \frac{L}{2} = c_3 \frac{L}{2} + c_4 \Rightarrow c_4 = 0 \\ \frac{c^* L^2}{3EI} + c_3 L + c_4 = 0 \Rightarrow \frac{c^* L^2}{3EI} + c_3 L = 0 \Rightarrow c_3 = -\frac{c^* L}{3EI} = c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_3 = c_1 - 1 \\ c_1 \frac{L}{2} = c_1 \frac{L}{2} - \frac{L}{2} + c_4 \Rightarrow c_4 = \frac{L}{2} \\ \frac{c^* L^2}{3EI} + c_1 L - L + \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} - \frac{c^* L}{3EI} \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{2} - \frac{c^* L}{3EI} \end{cases}$$

Es



Si consideri una trave continua a 3 campate ciascuna di luce L .
Calcolare la C.I. del taglio T_S .

Si inserisce un doppio pendolo e si fa avvenire uno spostamento trasversale relativo. Se si applicano le forze U^* , si nota che è una struttura SSCA e dunque il momento è nullo in mezzeria, perché anti-simmetrica.

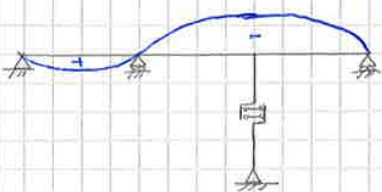
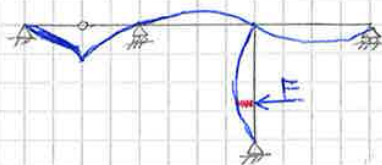
Guardando il diagramma di momento nella porzione a sinistra, si ottiene un certo diagramma e lo stesso vale all'altra parte e questo fornisce le curvature.

↳ dove il momento è nullo, le curvature nelle due parti sono di verso opposto.

Ora si calcola la C.I. del taglio un infinitesimo a destra dell'appoggio. Si potrebbe trascinare il diagramma, ma nella realtà c'è un cambio di concavità perché comunque è sempre lo stesso schema di reazioni vincolari e il diagramma di momento è lo stesso, a cui in S c'è un cambio di curvature.

↳ questa perché non cambia il gioco delle reazioni vincolari.

Es



Calcolare la C.I. del momento M_S x forze verticali che interessano la zona AB.

Applicando il solito procedimento ma bisogna prestare attenzione perché all'incastro con la colonna si conserva l'angolo e dunque si traccia la C.I. x il pilastro. Il segno è poco importante perché la C.I. è fatta x forze verticali e il sistema di riferimento non è definito ma comunque, con una forza F , questa compie lavoro positivo con lo spostamento e dunque il momento è positivo. Per la stessa struttura, calcolare la C.I. dello sforzo N in S .

In questo caso, si impone uno spostamento assiale relativo e si fa avvenire uno spostamento verso l'alto della parte sopra mentre la parte sotto non si muove x il vincolo.

Così se c'è una forza applicata a destra, dà luogo a uno sforzo normale negativo perché si scende in campo sul pilastro.

Combinazione delle azioni

Viste le L.I., bisogna vedere come calcolare i valori di progetto delle sollecitazioni nelle strutture.

Per questo, si fa riferimento alla norma EN 1990 che è la base x la sicurezza e dell'affidabilità.

Per quanto riguarda la **verifica dell'affidabilità di una struttura** si basa su 2 aspetti:

→ concetto di **stato limite** cioè la condizione a cui la struttura non soddisfa più i requisiti x cui è stata progettata

→ verifica della struttura nei confronti dei diversi stati limite considerati mediante il **metodo dei fattori parziali**

Metodo dei fattori parziali

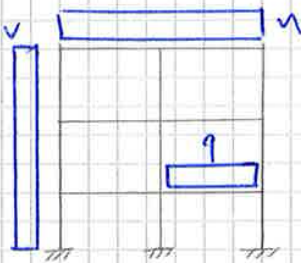
Quando si può dire che la struttura è affidabile con questo metodo?

Una struttura è affidabile se, per le diverse situazioni di progetto (scelte dal progettista), nessuna condizione di stato limite viene superata quando nei modelli di calcolo si inseriscono i valori di calcolo di azioni, dimensioni geometriche e resistenze dei materiali
 x valutare gli effetti delle azioni e le resistenze

Questo criterio permette di valutare il comportamento in condizioni ultime e di esercizio.

In esso è importante considerare le **SITUAZIONI DI PROGETTO**, che sono le situazioni reali, cioè è l'insieme delle condizioni fisiche reali che possono interessare la struttura durante la vita di progetto.

Si vede ora un caso reale:



si consideri un edificio di civile abitazione. Questa è sollecitata da una serie di carichi variabili legati a persone e mobili, carico da vento e neve. Questa è la situazione ordinaria e in queste condizioni la struttura dev'essere dimensionata e verificata. Queste condizioni ordinarie rappresentano una condizione fisica descritta dalle **situazioni persistenti e transitorie**

x transitorie si considerano anche situazioni dove la struttura ha bisogno di manutenzione con interventi in tempi limitati rispetto alla vita dell'opera

Nel caso venga un terremoto, bisogna verificare la struttura anche x la situazione di progetto sismica

⇒ **situazioni di progetto sismica**

Poi, supponendo che la struttura abbia importanza di fini istituzionali (rischio attentati) e la situazione è descritta dalla **situazione accidentale**

In realtà questo evento può essere legato a fughe di gas e dunque anche questo ricade nella situazione accidentale

⇒ in progetto bisogna considerare diverse situazioni e valutare diverse condizioni: in casi ordinari, si segue la situazione ordinaria; x sismi si seguono le indicazioni dell'eurocodice EN 1990 e le norme sismiche

→ SLE

Per quanto riguarda le strutture dunque bisogna vedere le situazioni di progetto e a ciascuna situazione di progetto vedere le condizioni di SLU e SLE e da qui vedere i valori di calcolo delle sollecitazioni.

In questo ambito, non ci si focalizza sulle resistenze bensì sulle **azioni**:

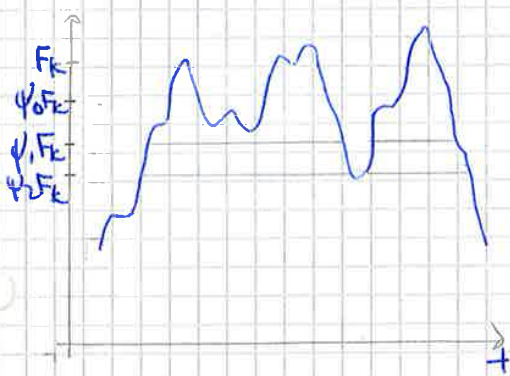
il valore di calcolo si esprime come prodotto di un **fattore parziale** lato azioni x il valore rappresentativo

$$F_d = \gamma_p F_k$$

Il tipo di azioni agenti sulla struttura è scelto dal progettista e il valore rappresentativo è dato, nel caso di AZIONI VARIABILI, da

- valore caratteristico F_k
- valore di combinazione $\psi_0 F_k$
- valore frequente $\psi_1 F_k$
- valore quasi permanente $\psi_2 F_k$

Nel caso di AZIONI PERMANENTI, dal valore caratteristico F_k



I vari valori sono imparentati tra di loro. Se si disegna l'andamento dell'intensità nel tempo, esso è casuale. A esso si associa un valore caratteristico F_k ottenuto con misurazioni statistiche. Da qui si deduce il valore $\psi_0 F_k$, dove ψ_0 tiene conto che con due azioni variabili applicate contemporaneamente, è poco probabile che le 2 azioni si presentino con la massima intensità e dunque un'azione è presente con un valore di combinazione minore del valore caratteristico (poiché $\psi_0 < 1$). Il valore frequente $\psi_1 F_k$ è invece un valore superato in un periodo di tempo pari almeno a 1% del tempo di vita di progetto. Per calcolarlo, si parte dall'andamento nel tempo in un'azione e si sommano gli intervalli di tempo che superano il valore considerato dove i valori.

Il valore quasi permanente è un valore di azione superato a un periodo maggiore.