



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1701A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Aimar Mauro

MATERIA: Idraulica - prof. Ridolfi (2015)

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FLUIDI

1 **Fluidi**: esistono diverse famiglie di fluidi ma, tra questi, i più semplici sono l'aria e l'acqua, che sono

fluidi newtoniani e **freddi**

la temperatura è un fattore fondamentale nel moto

Considerando però solo i fluidi freddi, si possono ignorare la temperatura

2 **Fluido**: un'entità che oppone pochissima RESISTENZA ALLA DEFORMAZIONE (intesa come variazione di forma e non cambiamento di volume) e TALE RESISTENZA DIFENDE DALLA VELOCITÀ CON CUI LA SI DEFORMA. Infatti, deformando lentamente, la resistenza diminuisce e la forza necessaria è minore.

Dunque la forza da applicare dipende dalla velocità di deformazione e ciò rende la situazione più complessa perché, a differenza del solido, ~~anche~~ la forza dipende oltre che dalla deformazione ϵ anche dal tempo t .

Così nell'idraulica si trovano 2 variabili indipendenti e così i modelli sono descritti da equazioni PDE (non più ODE).

In base alla resistenza opposta, si distinguono

→ **liquidi**: RESISTENZA $>$ (può sempre variare di volume ma ci vuole più forza - il liquido è molto più deformabile ma meno comprimibile del solido)

→ **gas**

MODELLAZIONE DEL FLUIDO:

è costituito da particelle non vincolate tra di loro e distanziate, pertanto presenta una bassa densità e risulta essere praticamente vuoto e ogni tanto si trovano delle masse (le particelle).

Per questo i modelli matematici falliscono in quanto molti di essi si basano sull'analisi infinitesimale, cioè sulla possibilità di andare a un'infinitesima distanza. In questo caso, infatti, quasi sempre a quelle distanze in un punto si trova il vuoto e studiare, ad es., la quantità

$$\frac{\partial v}{\partial x}$$

dove v = velocità è riferita a una particella, nel vuoto non ha significato. A quella scala, occorrono dunque altri modelli.

A scale maggiori (ordine del mm o decimi di mm), si osserva che la situazione è diversa perché ci sono così tante particelle che si può vedere il sistema come un CONTINUO, in quanto quelle scale sono enormi rispetto a quelle in cui si può distinguere il vuoto dal pieno. Inoltre tutte le scale utili all'ingegneria rientrano nel continuo, poiché in tutte queste si può apprezzare che è tutto un continuo, per cui si può supporre che, in ogni scala, il fluido sia tutto un continuo.

Per questo, in ingegneria si tende a trattare il **fluido come un continuo** e studiarlo attraverso la meccanica del continuo.

Grazie a questo, è possibile tornare ai modelli di analisi matematica.

• **OSSERVAZIONE**: il discorso delle scale è molto importante nella fisica.

Ad es. un vetro è un fluido perché in decine di migliaia di anni (per l'elevata viscosità) cola ma nelle scale ingegneristiche è considerato solido; la caduta di un gessetto è influenzata, oltre la n-esima cifra decimale, dall'azione del Sole.

Da qui si può introdurre un termine matematico per rappresentare la resistenza a compressione, cioè il coefficiente ϵ e si osserva che

→ nei liquidi si ha ϵ molto grande, con $\epsilon = O(10^9) \text{ Nm}^{-2}$. Nelle situazioni tipiche di interesse si ha

$$\Delta p = O(10^4) \text{ Nm}^{-2}$$

mentre valori più grandi di Δp si hanno solo coprendo decine o centinaia di km di dislivello. In generale si ha casi che

$$\frac{dp}{\rho} = O(10^{-5}) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \text{si dimostra così che nei liquidi la densità NON dipende dallo stato di tensione}$$

→ nei GAS il discorso è diverso perché ϵ è molto più piccolo ma si può comunque ipotizzare che essi siano INCOMPRESSIBILI perché

→ se ϵ è bassa, anche le tipiche Δp sono più basse e dipendono dal peso specifico (servono molti metri nell'aria per cominciare a sentire qualcosa). Così il rapporto è sempre costante e, come nei liquidi, si ha che

$$\frac{dp}{\rho} \rightarrow 0$$

→ inoltre, si considera la cosiddetta **celerità dell'onda di pressione del fluido**, data da

$$c = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}}$$

$$c_{\text{aria}} \sim 300 \text{ ms}^{-1}$$

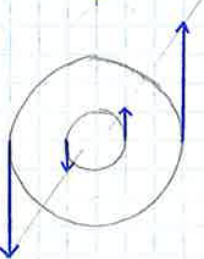
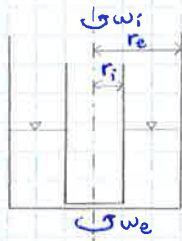
$$c_{\text{H}_2\text{O}} \sim 1400 \text{ ms}^{-1}$$



Cercando di deformare il fluido in un punto, si forma un'onda di pressione che, in volumi abbastanza piccoli, impiega pochissimo a raggiungere tutto il resto e quindi, con le scale di interesse, si potrebbe supporre che tutti i punti del fluido si accorgano istantaneamente dell'azione. Ciò significa che $c \rightarrow \infty$ e che dunque anche $\epsilon \rightarrow \infty$, per cui

$$\frac{dp}{\rho} \rightarrow 0 \Rightarrow \text{anche i gas sono incompressibili e dunque in generale i FLUIDI SONO INCOMPRESSIBILI}$$

→ **viscosità**: spesso è confusa con la densità (es. "l'olio è più denso dell'acqua")



Immaginando di avere un contenitore cilindrico in grado di ruotare intorno al proprio asse, si considera un secondo cilindro coassiale e indipendente dal primo.

Nell'intercapedine si pone un fluido.

All'inizio il sistema è fermo, poi si comincia a far ruotare il cilindro esterno con velocità ω_e e, dopo un po', si nota che anche il cilindro interno ruota con ω_i .

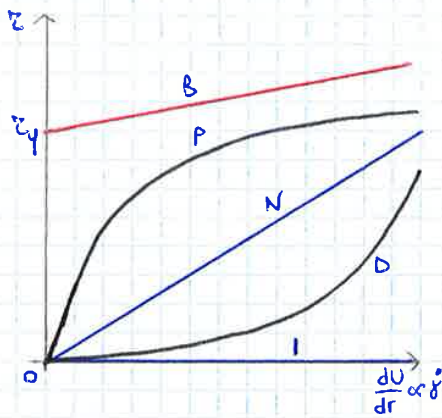
Si è trasmesso così il movimento dal cilindro esterno a quello interno e, in particolare, sul cilindro interno sono applicate delle tensioni tangenziali trasmesse dal fluido a partire dal cilindro esterno e che formano una coppia T sul cilindro interno.

Si nota che questa coppia dipende in maniera proporzionale da

- tipo di liquido
- superficie di contatto a
- differenza di velocità radiale

$$\Delta U = \omega_e r_e - \omega_i r_i \quad \rightarrow \text{se } \Delta U \text{ è } >, \text{ allora } T \text{ è } >$$

$$\rightarrow \frac{1}{\Delta r}, \text{ dove } \Delta r = \text{differenza tra i raggi (se } \Delta r \text{ è } <, \text{ allora } T \text{ è } >)$$



→ **fluidi newtoniani N** (definizione dal punto di vista reologico): sono fluidi che sul piano reologico danno luogo a una retta passante per l'origine (con pendenza legata a μ - x la legge di Newton). Così per caratterizzarli basta un'unica grandezza, cioè la viscosità

→ **fluidi ideali I**: sono un caso particolare di fluido newtoniano, in quanto corrispondono alla retta costante nulla, cioè sono fluidi che a ogni deformazione non oppongono nessuna tensione. Per essi non serve nessun parametro

→ **fluidi alla Bingham B**: sono fluidi che, anche non deformandoli, hanno già una tensione di base τ_y e poi, superato questo valore, assumono comportamento newtoniano. Ad es. il dentifricio continua a mantenere questa tensione

→ **fluidi pseudoplastici P**: più si applica $\dot{\gamma}$, cioè più si deforma rapidamente, più resistenza il fluido oppone. Ad es. nelle colate detritiche, che sono discese di liquido e particelle solide paste in sospensione dentro di esso, applicando una deformazione il liquido passa tra le particelle ma se $\dot{\gamma}$ è alto, il liquido non riesce più a passare tra le particelle

→ **fluidi dilatanti D**: più si applica $\dot{\gamma}$, cioè più si deforma rapidamente, più resistenza il fluido oppone. Ad es. nelle colate detritiche, che sono discese di liquido e particelle solide paste in sospensione dentro di esso, applicando una deformazione il liquido passa tra le particelle ma se $\dot{\gamma}$ è alto, il liquido non riesce più a passare tra le particelle

→ FLUIDI INDIPENDENTI DA $\dot{\gamma}$

→ **fluidi tixotropici**: sono fluidi in cui più passa il tempo, più la viscosità diminuisce

→ **fluidi reopectici**: in essi, con il tempo, la viscosità aumenta

Es. Il sangue passando dalle arterie principali, alle arteriole e ai capillari può avere comportamento tixotropico o reopectico a seconda della zona attraversata

→ **fluidi elastoviscosi**: sono fluidi quasi solidi. Se in genere, infatti, nei fluidi vale la legge

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu}$$

In questo caso si ha una relazione diversa, più tipica dei solidi

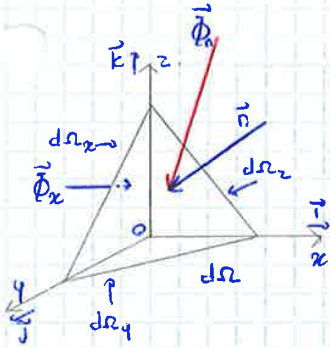
$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\mu} + \frac{\dot{\tau}}{G}$$

→ se nei fluidi vale $\tau \propto \dot{\gamma}$, nei solidi vale $\tau \propto \dot{\tau}$

PROPRIETÀ DELLA VISCOSITÀ: essa dipende molto dalla TEMPERATURA

Ad es. basta vedere come si comporta l'olio in padella che, scaldato, diventa più fluido, o l'olio per motori, che è studiato in modo che la sua viscosità sia il massimo indipendente dalla temperatura (per via delle alte temperature dei motori). In questo ambito, però, si assume che

$$\mu \approx \text{cost}$$



Occorre così dare ∞ informazioni per il punto e, per ogni punto, dare ∞ informazioni per la giacitura, cioè dare in tutto ∞^2 informazioni.

Per questo, Cauchy considerò un sistema di riferimento con origine nel punto O e nel suo intorno considerò una superficie $d\Omega$ piana. Tale superficie, insieme di triangoli associati sui piani coordinati, forma un tetraedro dove la faccia $d\Omega_x$ è la proiezione di $d\Omega$ sul piano yz e analogo lo stesso vale x le facce $d\Omega_y$ e $d\Omega_z$.
 Facendo intervenire la geometria, se \hat{n}_z è l'angolo direttore tra l'asse z e l'asse del vettore \hat{n} , allora si ottiene che

$$d\Omega_x = -d\Omega \cos \hat{n}_z$$

Il segno "-" è presente perché \hat{n} entra in $d\Omega$ e \vec{T} esce, per cui $\hat{n}_z > 90^\circ$ e occorre così mettere il segno "-", in modo da mantenere $d\Omega_x > 0$.

Analogamente si ottiene

$$d\Omega_y = -d\Omega \cos \hat{n}_y$$

$$d\Omega_z = -d\Omega \cos \hat{n}_z$$

Il sistema è supposto essere sotto equilibrio e le forze agenti su di esso sono

→ FORZE DI MASSA (forza peso, forze d'inerzia):

sono forze legate alla massa e, per loro definizione, sono direttamente proporzionali alla massa dm , data da

$$dm = \rho dV = \rho \alpha dx dy dz$$

α = coefficiente di proporzionalità legato alla geometria del sistema, che permette di scrivere $dV = \alpha dx dy dz$

Si osserva che le forze di massa sono infinitesime del III ordine

→ FORZE DI SUPERFICIE:

sono date dalla relazione

$$d\vec{T}_n = \vec{\Phi}_n d\Omega$$

e dunque sono infinitesime del II ordine.

Si capisce così che, nell'equilibrio, le forze di massa non contribuiscono e la relazione di equilibrio tra le forze (non gli sforzi) si scrive come

$$\vec{\Phi}_n d\Omega - \vec{\Phi}_x \cos \hat{n}_x d\Omega - \vec{\Phi}_y \cos \hat{n}_y d\Omega - \vec{\Phi}_z \cos \hat{n}_z d\Omega = 0$$

forza agente sulla superficie con normale data dall'asse x ($\vec{\Phi}_x$ = sforzo sulla superficie che ha come normale l'asse x)

Da qui si ottiene

$$\vec{\Phi}_n = \vec{\Phi}_x \cos \hat{n}_x + \vec{\Phi}_y \cos \hat{n}_y + \vec{\Phi}_z \cos \hat{n}_z$$

$$\vec{\Phi}_n = \vec{\Phi}_x \cos \hat{n}_x + \vec{\Phi}_y \cos \hat{n}_y + \vec{\Phi}_z \cos \hat{n}_z$$

Teorema del tetraedro

Il teorema del tetraedro dice che in ogni punto s'individua uno sforzo e che tale sforzo è combinazione lineare di 3 sforzi sui piani coordinati e i coefficienti sono i coseni direttori.

Così per dare informazioni su come è fatto lo stato di tensione nell'intorno del punto di O non è necessario calcolare tutti gli sforzi $\vec{\Phi}_n$ per ogni \hat{n} (cioè dare ∞ informazioni), ma basta dare solo 3 INFORMAZIONI VETTORIALI $\vec{\Phi}_x$, $\vec{\Phi}_y$ e $\vec{\Phi}_z$ CHE, associate a un punto, PERMETTANO DI AVERE INFORMAZIONI SULLE TENSIONI.

Noti questi dati, infatti, basta scegliere \hat{n} per ottenere lo sforzo $\vec{\Phi}_n$.

STATICA DEI FLUIDI

1 Quando un fluido è fermo, cioè il campo del moto è nullo con

$$\vec{v} = 0$$

2 Si sa che per il teorema del tetraedro

$$\vec{\Phi}_n = \vec{\Phi}_x \cos \hat{n}_x + \vec{\Phi}_y \cos \hat{n}_y + \vec{\Phi}_z \cos \hat{n}_z$$

cioè il campo delle tensioni in un fluido dipende da 6 parametri organizzabili in una matrice simmetrica del tipo

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{xy} & \Phi_{xz} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{yz} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{bmatrix}$$

→ questa matrice dà lo stato di tensione in un punto a un certo istante

I 6 parametri dipendono dalle coordinate x, y, z e del tempo t

Se in oltre lo stato di tensione in un qualunque punto è dato da una matrice diagonale, essa ha tutti termini identici e può essere ricondotta a un unico scalare p

$$\vec{\Phi}_n = p \vec{n}$$

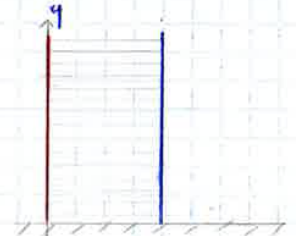
3 In un fluido newtoniano si sa che la tensione è data da

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Esistono però dei casi in cui $\tau = 0$, cioè

→ $\mu = 0$ nei fluidi ideali (può esserci un qualunque gradiente delle velocità)

→ $\frac{dv}{dy} = 0$ Qui la viscosità esiste ma non un gradiente delle velocità e, se non c'è tale gradiente (in genere nella direzione y), allora le corrispondenti tensioni tangenziali non ci sono. Ciò non significa che non c'è moto, ma piuttosto che avviene un moto con un profilo di velocità uniforme U (non c'è gradiente e dunque non ci sono tensioni tangenziali)



→ $\vec{v} = 0$

Non ci sono velocità, cioè non solo non c'è gradiente ma il profilo delle velocità è proprio piatto e posto sulla fondamentale.

Questo è il caso della STATICA e in esso NON si osservano TENSIONI TANGENZIALI anche se $\mu \neq 0$, in quanto non c'è niente che le innesci (cioè il gradiente delle velocità).

Se non ci sono tali tensioni, però, significa che la matrice è diagonale ($\Phi_{ij} = 0, i \neq j$) per qualunque orientamento degli assi (infatti se $\vec{v} = 0$, allora per ogni sistema di riferimento $\vec{v}' = 0$) ed è costituita dalle sole componenti normali. Ciò significa che NELLA STATICA LO STATO DI TENSIONE È CARATTERIZZATO DA un unico scalare, cioè la **pressione** p , ed è isotropo (cioè uguale in tutte le direzioni).

OSSERVAZIONE: tornando al piano reologico, si è accennato alla relazione

(I)



$$\tau \propto \frac{\partial v}{\partial y}$$

Si osserva che la statica vale per tutti i fluidi la cui curva passa per l'origine del piano reologico perché quando $\partial v = 0$ (che si può avere per $v = 0$ - caso della statica), anche $\tau = 0$. La statica costituisce così l'unico caso di validità generale tra i fluidi.

Non vale per i fluidi alla Bingham, in cui se $v = 0$ allora esiste una tensione di base.

Quindi la risultante delle forze di superficie agenti lungo l'asse x è

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad \text{no sono comparse le derivate}$$

Analogamente lungo gli assi y e z si ha

$$-\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \quad -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz$$

Così la risultante è

$$\vec{F} \rho dx dy dz - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz = 0$$

$$\rho \vec{F} = \nabla p$$

$$\rho \vec{F} = \nabla p$$

Equazione differenziale della statica dei fluidi

Equazione indefinita della statica dei fluidi

"indefinita" perché vale in qualunque punto del fluido in quiete

CONSEGUENZE → se la forza di massa ammette potenziale, essa può essere scritta come

$$\vec{F} = \nabla U$$

in tal modo è possibile trasformare l'equazione ricorrendo a scalari

$$\rho \nabla U = \nabla p$$

Se c'è un legame ^{di uguaglianza} tra i gradienti, allora le SUPERFICI EQUIPOTENZIALI $(\nabla U = 0)$ COINCIDONO CON LE SUPERFICI ISOBARE $(\nabla p = 0)$. In altri termini, queste superfici, nel caso che la forza ammetta potenziale, sono date dalle superfici equipotenziali. Ciò è utile per la forza peso dove, a quota uguale, la pressione è costante

→ si suppone che il fluido sia INCOMPRESSIBILE

$$\rho = \text{cost}$$

allora l'equazione diventa

$$\vec{F} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

ciò significa che nella statica la forza deve ammettere potenziale, che è dato da p/ρ

→ tale equazione è puntuale ma spesso interessa cosa avviene nell'intero volume del fluido, con variabili macroscopiche. Per questo si integra tale equazione sul volume

$$\int_V \rho \vec{F} dV = \int_V \nabla p dV$$

$$z + \frac{P}{\gamma} = \text{cost}$$

Introducendo il **carico piezometrico** h , definito come

$$h = z + \frac{P}{\gamma}$$

si ottiene l'equazione

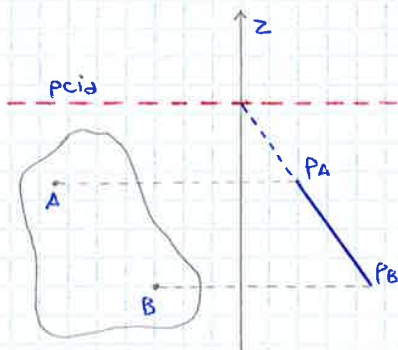
$$h = \text{cost}$$

$$h = z + \frac{P}{\gamma} = \text{cost}$$

Così la conseguenza più importante dell'equazione indefinita sotto queste ipotesi è che esiste una quantità scalare detta **CARICO PIEZOMETRICO** che rimane costante in ogni punto della massa fluida. In tal modo si capisce perché, se la quota z diminuisce, la pressione aumenta e viceversa.

CONSEGUENZA

→ questa equazione è la base per capire l'ANDAMENTO DELLA PRESSIONE dentro il fluido. Infatti in un qualunque fluido, presi due punti A e B qualunque, si sa che (se valgono le ipotesi)



$$h_A = h_B$$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{P_B}{\gamma}$$

Ciò equivale a scrivere che

$$P_B = P_A + \gamma(z_A - z_B)$$

La pressione è **FUNZIONE LINEARE DELLA QUOTA** (cresce linearmente con essa) e la pendenza della retta è data dal peso specifico γ . Così basta conoscere la pressione in un punto per conoscerla ovunque nella statica in quanto essa cresce o decresce linearmente. In particolare, essa arriverà a un punto o, meglio, un piano in cui si annulla ed esso si dice **piano dei carichi idrostatici assoluti** (p_{cia}), in cui si ha



$$p = 0$$

Tale piano può essere dentro o fuori il fluido e, una volta noto, permette di sapere quanto vale la pressione in ogni punto, usando la relazione di prima

$$P_B = P_A + \gamma \Delta z_{AB} = 0 + \gamma \Delta z_{AB} = \gamma \Delta z_{AB}$$

$$P_B = \gamma \Delta z_{AB}$$

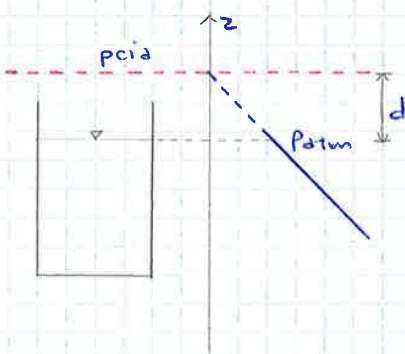
Ciò la pressione è data dal peso specifico per l'affondamento rispetto a p_{cia} .

Es. Considerando un recipiente con la superficie libera in quiete, su di essa è applicata la pressione atmosferica p_{atm} e, applicando la relazione di prima, si ottiene che tale superficie è dista dal p_{cia}

$$d = \frac{P_{atm}}{\gamma}$$

$$Hg \rightarrow d = 76 \text{ cm}$$

$$H_2O \rightarrow d = 10,33 \text{ m}$$



Questa distanza corrisponde alla massima depressione che si può fare. Ad es con una cannucchia il fluido va su perché da un lato si crea una depressione e dall'altro si sfrutta la pressione atmosferica che spinge fino al limite di 10,33 m

Si ottiene così, usando le relazioni

$$p_{r1} + \Delta \gamma_1 = p_{r2} + \Delta \gamma_2$$

$$\Delta \gamma_1 = \Delta \gamma_2$$

Poichè, per ipotesi, $\gamma_1 \neq \gamma_2$ è necessario che $\Delta = 0$. Ciò significa che la superficie non è inclinata ed è orizzontale

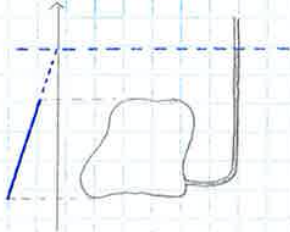
OSSERVAZIONE: questa proprietà vale per i fluidi che sul piano reologico vanno a zero. Con i fluidi della Bingham, invece, la superficie di separazione può essere verticale (es dentifricio).

7 Misura della pressione: si è visto che è possibile sapere la pressione a meno che la si sappia in un punto e lì occorre misurarla

→ **A PELO LIBERO** (es serbatoio aperto):
si sa che lì vale

$$p = 0$$

→ **SERBATOIO CHIUSO**



→ **piezometro:**

si realizza un piccolo foro e si pone un tubo rivolto verso l'alto, in modo che il fluido esca e risalga fino a un certo punto, in corrispondenza al pcir. Da qui si individua la posizione di questo piano e si deduce poi la curva di pressione

→ **manometro a mercurio:**

il piezometro non può essere usato se il fluido può contaminare o disperdersi oppure se ha pressioni molto elevate (qui occorrerebbe una bacchetta molto lunga).

In questo caso si collega un tubicino a U che contiene nella parte bassa del mercurio, in quanto a temperatura ambiente, anche se è allo stato liquido, è molto pesante.

Il menisco a sinistra (punto A) è a contatto con il liquido e a destra con l'atmosfera e lì si trova il pcir del mercurio (che coincide con il suo pelo libero). Invece in A c'è equilibrio tra le particelle di mercurio sotto e le particelle di fluido sopra e, dal punto di vista del mercurio, vale che

$$p_A = \gamma_m \Delta$$

Δ = affondamento rispetto al pcir del mercurio

Per via dell'equilibrio, p_A è anche la pressione dvertita del liquido ed è facilmente calcolabile. Inoltre vale che

$$p_A = \gamma x$$

x = affondamento rispetto al pcir del fluido

Uguagliando le relazioni si può ottenere la posizione del pcir del fluido

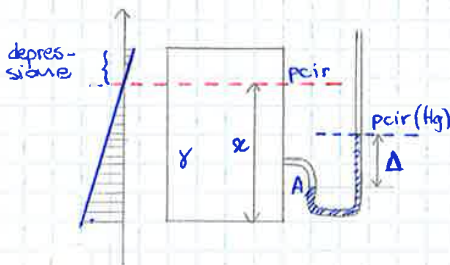
$$\gamma x = \gamma_m \Delta \Rightarrow x = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

$$x = \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta$$

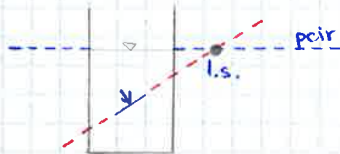
Si osserva che con le pressioni relative è possibile andare sopra il pcir e qui ci si trova in depressione, in cui

$$p = p_r < 0$$

Questo si ha quando $p < p_{atm}$ e non $p < 0$ (cosa che non ha senso). In questo caso le particelle tendono a essere risucchiate verso l'interno, cioè



9 Spinta su una superficie piana: ad es. un serbatoio con superficie libero si vuole sapere la spinta che una superficie all'interno riceve dall'alto.



Innanzitutto si definisce come **linea di sponda** l'intersezione del piano contenente la superficie e il pcir (è una retta).

Ora si vuole sapere il modo con cui trovare la risultante, cioè la spinta \vec{S} esercitata dal fluido su quella superficie. Ma la spinta è un vettore applicato che, per essere definito, necessita di 4 informazioni

la spinta infatti è legata alla pressione

→ DIREZIONE: sulla superficie agiscono solo pressioni che sono perpendicolari, per cui la SPINTA È ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE

→ VERSO: dipende da se si guarda sopra o sotto

→ MODULO: considerando un elementino di superficie $d\Omega$ intorno a un punto A, in quel punto la pressione vale

$$P_A = \gamma h_A \quad h_A = \text{off}_A$$

Per ricavare h_A , s'introduce un opportuno sistema di riferimento co , tale che il piano xy giaccia sul piano dove giace la superficie di riferimento. Così si può esprimere h_A in termini di x_A

$$P_A = \gamma h_A = \gamma x_A \sin \alpha$$

Si ricava ora la spinta (che è una forza) in A

$$dS_A = P_A d\Omega = \gamma x_A \sin \alpha d\Omega$$

La spinta globale vale

$$S = \int_{\Omega} \gamma x \sin \alpha d\Omega = \gamma \sin \alpha \int_{\Omega} x d\Omega$$

→ il pedice "A" è tolto perché non interessa più un punto in particolare

questo termine è il **momento statico della sezione**:
In presenza di una sezione, infatti, individuata una retta di riferimento, si prende un elementino $d\Omega$ distante x dalla retta, e si definiscono i momenti



$$M_s = \int_{\Omega} x d\Omega \quad \text{Momento statico}$$

$$I = \int_{\Omega} x^2 d\Omega \quad \text{Momento d'inerzia}$$

Questi concetti sono stati introdotti perché è spesso le superfici hanno forma complessa e, per definirle, in teoria servirebbe dare la curvatura in ogni punto ma spesso ciò non serve (ad es per la geometria delle masse). Queste grandezze, invece, non trasmettono tutte le informazioni ma ne danno di importanti. Il momento statico, infatti, dà un'informazione sulla distribuzione (e la sua media) perché si dimostra che vale la relazione

$$M_s = \Omega x_G \quad x_G = \text{coordinata del baricentro della sezione rispetto alla retta di riferimento}$$

Così una volta noto il momento statico si può ricavare il baricentro semplicemente calcolando l'area della sezione

si ottiene, sostituendo, che

$$\gamma x_G \sin \alpha \, d\Omega \, \xi = \gamma \sin \alpha \, I_y$$

$$x_G \, \Omega \, \xi = I_y$$

Si ricava dunque la coordinata ξ

$$\xi = \frac{I_y}{x_G \, \Omega} = \frac{I_y}{M_s} \quad \rightarrow \xi \text{ è rapporto di due quantità integrate}$$

$$\xi = \frac{I_y}{M_s} \quad \rightarrow \xi \text{ è rapporto di due quantità integrate}$$

Ricordandosi però del teorema di Huygens-Steiner

$$I_y = I_{oy} + s \, x_G^2 \quad I_{oy} = \text{momento rispetto alla retta parallela passante } x \, G$$

la relazione si riscrive come

$$\xi = \frac{I_y}{x_G \, \Omega} = \frac{I_{oy} + x_G^2 \, \Omega}{x_G \, \Omega} = \frac{I_{oy}}{M} + x_G$$

$$\xi = x_G + \frac{I_{oy}}{M} \quad \rightarrow \text{il centro di spinta è più in giù perché c'è il segno "+"}$$



g) Per calcolare η , si calcola il momento rispetto a x della spinta dS

$$dM_x = dS \cdot y = \gamma \sin \alpha \, x y \, d\Omega$$

$$M_x = \gamma \sin \alpha \int_{\Omega} x y \, d\Omega$$

Ora, si definisce come **momento centrifugo** (altra informazione sulla distribuzione delle masse) la quantità

$$I_{xy} = \int_{\Omega} x y \, d\Omega \quad \rightarrow \text{si calcolano le distanze } x \text{ e } y \text{ rispetto a due rette}$$

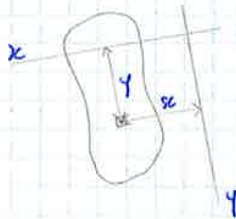
Si calcola dunque il momento della risultante

$$M_x = S \eta$$

Ripetendo le stesse operazioni di prima, si ottiene che

$$\eta = \frac{I_{xy}}{M}$$

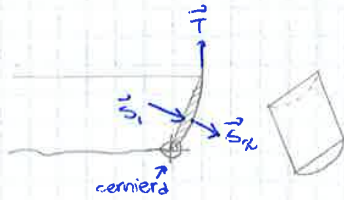
$$\eta = \frac{I_{xy}}{M}$$



II (rapido)

Si sfrutta l'equazione indefinita integrata

$$\vec{P} + \vec{F}_c = 0$$



Es.

Considerando un lago chiuso da una paratoia per limitarne il livello, questa è tenuta da un tirante che applica una tensione \vec{T} (dipendente dalla spinta dell'acqua) in modo da reggere il carico. Si vuole calcolare la spinta sulla paratoia, che è una superficie curva, applicando tale equazione che, però, richiede un VOLUME DI RIFERIMENTO

Scelto il volume, questo conterrà del fluido e avrà un certo baricentro.

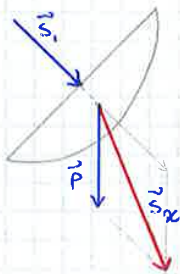
A livello di contorno, ha due superfici che delimitano il cilindro scelto, su cui agiscono due spinte che sono uguali e opposte, in quanto sono dentro lo stesso fluido e occupano la stessa posizione rispetto al pcir. Poi c'è la superficie curva dove agisce la spinta \vec{S}_2 che si vuole calcolare e un'altra superficie piana in cui è facile calcolare la spinta \vec{S}_1 .
L'equazione così si scrive come

$$\vec{P} + \vec{S}_2 + \vec{S}_1 = 0$$

$$\vec{S}_2 = -(\vec{P} + \vec{S}_1)$$

→ \vec{P} e \vec{S}_1 si possono calcolare facilmente

Si osserva che c'è il segno "-" perché \vec{S}_2 è la spinta che la paratoia esercita sul fluido (non viceversa - agisce sul volume di fluido)



OSSERVAZIONE SULLA COMPOSIZIONE DI VETTORI



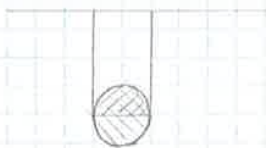
Date due forze \vec{S}_1 e \vec{P} , non si può applicare subito la regola del parallelogramma perché così si ricaverrebbe solo il modulo perdendo però informazioni su direzione e punto d'applicazione. Prima di applicarla, infatti, occorre trascinare lungo la retta d'applicazione e così non si perde la direzione.

Il Principio di Archimede: immergendo un corpo in un fluido, questo riceve una spinta verso l'alto pari al peso del liquido spostato

Dimostrazione

Si considera, per semplicità, un corpo sferico immerso in un fluido quante un certo pcir.

Via I

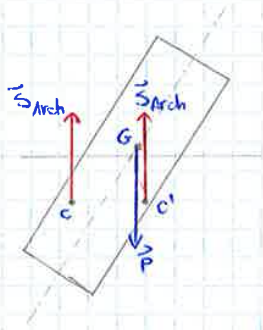


Si considera un cilindro costruito con direttrici tangenti al corpo e si divide il corpo in due parti, una sopra e l'altra sotto.

Dal punto di vista del corpo, visto così, riceve per il tramite della superficie sopra una spinta verso il basso pari al peso della colonna di fluido sopra (fino al pcir) e, considerando solo la parte sopra, c'è solo questa spinta.

Però c'è anche la parte sotto che, dal punto di vista del corpo, subisce la spinta verso l'alto della colonna fino al pcir che è uguale alla prima ma si aggiunge anche il pezzo del corpo.

Si fa dunque la differenza e si ottiene una spinta verso l'alto detta **spinta di Archimede**, che è pari al peso del volume di liquido spostato.

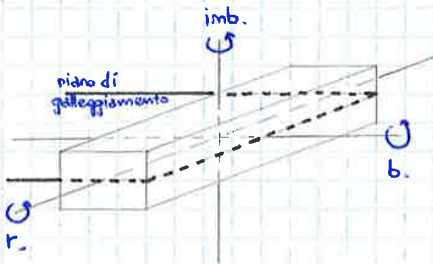


Anche il galleggiante può essere instabile.
Supponendo infatti di perturbare il sistema, ad es. inclinandolo leggermente, si osserva che G non cambia posizione e la forza peso è sempre applicata lì. Invece C è riferito al volume e si sposta.

Si forma così una coppia che incrementa l'effetto della perturbazione e questo fatto costituisce un fenomeno detto **FEEDBACK POSITIVO**.

Se però C si spostasse diversamente (cioè dipende dalla geometria), la coppia invece contrasta la perturbazione.

A questo punto, esiste una condizione e per distinguere i vari casi?



Innanzitutto, considerando un corpo, se la perturbazione avviene

→ lungo l'asse longitudinale, si dice **ROLLIO**

→ lungo l'asse trasversale, si dice **BECCHEGGIO**

→ lungo l'asse z , si dice **IMBARCAMENTO**

In questo caso, si vuole studiare la stabilità al rollio.

Si considera dunque un corpo soggetto a una perturbazione che dà luogo a un angolo $d\theta$ e determina un nuovo baricentro C' del volume di carena, cioè un nuovo centro di spinta. Si forma così una coppia che tende a stabilizzare o a incrementare la perturbazione.

Un primo buon metodo per avere stabilità è che G si sia più in basso possibile in modo che così la coppia tenda a essere più favorevole possibile.

Il metodo più rigoroso è diverso. Si calcola innanzitutto la spinta di Archimede

$$S_A = P_c = \gamma V_c$$

→ si sa già che il corpo galleggia (non si sa solo se è stabile)

A seguito dell'inclinazione, C' e G non giacciono più sulla stessa retta (cioè l'asse) ma la verticale passante per C' incontra l'asse in un punto M detto **metacentro**.
Si osserva che se

infatti C' sta a destra ed è più stabile ←

$$\overline{CM} > \overline{GH} \Rightarrow \text{posizione stabile}$$

Un parametro fondamentale è dunque \overline{GH} , che si dice **distanza metacentrica**, e che dev'essere ricavata. Per questo, occorre calcolare la coppia.
Il braccio vale

$$b = \overline{GH} \sin d\theta \sim \overline{GH} d\theta$$

La coppia così vale

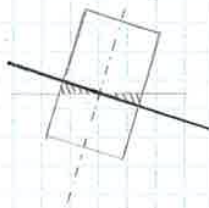
$$M = S_A b = (\gamma V_c) \overline{GH} d\theta$$

Per calcolare \overline{GH} , occorre chiedersi come è nata tale coppia. Infatti, si nota che a seguito dell'inclinazione ci sono due prismetti

→ in ① agisce solo la forza peso

→ in ② c'è una spinta verso l'alto

La coppia prima calcolata è proprio pari alla coppia associata ai due volumetti e tale uguaglianza permette di ricavare \overline{GH}



CINEMATICA DEI FLUIDI

Cinematica dei fluidi: essa studia il moto dei fluidi senza chiedersi le cause di tale moto e, pertanto, considera soltanto i parametri di spazio, tempo, velocità e accelerazione (non la forza).

Nei fluidi però ci sono più difficoltà a livello concettuale e, infatti, occorre inventare un nuovo concetto di accelerazione. In genere, infatti, le accelerazioni e le velocità sono riferite a un corpo solido e non c'è dubbio su quale corpo si riferiscano (ad es. considerando un punto rappresentativo del corpo), ma nei fluidi non si può dire di che sia una data velocità. Verrebbe da dire che la velocità \vec{v} sia di una certa particella di fluido però il fluido è trattato come un continuo.

A tal proposito, alcuni fluidi, detti FLUIDI GRANULARI, sono trattati partendo dalle singole particelle che interagiscono, studiandone il moto e le interazioni reciproche e poi ricavando relazioni macroscopiche. Esempi sono la ghiaia e le grandaglie.

In un continuo, invece, è necessario trattare con grandezze macroscopiche e, per questo, esistono 2 approcci

→ **approccio lagrangiano:**

si suppone che ogni punto sia una PARTICELLA, pur contraddicendo l'ipotesi di continuità, in modo da avvicinarsi alle ipotesi di Newton e poter applicare le sue leggi della meccanica. In altri termini, si vuole usare le stesse regole dei solidi per poter utilizzare gli stessi strumenti della fisica di Newton.

Così si suppone che il fluido sia costituito da tante particelle e in moto con una data velocità e che descrivono TRAIETTORIE (= curve descritte dalle particelle muovendosi nel tempo), proprio come nei solidi.

La velocità si definisce dunque come

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

dove \vec{x} è il vettore posizione della particella che, muovendosi, descrive la traiettoria. L'accelerazione invece vale

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Nel caso che la traiettoria, oltre che dallo spazio, dipendesse dal tempo e la velocità, oltre che dal tempo, dipendesse dallo spazio, allora le espressioni si ritrovano come

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

→ diventano derivate parziali

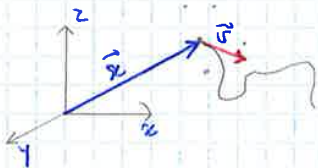
L'obiettivo di tale approccio è proprio dato dalle TRAIETTORIE, cioè ~~come~~ sapere come il vettore posizione \vec{x} di ogni punto dipenda dalla posizione iniziale e dal tempo

$$\vec{x} = \vec{x}(x_0; y_0; z_0; t)$$

Cioè fissato un punto si vuole vedere come questo si evolve.

LIMITE DELL'APPROCCIO:

in un fluido non si sa bene cosa sia una particella



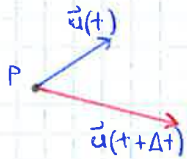
2 **Accelerazione**: l'approccio euleriano ha subito un primo problema concettuale importante. Seguendo, infatti, la singola particella (approccio lagrangiano), si usano concetti di velocità e accelerazione, come ad es.

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

dove l'accelerazione \vec{a} di quella particella è legata alla velocità \vec{u} di quella particella (come nei solidi).

Nell'approccio euleriano però questa relazione non può essere più scritta perché non si sa di chi sia l'accelerazione. Essa infatti è il limite di un rapporto incrementale

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$$



Se si prova ad applicarla a un punto, si nota che in Δu sono coinvolte $\vec{u}(t)$ e $\vec{u}(t+\Delta t)$ e con il limite si ottiene qualcosa che, a livello di dimensioni, è un'accelerazione ma che in realtà è riferita a più particelle. Se al tempo t , infatti, c'è una particella, al tempo $t+\Delta t$ ce n'è un'altra.

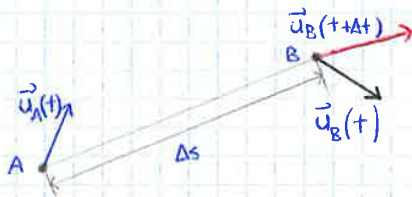
Così, a differenza di Lagrange (dove si calcola l'accelerazione seguendo una particella), in Eulero non si può scrivere questa relazione in quanto non ha senso fisico (è il limite del rapporto incrementale della differenza di velocità tra due particelle diverse).

Inoltre bisogna ricordarsi che l'accelerazione è importante perché, nella dinamica, interviene nella legge fondamentale di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

dove \vec{F} e \vec{a} sono riferite alla particella.

Vista l'importanza dell'accelerazione, occorre definirla, cioè trovare un nuovo modo per costruire un'accelerazione avente lo stesso significato ma scritta con gli strumenti che Eulero ha data, cioè il campo di moto (e non le traiettorie).



Per questo, si considerano due generici punti A e B dentro un fluido in movimento. All'istante t , in A c'è una velocità $\vec{u}_A(t)$. Dopo un intervallo di tempo Δt , la particella (che non si vuole distinguere) si è spostata in B e ha velocità $\vec{u}_B(t+\Delta t)$. Dunque l'accelerazione vale

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_B(t+\Delta t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t}$$

Secondo Lagrange, si dovrebbe scrivere

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

ma nell'approccio euleriano non si può fare e, per questo, si somma e si sottrae al rapporto la velocità in B all'istante t $\vec{u}_B(t)$ (qui, all'istante t , c'era un'altra particella con velocità diversa).

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_B(t+\Delta t) - \vec{u}_B(t) + \vec{u}_B(t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_B(t+\Delta t) - \vec{u}_B(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_B(t) - \vec{u}_A(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Per il primo addendo, nel punto B si può scrivere come

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}_B(t+\Delta t) - \vec{u}_B(t)}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$$

Questa però non è l'accelerazione di una particella, ma è la variazione infinitesima di velocità ^{in B} indipendentemente dalla particella che vi passa sopra.

Infatti, in Lagrange si segue la particella (cioè ci si muove nello studio) e si scrive $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt}$. In Eulero invece si vuole vedere come varia la velocità in un

3 Ora, per definire la cinematica dei fluidi, esistono 3 modi



→ **traiettoria:**

Si traccia la traiettoria. Ad es., un fluido in moto investe un cilindro e ci gira intorno per fare poi traiettorie complesse o inalterate.

In tal caso, occorre costruire le equazioni della traiettoria attraverso Eulero. Facendo dal punto P un salto dx , dy e dz , la traiettoria vale

$$dx = u(x; y; z; t) dt$$

$$dy = v(x; y; z; t) dt$$

$$dz = w(x; y; z; t) dt$$



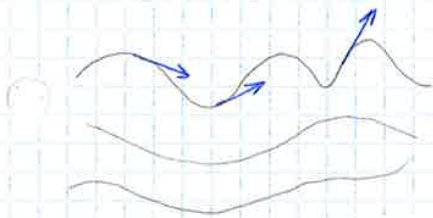
si ricorda che Eulero ha come base u , v e w e da qui deduce la traiettoria, mentre Lagrange arriva subito alla traiettoria

→ **linee di corrente:**

sono linee definite a ogni istante t^* e sono LINEE A CUI LA VELOCITÀ È TANGENTE.

Esse sono diverse dalle traiettorie perché in queste ultime il tempo scorre mentre qui si scatta una "fotografia" e si ottengono poi linee a cui la velocità è tangente.

In tal modo esse danno informazioni sulla velocità e su come scorre il fluido in quell'istante e, pertanto, sono ideali per l'approccio euleriano



→ **linee di fumo:**

sono il luogo di punti occupati via via nel tempo dalle particelle che si sono trovate a passare in un certo istante per lo stesso punto.

Queste danno informazioni sul dominio su cui le particelle si stanno muovendo (utili ad es. x il trasporto)



4 TIPOLOGIE DI MOTO DI FLUIDI

→ **moto vario:** significa che in genere ogni grandezza può dipendere dallo spazio e dal tempo (è il caso più generale) e il campo vale

$$\vec{u} = \vec{u}(x; y; z; t)$$

→ **moto permanente:** il campo di moto dipende dallo spazio ma non dal tempo

$$\vec{u} = \vec{u}(x; y; z)$$



Es Da un serbatoio, in cui è immessa sempre dell'acqua in modo che il livello sia costante, esce un tubo e in un punto di esso si misurano sempre la stessa velocità e portata. Queste però possono variare di punto in punto perché, ad es., vicino alla parete gli attriti sono maggiori (e la velocità minore) oppure perché c'è un allargamento di sezione che determina velocità diverse.

→ **moto uniforme:** il campo di moto non varia lungo la traiettoria (c'è minore dipendenza spaziale - però spostandosi di traiettoria, la velocità cambia).

Es Nell'esempio di prima, il moto uniforme si ha se, scelta una traiettoria, muovendosi lungo essa la velocità è la stessa.

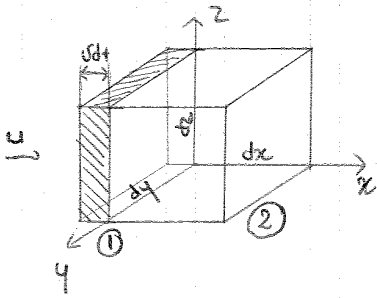


In genere si è sempre nel moto vario ma trattare variabili che dipendono sia dallo spazio che dal tempo è complesso. Per questo si scrivono equazioni generali ma poi si focalizza sul moto uniforme, più semplice e interessante dal punto di vista ingegneristico.

7 Equazione di continuità:

PREMESSA: ora è necessario individuare un'equazione differenziale che descriva il moto del fluido e questa operazione si basa su uno dei 4 principi

- principio di conservazione della massa
- principio di conservazione dell'energia
- principio di conservazione della quantità di moto
- principio di conservazione del momento delle quantità di moto



In questo caso, si usa il principio di conservazione della massa in cui in fluido, durante il moto, conserva la propria massa. Inizialmente si scrive questo fatto a livello locale, dicendo che punto per punto, in un istante infinitesimo, la massa si conserva.

Scelta dunque un punto O , si fissa un sistema di riferimento CO e si studia cosa succede nell'intorno di O . Per fare questo, si sceglie per semplicità un parallelepipedo di lato dx, dy e dz e dunque di volume

$$dV = dx dy dz$$

La massa, in un tempo dt , si conserva. Si sa però che il fluido è interessato da un campo di moto

$$\vec{v}(x, y, z, t)$$

e, a valutare la conservazione della massa, occorre fare un bilancio tra ciò che entra e ciò che esce.

Poi, per iniziare, lungo l'asse x , sulla superficie ① c'è un certo campo u ed entra una massa

$$\rho u dt dy dz$$

Infatti in un tempo dt c'è una porzione di fluido spessa $u dt$ che entra (in senso algebrico - potrebbe anche uscire) e con sezione $dy dz$. Così c'è un volume $u dt dy dz$ che tende a entrare (o uscire) su quella superficie.

Sul parallelepipedo poi c'è un'altra superficie, la ②, su cui agisce il campo ma qui non agisce il campo u , bensì

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Inoltre qui si è in un fluido generico che può anche essere comprimibile, per cui occorre scrivere

$$\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx$$

Così la massa che fluisce in ② vale

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz dt$$

Di conseguenza, lungo l'asse x , fluisce la massa

$$\rho u dy dz dt - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz dt = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt$$

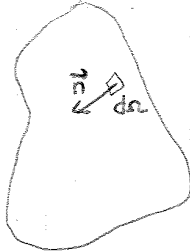
se in ① entra, in ② esce

↓
bilancio della massa che attraversa la superficie di controllo lungo l'asse x

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Equazione di continuità nei fluidi incomprimibili: se si forma un buco, le altre particelle si spostano. Qui il campo \vec{v} si dice CAMPO SOLENOIDALE (in esso non possono formarsi buchi).

L'equazione di continuità è un'equazione indefinita che vale punto x punto ma in realtà interessa un'equazione globale definita su un volume finito e applicata su tutto il volume (e non sui singoli punti).



Considerando un volume V , questo è delimitato da una superficie S di cui si considera un elementino dS avente normale \vec{n} . Tramite questa superficie, entra ed esce fluido (anche se il fluido spesso non si genera solo dal bordo - spesso ci sono sorgenti e pozzi di massa ad es. legati a cambiamenti di fase) e la portata vale

$$\vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Per sapere la massa che entra/esce attraverso dS , si moltiplica la portata x la densità

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

L'intera massa che fluisce attraverso S vale così

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Si moltiplica questa quantità x dt , in modo da avere la massa che entra/esce attraverso S nel tempo dt

$$\left(\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \right) dt$$

Questa quantità è uguale alla variazione di massa nel volume. In ogni suo elemento dV , c'è una massa ρdV e in tutto c'è una massa totale

$$\int_V \rho dV$$

Nel tempo dt , però, per via del flusso attraverso la superficie, c'è stata una variazione di massa nel tempo che vale

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho dV \right) dt$$

Ora si eguagliano le due quantità

$$\left(\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \right) dt = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho dV \right) dt$$

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$$

Nel secondo membro dell'equazione, è possibile fare un'inversione tra derivata e integrale quando il dominio d'integrazione (cioè il volume V) non dipende dalla variabile con cui si deriva, cioè il tempo. Si ipotizza dunque che il volume sia costante.

Si osserva però che ciò non è possibile ad es con una siringa che si sta comprimendo perché, x la compressione, il volume varia. ~~ca~~

Così si ottiene

$$\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Per il principio di conservazione della massa, tale quantità è pari alla variazione di massa. La massa contenuta nel volume dV è pari a $\rho \cdot \Omega$ ma il volume vale

$$dV = \Omega ds$$

Così la massa è pari a

$$dm = \rho \Omega ds$$

Di conseguenza, la sua variazione in un tempo dt vale

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Omega) ds dt \quad \rightarrow \text{cambia la densità ma anche la sezione } \Omega \text{ (ad es. in una piena di un fiume)}$$

Ora si eguagliano le due quantità

$$-\frac{\partial(\rho q)}{\partial s} ds dt = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Omega) ds dt$$

Si ottiene così

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Omega) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Omega) = 0$$

Equazione di continuità per le correnti: essa è un'equazione differenziale che deve valere a ogni tratto infinitesimo della corrente e a ogni istante dt . Essa dice che ρ , q e Ω non devono essere dati a caso, in quanto non si vedono "buchi".

Nel caso di FLUIDO INCOMPRESSIBILE, si ha che

$$\rho = \text{cost}$$

così l'equazione diventa

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

\rightarrow In un fiume, ad es., la variazione di portata dev'essere pari alla variazione di sezione

Nel caso invece di MOTO PERMANENTE, in cui non ci sono le accelerazioni locali della velocità, l'equazione diventa

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial s} = \frac{d(\rho q)}{ds} = 0$$

\downarrow
 q e ρ dipendono solo più da s

$$\frac{d(\rho q)}{ds} = 0$$

Infine, nel caso di MOTO PERMANENTE e di FLUIDO INCOMPRESSIBILE, si ha

$$\frac{dq}{ds} = 0$$

Si ha così che la portata q non dipende da s , cioè è costante

$$q = \text{cost}$$

Per le correnti, se il moto è permanente e il fluido è incompressibile, la portata è un'invariante

DINAMICA DEI FLUIDI

1 **Dinamica**: nella meccanica newtoniana, essa si fonda sul principio di conservazione della quantità di moto

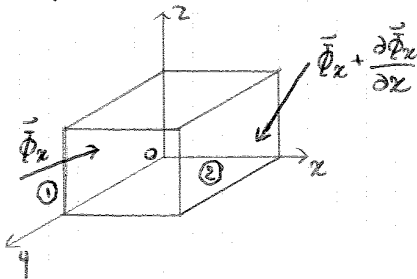
$$\vec{P} = m\vec{a}$$

In tale relazione la quantità di moto è presente perché

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} m\vec{v}$$

Questo principio dice che, preso un sistema meccanico, la risultante delle forze agenti su tale sistema è uguale alla massa x l'accelerazione di quel sistema. Da tale principio discende tutta la meccanica.

2 **Equazione della dinamica dei fluidi**: ora si vuole riscrivere il principio di conservazione della quantità di moto nell'ambito della meccanica dei fluidi, cioè declinare tale principio nel linguaggio proprio dei fluidi, facendo così una sorta di traduzione. Quindi si cerca un'equazione differenziale, che vale x ogni punto del fluido (è un'equazione indefinita che vale localmente).



Per questo, si considera in una generica massa fluida un generico punto O e si fissa un sistema di riferimento co con origine in O. Ora si considera un generico elemento di volume (x semplicità un parallelepipedo) e a esso si applica la legge della dinamica

La massa contenuta in quell'elemento vale

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

→ grazie alla scelta del parallelepipedo, il volume diventa prodotto di 3 differenziali

densità in quel punto $\rho = \rho(x, y, z, t)$
(non c'è l'ipotesi di incompressibilità)

Per avere l'accelerazione, si usa l'approccio euleriano

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

La risultante, invece, rappresenta tutte le forze che sono applicate sull'elementino, cioè

→ **FORZE DI MASSA**: sono applicate x la presenza di una massa (es. forza peso). Per questo s'introduce il vettore \vec{F} come intensità delle forze di massa x unità di massa, in modo che le forze di massa si scrivano come

$$\vec{F} dm = \vec{F} \rho dx dy dz$$

→ **FORZE DI SUPERFICIE**: sono le forze che agiscono sull'elementino x mezzo della sua superficie (agiscono anche se non c'è massa). Per valutarle, si considera la superficie 1, giacente sul piano $x=0$. Su questa agisce lo sforzo \vec{P}_x (sforzo = forza riferita alla superficie che agisce sulla superficie avente come normale l'asse x). La forza agente su 1 vale dunque

$$\vec{P}_x dy dz$$

Sulla superficie 2, avente anch'essa come normale l'asse x, agisce lo sforzo

Poi si ha l'equazione di stato

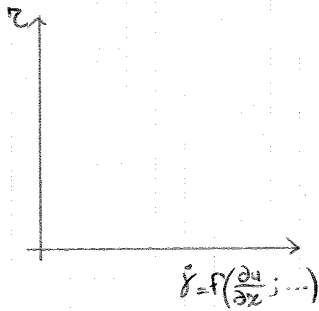
$$\rho = \rho(\varphi; \bar{\Phi}_{xx}; \bar{\Phi}_{xy}; \bar{\Phi}_{xz}; \bar{\Phi}_{yy}; \bar{\Phi}_{yz}; \bar{\Phi}_{zz}) = \rho(\bar{\Phi}_{xx}; \bar{\Phi}_{xy}; \bar{\Phi}_{xz}; \bar{\Phi}_{yy}; \bar{\Phi}_{yz}; \bar{\Phi}_{zz})$$

→ si suppone che la densità non dipenda dalla temperatura

Infine si ha l'equazione di continuità, con cui si impone la conservazione della massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Si possono così scrivere solo 5 VINCOLI x 10 INCOGNITE. Mancano dunque delle informazioni e queste informazioni sono sulla reologia del fluido, cioè se è newtoniano, alla Bingham, etc.



Il piano reologico, infatti, presenta come si formano le tensioni tangenziali con una velocità di deformazione, che è legata al gradiente delle velocità. Esso cioè dà un LEGAME TRA CAMPO DI MOTO E SFORZI e proprio questo si ottiene sfruttando la reologia. Allora, usando questo strumento, si possono scrivere quelle 6 variabili $\bar{\Phi}_{ij}$ in funzione del campo di moto e farle così sparire, poiché espresse in funzione di qualcosa che è già noto

↓
nella reologia si cerca proprio di trovare questo legame

Così, all'equazione indefinita manca ancora da dire a quale fluido attribuirlo. In questo senso, si può dire che a ogni fluido si associa un'equazione che lo descrive (l'altra è più generale ma non basta)

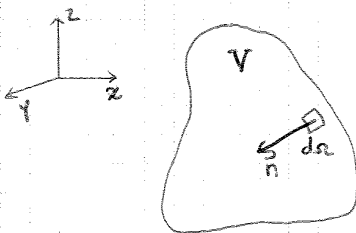
Prima di fare questo passaggio, però, si nota che questa equazione è molto complessa ma, se fosse risolta, essa fornisce in ogni punto e in ogni istante le variabili di stato

$$\rho \quad \vec{v} \quad \bar{\Phi}_{xx} \quad \bar{\Phi}_{yy} \quad \bar{\Phi}_{zz}$$

A livello ingegneristico, però, c'è una grande ridondanza di informazioni, cioè ce ne sono troppe. Ad es. per dimensionare un'opera come un tubo non occorre sapere questi valori in ogni punto.

Dunque occorre trovare un'altra via in cui si elimina qualche informazione senza dover risolvere l'equazione ma cercando un'equazione più semplice. Per questo si usa l'integrale, uno strumento che permette di "filtrare" eliminando qualche informazione.

Si prova così a integrare su un volume, per vedere se sbucano delle informazioni importanti e, in tal modo, si cerca un'EQUAZIONE GLOBALE.



Si considera un generico volume V di fluido e si integra su di esso ogni termine dell'equazione indefinita che, si ricorda, è

$$\rho \vec{F} - \rho \vec{a} = \frac{\partial \bar{\Phi}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Phi}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Phi}_{zz}}{\partial z}$$

(I) (III) (II)

(I) Integrando si ha

$$\int_V \rho \vec{F} dV$$

(II) Si integra rispetto al volume V

$$\int_V \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Phi}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Phi}_{zz}}{\partial z} \right) dV$$

Il volume scelto è costante, x cui nel primo addendo del secondo membro si possono invertire derivata e integrale

$$-\int_V \rho \vec{a} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV - \int_V \left(\frac{\partial(\rho v \vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v \vec{v})}{\partial z} \right) dV$$

Si applica il teorema di Green

$$-\int_V \rho \vec{a} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV - \left(-\int_{\Omega} \rho \vec{v} (u \cos \hat{n}_x + v \cos \hat{n}_y + w \cos \hat{n}_z) d\Omega \right)$$

Poichè

$$u \cos \hat{n}_x + v \cos \hat{n}_y + w \cos \hat{n}_z = \vec{v} \cdot \vec{n} = v_n$$

v_n = componente della velocità normale alla superficie

si ottiene alla fine che

$$-\int_V \rho \vec{a} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV + \int \rho v_n \vec{v} d\Omega$$

Ora si prendono tutti i risultati ottenuti

$$\int_V \rho \vec{F} dV - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV + \int_{\Omega} \rho v_n \vec{v} d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\Phi}_n d\Omega = 0$$

(A) (B) (C) (D)

- (A) Il termine ρdV corrisponde alla massa dm dell'elementino e, se \vec{F} rappresenta la forza di massa x unità di massa, allora il termine $\rho \vec{F} dV$ corrisponde alla forza di massa agente sull'elementino.
 Dunque questo termine rappresenta il PESO DEL FLUIDO, parametro facile da calcolare perchè il peso non dipende dal moto.

$$\vec{P} = \int_V \rho \vec{F} dV$$

- (B) Si osserva che

$$\rho \vec{v} dV = \vec{v} dm$$

Esso corrisponde alla quantità di moto dell'elemento di fluido. Queste sono poi sommate e poi si guarda quando cambiano nel tempo però LOCALMENTE, cioè si guardano i punti indipendentemente dalla particella che passa.
 Queste grandezze si chiamano inerzie locali \vec{I} ↓
si è nell'approccio euleriano

$$\vec{I} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \vec{v} dV$$

Si chiamano "inerzie" perchè sono vate da un'accelerazione e le forze d'inerzia nascono da un'accelerazione e sono "locali" perchè tengono conto solo dell'accelerazione locale.

- (C) Il termine $v_n d\Omega$ vale

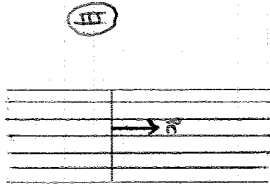
$$v_n d\Omega = dq$$

dove dq è la portata infinitesima che passa attraverso $d\Omega$, cioè il volume infinitesimo di fluido che passa attraverso $d\Omega$ nell'unità di tempo. Dunque, moltiplicando x la densità ρ si ha la massa di fluido che passa attraverso $d\Omega$. Moltiplicando x la velocità \vec{v} si ha la quantità di moto che passa attraverso $d\Omega$ nell'unità di tempo, cioè il FLUSSO DELLA QUANTITÀ DI MOTO \vec{H}

Così verrebbe voglia di trascurare subito le forze di massa ma nell'equazione non compaiono le forze di superficie, bensì il loro gradiente che è un infinitesimo del III ordine

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x} dx dy dz$$

OSSERVAZIONE: FLUSSO DELLE QUANTITÀ DI MOTO IN UNA CORRENTE



Nel caso in cui si considerano delle correnti, in cui il fluido si muove sostanzialmente su traiettorie parallele, si possono scegliere come superfici Σ isolate il volume delle sezioni trasversali. È infatti spontaneo scegliere il volume delimitato dalle sezioni trasversali perché in esse vale che

$$v_n = |\vec{v}|$$

Così il flusso delle quantità di moto, che vale

$$\vec{H} = \int_{\Sigma} \rho v_n \vec{v} d\Omega$$

si semplifica perché è possibile definire un'unico vettore \vec{n} poiché nella corrente tutte le velocità sono parallele ($\vec{v} = v\vec{n}$) e, supponendo inoltre che ci sia incomprimibilità, si ha che

$$\vec{H} = \rho \vec{n} \int_{\Sigma} v^2 d\Omega$$

\vec{n} è costante, cioè è lo stesso x tutte le \vec{v}

Le velocità \vec{v} , però, possono variare di punto in punto (ad es può esserci un profilo delle velocità) e quindi, x integrare, occorre sapere come varia la velocità in funzione dell'elemento di superficie $d\Omega$. La funzione

$$v = v(d\Omega)$$

è però difficile da ricavare, in quanto è molto difficile sapere il profilo delle velocità.

Per questo, in ingegneria si tratta il coefficiente di ragguglio β

$$\beta = \frac{\int_{\Sigma} v^2 d\Omega}{v_m^2 \Omega}$$

di fatto si considera un profilo uniforme e pari a quello della velocità media v_m , più semplice ma non uguale a quello reale secondo il coefficiente di ragguglio

Così la relazione si scrive come

$$\vec{H} = \rho \beta v_m^2 \Omega \vec{n}$$

I valori v_m e Ω sono noti e inoltre vale la relazione

$$q = v_m \Omega$$

Si ha così che

$$\vec{H} = \rho \beta v q \vec{n}$$

Poiché in genere $\beta \approx 1$, si ottiene infine che

Dinamica dei fluidi perfetti

1 Nella dinamica dei fluidi si è scritta l'equazione indefinita e, x risolvere il problema, si è introdotta la reologia dei fluidi tralasciando però la tipologia di fluido x cercare l'equazione globale.
Ora si cerca invece di scrivere l'equazione indefinita x alcune tipologie di fluido

2 Fluidi perfetti: sono fluidi che non hanno tensioni tangenziali e pertanto, comunque li si deformino velocemente, questi non reagiscono con delle tensioni tangenziali. Questi sono presenti all'interno delle stelle mentre sulla Terra non esistono ma sono utili in ingegneria perché, anche se a rigori non esistono, spesso il moto di fluidi non perfetti è tale da sembrare perfetti. Cioè nei fluidi newtoniani con una certa viscosità ci sono casi in cui si può vedere la viscosità come nulla in quanto essa non fa vedere i propri effetti (in tanti casi, è come se non ci fosse) e quindi il fluido si vede come ideale.

3 Ora si studia l'equazione della dinamica dei fluidi e si considera innanzitutto lo sforzo $\vec{\Phi}_x$, cioè lo sforzo che agisce sulla superficie orientata come normale l'asse x.
Poiché non esistono tensioni tangenziali, nei fluidi perfetti la matrice è sempre diagonale x qualunque orientamento del sistema di riferimento ed esiste un unico scalare, cioè la pressione p, x descrivere gli sforzi. Così si semplifica lo stato di tensione, passando da un tensore allo scalare p.

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_x &= p\vec{i} \\ \vec{\Phi}_y &= p\vec{j} \\ \vec{\Phi}_z &= p\vec{k}\end{aligned}$$

Così l'equazione della dinamica dei fluidi diventa

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = \nabla p$$

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p$$

Equazione indefinita della dinamica dei fluidi perfetti o
Equazione di Eulero (base della dinamica dei fluidi)

L'equazione di Eulero presenta 5 incognite (p , \vec{v} e ρ) ma queste sono vincolate da 5 equazioni (3 equazioni scalari di Eulero - è un'equazione vettoriale -, l'equazione di stato e l'equazione di continuità).

Ora si vuole risolvere la dinamica dei fluidi perfetti, cioè scrivere il sistema di equazioni:

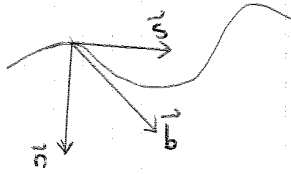
$$\begin{cases} \rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p \\ \rho = \text{cost} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0 \end{cases}$$

Qui però c'è il problema che le equazioni NON sono lineari

LINEARITÀ:

in genere un operatore differenziale si dice lineare se, applicandolo a due variabili, è pari alla somma degli operatori applicati a ogni variabile

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}(u) + \mathcal{L}(v)$$



Ora si vuole arrivare a un'equazione scalare e, a farlo, in genere si proietta lungo le direzioni x, y e z ma qui si cerca di restringere l'ambito di lavoro scegliendo com. sistema di riferimento su cui proiettare le 3 equazioni una traiettoria. Così non si è più in un punto generico ma in una traiettoria e la si segue. Dunque la proiezione viene fatta sulla retta intrinseca.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left(\frac{dv}{ds} + v \frac{dv}{ds} \right) \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \frac{v^2}{r} \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \frac{v^2}{r}$ = accelerazione centripeta

\rightarrow questo perché localmente la traiettoria sta nel piano osculatore (come anche l'accelerazione), a cui la componente binormale non esiste

CONSEGUENZE

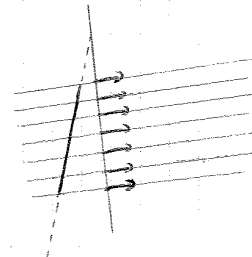
(I) Sotto le ipotesi fatte in precedenza, esiste sempre in ogni punto una DIREZIONE LUNGO LA QUALE IL CARICO PIEZOMETRICO h SI CONSERVA. Così, muovendosi a cavallo di una particella che si muove sulla sua traiettoria, esiste sempre una direzione (che si chiama binormale) in cui tutto va come se fosse nella statica, cioè il carico piezometrico si conserva.

$h = \text{cost}$, lungo la binormale

\rightarrow questo vale sempre

Se inoltre LE TRAIETTORIE SONO SENSIBILMENTE PARALLELE (questo nelle correnti accade sempre) E RETTILINEE, si ha che il raggio di curvatura $r \rightarrow \infty$ e dunque l'accelerazione centripeta

$$\frac{v^2}{r} \rightarrow 0$$



Così il carico piezometrico è costante anche lungo la direzione normale.

Dunque in questo caso esistono due direzioni normali tra di loro in cui il carico piezometrico si conserva e, di conseguenza, nel piano individuato dalla normale e dalla binormale il carico piezometrico si conserva.

In altri termini, NELLE CORRENTI RETTILINEE, IL CARICO PIEZOMETRICO h SI CONSERVA SUL PIANO TRASVERSALE.

Correnti rettilinee $\Rightarrow h = \text{cost}$, sul piano trasversale

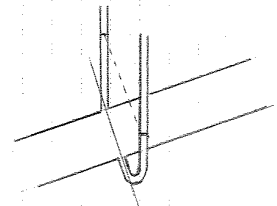
\rightarrow questo vale solo per le correnti rettilinee

Dunque sul piano trasversale la distribuzione delle pressioni è idrostatica (cioè avviene come nella statica) e il suo andamento è come se ci fosse un pcir sopra il fluido in moto.

Così l'andamento delle pressioni diventa semplice.

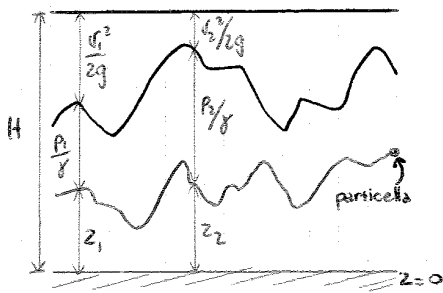
L'unico problema, infatti, è trovare il pcir (così poi si ricostruisce l'andamento come avviene nella statica). Un modo a ottenerlo, ad es., è realizzare un foro nel condotto e porre una cannuccia in modo che il fluido vada in essa e si ponga a una certa quota. Si ha così un piezometro, che dà la quota del pcir.

Se inoltre si facesse un foro dall'altra parte, il fluido si porrebbe alla stessa quota perché il carico h è lo stesso.



Si osserva però che il CARICO È COSTANTE IN UNA SEZIONE, cioè in una sola sezione l'andamento è idrostatico mentre, cambiando, è possibile che il carico vari.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA DI BERNOULLI



Fissato un piano di riferimento $z=0$, si considera la generica traiettoria di una particella che si muove.

Essa in ogni punto avrà un certo z (che in genere varia) e una certa p e a questi si aggiunge un termine cinetico $\frac{v^2}{2g}$, in modo che la loro somma H sia costante.

In altri termini, questi addendi possono variare come vogliono, purché la loro somma sia costante (se uno guadagna, l'altro perde).

Il fatto che nel disegno tali valori siano rappresentati come lunghezze, fa capire perché essi siano chiamati come

→ z = quota geometrica

→ $\frac{P}{\rho}$ = quota piezometrica

→ $\frac{v^2}{2g}$ = quota cinetica

La somma di queste quote è costante lungo una traiettoria (prendendo una traiettoria diversa, in genere si hanno valori diversi)

INTERPRETAZIONE FISICA DEL TEOREMA DI BERNOULLI

Dietro i termini che intervengono nel carico totale si nasconde un significato di energia

→ z : racchiude l'energia potenziale x unità di peso. Questo perché, data una particella di massa m , l'energia potenziale vale

$$U = mgz$$

Tale energia, x unità di peso, vale

$$\frac{U}{mg} = z$$

→ $\frac{v^2}{2g}$: è l'altra energia meccanica, cioè l'energia cinetica x unità di peso. Per una particella di massa m e velocità v essa infatti vale

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{E}{mg} = \frac{v^2}{2g}$$

→ p : dal punto di vista della meccanica, essa si lega alle particelle. Queste, a livello microscopico, hanno un'energia cinetica e potenziale e, integrando tutto questo a milioni di particelle, (passando così dal microscopico al macroscopico), viene fuori qualcosa che non è energia cinetica ma è calore, un effetto macroscopico delle vibrazioni (a livello microscopico è solo energia cinetica). Anche nei fluidi (e nei continui) c'è qualcosa che macroscopicamente diventa pressione e in essa si nasconde l'energia cinetica delle particelle.

Così il trinomio di Bernoulli dice che una particella, durante il suo moto, conserva l'energia cinetica, l'energia potenziale e una strana energia che è legata alla pressione. Questa relazione è dunque un'applicazione del principio di conservazione dell'energia, che ha anche senso perché non esistono attriti (e quindi non ci sono dissipazioni) in quanto il fluido è perfetto e ha viscosità nulla.

In questo senso, il trinomio di Bernoulli può anche essere usato per fluidi non ideali nel caso che la dissipazione sia poco importante.

$$\int_p dP = \int_q \gamma H dq$$

Il primo membro rappresenta la potenza totale P che transita nella corrente. Si è visto che in ogni tubo di flusso la potenza dP è costante lungo la traiettoria, poiché il carico totale H è costante. Integrando, è vero che il carico totale varia di tubo in tubo ma in ciascuno di essi è una costante e, sommando tutte queste costanti, si avrà sempre una costante.

Così si può dire che la POTENZA È UNA COSTANTE LUNGO s

$$P = \text{cost} / s$$

Si è così trovata un'altra invariante, cioè la potenza che rimane sempre COSTANTE IN OGNI SEZIONE.

Ora si vuole calcolare il valore di tale costante

$$\int_q \gamma H dq = \text{cost} \quad \rightarrow H \text{ è costante lungo l'infinitesimo tubo di flusso ma cambia di tubo in tubo}$$

$$\int_{\Omega} \gamma H v d\Omega = \text{cost}$$

Per definizione di carico totale, si ha che

$$\int_{\Omega} \gamma \left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) v d\Omega = \text{cost} \quad \rightarrow \text{si osserva che la funzione integranda è sempre locale (si lavora su un punto)}$$

Per le ipotesi di Bernoulli, $\gamma = \text{cost}$

$$\gamma \left[\underbrace{\int_{\Omega} \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) v d\Omega}_h + \int_{\Omega} \frac{v^3}{2g} d\Omega \right] = \text{cost}$$

Il carico piezometrico h varia da punto a punto, ma scegliendo come sezione una sezione trasversale e visto che le traiettorie sono rettilinee e parallele, si ha che

$$h = \text{cost}$$

e dunque non dipende dalla sezione Ω .

la quota z e la pressione p variano di punto in punto ma la loro somma è costante

$$\gamma \left[\underbrace{\left(z + \frac{P}{\gamma} \right)}_q \int_{\Omega} v d\Omega + \int_{\Omega} \frac{v^3}{2g} d\Omega \right] = \text{cost}$$

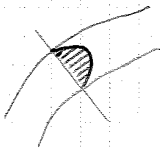
$$\gamma \left[\left(z + \frac{P}{\gamma} \right) q + \int_{\Omega} \frac{v^3}{2g} d\Omega \right] = \text{cost}$$

Nel secondo addendo, si prendano tutte le velocità che però possono variare nella sezione trasversale Ω . Per questo occorre sapere il profilo delle velocità su tale sezione, cioè come la velocità locale dipende da $d\Omega$

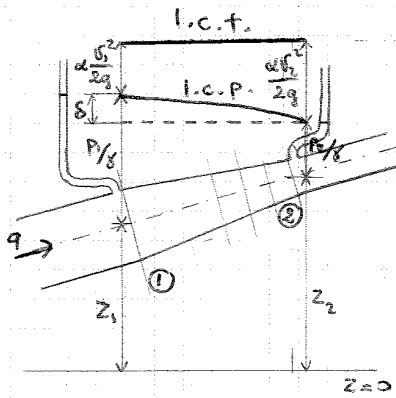
$$v = v(d\Omega)$$

In genere però non si può sapere come sia questa equazione e, per evitare questo problema, si introduce il coefficiente di Coriolis α , definito come

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} \frac{v^3}{2g} d\Omega}{\frac{v_m^3}{2g} \Omega}$$



Es (VENTURIMETRO)



Data una corrente con un certo asse, si considera un tratto dove una certa sezione Ω_1 . Dopodiché si "taglia" il tubo e si pone un debole convergente, in modo da avere una sezione Ω_1 di ingresso del convergente e una sezione Ω_2 di uscita dal convergente.

Poiché la convergenza è debole, si può dire che le traiettorie siano sostanzialmente rettilinee e parallele. Inoltre si suppone che il tratto di convergenza sia breve e, visto che in esso il fluido tende ad accelerare e a convergere, tra le due sezioni le dissipazioni sono piccole. In tal modo, si può assumere che localmente in quel tratto la corrente si comporta come un fluido perfetto.

Così il fluido è perfetto e, inoltre, si suppone che esso sia incomprimibile e che il moto sia stazionario, cioè che transita sempre la stessa portata (cio' non varrebbe in un processo pulsante).

Dunque, visto che la convergenza è debole, si può supporre (dal punto di vista ingegneristico) che in tutte le sezioni ci sia lo stesso carico totale H .

Come va invece l'energia totale?

Scegliendo, convenzionalmente, dal baricentro della sezione Ω_1 e fissato un piano $z=0$, si può dire che il carico H è costante in tutte le sezioni.

Nella sezione Ω_1 , si ha un termine z_1 , poi c'è il termine di pressione $P/\rho g$ e infine il termine $\alpha v_1^2/2g$.

Nella sezione Ω_2 , invece, c'è un termine z_2 (in questo caso, $z_2 > z_1$) e inoltre si nota che il termine

$$\alpha \frac{v_2^2}{2g}$$

è maggiore perché la sezione Ω_2 è minore e la portata è costante (così la velocità è maggiore). A ciò si accompagna una perdita nella pressione p .

Così, se il carico totale è lo stesso, passando dalla sezione Ω_1 alla sezione Ω_2 si è guadagnato sia in energia cinetica che potenziale a scapito dell'energia di pressione.

Ora è possibile tracciare la linea dei carichi totali, che dice come varia il carico totale sezione x sezione (essendo costante, tale linea è orizzontale). Dopodiché si può tracciare la linea dei carichi piezometrici, che indica come varia il termine cinetico.

Così, tracciando queste linee lungo la corrente, è possibile, conoscendone l'asse, tenere sotto controllo il carico totale e piezometrico e il termine cinetico (è la loro differenza)

In questo caso, il termine piezometrico è decresciuto di una quantità δ

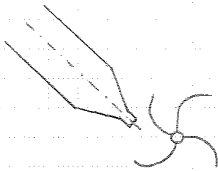
$$\delta = h_1 - h_2 = \frac{\alpha v_2^2}{2g} - \frac{\alpha v_1^2}{2g} \quad \rightarrow \text{è anche la differenza tra i termini cinetici a valle e a monte}$$

Ora si applica la definizione di velocità media, scrivendo v_1 e v_2 come

$$v_1 = \frac{q}{\Omega_1} \quad v_2 = \frac{q}{\Omega_2} \quad \rightarrow \text{le sezioni } \Omega_1 \text{ e } \Omega_2 \text{ sono note e la portata } q \text{ è costante e così si può scrivere la velocità media in funzione della sezione}$$

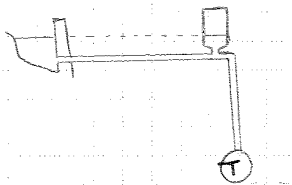
Sostituendo, è possibile ricavare la portata q conoscendo la quantità δ (questo è l'obiettivo di Venturi)

dato l'asse della corrente e le linee di carico totale e piezometrico, si possono avere informazioni su come variano questi 3 termini



Es (DIFFUSORE AVALLE DI UNA TURBINA)

In un impianto idroelettrico c'è una corrente che, arrivando da una condotta forzata terminante in un ugello (che dà luogo un getto ad altissima velocità), investe la turbina e ne colpisce le pale. Questo, ruotando, genera energia elettrica.



la turbina Pelton in genere lavora su piccole portate e alti carichi

In genere una centrale idroelettrica è costituita da un bacino, da una galleria sotterranea, da un pozzo piezometrico e da condotte forzate. Queste ultime devono essere quasi verticali, in modo che siano le più corte possibile, e portano l'acqua fino alla turbina (di tipo Pelton). In tal modo i carichi sono alti perché la potenza vale

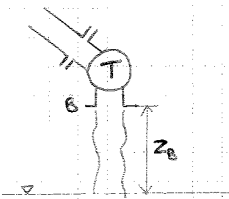
$$P = \gamma q H \quad \rightarrow \text{potenza corrente (in gen)}$$

A volte esistono impianti con grandi fiumi (alte portate), dove si sfruttano bassi carichi e via dei piccoli dislivelli (si è in pianura) e si usano turbine diverse (di tipo Kaplan).



All'interno della centrale, c'è la turbina a cui arriva la corrente con una certa potenza (cioè contiene una certa energia). Un valido metodo è fare in modo che l'acqua esca all'uscita la minore energia possibile, in modo da avere il massimo guadagno energetico.

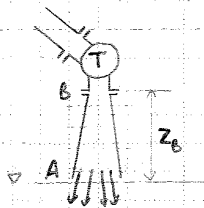
Ocorre dunque saper gestire l'acqua dopo la turbina e si hanno due scelte:



- I) Si lascia cadere l'acqua nel bacino di scarico. Prendendo come piano $z=0$ il pelo libero di tale bacino, il carico totale vale

$$H_v^{(1)} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \alpha \frac{v_B^2}{2g} = z_B + \alpha \frac{v_B^2}{2g}$$

$P_B = 0$ perché il getto è verticale e, all'uscita, la pressione è nulla



- II) A monte della turbina, la situazione non cambia, mentre a valle si mette un debole di vergente (una sorta di tronca di cono) che porta l'acqua al bacino. Se il divergente è fatto bene in modo da evitare il distacco di vena, si può dire che c'è corrente e valgono le ipotesi di Bernoulli. Di conseguenza, lungo le varie sezioni del divergente il carico totale è costante

$$H_v^{(2)} = H_B = H_A = z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \alpha \frac{v_A^2}{2g}$$

x Bernoulli:

Poiché $z_A = 0$ (A è sul piano $z=0$) e $p_A = 0$ (A è sul pelo libero), si ha che

$$H_v^{(2)} = \alpha \frac{v_A^2}{2g}$$

Così, accompagnando la corrente fino alla superficie libera, l'energia totale nella sezione A è simile a quella in B e vale $\alpha v_A^2 / 2g$.

Dunque nel caso I) l'energia residua nella corrente è maggiore, cioè

$$H_v^{(1)} - H_v^{(2)} > 0$$

6 Equazione globale della dinamica dei fluidi perfetti

Nell'equazione generale della dinamica dei fluidi, si nota che passando dall'equazione locale a quella globale si ha che

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

⇒

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{F}_c + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

In particolare il termine

$$\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

diventa la forza sul contorno \vec{F}_c e, infatti,

$$\int_V \left(\frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z} \right) dV \stackrel{\ominus}{\downarrow} - \int_{\Omega} \vec{\Phi}_n d\Omega = \vec{F}_c$$

× il teorema del gradiente

Per i fluidi perfetti invece vale l'equazione di Eulero

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p$$

Ripetendo dunque lo stesso ragionamento di prima, si ha che

$$\int_V \nabla p dV \stackrel{\ominus}{\downarrow} - \int_{\Omega} p \vec{n} d\Omega = \vec{\Pi}$$

→ le forze al contorno sono tutte normali

× il teorema del gradiente

Così, l'equazione globale, nel caso di fluidi perfetti, diventa

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

Equazione globale della dinamica dei fluidi perfetti

Dinamica dei fluidi newtoniani

1 Il teorema di Bernoulli è uno strumento utile ma serve solo quando sono verificate le sue ipotesi, tra cui quella più importante, cioè

$$\mu = 0$$

Quel tipo di fluido in quel tipo di moto deve comportarsi come se avesse viscosità nulla. In genere però la viscosità non è nulla.

2 Equazione della dinamica dei fluidi newtoniani

Per un fluido perfetto vale l'equazione di Eulero

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p$$

Per un fluido newtoniano, invece, si dimostra che vale l'equazione differenziale

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{v} - \frac{1}{3} \mu \nabla(\operatorname{div} \vec{v}) \quad \text{Equazione di Navier-Stokes}$$

Si osserva che il primo membro dell'equazione non cambia in quanto questa è l'equazione di Eulero usata dall'equazione generale della dinamica dei fluidi

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \frac{\partial \vec{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\Phi}_z}{\partial z}$$

In quest'ultima equazione, il secondo membro è una funzione $f(u, v, w)$ e in Eulero diventa il gradiente della pressione. Nel fluido newtoniano, invece, esso diventa il gradiente della pressione meno la viscosità \times il laplaciano del campo di moto, dove l'operatore laplaciano si definisce come somma delle derivate seconde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

meno $1/3$ della viscosità \times il gradiente della divergenza del campo di moto. Si osserva subito che, $\mu = 0$, si ottiene l'equazione di Eulero.

È possibile fin da subito fare una semplificazione in quanto ci si pone sempre in un fluido incomprimibile, in cui

$$\rho = \text{cost}$$

Dunque, \times l'equazione di continuità, si ha che

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Così l'equazione di Navier-Stokes diventa

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{v}$$

Equazione di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili

Una volta ottenuta l'equazione della dinamica dei fluidi newtoniani, si osserva però che si cercano sempre equazioni globali. Si ricorda a tal proposito che

→ nella statica $\rho \vec{F} = \nabla p \Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_c = 0$

→ nella dinamica $\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} \Rightarrow \vec{P} + \vec{I} + \vec{F}_c + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$

→ in Eulero $\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p \Rightarrow \vec{P} + \vec{I} + \vec{\pi} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$

Ora invece vale l'equazione di Navier-Stokes

$$\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{v}$$

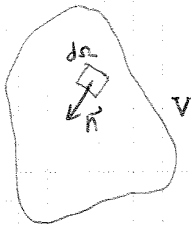
Per ottenere l'equazione globale si ragiona come si è fatto nei fluidi perfetti (v. "Dinamica dei fluidi perfetti"), cioè si parte dall'equazione globale della dinamica dei fluidi

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{F}_c + \vec{M}_e + \vec{M}_u = 0$$

Qui infatti cambia ancora il termine delle forze di contorno \vec{F}_c e, come avviene in Eulero, c'è il termine $\vec{\pi}$, in quanto nell'equazione locale appare il termine ∇p . Dall'altra però c'è anche il contributo del laplaciano e occorre calcolarlo

$$-\int_V \mu \nabla^2 \vec{v} dV = -\mu \int_V \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) dV = \rightarrow \text{la viscosità } \mu, \text{ x definizione, è una costante}$$

Si applica il teorema di Green



$$= \mu \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \cos n_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cos n_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cos n_z \right) d\Omega = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial v_x}{\partial n} d\Omega$$

→ è il gradiente del campo di moto lungo la normale all'elementino dΩ, cioè si valuta quanto varia la velocità lungo la normale quando si attraversa la superficie di contorno

Così l'equazione globale diventa

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{\pi} - \underbrace{\mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} d\Omega}_{\vec{T}} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

perché cambia il segno

\vec{T} : rappresenta tutte le forze tangenziali che nascono x un gradiente delle velocità (x la legge di Newton, poiché c'è viscosità, nascono tensioni tangenziali)

$$\vec{P} + \vec{I} + \vec{\pi} - \vec{T} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

Equazione globale della dinamica dei fluidi newtoniani

Così il termine $\vec{\pi} - \vec{T}$ rappresenta le forze al contorno \vec{F}_c e, rispetto a Eulero, si aggiunge il termine \vec{T} perché ora le forze sul contorno sono normali e tangenziali. Però perché esistano è necessario che ci sia un gradiente delle velocità.

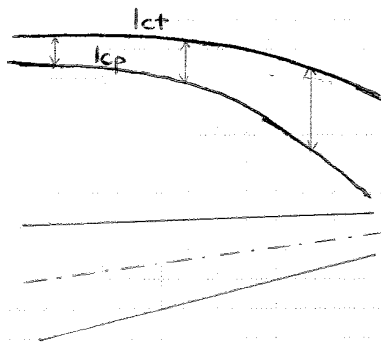
↓
 \vec{T} è quindi una componente legata alla viscosità che compare solo nei fluidi newtoniani.

I fluidi reali quando si muovono perdono energia perché si formano tensioni tangenziali di natura viscosa (che generano attrito e dissipazione). Queste tensioni sono legate a gradienti spaziali della velocità (gradienti legati alla direzione normale).
 Nei fluidi reali infatti esiste un profilo di velocità, in genere parabolico. Infatti, le particelle a contatto con la parete si muovono con la velocità della parete (in genere nulla) in quanto il fluido reale si attacca alla parete, mentre nell'ideale il moto è indipendente dalla parete. Poiché però c'è una portata $Q \neq 0$, allora in altri punti dev'essere che $v \neq 0$, cioè la velocità cresce e si creano i gradienti.

Entra così in gioco un nuovo termine, cioè la dissipazione. Per questo si introduce una nuova variabile, definita lungo s (perché si sta guardando una corrente) e importante in ingegneria, che si chiama pendenza motrice i

$$i(s) = - \frac{\partial H}{\partial s}$$

La pendenza motrice è definita come l'opposto della variazione di energia x unità di lunghezza ds ed è una grandezza positiva. Essa rappresenta QUANTA ENERGIA SI PERDE x OGNI ds .
 Si parla di "pendenza" perché la linea dei carichi totali qui ha una pendenza e "motrice" perché, grazie al fatto che c'è una pendenza (cioè che si sta dissipando energia), avviene il moto del fluido. Se, infatti, non ci fosse pendenza, il fluido starebbe fermo.



PROPRIETÀ DELLA PENDENZA MOTRICE

→ nel caso di correnti cilindriche, in cui la sezione è costante, la linea dei carichi totali è una retta e dunque la pendenza (cioè la pendenza motrice) è costante. Questo però è un caso particolare. Prendendo, ad es., un condotto che leggermente va rastremandosi, allora si dimostra che tale linea gradualmente aumenta la sua pendenza.

Quindi, in generale, LA LINEA DEI CARICHI TOTALI È UNA CURVA e così ha senso definire la pendenza motrice x ogni ds , poiché varia lungo s . La linea diventa una retta solo nel caso di sezione Ω costante (qui vale che $i = \text{cost}$)

→ è noto che la linea dei carichi piezometrici sta sempre sotto quella dei carichi totali, x via del termine cinetico, ma il fatto che siano parallele si verifica solo perché si è supposto che il tubo sia cilindrico.

Nella rastremazione, infatti, la sezione Ω diminuisce e dunque la velocità aumenta, x cui in genere LA LINEA DEI CARICHI PIEZOMETRICI NON È PARALLELA ALLA LINEA DEI CARICHI TOTALI.

Così la relazione

$$i = - \frac{\partial H}{\partial s} = - \frac{\partial h}{\partial s}$$

Vale solo x correnti perfettamente cilindriche

→ se si sa come i dipende dalla geometria, dal tipo di fluido, etc., cioè se si conosce la funzione

$$i = i(\text{geometria}; \text{tipo di fluido}; \dots)$$

allora la relazione

$$i = - \frac{\partial H}{\partial s}$$

quindi in generale i dipende da s e l_{cp}/l_{ct} ←

$\vec{P} \cdot \vec{S}$: in modulo, il peso di tutto il fluido contenuto vale $\gamma \Omega L$, e dunque, posto α come la pendenza dell'asse della corrente, si ha che

$$\vec{P} \cdot \vec{S} = -\gamma \Omega L \sin \alpha$$

$\vec{\Pi} \cdot \vec{S}$: ovviamente, sul contorno ^{del fluido} agiscono delle forze normali, in quanto altrimenti, tagliando il condotto, il fluido cadrebbe. Però lungo la superficie laterale la spinta è ortogonale a \vec{S} , e quindi non dà contributo. Sulle sezioni ① e ②, invece, agiscono forze normali parallele a \vec{S} . Inoltre, poiché si è su traiettorie rettilinee e parallele, su tali sezioni il carico piezometrico h è costante e dunque, come nella statica, si ha che

$$\vec{\Pi}_1 = p_{G,1} \Omega \vec{S} = p_1 \Omega \vec{S}$$

$$\vec{\Pi}_2 = -p_{G,2} \Omega \vec{S} = -p_2 \Omega \vec{S}$$

Così si ha che

$$\vec{\Pi} \cdot \vec{S} = p_1 \Omega - p_2 \Omega$$

$\vec{T} \cdot \vec{S}$: le tensioni tangenziali sono ovunque nel fluido, anche sulle sezioni ① e ②. Qui però tali tensioni sono ortogonali a \vec{S} e non danno contributo e così compaiono solo le tensioni tangenziali al contorno. Dunque il termine

$$T = \vec{T} \cdot \vec{S}$$

è la risultante delle tensioni tangenziali sul bordo e a questo è l'incognita di questo problema.

$\vec{I} \cdot \vec{S}$: le inerzie locali si attivano solo quando ci sono le derivate rispetto al tempo perché a definizione valgono

$$I = \int_V \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} dV$$

Esse sono difficili da calcolare perché richiedono di sapere come varia nel tempo la velocità in ogni punto. Dunque, a semplicità, si studiano solo CORRENTI STAZIONARIE e pertanto

$$\vec{I} \cdot \vec{S} = 0$$

Ovviamente, non appena c'è qualcosa che significativamente varia nel tempo (es. moto pulsante) questo ragionamento non vale più.

$\vec{M} \cdot \vec{S}$: la quantità di moto entra dove entra massa con una velocità, cioè dalla sezione ①, ma la quantità di moto che esce da ② è la stessa, poiché il condotto è cilindrico. Dunque si ha che

però non è vero che $\vec{M}_e = \vec{M}_u = 0$ ←

$$M_e = M_u$$

e così

$$\vec{M} \cdot \vec{S} = (\vec{M}_e - \vec{M}_u) \cdot \vec{S} = 0$$

Di conseguenza, la tensione tangenziale vale

$$\tau = \gamma_i R$$

$$\tau = \gamma_i R$$

Tensione tangenziale in una corrente cilindrica stazionaria

Nella tensione tangenziale intervengono

→ PROPRIETÀ DEL FLUIDO (è più o meno pesante)

→ INCLINAZIONE DELLA LINEA DEI CARICHI TOTALI che, se è maggiore, determina tensioni tangenziali maggiori. Infatti, queste tensioni esistono perché ci sono dissipazioni (ora si sta dicendo la stessa cosa di prima - ci sono dissipazioni perché ci sono tensioni - ma all'opposto)

→ GEOMETRIA che diventa importante in quanto la forma influenza le tensioni tangenziali

PROPRIETÀ DEL RAGGIO IDRAULICO:



Se il raggio idraulico è importante, non è più indifferente la sezione e qual è la sezione che, a parità di superficie Ω , ha minore perimetro P ?

Essa è il CERCHIO (già importante x la curvatura costante - basta un parametro x definirlo), che è la forma che a parità di sezione ha minor perimetro o, viceversa, a ugual perimetro ha sezione superficie massima.

Il suo contrario, invece, è il rettangolo largo.

Per capire quale sia la figura più efficiente, basta osservare che il raggio idraulico vale

$$R = \frac{\Omega}{P}$$

La sezione Ω rappresenta lo spazio a disposizione x il passaggio del fluido e, tanto è più piccola Ω e più grande P , tanto sono più alte le tensioni tangenziali.

Così, dal punto di vista pratico, è migliore il cerchio.

Esso, infatti, è molto presente in natura perché garantisce un'alta efficienza dal punto di vista energetico. Un corso d'acqua invece tende a disporsi come un rettangolo largo e basso perché ha troppa energia tra le montagne e il mare e deve dissiparla.

4 Ora si descrive una sorta di "bivio" nella trattazione perché, facendo passare una corrente in un tubo, si hanno due possibili casi:

→ moto laminare: è un moto MOLTO REGOLARE in cui nella corrente ogni particella va dritta x conto suo (poi magari hanno velocità diverse ma comunque seguono l'asse della corrente).



Si parla di "laminare" perché è come se ci fossero tante lamine concentriche che vanno avanti senza che quelle interne interferiscano sul moto di quelle esterne.

In esso dunque le traiettorie sono molto semplici geometricamente (sono rette) e sono regolari.

→ moto turbolento: si osserva che a velocità poco più alte rispetto a quelle del laminare le particelle hanno TRAIETTORIE STRANE E COMPLESSE già difficili da studiare solo dal punto di vista cinematico (cioè già solo visualizzarle) e così il fluido passa dal moto più ordinato possibile a un moto disordinato e complicato. Tra l'altro questa rottura con cambiamento della struttura del moto avviene in poche velocità di differenza.



Il problema è che tutti i fluidi in natura hanno un moto turbolento, x cui se il moto laminare è importante il moto turbolento è più presente

Correnti in pressione

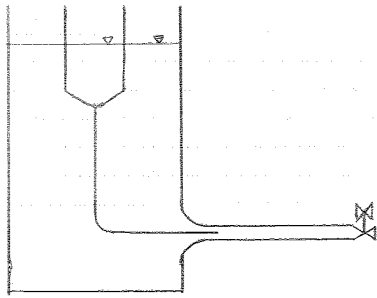
1 Dapprima si è visto un bivio tra

→ MOTO LAMINARE

→ MOTO TURBOLENTO

Questa distinzione è generale ma in tal caso ci si riferisce alle correnti.

2 Esperienza di Reynolds



Reynolds fu il primo a trattare in maniera esplicita della differenza tra moto laminare e moto turbolento sia dal punto di vista teorico che pratico e fece questa distinzione attraverso un'esperienza.

Si considera un serbatoio da cui parte un tubicino avente un imbocco raccordato, cioè senza spigoli, il modo che la corrente quando nasce è poco disturbata. Questo tubicino termina in un rubinetto che permette di regolare la portata.

Il serbatoio contiene acqua e in esso c'è un secondo serbatoio che alimenta un ago che immette il liquido da quest'ultimo nell'asse del tubicino.

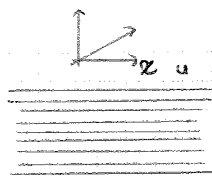
Se nel serbatoio esterno c'è acqua con un certo livello, in quello interno c'è acqua colorata allo stesso livello, cioè c'è sempre acqua contenente però qualcosa che dà colore. In tal modo, i carichi sono gli stessi e l'unica particolarità è che si può introdurre nell'asse della corrente dell'acqua colorata.

All'inizio, è tutto fermo in quanto il rubinetto è chiuso e non fluisce acqua né dal serbatoio esterno né da quello interno.

Si comincia poi ad aprire il rubinetto e inizia il moto dell'acqua. Dunque si crea una corrente con una certa portata (bassa). Inoltre esce anche un filino (un "pennello") di acqua colorata. Grazie alla colorazione, visto che l'acqua sarebbe trasparente, si può visualizzare la traiettoria.

In particolare, questo filetto si mantiene di fatto regolare (a meno di piccole oscillazioni) e procede dritto. Così in sostanza si può dire che le particelle si muovono con traiettorie parallele e rettilinee, come se il fluido si muovesse secondo tante lamine concentriche che si muovono indipendenti.

poi spostando l'ago, il filino rimane



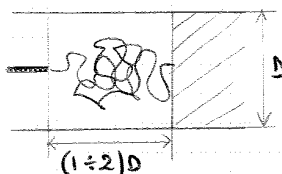
⇒ si parla di moto laminare

Si osserva che ora non si bada con che velocità si muovono le particelle ma si studia solo la forma della traiettoria e, in questo caso, è la FORMA PIÙ SEMPLICE POSSIBILE, cioè LUNGO UN'UNICA DIREZIONE. Fissando infatti un sistema di riferimento con asse x in direzione della corrente, le particelle si muovono solo con la componente u lungo x .

Ora si apre leggermente di più e la portata aumenta perché le resistenze si riducono. Qui si osserva che tutto va più veloce (perché la portata è maggiore mentre la sezione è la stessa) ma le traiettorie sono le stesse, dal punto di vista geometrico.

A un certo punto, cambiando di pochissimo l'apertura del rubinetto e dunque la portata (non esce un fiume d'acqua), avviene un vero e proprio cambiamento strutturale del comportamento perché all'uscita del lago si riesce a vedere ancora qualcosa del filino ma dopo una distanza di $(1 \div 2)D$, con $D = \text{diametro del tubo}$, si vede solo più acqua colorata.

Quindi in questo spazio dev'esserci un "pasticcio" di traiettorie che percorrono l'intera sezione, in modo che le particelle che escono abbiano visto tutta la sezione. Se, infatti, le particelle colorate sono in tutte le sezioni, devono esserci delle traiettorie che le hanno portate lì.



tra l'altro, il SALTO AVVIENE IN UN PICCOLO INTERVALLO DI VELOCITÀ

PROPRIETÀ DEL NUMERO DI REYNOLDS

Ⓘ Si nota che il numero di Reynolds è un rapporto adimensionale, x cui non contano le unità di misura ma basta che siano coerenti. Infatti, questo valore è venuto fuori con un tubicino ma questa esperienza è ripetibile anche con altri casi, come ad es il moto di un'onda su una bacinella (se l'onda è piccola, il moto è regolare; se l'onda è grande, il moto è turbolento).

In generale, così, il numero di Reynolds punta un significato più grande perché è un rapporto tra

→ una lunghezza tipica del problema, cioè nella scala propria del problema

tutti questi oggetti sono considerati con scale diverse perché il numero di Reynolds cambia

← Es. Studio del moto di un virus $\Rightarrow [P] = \mu m$
 Studio del moto di una mosca $\Rightarrow [P] = mm$

→ una velocità nella scala tipica del problema

Es. Studio del moto di una mosca $\Rightarrow [V] = cm/s$
 Studio di un fiume $\Rightarrow [V] = m/s$

→ densità del fluido e viscosità

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu}$$

Dunque in generale tale numero è definito come rapporto tra una scala di lunghezza, una scala di velocità, densità e viscosità. In tal modo è possibile generalizzarlo ad altri casi, come ad es. studio di un fiume dove

→ la scala tipica di lunghezza è data, a seconda dei problemi, dalla profondità h

→ la scala di velocità corrisponde a $1 m/s$



Così si nota che

$$Re = O(10^6 \div 10^9) \quad \rightarrow \text{valore molto alto}$$

Ⓙ Si sa che

$$\frac{\rho}{\mu} = \nu$$

Dunque si può scrivere il numero di Reynolds come rapporto tra scala di lunghezza, scala di velocità e viscosità cinematica

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}$$

Si nota così che nella meccanica dei fluidi è importante non tanto la viscosità dinamica ma la viscosità cinematica (parametro fondamentale). Moti con lo stesso prodotto di lunghezza e velocità (ad es. alta ν e bassa v o viceversa), infatti, hanno lo stesso comportamento meccanico se hanno la stessa viscosità cinematica, indipendentemente da quanto valgano le due scale.

→ introdotte una scala cinematica e una scala di lunghezze, si è automaticamente introdotta una scala del tempo t , che vale

$$t = \frac{l}{v_0}$$

Es Moto di una mosca

$$l = 1 \text{ cm} \quad v_0 = \text{qualche cm/s} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

→ s'introduce anche una scala delle pressioni

$$\rho v_0^2$$

Tale grandezza ha infatti le dimensioni di una pressione e deriva dal teorema di Bernoulli perché nel tubo di Pitot si è visto che c'era una sorta di equivalenza tra i termini

$$\frac{p}{\rho} \quad \frac{v^2}{2g}$$

Moltiplicando x il peso specifico si ha che

$$p \quad \rho v^2$$

Cioè le pressioni scalano (non sono uguali ma hanno lo stesso ordine di grandezza) di ρv^2

Così tutti questi problemi, che sembrano diversi tra di loro (es fiume, DNA ...) possono essere fatti collassare l'uno sull'altro se ogni variabile viene normalizzata rispetto alla scala di origine. Data dunque una certa x (che x l'aereo va da 0 a 100 m, x la mosca si lavora in cm, x il DNA in μm), s'introduce il valore

$$\tilde{x} = \frac{x}{l}$$

l = lunghezza tipica
Se $\tilde{x} = 0,5$, vuol dire che si è a metà del dominio (x la mosca è 3 mm, x l'aereo è 500 m)

In questo modo, in termini di \tilde{x} si può far assomigliare tra di loro questi problemi e questa operazione è profonda perché si generalizza studiando un comportamento x tanti casi.

Nell'equazione di Navier-Stokes, si normalizzano innanzitutto le coordinate x, y e z rispetto alle scale

$$\tilde{x} = \frac{x}{l} \quad \tilde{y} = \frac{y}{l} \quad \tilde{z} = \frac{z}{l} \quad \rightarrow \text{sono lunghezze}$$

Poi si normalizza anche la velocità rispetto alla scala di velocità

$$\tilde{u} = \frac{u}{v_0} \quad \tilde{v} = \frac{v}{v_0} \quad \tilde{w} = \frac{w}{v_0}$$

Poi il tempo, che è nascosto nell'accelerazione \vec{a}

$$\tilde{t} = \frac{t}{\frac{l}{v_0}}$$

l/v_0 = scala delle velocità

Es Guardando la vibrazione del DNA, il fenomeno dura una frazione di secondo; nel sole la particella impiega milioni di anni x arrivare in superficie. Se è normalizzata, però, il tempo varia in range simili

Infine la pressione

$$\tilde{p} = \frac{p}{\rho v_0^2}$$

$$\frac{\rho g}{\nu^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{z}} - \frac{D\tilde{u}}{Dt} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{u}$$

Questa è un'equazione in termini adimensionali ed è molto più chiara perché è venuto fuori il numero di Reynolds (esso era già presente, anche se nascosto, nell'equazione) e comanda l'importanza del laplaciano.

Se $Re \rightarrow \infty$, il coefficiente tende a zero e, poiché il laplaciano è dello stesso ordine di $\partial \tilde{p} / \partial \tilde{z}$ (cioè è una quantità finita e limitata), allora il secondo addendo sparisce e si ritorna all'equazione di Eulero.

Se, invece, il numero di Reynolds è piccolo, il coefficiente è maggiore e questo termine diventa più importante rispetto a $D\tilde{u}/Dt$ e non può essere più trascurato. Dunque il termine d'inerzia è meno importante. Così, $\times Re \rightarrow 0$, si può buttare via la fonte di tutte le complicazioni, cioè la non linearità, e l'equazione diventa

$$\frac{\rho g}{\nu^2} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{z}} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{u} \quad \text{Equazione di Stokes}$$

Si è dimostrato così che, $\times Re \rightarrow 0$, vale questa EQUAZIONE LINEARE.

CASI CON $Re \rightarrow 0$ \rightarrow i ghiacciai sono fluidi con $Re = O(10^{-10})$ e si studiano, anziché con l'equazione di Navier-Stokes, ~~ma~~ con l'equazione di Stokes in modo che l'approccio sia più semplice

\rightarrow il sangue nelle arterie è descritto come un fluido con basso numero di Reynolds (cioè è importante \times l'irruzione del cervello)

\rightarrow nei laboratori ci sono chip in cui si trasportano fluidi a basso numero di Reynolds in canalette

\rightarrow moto di un fluido in un mezzo poroso (es argilla)

\rightarrow esistono anche casi in cui il moto è retto dall'equazione di Laplace

$$\nabla^2(\cdot) = 0$$

\rightarrow essa è utile \times la diffusione di calore o di sostanze o \times descrivere il campo elettromagnetico



Per studiarla, si suppone di avere un moto bidimensionale e l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Una proprietà è intuitiva. Se si suppone di girare l'asse x , ponendo

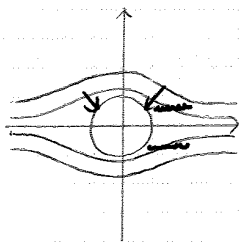
$$x' = -x$$

l'equazione non se ne accorge perché c'è il quadrato (mettendo $-x$ rimane x^2). In altri termini, girando lo spazio la soluzione non cambia e dunque c'è SIMMETRIA NELLO SPAZIO.

Ad es. considerando un cilindro e del fluido che scorre attorno e \times il quale vale questa equazione, se si osservano le traiettorie si nota che esse sono molto simmetriche.

Più in generale, quando ci sono equazioni alle derivate di ordine pari, il mondo è simmetrico e ciò accade quando il numero di Reynolds è molto basso. Se, invece, ci fosse inerzia, si avrebbe una sera che determina asimmetria e fa sì che non ci siano le stesse traiettorie da una parte e dall'altra. Se, infatti, ci fossero le stesse traiettorie (cioè lo stesso campo di moto ψ), ci sarebbero anche uguali pressioni e allora il corpo immerso nel fluido non subirebbe alcuna spinta perché queste si equilibrano. Del resto, quando un fluido incontra un ostacolo, non lo sposta ma circonda attorno e questo è perché \times creare asimmetria mancava un altro termine.

Una controprova è il tempo, che appare sempre nelle equazioni con una derivata di pari, \times cui \times ribaltare l'asse del tempo occorre porre $-t/\tau$, cioè cambiare l'equazione. In altri termini, con il tempo c'è sempre una derivata di pari e ciò determina la rottura della simmetria nel tempo.



Così si ottiene che

$$T = \gamma \pi r^2 \left[\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \right]$$

il (perché è una corrente cilindrica con velocità media costante)

$$T = \gamma \pi r^2 i L$$

Questa è la risultante di tutte le tensioni tangenziali che ci sono sul bordo del cilindro di raggio r. Per avere le tensioni tangenziali, occorre dividerle x la superficie

$$z(r) = \frac{\gamma \pi r^2 i L}{2 \pi r L} = \frac{1}{2} \gamma i r$$

$$z(r) = \gamma i \frac{r}{2}$$

Valore della generica componente tangenziale

PROPRIETÀ → x r = R, si ha che

$$z(R) = \gamma i \frac{R}{2} = \gamma i R$$

→ si nota che $\frac{A}{P} = \frac{\pi R^2}{2 \pi R} = \frac{R}{2} = R$

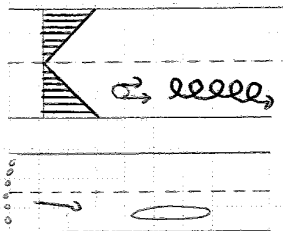
→ la tensione tangenziale varia linearmente, x cui si può scrivere che

$$z = z_0 \frac{r}{R}$$

L'andamento delle tensioni tangenziali dentro una corrente cilindrica in moto uniforme a sezione circolare è lineare. Ciò è dovuto al moto laminare, dove tutte le traiettorie sono rettilinee e parallele



OSSERVAZIONE:



dentro la corrente
Immaginando di mettere una particella di dimensioni non trascurabili, da sopra è soggetto a una certa tensione tangenziale e da sotto a una tensione maggiore, x cui si nota che la particella ruota in un certo senso. Ruotando, tende a far nascere dietro di sé delle piccole scie che poi la fanno traslare nella sezione. Così, mettendo più particelle, il gioco tra tensioni tangenziali, scie e rotazione fa sì che, a un certo punto, le si trovino tutte addensate a una distanza di $0,6R$ dall'asse della corrente.

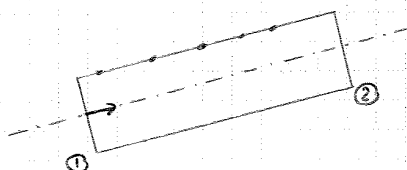
Una volta capite come sono le tensioni tangenziali, si può fare un altro passo perché si sta studiando la risultante T ma non si è ancora utilizzata la sua definizione

$$\vec{T} = \mu \int_{\Omega} \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} d\Omega \quad \rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} = \text{gradiente delle velocità lungo la normale } \vec{n}$$

Ma essa c'è qualcosa legata alla velocità, mentre finora si è ricavato come è fatto T ma non ancora come è fatta la velocità, cioè il profilo delle velocità.

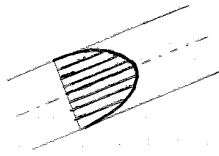
Per farlo, si studia il termine

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial n}$$



cioè il gradiente delle velocità quando si attraversa la sezione ds lungo n da fuori a dentro, nel caso di corrente cilindrica a sezione circolare con moto uniforme.

$$u(r) = -\frac{\gamma_i}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right)$$



Così in questo caso il profilo delle velocità è un paraboloide di rotazione. Inoltre, tanto più peso specifico (cioè peso) o più energia si mette, tanto più il profilo è grande (c'è più velocità) e pronunciato. Tanto più il fluido è viscoso, tanto meno il profilo è pronunciato.

PROPRIETÀ → VELOCITÀ MASSIMA: essa è massima al centro, cioè $x = r = 0$

$$u_{max} = \frac{\gamma_i}{4\mu} \cdot \frac{D^2}{4} = \frac{\gamma_i D^2}{16\mu}$$

→ VELOCITÀ MEDIA: la velocità media corrisponde a quella di un cilindro che ha lo stesso volume del paraboloide (x il teorema della media integrale) e si dimostra che esso è un cilindro che ha la stessa base circolare ed è alto la metà. Dunque

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{max} = \frac{\gamma_i D^2}{32\mu}$$

Dunque la portata vale

$$q = \bar{v} \Omega = \bar{v} \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\gamma_i D^4 \pi}{128\mu}$$

$$q = \frac{\gamma_i D^4 \pi}{128\mu}$$

Portata in una corrente cilindrica circolare percorsa da un fluido in moto uniforme e laminare

OSSERVAZIONE: in genere non si sa quanto vale la pendenza matrice i ma qui si ricava come

$$i = \frac{128\mu q}{\gamma_i D^4 \pi}$$

Legge di Poiseuille

Quindi si capisce che, in condizioni di moto laminare, la pendenza matrice i dipende linearmente da

→ viscosità μ ($\mu > \Rightarrow i >$ cioè occorre buttare più energia perché le dissipazioni crescano)

→ portata q (se essa aumenta, passa più acqua e dunque c'è più energia dentro).

Inoltre essa è inversamente proporzionale a

→ peso specifico γ

→ D^4 : la pendenza matrice è sensibilissima a variazioni di diametro, che, anche se piccole, portano a grandi variazioni delle resistenze (con un tubo di metà diametro, occorre moltiplicare $\times 16$ le resistenze)

Es Nel sistema circolatorio si parte dall'aorta e si va alle grandi arterie, alle arteriole, etc. Però così le resistenze aumentano moltissimo e il rimedio è ridurre tantissimo la portata. Ciò si fa tramite "esplosione" in capillari dove, essendoci tanti sistemi in parallelo, il sangue va pianissimo e la portata scende così tanto che riesce a compensare le resistenze.

$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{\partial}{\partial z} (pgh + p)$$

→ è ancora un'equazione differenziale alle derivate ordinarie

$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial z} \left(h + \frac{p}{\gamma} \right)$$

→ nella parentesi c'è la quota più il termine piezometrico, cioè il carico piezometrico che, nelle correnti rettilinee, varia come la pendenza motrice

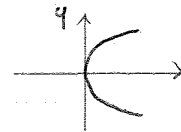
$$\mu \frac{d^2 v}{dy^2} = - \frac{\gamma i}{\mu}$$

Questa è un'equazione differenziale e si può integrare

$$\frac{dv}{dy} = - \frac{\gamma i}{\mu} y + c_1$$

Per ricavare c_1 , si nota che a $y=0$ si ha che, x simmetria

$$\frac{dv}{dy} = 0 \quad \rightarrow \text{è un profilo a derivata continua e ha un massimo}$$



Dunque

$$c_1 = 0$$

Si integra nuovamente

$$v(y) = - \frac{\gamma i}{2\mu} y^2 + c_2$$

Per ricavare c_2 , si osserva che a $y = \pm d$ la velocità è nulla e dunque

$$c_2 = \frac{\gamma i}{2\mu} d^2$$

La distribuzione di velocità così, in questo caso, vale

$$v(y) = \frac{\gamma i}{2\mu} (d^2 - y^2)$$

$$v(y) = \frac{\gamma i}{2\mu} (d^2 - y^2)$$



Così, senza spigoli, il profilo di velocità è un paraboloide di traslazione.

Mettendo gli spigoli, si osserva che la parte centrale del profilo ha forma pressappoco parabolica poi, avvicinandosi agli spigoli, c'è il problema che la parabola deve raccordarsi agli spigoli (se il bordo è circolare, il problema è banale; se il bordo è quadrato, il profilo si deforma e assume forme complesse).

PROPRIETÀ → VELOCITÀ MASSIMA: si ha a $y = 0$

$$v_{max} = \frac{\gamma i}{\mu} d^2$$

→ VELOCITÀ MEDIA: è la metà del paraboloide di traslazione, che è a $\frac{2}{3}$ della velocità massima

$$\bar{v} = \frac{2}{3} \frac{\gamma i}{2\mu} d^2 = \frac{\gamma i d^2}{3\mu}$$

Moto turbolento

1 Moto turbolento: è importante dal punto di vista ingegneristico perché compare in molti problemi su fiumi, tubazioni, su dettagli costruttivi riguardanti opere che si interfacciano su corsi d'acqua oppure in questioni sull'aria e l'acqua.

La turbolenza è così peculiare e complessa che può essere studiata come prototipo di altri problemi complessi, in quanto essa racchiude una serie di peculiarità che sono presenti in altri sistemi.

La turbolenza però è molto difficile da studiare ed esistono due approcci

→ si danno subito risultati empirici

→ si fa uno studio basato sulle proprietà della turbolenza

2 Caratteri qualitativi e generali di un fenomeno turbolento

~ come l'esperienza di Reynolds

→ caoticità: il termine "caos" indica un grande pasticcio, nel senso che ci sono traiettorie particolari e c'è grande complicità (in questo senso, si oppone al laminare che è regolare)

→ non linearità: deve valere la non linearità perché nell'esperienza di Reynolds, nel passaggio laminare-turbolento, non c'è un passaggio graduale ma in esso basta un piccolo incremento di portata x passare subito dal laminare al turbolento (c'è un valore soglia).

↓
vicino allo spartiacque c'è grande sensibilità del sistema e basta poco perché passi a mondi completamente diversi (con piccole variazioni ci sono grandi cambiamenti del sistema). In un fenomeno lineare, invece, piccole variazioni danno piccoli cambiamenti.

→ fenomeno fortemente dissipativo: portando un'uguale portata dal moto laminare al moto turbolento, la spesa energetica cresce tanto.
Del resto, nel laminare la particella segue la via più diretta possibile (retta) e invece nel turbolento perde tempo ed energia (si ricorda che si è in un fluido reale e si spende energia).



→ fenomeno fortemente diffusivo: quando c'è turbolenza, si incrementano i fenomeni di trasporto delle particelle in maniera notevole (ad es si mescola con il cucchiaino il caffè x velocizzare la diffusione dello zucchero). Se non ci fosse turbolenza, il fenomeno di diffusione sarebbe su un'altra scala.

↓
dal punto di vista astratto, la turbolenza rompe tutte le simmetrie del sistema

→ fenomeno rotazionale: quando inizia la turbolenza, si immagina che essa sia unione di tanti fenomeni rotazionali, cioè che contenga tanti vortici l'uno dentro l'altro. Il fatto che sia rotazionale, implica che ci sia bisogno di almeno 3 dimensioni.

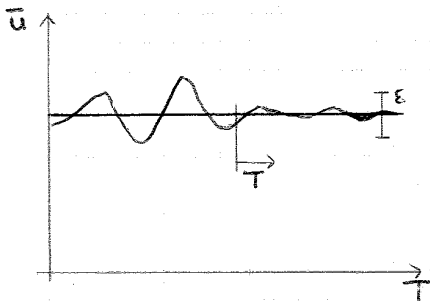
Dunque, la turbolenza è anche un fenomeno tridimensionale e, in quanto tale, esiste almeno in un mondo tridimensionale. Essa non esiste in un mondo bidimensionale perché, se un fluido giace sostanzialmente su un piano, allora la turbolenza tende a spegnersi perché ha bisogno di 3 dimensioni. Ciò è sfruttato x togliere la turbolenza in un tubo, facendo passare il fluido in una feritoia in cui il moto si laminarizza anche se il numero di Reynolds è alto.

ogni volta, all'argando la finestra, si vedono oscillazioni sempre più grandi.

Es Misurando il livello di mare con una boa, si notano all'aumentare del tempo nuove informazioni. Se ogni 30 minuti si sente l'effetto delle maree, ogni mese con strumenti molto precisi si notano le fluttuazioni dovute al Sole.

I matematici risolvono il problema ponendo

$$\bar{v} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} v(t) dt$$

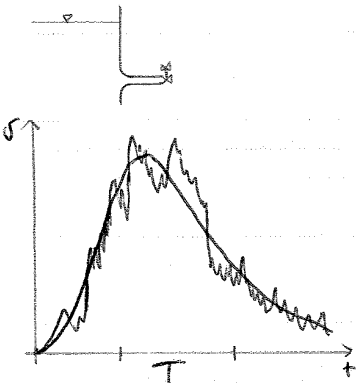


Però così c'è un problema nella misura perché, quando la si fa, non si può eseguirla all'infinito (che è un'astrazione), in quanto ciò è impossibile.

Così un operatore che sembrava indolore presenta dei problemi. Questo problema però è risolto in diversi problemi meccanici perché, a fortuna, NON È POSSIBILE FARE MISURE INFINITAMENTE PRECISE.

Ad es, nel calcolo della velocità media, ogni volta che si cambia il parametro T, si vedono dei valori \bar{v}' , \bar{v}'' , etc. con variazioni sempre più grandi. Quando però T cresce sempre di più, le oscillazioni si smorzano e a rigori non si annullano fino all'infinito ma, facendo una misura con errore ϵ , quando si è a quel punto è come se si avesse un valore costante.

↓
lo strumento, facendo un errore, riesce a nascondere ciò che non si riesce a vedere



→ un altro problema di questo modo di procedere è che ci si è abituati a scrivere segnali stazionari, in cui la media è qualcosa di costante.

Se però, ad es., la portata q varia nel tempo, si ha un SEGNALE VARIABILE. Ad es. un serbatoio collegato all'esterno con un rubinetto e pieno d'acqua, aprendolo l'acqua scende dal serbatoio. All'inizio la portata è nulla e poi aumenta.

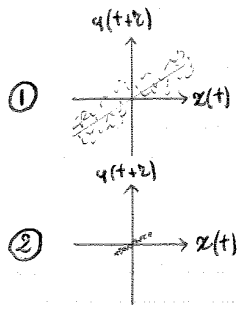
Misurando poi la velocità di un punto nel tempo, all'inizio essa è nulla e poi accelera e presenta oscillazioni.

Quando si cerca la velocità media, cosa si sta cercando? Di fatto si sta cercando la curva media, ma ciò si presta allo strumento concettuale della media finora utilizzato? Integrando infatti sull'intervallo T, si sta completamente annullando la variazione di velocità e così, a vedere ad es. le onde del mare, occorrerebbe calcolare la media in una frazione di secondo.

Quindi questo strumento va sicuramente in crisi quando si vuole filtrare via la turbolenza dal segnale variabile nel tempo.

Tale problema fu risolto da Kolmogorov che vide la turbolenza in un altro modo e sistemò il problema del parametro T inventandosi un altro modo a definire la media.

In questo caso, però, si tende a lavorare sullo stesso strumento matematico restringendo invece il campo d'azione, cioè si studia la turbolenza solo DOVE LE MEDIE SONO COSTANTI NEL TEMPO (non si considerano variazioni temporali).



Considerando infatti due fenomeni ① e ② tali che

$$\text{cov}_{xy}(\tau), ① = 30$$

$$\text{cov}_{xy}(\tau), ② = 2$$

si può dire che il fenomeno ① è più correlato del fenomeno ②? In realtà no perché può accadere che ① abbia una nuvola abbastanza dispersa e con correlazione ampia mentre ② ha una nuvola ristretta che però occupa poco spazio. Infatti il fenomeno ② è più correlato ma in ① il numero è più grande non perché è più correlato ma perché x e y sono più grandi.

Così non basta quel numero ma occorre dividere x qualcosa che dice come variano x e y . Occorre dunque NORMALIZZARE RISPETTO ALLE DIMENSIONI DELLA NUVOLE, ossia a quanto sono grandi le oscillazioni ossia allo scarto quadratico medio di x e y (che dice quanto sono disperse).

Si definisce così la cross-correlazione come

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{\overline{x(t)y(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{x^2}} \sqrt{\overline{y^2}}}$$

Si parla di "cross" perché ci sono due variabili e, se è alta, c'è correlazione.

OSSERVAZIONE: in realtà il concetto di correlazione non coincide con quello di legame dal punto di vista matematico.

Quando due fenomeni sono correlati, esiste allora un legame lineare tra i processi, mentre è possibile che esista un legame forte ma non ci sia correlazione (perché il legame non è lineare).

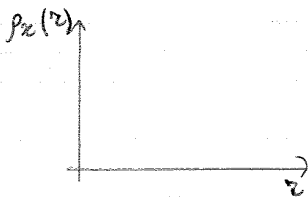
Il concetto di legame (dipendenza / indipendenza), inoltre, è più forte della correlazione perché, se non c'è legame, non c'è né legame né correlazione (non c'è né legame lineare né non lineare).

Prima si è parlato di "cross-correlazione" perché coinvolge due variabili ma esiste anche una versione "auto" in cui si lavora con un valore x e con un altro valore della stessa variabile x a un tempo successivo, guardando così come un fenomeno è correlato allo stesso fenomeno passato, cioè si guarda la CORRELAZIONE IN UN SINGOLO SEGNALE. In questo caso, si parla di autocorrelazione

$$\rho_x(\tau) = \frac{\overline{x(t)x(t+\tau)}}{\overline{x^2}}$$

Questo operatore risponde a una domanda: quello che è successo a un istante è legato a quello che è successo prima?

Ad es nel lancio di un dado in maniera casuale i fenomeni sono governati dal puro caso e sono indipendenti, a cui l'autocorrelazione è nulla.

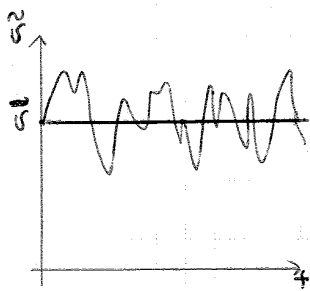


Per capire l'autocorrelazione, si fa un diagramma autocorrelazione $\rho_x(\tau)$ - sfasamento τ , in modo da capire quanto sia legato il segnale a se stesso un secondo prima, un'ora prima, etc.

Quando si ha $\tau = 0$, a capire quanto è legato il segnale con se stesso allo stesso istante basta notare che i due segnali sono identici, a cui

$$\rho_x(\tau = 0) = 1$$

5 Si sono dunque definiti i concetti di media e di correlazione.
 Ora si imposta l'idea di Reynolds e si cerca di attuare la separazione tra oscillazioni e media x ottenere quella che serve.



Una generica variabile viene chiamata \tilde{u} e viene immaginata come somma della media \bar{u} (di cui si vuole trovare l'equazione) e di una componente della turbolenza u'

$$\tilde{u} = \bar{u} + u'$$

Per definizione,

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \tilde{u}(t) dt$$

e inoltre si sa che

$$(\bar{u}') = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u'(t) dt = 0 \quad \rightarrow \text{la media degli scarti è nulla}$$

Ora si vuole operare la decomposizione di Reynolds di tutte le variabili e sperare di trovare l'equazione che descrive la sola velocità media \bar{u} . Se si riesce, allora x trattare la turbolenza basta considerare solo il valore medio.

Si applica tale decomposizione alle varie equazioni

→ equazione di continuità $\text{div } \vec{\tilde{u}} = 0$

→ equazione di Navier-Stokes $\rho(\vec{F} - \vec{a}) = \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{\tilde{u}}$

Le grandezze nelle equazioni sono istantanee, x cui è stato posto il simbolo "u" (contengono la turbolenza). Per risolvere le equazioni, si pone che

$$\vec{\tilde{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$$

$$p = (x_1, x_2, x_3)$$

Così l'equazione di continuità diventa

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\tilde{u}} &= \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial x_3} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}$$

Poi, x semplicità, si usa la convenzione degli indici ripetuti di Einstein, dove si toglie il simbolo "Σ" e, ogni volta che si vedono degli indici ripetuti, si sottintende che c'è una somma

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Così l'equazione di continuità diventa

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

Ora si lavora sull'equazione di Navier-Stokes, dopo averla divisa x la densità ρ

$$\frac{D\vec{\tilde{u}}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{\tilde{u}} - \vec{F}$$

Si studia l'accelerazione x l'i-esima componente \tilde{a}_i

Si dimostra che la media è un operatore lineare, e cui la media della derivata corrisponde alla derivata della media

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(\bar{u}_i + u_i)} = 0$$

Sempre e la linearità si ha che

$$\overline{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

la derivata della media della media è la derivata della media stessa

la media degli scarti di turbolenza, e definizione di scarto, è nulla

Si ha così che

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

Equazione di continuità in termini medi

Si osserva che rimane la stessa equazione di prima ma ora è applicata direttamente a variabili medie (proprio quello che si voleva). Se, infatti, quella di prima valeva istante x istante considerando componenti media e turbolenza, ora le equazioni coinvolgono solo grandezze mediate, e poter così eliminare la turbolenza.

Ora si ripete la stessa operazione anche all'equazione del moto, trattando separatamente ogni addendo

① $\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t}$ Si applica la decomposizione di Reynolds

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial (\bar{u}_i + u_i)}{\partial t}$$

Si applica l'operatore media

$$\overline{\frac{\partial (\bar{u}_i + u_i)}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}$$

Come prima, l'accelerazione locale diventa applicata direttamente solo al valore medio. Così in essa scoppia la turbolenza e si mantiene la stessa struttura matematica (derivata rispetto al tempo), applicata però solo alla grandezza di interesse

③ $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}$ Si applica la decomposizione di Reynolds

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial (\bar{p} + p)}{\partial x_i}$$

Si applica l'operatore media

$$-\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial (\bar{p} + p)}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}$$

↓
si suppone $\rho = \text{cost}$

→ stessa struttura matematica ma, al posto della variabile che cambia istante x istante, si mette la grandezza mediata

Ripartendo sugli assi i valori u_i e u_j , a ogni istante si riportano su questo piano le coppie assunte dal sistema. Dopo un po', si ha

→ **NUVOLE CIRCOLARE:**

Le variabili sono scorrente e dunque si sa già che la media del prodotto è nulla. Così l'accelerazione convettiva ha generato la stessa relazione scritta in termini di valore medio e si è eliminato il termine non lineare. In tal modo si genera un'equazione in termini medi, identica a quella di Navier-Stokes ma in essa non c'è più traccia della turbolenza e diventa completo lo svincolamento dal moto medio.

→ in realtà, la cross-correlazione è diversa da zero, cioè la nuvola di punti tende a orientarsi attorno al primo e al terzo quadrante. Si nota che

$$\overline{u_i} = 0$$

$$\overline{u_j} = 0$$

→ proiettando la nuvola sull'asse x e y e si hanno tanti punti sopra e sotto lo zero

Invece sicuramente vale che

$$\overline{u_i u_j} \neq 0$$

→ perché si ha il prodotto di quantità concordi (positive e negative), a cui la cross-correlazione è una quantità positiva

Le equazioni mediate così diventano

→ **EQUAZIONE DI CONTINUITÀ**

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0$$

→ **EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES**

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \underbrace{\overline{u_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

l'accelerazione convettiva di due termini, uno "buono" (cioè uno medio) e l'altro no

Dunque non si è riuscito a separare il moto medio (quello che interessa) perché nell'equazione del moto medio interviene la turbolenza, che esiste perché il campo di moto turbolento è cross-correlato

↓
x effetto della turbolenza, non si riesce ad applicare la forbice x separare i moti e tutto è intrinsecamente legato, cioè non si riesce a spezzettare e a studiare i sistemi separatamente. La complessità della turbolenza, infatti, è che prendendo una certa scala, questa è influenzata da scale più piccole. Ma altri termini, **TUTTO INFLUENZA TUTTO** e x questo non è possibile separare i moti.

PROPRIETÀ → CORRELAZIONE NEL MOTO TURBOLENTO

Intuitivamente, un mondo governato da una nube circolare è un mondo governato dal puro caso e qui

$$\overline{u_i u_j} = 0$$

Grazie a ciò, si riuscirebbe a separare i valori medi.

Questa funzione non esiste in realtà ma si cerca in qualche modo di chiudere questo problema (cioè si cerca una relazione di chiusura), andando a "inventare" una funzione che non è corretta ma che approssimi la realtà.

INTERPRETAZIONE FISICA DELLE CROSS-CORRELAZIONI

Data che sono comparse queste cross-correlazioni, si cerca di capire cosa significano fisicamente. Per questo, si considera l'equazione di moto

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{\frac{D\bar{u}_i}{Dt}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{u_i u_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - g \delta_{i3}$$

Essa si può riscrivere ponendo che

$$\Phi_{ij} = \bar{p} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \rho \overline{u_i u_j}$$

la pressione compare solo quando $i=j$ (è sulla diagonale)

Da qui si ha che

$$\frac{D\bar{u}_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi_{ij} - g \delta_{i3}$$

Valutando la derivata euleriana i -esima della velocità media, cioè seguendo una particella e chiedendosi come va la velocità media, si nota che se fosse nulla, allora la velocità media sarebbe fissa. In realtà non è così ma agiscono degli operatori che cercano di smuovere il sistema dalla sua velocità media

- un primo operatore è la GRAVITÀ perché a una variazione di energia potenziale si manifesta energia cinetica (c'è sempre un gioco tra energia potenziale e cinetica)
- esistono anche dei gradienti spaziali di tensioni, cioè SFORZI (le particelle sono circondate da altre che tirano, spingono, etc.), e se i gradienti esistono, allora la velocità media cambia.
 - Gli sforzi sono costituiti da 3 pezzi
 - porzione legata a gradienti spaziali di pressione e, infatti, dipende da quanto il fluido spinge davanti e indietro
 - gradienti spaziali legati alla legge di Newton x i fluidi reali, cioè tensioni tangenziali che si manifestano perché c'è viscosità (muovendosi c'è un gradiente di velocità che, x la viscosità, determina tensioni viscose che modificano il gradiente - x il fluido perfetto non esistono)
 - poiché si sta sommando, anche l'ultima è una componente di tensione ed è una tensione che si forma a seguito del fatto che esistono delle cross-correlazioni nel campo di moto turbolento. Le correlazioni presenti nel moto turbolento, infatti, generano delle tensioni che vanno a influire sul moto e dunque si ha un tensore. Queste tensioni sono dette tensioni di Reynolds e sono tipiche del campo turbolento

$$-\rho \overline{u_i u_j} = -\rho \begin{bmatrix} \overline{u_1^2} & \overline{u_1 u_2} & \overline{u_1 u_3} \\ \overline{u_1 u_2} & \overline{u_2^2} & \overline{u_2 u_3} \\ \overline{u_1 u_3} & \overline{u_2 u_3} & \overline{u_3^2} \end{bmatrix}$$

Così, guardando il moto turbolento con il filtro del moto medio, si scrivono le stesse equazioni purché si mettano delle nuove tensioni, che sono generate dalla correlazione. In questo senso, l'effetto della turbolenza è che nascono delle nuove tensioni che non si possono spiegare con la solita viscosità e nascono x la correlazione.