



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1700A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Aimar Mauro

MATERIA: Geotecnica - prof. Lancellotta (2015)

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

IDENTIFICAZIONE E CLASSIFICAZIONE

1 La prima cosa da fare con un terreno è identificarlo e CLASSIFICARLO

→ PERCHÉ : è lecito presumere che materiali che ricadono nella stessa classe hanno comportamento simile e questo rende importante la classificazione

+
dal punto di vista pratico, nel predimensionamento dell'opera, questa classificazione fornisce degli ordini di grandezza x dimensionare e serve x indirizzare le indagini

→ COME : x poter classificare, servono alcuni indici e proprietà detti proprietà indice, che si mantengono indipendentemente dallo stato del materiale (x cui possono essere determinate da prove semplici).
Queste prove, però, devono essere condivise sia nella simbologia sia nelle definizioni. Infatti, dal punto di vista scientifico, il linguaggio è un codice che serve x trasmettere informazioni ma questo può trasmettere informazioni solo quando esso è condiviso (cioè stessi simboli hanno lo stesso significato).

Alla luce di questo, si prova a classificare il materiale.
Ad es. in una ghiaia silicea si nota che le particelle sono arrotondate (il grado di arrotondamento si legge dalla curvatura degli spigoli - qui sono arrotondati) e sferiche (la sfericità si ha quando c'è la stessa dimensione nelle varie direzioni).
Questa morfologia è molto importante perché dà la storia del materiale, che ha subito notevoli processi di trasformazione e di disintegrazione e di spostamento, indotto da ghiacciai e fiumi (in cui avviene anche l'abrasione, cioè la smussa).

↓ la morfologia delle particelle porta dietro di sé molte informazioni legate alla storia della particelle

Ora, si vogliono collocare i materiali in classif. si riscontrano comportamenti simili. La classificazione si basa sulle proprietà indice, che si dividono in 2 categorie

→ proprietà indice delle particelle (specifiche delle singole particelle)

→ DIMENSIONI

→ FORMA

→ MINERALOGIA

→ proprietà indice dell'aggregato di particelle (perché nei problemi ingegneristici si ha a che fare non con le singole particelle ma con un deposito)

→ nei materiali a grana grossa si usa la DENSITÀ RELATIVA

→ nei materiali a grana fine si usa la CONSISTENZA

Per rendere quantitativo il discorso, si fa riferimento alle FASI COSTITUENTI il materiale, cioè l'insieme delle particelle con i vuoti riempiti di acqua, aria, etc. Dunque si divide il volume totale in

a esso si associa
una massa

→ volume V_s , competente alle particelle solide

$$\Rightarrow m_s$$

→ volume d'acqua V_w

$$\Rightarrow m_w$$

→ volume d'aria V_a

$$\Rightarrow m_a = 0$$

Ora l'ingegnere deve descrivere la struttura del materiale (come sono disposte le particelle).

Ad es. un deposito di sabbia compattata, se si costruisce sopra di esso, non ha cedimenti. Se invece è sciolta, questo può avere problemi di cedimento anche differenziale e lì c'è un problema di stabilità.

⇒ dallo studio della STRUTTURA si può dedurre il potenziale COMPORTAMENTO DEL MATERIALE

Dunque bisogna saper descrivere la struttura e, a questo, si usa

→ porosità: è il rapporto tra il volume di vuoti e il volume totale (quanto volume è costituito da vuoti)

$$n = \frac{V_v}{V}$$

Si nota che la struttura così è descritta da una grandezza scalare, priva di direzionalità.

↪ la porosità è poco usata perché si normalizza il volume dei vuoti rispetto al volume totale. Quando però si sottopone a sforzo un campione e lo si deforma, cambia la porosità ma anche il volume totale. Cioè si normalizza rispetto a qualcosa che cambia nel processo deformativo e ciò non va bene.

Si può però notare che, durante la deformazione, le particelle ruotano e il termine solido non cambia e questo costituisce l'invariante.

Da qui si definisce l'indice dei vuoti, rapporto tra volume dei vuoti e volume occupato dalla frazione solida

$$e = \frac{V_v}{V_s}$$

→ a volte si usa come grandezza scalare il volume specifico, cioè il volume che ha come parte solida un volume unitario

$$v = 1 + e$$

Si nota che queste variabili sono legate tra di loro e, applicando la loro definizione, si possono trovare le relazioni.

Inoltre l'indice dei vuoti ha un range in cui si va a collocare

→ avendo particelle sferiche, queste si impacchettano in modo da rendere minimo il volume dei vuoti ($e = 1,35$) e massimo ($e = 1,42$)

→ in una sabbia a granulometria assortita si ha $e = 1,43 \div 1,67$ (⇒ maggiore resistenza e minore deformabilità), mentre a granulometria uniforme si ha $e = 1,51 \div 1,85$

Se così il comportamento di un materiale sabbioso è determinato dallo stato d'aggregazione e dall'addensamento, ora si sfrutta il contenuto d'acqua. Infatti, se asciutta, l'argilla è molto dura e resistente; se bagnata, è molto deformabile.

Di conseguenza questa quantità governa il comportamento e permette la classificazione dell'argilla perché, indirettamente, riflette il suo contenuto mineralogico. Essendo, secondo la definizione di Atterberg, vale

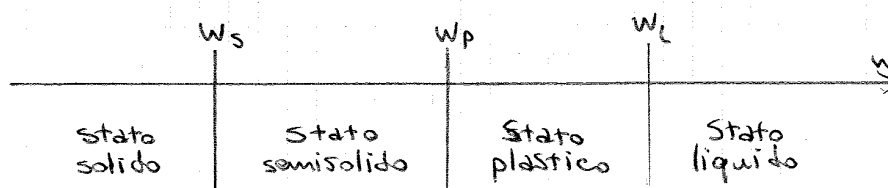
$$w = \frac{M_w}{M_s}$$

M_w = massa della fase fluida
 M_s = massa della fase solida

In genere è compresa tra 20 e 70%.

Si usa anche il grado di saturazione, cioè la frazione di volume occupata dall'acqua.

A partire da questi concetti, Atterberg propose una classificazione dei materiali in cui, all'aumentare del contenuto d'acqua, si passa dallo stato solido al liquido.

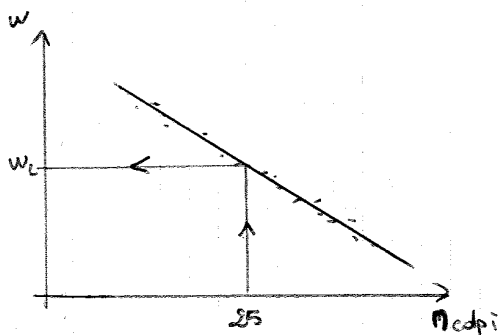


Lo stato di interesse è lo stato plastico e i suoi limiti, detti limiti di Atterberg, sono il limite plastico w_p e il limite liquido w_L .

Come si misurano i limiti?

→ w_p : si considera un campione di argilla e si crea un bastoncino spesso circa 3 mm su una lastra di vetro. Osservando, nel momento in cui compaiono delle fessure, significa che si è raggiunto il limite plastico. Da qui si pesa il campionario, lo si essicca, lo si ripesa e la differenza dà il volume d'acqua che determina il limite plastico.

→ w_L : lo si determina con un apparecchio detto CUCCHIAIO DI CASA GRANDE. Esso è una vaschetta concava (simile a un cucchiaino) collegata a un motorino ad azione manuale. Si spalma una certa quantità di argilla e si realizza un solco di circa 10 mm. Poi con il motorino si danno dei colpi e si conta il numero di colpi finché non si chiude il solco. Se c'è poca acqua, servono tanti colpi; se è semi-liquida, servono pochi colpi. Da qui si fanno tante pastelle omogenee e le si provano tutte, in modo da realizzare un diagramma contenuto d'acqua - numero di colpi (in scala logaritmica). Il limite liquido w_L corrisponde a 25 colpi e da qui si legge w_L .



→ indice di plasticità: è l'intervallo all'interno del quale il materiale ha comportamento plastico

$$IP = w_L - w_p$$

Linguaggio della meccanica dei continui

1 DAL DISCRETO REALE AL "CONTINUO ASTRATTO":

si sa che la natura dei materiali è una natura discreta ma, dal punto di vista ingegneristico, non sono trattati come tali.

Ad'es. descrivere il comportamento dell'argilla attraverso il comportamento delle lamelle è impossibile.

⇒ in ingegneria si costruisce un modello alternativo e astratto del mezzo continuo. Questo è un costrutto mentale che non esiste in realtà ma è in grado di spiegare la realtà.

In questo senso, c'è una dualità nel percorso conoscitivo perché, da una parte, non si dimentica la discretizzazione e, dall'altra, si sa che non la si può risolvere e si ricorre al concetto di continuità (si costruisce un modello astratto).

⇒ però necessario costruire questo modello astratto?



Si consideri un campione costituito da particelle solide e vuoti interstiziali, e si consideri una qualunque proprietà, come la densità dei granelli solidi. Essa non è una quantità definita in ogni punto (come la pressione interstiziale dell'acqua) e questo, dal punto di vista matematico, sarebbero funzioni discontinue.

Così non si potrebbe applicare al volume lo strumento potente del calcolo differenziale e integrale.

Per questo, si immagina di trasformare il volume in un continuo astratto, immaginando che la materia sia pervasiva dell'intero dominio.

In questo processo, se si prende un qualunque punto z , si nota che qualunque proprietà diventa una funzione continua del punto, cioè diventa un CAMPO (es densità, pressione...)

⇒ c'è il grande vantaggio concettuale che tutte le proprietà di interesse diventano un campo e qui si possono usare i vari strumenti.

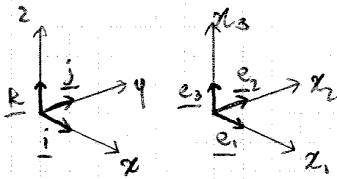
Così si comincia a parlare di meccanica dei continui:

essa è l'immaginario più generale che consente di unificare la meccanica dei fluidi, la meccanica dei solidi e la meccanica dei mezzi porosi, consentendone al tempo stesso un' immediata decifrazione.

Ciò significa che questa costruzione è immaginaria ma è quella più generale, perché è applicata allo stesso modo alla meccanica di solidi, fluidi, etc. e dunque è uno strumento unificante (abbatte le barriere). Inoltre, consente un' immediata decifrazione, cioè si sanno interpretare relazioni e concetti.

Ora si ~~può~~ considera un vettore che, in notazione simbolica, può essere scritto come

$$\underline{v}$$



Esso può essere rappresentato in termini di componenti. Per parlare di componenti, prima occorre fissare una terna di riferimento xyz con versori $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$. In realtà, nella notazione, le coordinate e i versori sono dati dallo stesso simbolo. Ora si scrive il vettore come

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \underline{e}_i$$

Questa scrittura si dice espansione del vettore nelle sue componenti (v_i è la componente rispetto a \underline{e}_i).

Einstein poi semplificò inventando una notazione e di sommatoria in cui, ogni volta compare un indice ripetuto, a esso si attribuisce una sommatoria. Così l'indice ripetuto non indica una componente ma un'operazione e, a questo, si parla di indice fittizio. Se poi questo non dà componenti, si può usare un qualunque indice.

Se l'indice non è ripetuto, si parla di indice libero

Così il vettore si scrive come

$$\underline{v} = v_k \underline{e}_k$$

↓
indice ripetuto
⇒ operazioni

Es Interpretare in termini matematici le operazioni

$$\rightarrow a_i = T_{ij} b_j$$

Essa rappresenta 3 equazioni, perché si può scrivere un'equazione a ogni i componente di \underline{a} (perché i è un indice libero). A destra c'è un indice ripetuto e, attribuendo a j i valori 1, 2 e 3, significa che lì ci sono 3 membri. Ad es. si ha

$$a_i = T_{ij} b_j \quad \rightarrow \text{un'equazione riguardante la componente } a_i \text{ con 3 termini a destra (somma sui valori } j)$$

$$\rightarrow B_{ij} = D_{ijk} \epsilon_{hk}$$

Ci sono 9 equazioni perché a l. membro ci sono 2 indici liberi i e j e, a destra, ci sono 2 indici ripetuti, a cui compaiono 9 termini

⇒ c'è una grande sintesi, in questa scrittura nella scrittura delle equazioni e c'è una grande SEMPLIFICAZIONE

A questo punto, si consideri la matrice

$$\begin{bmatrix} a_x & b_{xy} & b_{xz} \\ b_{yx} & a_y & b_{yz} \\ b_{zx} & b_{zy} & a_z \end{bmatrix}$$

Si nota che questa rappresentazione non funziona perché si usano solo 2 lettere x 9 elementi e 2 solo indici. Ora si scriva

$$\begin{bmatrix} E_x & \nu_{xy} & \nu_{xz} \\ \nu_{yx} & E_y & \nu_{yz} \\ \nu_{zx} & \nu_{zy} & E_z \end{bmatrix}$$

Dal punto di vista matematico, questa matrice non funziona perché è una scrittura convenzionale e ingegneristica a rappresentare il tensore degli sforzi. Se però volessimo tradurre in notazione indiciale, ciò non andrebbe bene perché, rigorosamente, si deve usare un solo simbolo

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix}$$

La componente normale è la componente con indici ripetuti e la componente tangenziale è la componente con indici misti. Così si può scrivere solo

$$E_{ij}$$

Ora si immagina un elemento di volume soggetto a uno stato di sforzo e si immagina un materiale con legge costitutiva elastica, lineare e isotropa. Quanto vale la dilatazione lineare ϵ_{yy} lungo l'asse y?

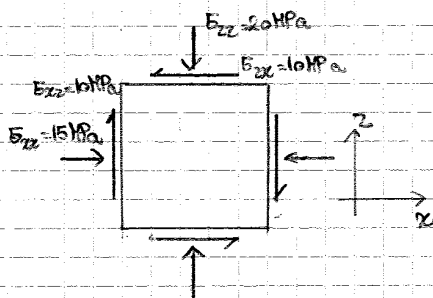
Questo problema, pur essendo elementare, è difficile perché non è sintetico. Facendo invece uso della notazione indiciale, esso si semplifica

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} E_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} E_{ij} \quad \text{Legge costitutiva elastica in notazione indiciale}$$

Da qui si ha

$$\epsilon_{yy} = \epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} (E_{11} + E_{33})$$

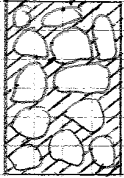
Si nota che in questa risposta non intervengono tensioni tangenziali perché la risposta del mezzo elastico lineare è disaccoppiata (la risposta normale è funzione delle sole tensioni normali)



MODELLO DEI CONTINUI SOVRAPPosti

Si è visto che lo strumento di rappresentazione del reale discreto è il continuo perché così si possono adottare gli strumenti dell'analisi infinitesimale (poiché si riduce a dei campi).

Però finora, nell'idraulica e nella scienza delle costruzioni si è parlato di un mezzo monofase.



Cosa succede a un mezzo con più fasi?

Infatti, anche quando si considera un terreno saturo (un suo elemento presenta fase solida e vuoti interstiziali riempiti d'acqua), si capisce che questo mezzo è perlomeno un mezzo bifasico.

Sapendo allora che il concetto di continuità vale x ogni mezzo, si può immaginare che esista un continuo x la fase solida (in rosso) e un continuo per la fase liquida (in blu).
Dunque esistono due CONTINUI SOVRAPPosti.



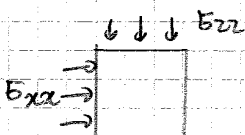
Da qui deriva il modello di continui sovrapposti:

in un qualunque punto \mathcal{P} sono presenti simultaneamente sia la fase solida che la fase liquida e dunque in quel punto sono definite sia le proprietà del fluido che del solido.
In realtà, non è così perché in quel punto è presente del fluido o un granello ma si è rimossa la parte discreta.



il passo fondamentale è che in ogni punto del mezzo continuo sono presenti **SIMULTANEAMENTE** sia fase solida che fluida e dunque, riferendosi allo stato di sforzo, in esso si possono definire sia il tensore degli sforzi relativo alla fase fluida che solida.

2. Principio degli sforzi efficaci:



I due continui sono continui paralleli, cioè agiscono in parallelo.

Così, considerando un elemento e applicando uno stato di sforzo generico, x comprendere la risposta costitutiva del mezzo, è importante comprendere l'aliquota che compete allo stato solido e l'aliquota che compete allo stato liquido (se no non si può calcolare la deformazione).

Allora lo stato tensionale applicato al contorno si dice tensione totale, che è la tensione al contorno e deve soddisfare le equazioni di equilibrio.
Ora bisogna capire come trovare la ripartizione dello stato di sforzo, poiché il comportamento dei mezzi è completamente diversa (l'acqua non sopporta tensioni tangenziali a differenza dello scheletro solido e la compressibilità dell'acqua è diversa dalla compressibilità dello scheletro solido).

⇒ x capire la risposta del mezzo poroso bisogna sapere l'aliquota di sforzo competente a ciascuna fase.

Da qui allora si procede alla ripartizione degli stati di sforzo, Fatta da Terzaghi (considerato padre della moderna meccanica delle terre).

PROPRIETÀ → le tensioni tangenziali sono tutte prese dallo scheletro solido, perché l'acqua non le sopporta

$$\tau_{xy} = \tau'_{xy}$$

→ le tensioni normali si ripartiscono nell'acqua e nello scheletro

$$\sigma_{xx} = u + \sigma'_{xx}$$

→ finora non si è introdotta nessuna ipotesi di tipo costitutivo ma solo una definizione, che è quella di tensione efficace

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u \delta_{ij}$$

Il principio sta invece in un postulato, cioè il principio degli sforzi efficaci:

ogni effetto misurabile (es. variazione di volume, di resistenza, deformazioni, etc.) dipende solo e unicamente dalle tensioni efficaci

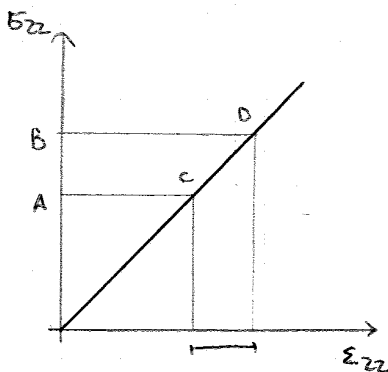
↓
postulato fondamentale nella meccanica delle terre

Ad es. nel campione, la variazione di volume dipende non solo dalle tensioni totali ma solo dall'aliquota efficace. Dunque il problema è più complesso perché la conoscenza delle tensioni totali non è sufficiente a conoscere il campo deformativo ma serve anche la pressione dell'acqua.

3 Stato tensionale iniziale:

nella sua definizione, viene applicato tale principio

PREMESSA: IMPORTANZA DELLO STATO TENSIONALE INIZIALE



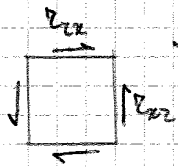
Si consideri, a semplicità, un materiale lineare, soggetto a uno stato di sforzo monoassiale (con tensione σ_{22} e componente ϵ_{22} correlativa, cioè quella che fa lavorare la componente di tensione).

Si suppone di voler calcolare l'incremento di deformazione dovuto all'incremento di sforzo: si passa nello sforzo da A a B e si ottiene un segmento.

Se si fa la stessa operazione considerando altri punti, l'incremento di deformazione $d\epsilon_{22}$ sarebbe sempre dato da

$$d\epsilon_{22} = \frac{d\sigma_{22}}{E}$$

indipendentemente dal punto considerato, cioè partendo da più punti, c'è lo stesso incremento di deformazione (che dipende solo dall'incremento di stato tensionale).

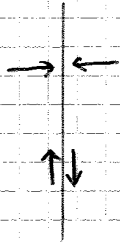


→ le tensioni tangenziali sono definite positive se suggeriscono una coppia antioraria. In questo caso,

$$\tau_{xz} > 0 \quad \tau_{yz} < 0$$

Sotto queste ipotesi sul contorno, a calcolare lo stato di sforzo nell'elemento, bisogna calcolare le 6 (non 9 x la simmetria) componenti di tensione.

Se però si ha un mezzo infinito e non ci sono proprietà che cambiano in direzione orizzontale, ogni piano verticale è un piano di simmetria.

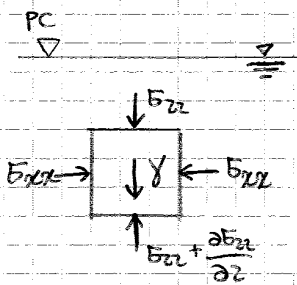


In un piano di simmetria, però, le tensioni tangenziali sono nulle.

Se, infatti, si considera la σ_{zz} , dall'altra parte c'è la stessa σ_{zz} a soddisfare la condizione di equilibrio locale e questo soddisfa sia l'equilibrio sia la simmetria.

Viceversa con le tensioni tangenziali, a avere l'equilibrio, si perde la simmetria. Esse, a loro natura, hanno proprietà antisimmetriche e dunque non possono rispettare la simmetria. Perché la si rispetti, tali tensioni devono essere nulle.

⇒ le TENSIONI TANGENZIALI SONO NULLE SU TUTTI I PIANI VERTICALI e dunque SU TUTTI I PIANI ORIZZONTALI.



Così il tensore si riduce ad avere solo più 3 componenti e i piani considerati sono piani principali (perché su di essi non agiscono tensioni tangenziali). Lo stato tensionale sull'elemento è rappresentato da

$$\begin{aligned} &\rightarrow \sigma_{zz} \\ &\rightarrow \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz \\ &\rightarrow \sigma_{xz} \end{aligned}$$

e lo stato tensionale si riduce a una matrice diagonale.

Ora, a definire lo stato tensionale, occorre sapere σ_{xz} e σ_{zz} in ogni punto. Per fare ciò, si immagina che il peso dell'unità di volume sia γ , da cui si definisce un certo vettore forza di volume.

→ TENSIONE VERTICALE σ_{zz} (comportamento al variare di z):

se si è nel continuo, questa deve soddisfare l'equazione di equilibrio locale, espressa dalle equazioni indefinite di equilibrio (definite in ogni punto)

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \gamma = 0$$

Così, solo grazie al fatto che non esistono tensioni tangenziali, il risultato è che c'è LINEARITÀ.
ora si integra

$$\sigma_{zz} = \gamma z + c$$

Ora si sceglie la soluzione che interessa, sulla base della condizione al contorno, data dalla frontiera libera perché sul p.c. non è applicato nessun carico

$$\sigma_{zz}(z=0) = c = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{zz} = \gamma z$$

$$\sigma'_{xx} = k(z) \sigma'_{v0}$$

soddisfa l'equazione, anche se il moltiplicatore k dipende da z .

Così, ragionando sulla struttura, si è ottenuta la tensione. Poiché questa è una tensione efficace iniziale, si scriverà:

$$\sigma'_{h0} = k_0 \sigma'_{v0}$$

k_0 = COEFFICIENTE DI SPINTA A RIPOSO

Evidenze sperimentali dimostrano che

→ nelle sabbie

$$k_0 = 0,45 \div 0,55$$

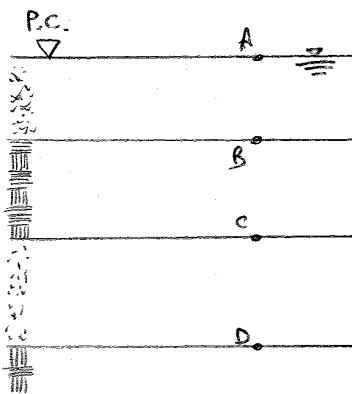
→ nelle argille

$$k_0 = 0,55 \div 0,70 \text{ (fino a 2)}$$

La tensione orizzontale totale invece vale

$$\sigma_{h0} = \sigma'_{h0} + u_0$$

ES (APPLICAZIONE)



Si immagini di avere una certa stratigrafia

materiale	spessore	γ	k_0
sabbia	4 m	20 kNm ⁻³	0,45
argilla e limo	5 m	18 kNm ⁻³	0,6
sabbia	5 m	20 kNm ⁻³	0,5

↓
in genere la densità del materiale di interesse è tra 18 e 22 kNm⁻³

Si suppone che la falda coincida con il P.C..

Fotografare lo stato tensionale iniziale, cioè tracciare il diagramma che dà lo stato tensionale.

Per fare ciò, si calcola la tensione in alcuni punti caratteristici

$$\sigma_{v0}$$

→ A

Ci è una condizione al contorno di frontiera libera, in cui

$$\sigma_{v0} = u_0 = 0$$

→ B

se si è in presenza di TERRENI STRATIFICATI, si immagina che la tensione sia somma dei pesi γ x i relativi spessori Δz

$$\sigma_{v0} = \sum \gamma_i \Delta z_i$$

$$\sigma_{v0} = \sigma_{v0}(A) + 20 \cdot 4 = 80 \text{ kPa}$$

σ_{v0} nel punto precedente + incremento di tensione dovuto allo strato di sabbia

$$u_0 = \gamma_w z_w = 9,81 \cdot 4 \approx 40 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \sigma'_{v0} = 80 - 40 = 40 \text{ kPa}$$

Poi, x calcolare la tensione orizzontale totale da quella efficace, si ha

$$E_{ho} = \begin{cases} 18 + 40 = 58 \text{ kPa} \\ 26 + 40 = 66 \text{ kPa} \end{cases}$$

Così, c'è un certo PROCEDIMENTO PER IL CALCOLO DELLE TENSIONI

→ si calcola E_{vo}

→ si calcola u_o (x farlo, bisogna tener conto delle condizioni di Falta - spesso non banali)

→ da qui si calcola E_{vo}'

→ si moltiplica x k_o e si ottiene E_{ho}' (solo ora si può fare tale operazione perché k_o si applica solo alla tensione efficace)

→ da qui si ottiene E_{ho}

TABELLA RIEPILOGATIVA

Punto	E_{vo}	u_o	E_{vo}'
A	0	0	0
B	80	40	40
C	170	40	80
D	270	140	130

DIAGRAMMA DELLE TENSIONI

→ E_{vo} : poiché essa vale γz , essa è lineare. Quando poi si arriva all'interfaccia, se cambia γ , cambia la pendenza

⇒ LINEARITÀ + CONTINUITÀ + CAMBIO DI PENDENZA

→ u_o : in dipendenza delle condizioni di contorno, si ha andamento lineare

⇒ LINEARITÀ

→ E_{vo}' : è data dalla differenza tra i diagrammi

⇒ LINEARITÀ + CONTINUITÀ + CAMBIO DI PENDENZA

→ E_{ho}' : si moltiplicano i punti x i vari coefficienti di spinta e, x il cambio di γ , ci sono salti nell'interfaccia

⇒ LINEARITÀ + DISCONTINUITÀ (il salto è dato dalla differenza dei coefficienti di spinta a riposo - se k_o diminuisce, la curva va in dentro; se k_o aumenta, la curva va in fuori) + CAMBIO DI PENDENZA (in funzione di γ e k_o)

In questo caso, rispetto a h_1 , la quota piezometrica del II acquifero vale $h_2 = 16 \text{ m}$.

A questo punto, se tra 2 acquiferi c'è una differenza di carico idraulico, l'acqua non è più in condizioni statiche ed è in moto e lì non si può più calcolare la pressione come γz . Infatti, qui c'è un moto di filtrazione legato alla differenza di carico.

Allora come si calcola la pressione?

Si potrebbero scrivere le equazioni differenziali del moto e ricavare la pressione x via analitica.

Si sa però che la quota piezometrica è sinonimo di energia potenziale e, se esiste una differenza di energia potenziale tra due punti, avviene moto. La quota piezometrica vale

$$h = \frac{p}{\gamma} + \frac{u}{\gamma_w} \quad \frac{u}{\gamma_w} = \text{altezza piezometrica}$$

Ovviamente, passando da un punto all'altro, caratterizzato da una differente energia, parte dell'energia è spesa x il moto e inoltre la differenza non dipende dalla posizione del piano $\gamma = 0$:

il motore è $h_2 - h_1$, con $h_2 > h_1$, x cui c'è un moto di filtrazione diretto dal basso verso l'alto (da punti a potenziale maggiore verso potenziali minori).

Questa energia è dissipata lungo il percorso ma l'acquifero ha un'elevata conducibilità, mentre nell'acquicludo è minore. Ciò accade perché la filtrazione avviene attraverso i fori interstiziali, ma la dimensione media è piccola (in ordine di grandezza coincide con la dimensione delle particelle) e la perdita di carico avviene x attrito.

Da qui si capisce che la perdita di carico non avviene uniformemente lungo tutta l'altezza ma si concentra nello strato meno permeabile (dove incontra più resistenza), cioè l'acquicludo.

\Rightarrow da qui, a livello ingegneristico, si assume che le perdite di carico nel moto all'interno dell'acquifero sono trascurabili e si verificano completamente nell'ambito dell'acquicludo (questo è dimostrato sperimentalmente).

A questo punto, si considerino due punti A e B nell'acquifero profondo. Quando vale il carico idraulico h in questi due punti?

Poiché nell'acquifero le perdite di carico (anche se c'è moto) sono trascurabili, il carico è costante e vale 16 m .

Da qui, se si vuole avere l'andamento della pressione interstiziale u nell'ambito dell'acquifero profondo, data una retta di riferimento, si parte da $+16 \text{ m}$ e si traccia una retta di pendenza γ_w . Tale retta, però, vale solo x l'acquifero inferiore, poiché la misura è fatta rispetto a tale acquifero.

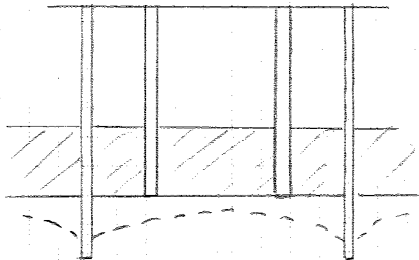
Ora si fa lo stesso ragionamento x il primo acquifero, con i punti C, D ed E. In questo caso, x tutti i punti il carico è $+13 \text{ m}$ e, x determinare l'andamento, si parte dal piano dei carichi idraulici e si scende con una retta di pendenza γ_w (è parallela all'altra). Si ottiene così l'andamento x il I tratto.

Da qui, se si prendano un punto P e uno R alla frontiera, in R il carico è $+16 \text{ m}$ e in P il carico è $+13 \text{ m}$. C'è dunque una differenza di carico che innescò un moto di filtrazione in cui si dissipa energia (la differenza $16 - 13$ è dissipata nell'argilla). Se poi lo strato di argilla è omogeneo, allora l'andamento delle pressioni è lineare.

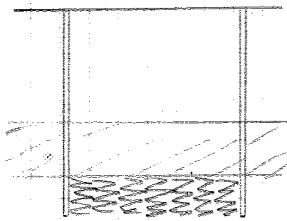
\Rightarrow l'andamento delle pressioni interstiziali è rappresentato da una spezzata continua (in quanto, visto che il tensore è isotropo, deve soddisfare l'equilibrio) e con punti angolosi. Da qui, noto il grafico delle tensioni, è nota la tensione verticale efficace e dunque anche quella orizzontale.

Dunque, individuato uno scenario di collasso ($x \cdot \gamma = u$), ci si pone a una certa distanza. Le norme, tra l'altro, indicano sempre un coefficiente minimo e ignorano il fatto che l'indice dev'essere sempre commisurato allo scenario di rischio (e al suo carattere - es. presenza di sequi premonitori) dovuto al collasso.

Si è capito che causa dell'instabilità è la pressione interstiziale u . Allora, a risolvere il problema, ci sono più rimedi:



→ si immagina che il materiale lasciato in opera sia insufficiente in termini di spessore a resistere alla pressione dell'acqua che si sviluppa. Allora si realizza un numero conveniente di pozzi che esportano acqua in modo da ridurre la pressione e far sì che il carico abbia un certo andamento. Questo è uno schema ricorrente nelle situazioni di scavo in presenza di controllo delle condizioni al contorno ma è oneroso perché i pozzi devono funzionare a tutta la durata dello scavo (anche anni).

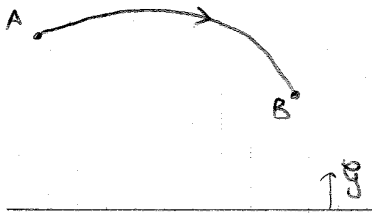


→ si può realizzare un TAMPONE DI FONDO in cui, facendo uno scavo dal P.C., si realizzano colonne di jet grouting (si inietta cemento) e si consolida il terreno in modo da creare un tampone vero e proprio, che risulta impermeabile grazie alla compenetrazione tra le varie colonne. Basta solo dimensionare lo spessore in modo da contrastare la sottospinta.

↓
 o si attenua la causa
 o si contrasta la causa

Da qui si capisce l'importanza di capire i moti di filtrazione.

Dunque ora si studia il moto dell'acqua nei mezzi porosi.



Si immagina di avere due punti A e B.

È noto che il moto avviene sempre da un punto, a cui compete una certa quantità di energia, a un altro punto, a cui compete un'energia minore. In questo caso, l'energia si esplica come energia cinetica e potenziale.

Fissato un piano di riferimento φ a computare l'altezza e riferendosi a un elemento di fluido di peso unitario, si può esprimere l'energia potenziale in termini di altezza.

Allora si distinguono un'altezza geometrica e un'altezza di pressione, la cui somma definisce l'energia potenziale (e potenzialità di compiere lavoro).

Insieme all'energia cinetica, si definisce il carico totale

$$g_A + \frac{u_A}{\gamma_w} + \frac{v_A^2}{2g} = H$$

→ il pedice A è messo perché ci si riferisce al punto A

Nei terreni, poiché il fluido si muove nei pori interstiziali, la velocità massima si ha in materiali a grana grossa (ghiaia con sabbia) e vale

$$v = 10^{-2} \text{ m/s}$$

Allora il termine cinetico vale

$$\frac{v^2}{2g} = 0 \left(\frac{10^{-4}}{10} \right) \text{ m} = 0 (10^{-5}) \text{ m}$$

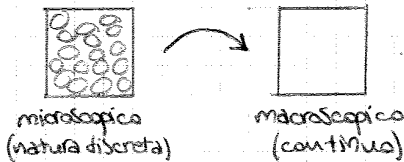
cioè vale $1/100 \text{ mm}$

Dal confronto, si ha che

$$V = nU_w$$

e, poiché $n < 1$, vale la relazione

$$V < U_w$$



Inoltre, Darcy osservò che nel mezzo poroso c'erano dei pieni, dei vuoti interstiziali e canali costituiti dai vuoti e allora fece un passaggio dal microscopico (dove c'è natura discreta) al livello macroscopico (c'è un continuo). Qui il fluido occupa simultaneamente la regione di spazio e attraversa tutta la sezione.

Così c'è un passaggio da discreto al continuo, fatto implicitamente con la formula di Darcy.

Il vantaggio è che nel microscopico la difficoltà è che la sezione cambia e dunque non consente di descrivere un modello matematico

⇒ GRANDE SEMPLIFICAZIONE

→ la costante k si dice coefficiente di conducibilità idraulica.

Se, infatti, s'immagina di fare l'esperienza di Darcy con olio (e non acqua), si ottiene un valore k completamente diverso.

⇒ il coefficiente include sia le CARATTERISTICHE DEL MEZZO POROSO sia le CARATTERISTICHE DEL FLUIDO che lo attraversa (non si lega solo alla struttura del mezzo).

Ci sono alcuni valori notevoli e ricorrenti, riferiti all'acqua interstiziale

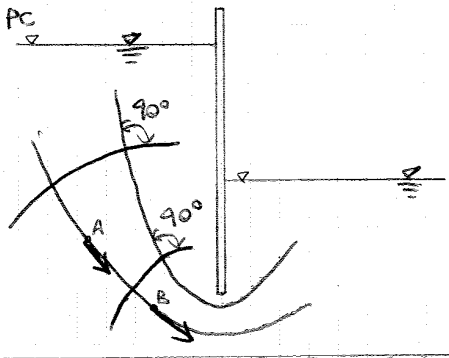
Tipo di terreno	Conducibilità k [m/s]
Ghiaie	$10^{-2} \div 1$
Sabbie (a seconda della granda)	$10^{-6} \div 10^{-2}$
Limo	$10^{-8} \div 10^{-6}$
Argilla	10^{-9}

→ ha le dimensioni di una velocità perché il gradiente idraulico è una grandezza dimensionale

A questo punto, visto che si è introdotta la legge di Darcy e il coefficiente k , si può spiegare cosa accade alla pressione interstiziale in presenza di 2 acquiferi, visto all'inizio.

Dati due acquiferi, s'immagina che ci sia un moto di filtrazione. Allora ci sarà una velocità V_a nello strato argilloso e una velocità V_s negli strati di sabbia, dati dalla legge di Darcy. In questo sistema, c'è un moto verso l'alto o, meglio, un moto in mezzi porosi posti in serie (uno ad alta conducibilità, uno a bassa e uno ad alta).

CONSEGUENZA :



s'immagina di avere una paratia a sostegno di uno scavo in terreno omogeneo. Per semplicità, si immagina che la falda coincida con il P.C. e, a seguito dello scavo, il livello si abbassi. Si suppone che la sabbia poggia su un tetto impermeabile, in modo che il dominio permeabile sia costituito dallo strato di sabbia.

Si sa che nell'idraulica lo studio avviene secondo le LINEE DI FLUSSO, linee la cui tangente rappresenta la direzione della velocità locale in ogni punto. Intuitivamente, ci si aspetta che l'acqua vada da monte a valle secondo un certo percorso e le linee di flusso consentono di visualizzare immediatamente il campo di moto.

Concentrandosi nei punti A e B, si nota che ovviamente la velocità in A è maggiore che in B.

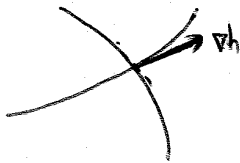
Ora si può ricorrere alle CURVE EQUIPOTENZIALE, che indicano come cambia il potenziale nel campo di moto x produrre tale campo di moto.

Prima di tracciarle, si osserva che esiste un legame ben preciso con le linee di flusso (e dunque non possono essere tracciate arbitrariamente).

Infatti, s'immagina di considerare il potenziale h , funzione del punto

$$h = h(x) = h(x; y; z)$$

La curva equipotenziale gode della proprietà che il potenziale è costante.



Allora si fa il gradiente, sapendo che questo è un vettore che ha come componenti le derivate di h ed è diretto perpendicolarmente alla linea equipotenziale.

ora si immagina che nel punto A passi una linea di flusso.

In esso la velocità vale $v = -k \nabla h$ ma, se $k = \text{cost}$, la velocità è parallela al gradiente e dunque la LINEA DI FLUSSO È PERPENDICOLARE ALLA CURVA EQUIPOTENZIALE.

⇒ note le linee di flusso, sono note le linee equipotenziale (sono una II famiglia che localmente è sempre ortogonale rispetto alle linee di flusso).

Così, attraverso queste 2 famiglie di linee, si riesce a visualizzare i caratteri del moto perché, da una parte, si disegnano le linee di filtrazione (come si evolve l'acqua) e, dall'altra, come si evolve la perdita di carico punto x punto e da qui, note queste, si conoscono la pressione interstiziale, etc.

Ora si sostituisce nell'equazione

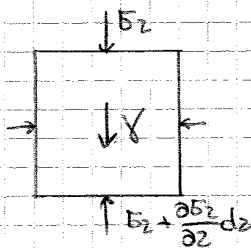
$$\frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} - \gamma + \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z} + \gamma_w = 0 \quad \sim \frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} = -1 \quad \text{se si aumenta la quota } \sigma_z' \text{ di } 1, z \text{ diminuisce della stessa quantità}$$

si indica con $\gamma' = \gamma - \gamma_w$ il peso dell'unità di volume di terreno alleggerito (perché immerso in acqua e ha l'effetto della sottonaturalità) e si ottiene

$$\frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} = \gamma' - \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} = \gamma' - \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z}$$

INTERPRETAZIONE FISICA:



Si consideri un mezzoparaso nel suo insieme e si immagina che sia monodimensionale.

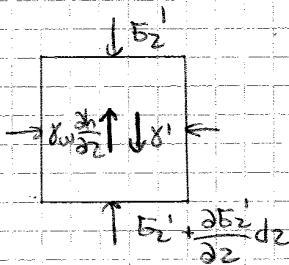
Questo è soggetto a forze di volume (forza peso, azioni sismiche rappresentate da un campo di accelerazioni che scuote il terreno e un'altra che ora si vedrà) e a forze di superficie.

Infatti, scrivendo l'equilibrio totale del mezzoparaso nel suo insieme (dove $\gamma = \gamma_{tot}$), si ha

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \gamma = 0$$

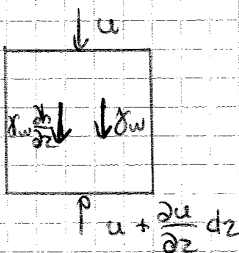
Ora si immagina di scrivere le equazioni di equilibrio della fase solida: in essa interviene il peso del volume alleggerito γ' e la tensione efficace σ' , in base all'equazione scritta prima, si ha

$$\frac{\partial \sigma_z'}{\partial z} = \gamma' - \gamma_w \frac{\partial h}{\partial z}$$



Alla forza di volume rappresentata dal peso alleggerito γ' si aggiunge la reazione $\gamma_w \frac{\partial h}{\partial z}$ della forza di filtrazione.

data la fase solida a se' stante, il acqua in moto esercita un'azione di TRASCINAMENTO e dunque c'è una forza di volume detta forza di filtrazione. Così, ad es., se il moto è verso l'alto, alle forze di volume si aggiunge una forza verso l'alto.



Se ora si considera l'equilibrio della FASE FLUIDA, essa è soggetta alla pressione interstiziale u e alla forza di volume γ_w e stavolta quella forza di trascinamento esercitata sulla fase solida è vista, a azione e reazione, come forza uguale e contraria che la fase solida esercita sulla fase fluida.

Se si sommano gli equilibri della fase solida e fluida, si ottiene l'equazione di equilibrio globale, ma cui l'azione dell'acqua si elide con quella del solido.

⇒ se, realizzando uno scavo, si provoca una differenza di carico tale che il gradiente idraulico valga γ/γ_w , allora c'è un annullamento delle tensioni efficaci.
 Ciò significa che la RESISTENZA VA A ZERO e il mezzo poroso si è trasformato in liquido (liquefazione).

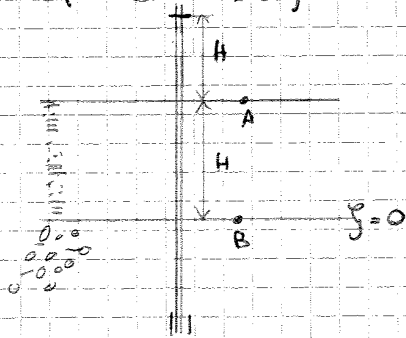
A livello fisico, tornando all'interpretazione discreta, le particelle in contatto sono responsabili di quello che, a livello macroscopico, corrisponde alle tensioni efficaci. L'azione di trasciamento tende ad annullare il contatto e così è come se il mezzo diventasse un liquido pesante.

I valori del gradiente critico sono

$$i_c = \frac{\gamma'}{\gamma_w} \approx \frac{(18 \div 22 - 10)}{10} \approx 0,8 \div 1$$

Dunque se si induce un fenomeno di filtrazione che produce un gradiente idraulico verso l'alto pari a circa l'unità, significa che si arriva a un collasso di tipo idraulico che fa crollare la resistenza del materiale.

ES (SABBIE MOBILI)



Si consideri un terreno limoso a tetto di una formazione sabbiosa-ghiaiosa che costituisce l'equifero profondo. Si immagini che lo strato sia spesso H e che il livello d'acqua che si ha nello strato profondo sia circa H . Fissato un piano di riferimento $z=0$, quanto vale il carico idraulico in un generico punto del limo?

È difficile dirlo perché c'è un moto di filtrazione e c'è dissipazione in esso. Se però si considera il punto A, si ha che

$$h_A = H$$

Se si prende il punto B, alla base del limo, si ha che

$$h_B = 2H$$

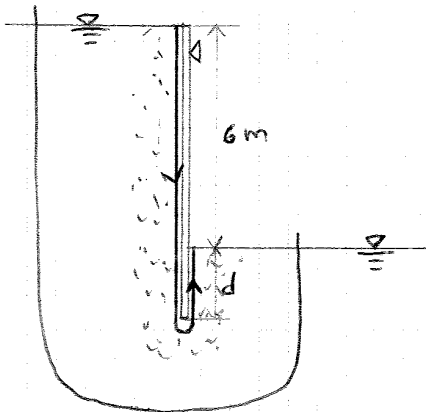
La differenza di carico è H e il percorso attraverso cui c'è dissipazione è lo strato di limo, spesso H .

Dunque il gradiente idraulico è 1, la σ' è nulla e la resistenza al taglio è nulla

⇒ si è in presenza di sabbie mobili e uno sprofonda perché non ci sono tensioni efficaci.

Si può capire che questa condizione di instabilità della (dove la parte solida, intesa come struttura, perde rigidità, resistenza e consistenza) è presente in natura o è indotta dall'uomo e a questo bisogna considerare tutti gli aspetti.

ES (VERIFICA DI SIFONAMENTO DI UNA PARATIA)



Si deve realizzare uno scavo di profondità 6m. Questo è caratterizzato da un fronte di scavo (cioè la parete verticale) instabile, a cui si realizza una parete in calcestruzzo armato. Per evitare l'inflessione della paratia, che potrebbe determinare cedimenti a tergo di essa (che danneggerebbero gli edifici), si introduce un vincolo, come un puntone di contrasto o un ancoraggio. In tal modo, si assicura la stabilità dell'insieme paratia-terra dal punto di vista geotecnico e strutturale.

Ora si immagina che la falda coincida con il P.C. e, all'interno dello scavo, con il piano dello scavo (e consentendo di lavorare). Il terreno è un terreno omogeneo con sabbia e limo.

La paratia è di sé stabile dal punto di vista strutturale, cioè le sollecitazioni sono compatibili con la resistenza della struttura e c'è un equilibrio anche dal punto di vista geometrico.

Se però si realizza uno scavo, si innescia un gradiente idraulico e dunque un moto di filtrazione tra monte e valle. Questo moto sarà caratterizzato da una certa linea di flusso, caratterizzata da una tangente verticale in entrata e uscita.

Tra monte e valle, ovviamente, c'è differenza di carica idraulica e questa è dissipata lungo il percorso, a cui lungo esso c'è un certo gradiente idraulico.

È evidente che, ai fini della stabilità, si vuole determinare la condizione critica:

è la condizione caratterizzata dal gradiente più alto.

A parità di differenza di carica, il gradiente è più alto quando il percorso lungo il quale ciò avviene è minimizzato.

⇒ la linea di flusso caratterizzata da questa condizione è quella che avviene immediatamente a tergo della paratia.

Ora, se si guarda questa linea, che è verticale sia a monte che a valle, si può notare che tutte le grandezze sono solo funzione di z (il moto è lungo un'unica coordinata) e dunque si è ridotto il problema a uno monodimensionale.

Grazie all'ipotesi di una dimensione, ci si può chiedere quale sia la profondità di infissione che dà stabilità (i primi 6m sono dati da esigenze di progetto, mentre il resto è incognito).

Per rispondere, si calcola innanzitutto il gradiente idraulico, come rapporto tra perdita di carica e percorso lungo la quale questa avviene:

$$i = \frac{\Delta h}{L}$$

Grazie alla linearizzazione, si ha che

$$i = \frac{G}{G+2d}$$

→ con altre linee si ha un gradiente di efflusso via via minore, a cui se c'è sifonamento, questo è immediatamente vicino alla paratia.

La pendenza critica invece vale

$$i_c = \frac{\gamma'}{\gamma_w}$$

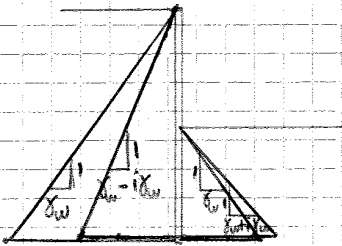
Si applica la formula al punto A

$$u_A = (\gamma_w - \frac{1}{3}\gamma_w) \cdot 12 = 8\gamma_w$$

Ora si calcola la pressione nello stesso punto ^{lato} valle, anche se si sa che a priori la pressione è la stessa, che vale

$$u = (\gamma_w + i\gamma_w) \cdot 6 \Rightarrow u_A = (\gamma_w + \frac{1}{3}\gamma_w) \cdot 6 = 8\gamma_w$$

→ Interviene la forza $\pm i\gamma_w$ (non solo la forza di volume), a seconda della direzione di moto



Ora se si facesse il calcolo in condizioni idrostatiche, ci sarebbe un certo profilo (in blu) con ritmo di crescita γ_w e lo stesso si avrebbe a valle! Così però i conti non tornano. In un moto di filtrazione

→ a monte la pressione u diminuisce perché le forze di volume sono date da $\gamma_w - i\gamma_w$ (sono minori)

→ a valle la pressione u aumenta perché le forze di volume sono date da $\gamma_w + i\gamma_w$

e i 2 valori alla base sono uguali.

Così la pressione dell'acqua sta aumentando lato valle e sta diminuendo lato monte rispetto alla pressione idrostatica.

Vedendo i profili (in rosso), a monte diminuisce perché si parte da un carico alto e lo si perde man mano che si scende. Per poter arrivare però a fondo sodo, non si può avere la pressione idrostatica ma serve una pressione in eccesso a potere continuare a fare l'altro tratto (serve energia in più rispetto alle condizioni idrostatiche).

Allora lato valle, se c'è pressione in eccesso rispetto a quella statica, significa che le tensioni efficaci sono diminuite (in condizioni idrostatiche non cambia nulla, ma ora è l'eccesso di u si prende dalle tensioni efficaci).

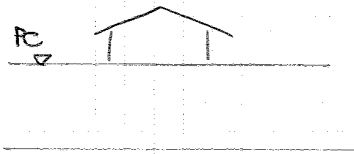
↓ se c'è pressione in eccesso rispetto alle condizioni idrostatiche, c'è rischio di sifonamento

↑

a monte, se il carico diminuisce man mano che ci si muove, a partire da qui la pressione u diminuisce

Problema al contorno:

si è partiti dalle condizioni di stato tensionale iniziale, importanti è la componente non lineare e anisotropia, a cui non basta conoscere l'incremento di deformazione e le tensioni ma anche le condizioni geostatiche.
Non sempre queste sono facili da calcolare perché l'acqua può essere in moto e si sono visti i suoi effetti sull'equilibrio.
Così si possono affrontare i problemi.



Ora si immagina di dover risolvere un qualunque problema al contorno.

Ad es, data il PC, si realizza una struttura su di esso. Si vuole risolvere il problema in tutti i suoi aspetti, cioè dal punto di vista della sicurezza e della funzionalità (calcolo delle tensioni in ogni punto, degli spostamenti, delle deformazioni, etc.)

Questo, in meccanica del continuo, costituisce il classico problema di finito o problema al contorno e risolverlo significa prevedere in ogni punto lo stato di sforzo, di deformazione e le componenti di spostamento.

Questo è importante perché

→ lo spostamento dà il cedimento, la tipologia e la tollerabilità

→ lo sforzo dev'essere compatibile con la resistenza

Le condizioni da soddisfare a risolvere un qualunque problema al contorno sono

→ in ogni punto devono essere soddisfatte le EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - b_i = 0$$

→ si devono soddisfare le EQUAZIONI DI CONGRUENZA tra le componenti della deformazione e gli spostamenti

$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

→ definizione delle componenti di deformazione in termini di gradiente di spostamento

L'insieme delle equazioni di equilibrio e delle deformazioni non rappresentano un sistema matematicamente chiuso perché il numero di incognite, pari a

$$n_i = 6 (\sigma_{ij}) + 6 (\epsilon_{ij}) + 3 (u_i) = 15$$

supera il numero di equazioni indipendenti, cioè 9.

Per chiudere il sistema, occorre introdurre altre relazioni:

Siccome si può immaginare che la risposta in termini di cedimenti e deformazioni a un carico dipende dal tipo di materiale, si capisce che le relazioni aggiuntive tengano conto della costituzione del mezzo. Esse sono dette EQUAZIONI COSTITUTIVE, poiché danno informazioni sulla costituzione del mezzo (sono anche dette "funzioni di risposta" perché dicono come risponde).

Il legame più semplice è l'equazione costitutiva elastica, espressa da

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u \delta_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

→ nel legame costitutivo inter-vengono le tensioni

Le costanti λ e μ sono dette costanti di Lamè.

La quota in eccesso u è detta *sovrapressione interstiziale*.

Facendo la divergenza di \underline{v} , si ottiene

$$\operatorname{div} \underline{v} = -k \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) = -k \nabla^2 h$$

Il laplaciano significa derivare 2 volte le componenti rispetto a x, y e z ma i primi 2 addendi di h sono lineari e la derivata Π è nulla. Si salva così solo il III addendo

$$\operatorname{div} \underline{v} = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u$$

Così l'ultima equazione può essere scritta come

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u = 0$$

Questo insieme di equazioni costituisce le cosiddette equazioni di campo del mezzo poroso, che devono essere soddisfatte in qualunque punto del continuo

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0 \\ \varepsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \sigma'_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u = 0 \end{array} \right.$$

Si può notare che queste equazioni, a definizione, sono equazioni differenziali alle derivate parziali, e cui se si vuole risolvere anche ammettendo un legame costitutivo lineare, il problema è complesso dal punto di vista matematico

\Rightarrow il **I grande problema** del problema elasto-plastico è che bisogna integrare un sistema di equazioni.

Inoltre, come tutti i sistemi del genere, esso necessita della corretta imposizione delle condizioni al contorno in modo che il problema sia ben posto, cioè esista un'unica soluzione stabile (se si perturba qualche parametro, la soluzione non deve divergere).

Oggi si ricorre a codici di calcolo e si risolve numericamente l'equazione punto a punto e il problema diventa apparentemente semplice, ma quando si ottiene il risultato, non si può verificare la validità della soluzione.

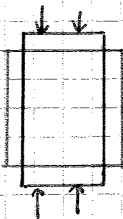
↓ i risultati possono essere sballati a condizioni al contorno mal poste, errori nell'imposizione, etc. edunque occorre attenzione verso la soluzione.

Dunque all'istante $t=t_0$ ci si ritrova virtualmente in condizioni non drenate, è una condizione che indica la circostanza nella quale l'elemento di terreno non scambia acqua con l'ambiente, in virtù della sua scarsa conducibilità idraulica.

Ne consegue che il mezzo equivale a un sistema chiuso (in senso termodinamico) e può essere interpretato come un mezzo monofase, poiché i due sistemi sono due fasi ma il fluido non è più il moto relativo rispetto al solido e dunque non c'è più azione reciproca.

Se i grani e l'acqua sono incompressibili (a fini ingegneristici, l'ipotesi è valida), le condizioni non drenate coincide con l'assenza di variazioni di volume, poiché l'acqua non può uscire.

Es



Se un terreno è caricato in un certo modo, si può avere un certo tipo di deformazione ma la variazione di volume $\Delta \epsilon_v$ è nulla.

Per garantire la condizione non drenata, quando deve valere $\Delta \epsilon_v$?

si sa che

$$\Delta \epsilon_v = \Delta \epsilon_{xx} + \Delta \epsilon_{yy} + \Delta \epsilon_{zz} = \Delta \epsilon_{zz} (1 - 2\nu) = 0 \rightarrow \nu = \frac{\Delta \epsilon_{xx}}{\Delta \epsilon_{zz}}$$

Questo dev'essere nullo x ogni valore della dilatazione lineare della fibra z (perché questa c'è) cioè è necessario che

$$\nu = \frac{1}{2}$$

Questa è la condizione che si crea all'istante $t=t_0$.

Al passare del tempo, si rimarrà sempre in condizioni non drenate?

No perché, x quanto sia bassa la velocità, l'acqua inizia a muoversi e a migrare dalle zone cariche alle zone scariche e, x la migrazione, la pressione progressivamente si riduce.

Così la pressione dell'acqua è destinata a diminuire lentamente, x portarsi asintoticamente alla situazione stazionaria finale.

Se si riduce solo la pressione u , x soddisfare l'equilibrio ($\sigma' + u = \sigma$), allora la tensione efficace aumenta nel tempo.

Dunque si raggiunge nel tempo una situazione finale, che è una situazione stazionaria nella quale la pressione interstiziale si è portata al valore stazionaria iniziale (quella che era in equilibrio con le condizioni al contorno).

\Rightarrow c'è una fase stazionaria finale detta condizione drenata.

La fase intermedia che rappresenta il transitorio (moto di filtrazione in condizioni transitorie) è detta fase di consolidazione.

Da qui si capisce che se la resistenza al taglio, etc. dipendono dalle tensioni efficaci, guardando queste configurazioni di estremo in cui c'è un minimo e un massimo, si capisce che non si deve risolvere passo x passo e seguire tutta l'evoluzione del problema, ma se si riesce ad analizzare la condizione non drenata iniziale e la condizione drenata finale (le più semplice), si possono valutare le condizioni estreme che possono presentarsi sia in termini di stabilità che di cedimento.

\Rightarrow notevole semplificazione

Percorsi di sollecitazione

1 Nella costruzione del modello matematico x il mezzo poroso, x sapere come prevederne il comportamento, si sono individuate le condizioni di estremo come drenate e non drenate, sapendo le equazioni.
 L'obiettivo è di predire il comportamento dei terreni, in modo da vedere come si comportano le opere che interagiscono con essi (tutte le opere di ingegneria civile sono vincolate al terreno e il comportamento della struttura dipende dal comportamento del terreno).
 Per costruire lo strumento operativo x fornire una previsione quantitativa, però, unidica 2 pezzi.

2 Si è visto che il comportamento meccanico delle terre è

→ ANELASTICO (deformazioni non reversibili)

→ ANISOTROFO (le componenti variano al variare della direzione d'azione).

Il comportamento è più complesso dei materiali elastici perché c'è una doppia dipendenza nell'risposta alle sollecitazioni, dal percorso dei carichi e dalla storia tensionale. Questo è dovuto alla natura discreta e particellare e ai moti relativi, che danno anisotropia e irreversibilità nelle deformazioni (ciò non accade nel calcestruzzo perché è artificiale e non porta gli effetti della storia).

Così bisogna vedere come QUANTIFICARE IL PERCORSO DELLE SOLLECITAZIONI (e poi la storia) ma questo non è semplice:

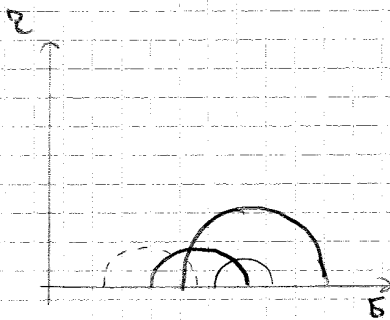
se si carica verticalmente ed orizzontalmente un cubetto, non è difficile dire il percorso.

Se però un cubetto tridimensionale o piano è sollecitato in tutte le direzioni, come si può dire il percorso di carica, cioè in che direzione si va nel piano dei carichi. Maltra, lo si sta caricando o scaricando?

Si capisce allora che questo non è semplice da visualizzare quando ci sono tutte le componenti di tensione (lo è nell'uniasiale).

3 Percorsi di sollecitazione

PREMESSA



Si supponga di lavorare nel piano di Mohr B-t.

Se si applica uno stato di sforzo su di un provino, questo è rappresentato da un cerchio (x semplicità, un semicerchio) in tale piano.

Si immagina che poi, x un secondo, vari lo stato di sforzo e si ottenga un nuovo cerchio.

Poi si applica un carico e la tensione aumenta.

Infine, si applica un carico permanente e un'azione variabile (es. sisma) e si ottiene un nuovo cerchio.

Qui si sta disegnando una serie di cerchi di Mohr che sintetizzano l'evoluzione dello stato di sforzo, cioè il percorso delle sollecitazioni seguito, nello spazio tensionale.

Allora occorre trovare le variabili più appropriate in questo caso.

Per individuare, si suppone di semplificare il problema dicendo che le tensioni agenti su A e B siano principali, cioè che σ_v e σ_H siano tensioni principali. Tale ipotesi è valida se la parete è costituita da una parete liscia che non impone attrito con il terreno.

In tal caso, quante sono le componenti indipendenti?

In teoria sono 3, cioè σ_x , σ_y e σ_z ma, in realtà, σ_y non è indipendente perché la deformazione ϵ_{yy} fuori dal piano dev'essere nulla e dunque solo 2 tensioni sono indipendenti.

Così si può costruire un'altra coppia di variabili tensionali indipendenti, nel seguente modo

$$s = \frac{\sigma_v + \sigma_H}{2}$$

$$t = \frac{\sigma_v - \sigma_H}{2}$$

Si nota che s è la tensione media, cioè è la componente sferica del tensore sferico. Invece, t è la differenza e dunque è parente del II invariante del tensore deviatorico degli sforzi, che determina la rottura.

Così, invece di ragionare con σ_v e σ_H , si può ragionare in termini di s e t .

A questi s e t , si associano delle deformazioni lineari correlate (che fanno compiere lavoro).

Per trovarle, si sa che il lavoro è dato da

$$W = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad \rightarrow \text{è prodotto scalare delle componenti della deformazione e della tensione}$$

L'invarianza delle leggi fisiche dice che si possono considerare tutte le componenti della tensione e della deformazione, a patto che l'espressione del lavoro sia corretta e uguale a prima.

\rightarrow se s è la componente sferica, questa compie lavoro quando c'è variazione di volume. Pertanto a essa si associa come variabile deformativa la variazione di volume, data da ϵ_v

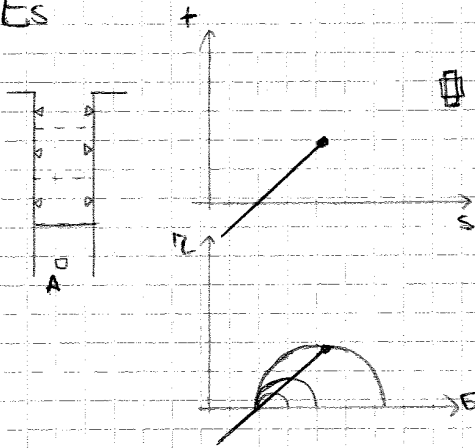
$$s \rightarrow \epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{zz} \quad \rightarrow \epsilon_{yy} = 0 \text{ x il problema piano}$$

\rightarrow dovendo rispettare l'equazione del lavoro, si ottiene immediatamente la variabile deformativa correlata a t

$$t \rightarrow \epsilon_t = \epsilon_{zz} - \epsilon_{xx}$$

Si sono definite così delle variabili tensionali e deformative convenienti.

Es



Si considera uno scavo in condizioni di deformazione piana e si considera un elemento A a una certa profondità.
 Cosa succede man mano che si procede nello scavo?

All'inizio c'è un certo cerchio di Mohr associato a un punto.
 Procedendo nello scavo, la tensione σ_H è la stessa mentre si riduce σ_V e così il cerchio tende a ridursi

\Rightarrow si va a rottura secondo un percorso inclinato di 45° e secondo un processo di estensione x scavo (si sta scaricando poiché si riduce il carico verticale)

\leftarrow
 così un elemento di terra, a seconda dello scavo, segue percorsi di sollecitazione completamente diversi, con 3 diverse risposte a seconda del percorso seguito

2. Influenza della pressione interstiziale:

ora si immagina di essere anche in presenza di FALDA e si suppone di essere in

\rightarrow MATERIALE A GRANA FINE:

si sa che ogni perturbazione genera all'inizio una sovrappressione interstiziale e allora cosa succede in termini di stress path?

Se c'è la pressione interstiziale, bisogna distinguere σ_V' da σ_V e σ_H' da σ_H , con

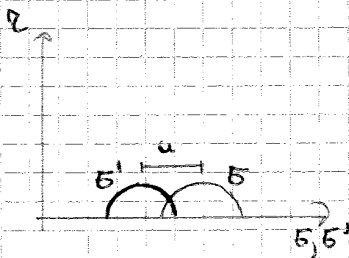
$$\sigma_V' = \sigma_V - u$$

$$\sigma_H' = \sigma_H - u$$

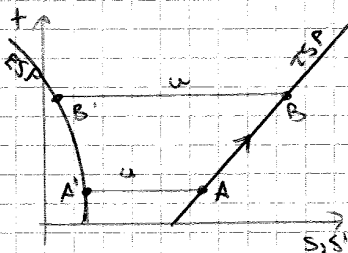
Ciò implica che le variabili tensionali sono date da

$$s' = s - u$$

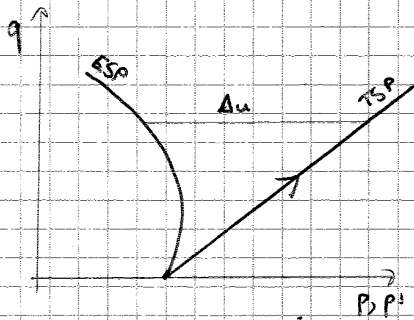
$$t' = \frac{(\sigma_V - u) - (\sigma_H - u)}{2} = t$$



Ciò significa che sul piano di Mohr calcolato con le tensioni efficaci e le tensioni totali, se x le tensioni totali c'è un certo cerchio di Mohr e x le tensioni efficaci questo è semplicemente traslato e la differenza è proprio u.
 Dunque c'è una TRASLAZIONE RIGIDA pari a u e il cerchio non s'ingrandisce perché la componente deviatorica non risente della pressione dell'acqua.



Se si lavora sul piano delle variabili tensionali s, s' e t , si ha un certo percorso delle tensioni totali TSP (= Total Stress Path) e in ogni istante, il corrispondente punto espresso dalle tensioni efficaci è traslato di u in orizzontale (poiché t e t' sono uguali) e, ogni volta che aumenta il carico, aumenta u. Così si ottengono dei punti A' e B', che appartengono al percorso delle tensioni efficaci ESP, che rappresenta realmente la risposta del terreno.



A questo punto, si riporta lo stress-path nel piano degli invarianti p e q e, se si è anche in presenza di sovrappressione interstiziale, bisogna distinguere tra p e tensione efficace p' .
 Ora si prende un generico problema assial-simmetrico (es. fondazione circolare) e si vuole capire cosa succede a un elemento sotto la fondazione:

il percorso di sollecitazione è una retta in cui c'è un incremento del deviatore all'aumentare del carico.

Come prima, se si è in terreni a grana grossa (alta conducibilità), ESP e TSP coincidono. Se si è in materiali a grana fine, si sorge la sovrappressione interstiziale e, di conseguenza, TSP e ESP non coincidono e la differenza è esattamente Δu . Si nota poi che, mentre il TSP è lineare (perché rappresenta la condizione di carico imposta), l'ESP non è lineare perché rappresenta la risposta meccanica del terreno, che a sua natura è una risposta non lineare.

È evidente che, a prevedere il comportamento meccanico del terreno, interessa il percorso effettivo ESP e ciò significa **PREVEDERE LA SOVRAPPRESSIONE INTERSTIZIALE Δu** :

Misura della sovrappressione interstiziale

Se si fa una prova in laboratorio, si mette un trasduttore nell'argilla che fa il volume Δu e la TSP è nota.
 In un problema al finito, però, questa dev'essere prevista teoricamente.

Per far ciò, si nota che la variabile deformativa ϵ_v dice come varia il materiale in termini di volume, mentre ϵ_s rappresenta come si distorce l'elemento di volume. Le nuove variabili tensionali invece hanno l'una il ruolo di responsabile della variazione di volume (p) e l'altra è la componente dello stato tensionale generalizzato responsabile della distorsione (q).
 Dunque è come se si fossero separate l'azione volumica e quella distorsiva.

Letto in questo modo, si ritiene il legame costitutivo in termini di questi invarianti e questo si semplifica, perché compaiono solo 2 componenti:

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_v \\ d\epsilon_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dp' \\ dq \end{pmatrix}$$

↓
matrice di cedevolezza

→ tensione efficace perché c'è un legame costitutivo

I coefficienti della matrice sono equivalenti al modulo elastico, di Poisson, etc., ma ora non si è in campo elastico, bensì in campo elasto-plastico, dove la risposta non è lineare.

Ora s'immagina di avere imposto il TSP e di voler calcolare la sovrappressione interstiziale. Perché questa si sorge?

Questo perché si è in condizioni non drenate, dove si assume l'incamprimità dell'acqua e il materiale può deformarsi, ma non cambiare di volume.
 Dunque è come se si fosse imposto un vincolo cinematico INTERNO al materiale, a cui esso può fare quello che vuole ma non cambiare di volume.
 Questo è un nuovo vincolo, comparso solo ora perché il materiale ha una struttura interna particolare con vuoti riempiti d'acqua, a cui non può fare quello che vuole ma ci sono dei vincoli.

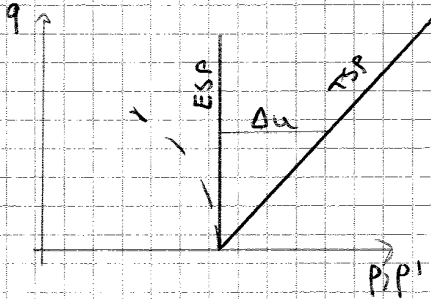
Ora, se al posto di un corpo rigido s'impone un vincolo, nasce una reazione vincolare corrispondente al vincolo imposto. Allora se si impone un vincolo interno, nasce una reazione vincolare interna e questa è la SOVRAPPRESSIONE INTERSTIZIALE Δu .

Se ora si ripete il procedimento, si ottiene

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{k} dp' = 0 \Rightarrow \Delta u = \Delta p$$

$$\Delta u = \Delta p$$

Dunque la variazione di pressione neutra dipende solo e unicamente dalla variazione e della componente sferica Δp .



Ciò significa che, nel piano degli invarianti, se si considera il TSP, l'ESP È VERTICALE perché $\Delta u = \Delta p$ (e dunque è necessariamente verticale).

Così, se si fa un esperimento e si trova l'ESP verticale, significa che in quel regime di tensioni il materiale ha comportamento elastico. Se devia, significa che al termine Δu si aggiunge il contributo a Δq , che è la risposta del materiale anelastico.

Storia tensionale dei depositi naturali

1. Dato un deposito sedimentario con una certa stratigrafia, si eseguono delle prove e facendo una costruzione, si ottiene una certa risposta. Ci si sposta e, anche se la stratigrafia è la stessa, la risposta è completamente diversa. La differenza si lega al fatto che il comportamento meccanico dei terreni naturali riflette un' "eredità" acquisita nel corso degli eventi, che va dalla formazione del deposito fino agli eventi più recenti.

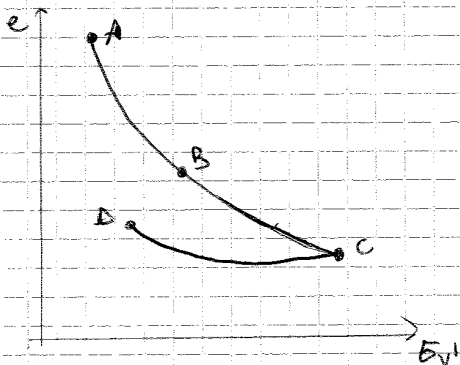
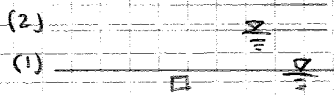
La storia tensionale, però, è anche storia geologica? Infatti, c'è una fase di sedimentazione, di erosione, di messa in posto del materiale x motivi tettonici, di compressione x ghiacciai, etc. Dunque sono eventi GEOLGICI, ma si parla di storia tensionale perché l'obiettivo è individuare una serie di parametri da inserire in modo predittivo e meccanico che consenta di fare previsioni quantitative.

↳ non si vogliono descrivere qualitativamente gli eventi, poiché non si potrebbe fare una previsione, ma x fare questo bisogna individuare delle VARIABILI DI STATO e parametri che, x loro natura, devono essere parametri meccanici x poter costruire un modello meccanico x descrivere quantitativamente la storia.

2. Si vogliono individuare i vari parametri.

Si parte da una prima fase, quando i sedimenti cominciano a trasformarsi e il materiale comincia ad assumere una struttura x effetto della compressione.

(I) C'è così una prima fase, cioè la fase di sedimentazione e di compressione sotto il peso proprio.



Si consideri in un deposito in formazione un elemento di terra prossimo alla superficie. Si suppone che la falda coincida con il piano campagna. Si vuole individuare lo stato corrente del materiale e, x fare ciò, bisogna individuare delle variabili di stato capaci di descrivere lo stato fisico in cui si trova il materiale.

Una variabile deputata a descrivere lo stato σ_v' è una variabile tensionale, che varia al variare dello sforzo, e quella più semplice da calcolare è la tensione verticale efficace σ_v' .

Si sa però che, a parità di σ_v' , si possono avere elementi molto compatti o molto sciolti, a cui un eventuale incremento di carica può produrre effetti diversi (x le strutture diverse).

⇒ è necessaria una seconda variabile che dia un'informazione sulla stato d'aggregazione e sulla struttura e ciò è descritto bene dall'indice dei vuoti e .

Dunque x rappresentare lo stato corrente del materiale servono 2 variabili (σ_v' e e). Se poi queste 2 variabili sono interpretate come coordinate di uno spazio (in questo caso, un piano) e si immagina di descrivere l'indice dei vuoti in funzione di σ_v' , si individua un piano detto piano di compressione.

↳ così dall'analisi dello stato fisico si sono individuate 2 variabili di stato che sono state assunte come coordinate x descrivere un piano che è uno spazio astratto (non esiste).

⇒ ricaricando da D, il materiale subisce solo deformazione elastica fino alla massima tensione subita in precedenza (rappresentata da C) e solo quando il carico supera il valore massimo, si comporta di nuovo in maniera elasto-plastica. Dunque è come se il materiale si ricordasse tutte le vicende e, finché non si supera la soglia, si comporta in un certo modo e oltre cambia comportamento. Questa soglia rappresenta la TENSIONE DI SNERVAMENTO, in geotecnica detta anche tensione di sovraconsolidazione σ_p' .

L'aspetto più interessante è che il materiale è dotato di MEMORIA:

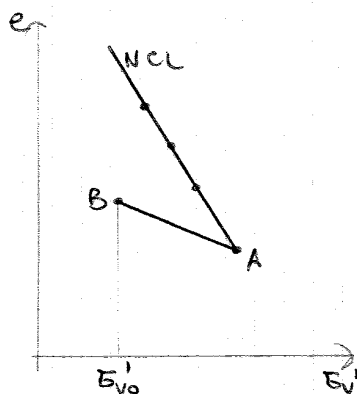
arrivati al punto F, la massima tensione a cui è stato soggetto il materiale nella storia è F.

Poi da F si scarica il materiale e da F si va fino a E. Se si ricarica nuovamente il materiale, questo si comporta in maniera elastica fino a F, poiché il materiale si ricorda che c'è stata un'evoluzione nella storia dei carichi e nello snervamento, che da C è passato a F. Solo da F poi si comporta di nuovo in maniera elasto-plastica.

⇒ i materiali naturali sono dotati di memoria e questa memoria sta nella struttura che il materiale ha acquisito con gli eventi e questo è un meccanismo espresso da σ_p' (questo traduce in termini meccanici il fatto di avere memoria)

Se ci fosse un materiale elastico, ogni volta che si ricarica succederebbe tutto indipendentemente da quanto successo prima, poiché non ha memoria (x questo è semplice). Invece il terreno ha memoria e dunque si ricorda le vicissitudini del passato e si comporta di conseguenza.

Dunque è fondamentale x comprendere il comportamento del materiale individuare questa storia anche se, in realtà, BASTA SOLO CONOSCERE LA TENSIONE DI SOVRACONSOLIDAZIONE poiché in essa è riassunta tutta la storia.



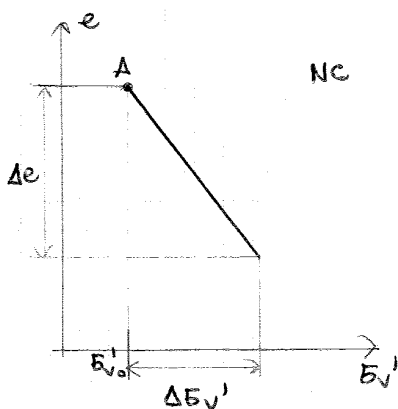
Ora, si è definita la NCL e, quando il materiale è rappresentato da un punto A ∈ NCL, il materiale è NC. Se poi da A si scarica il materiale e si va in B, questo è stato soggetto a una tensione $\sigma_p'(A)$ e ora è in uno stato tensionale inferiore, rappresentato da σ'_{v0} corrente.

Dunque è un materiale che in passato ha subito un livello tensionale superiore, come se fosse stato preconsolidato rispetto alla situazione attuale

⇒ si parla di terreno sovraconsolidato^(OC) se la tensione σ'_{v0} attuale è inferiore alla tensione di preconsolidazione subita nel passato

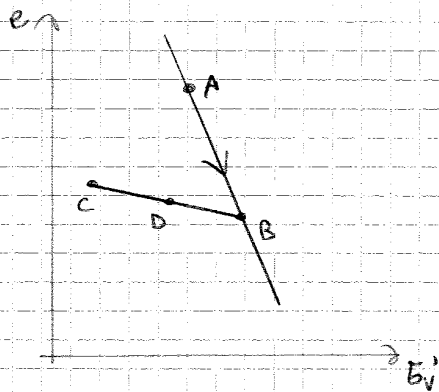
$$\sigma'_{v0} < \sigma_p'$$

Da qui si capisce un'altra proprietà che permette di capire la distinzione tra materiale OC e NC:



S'immagina di essere nel punto A, con tensione attuale σ'_{v0} . Poiché A ∈ NCL, si è in presenza di materiale NC. ora s'immagina di realizzare una costruzione su questo deposito e dunque si applica un certo incremento di carico $\Delta\sigma'_v$. Quali sono i cedimenti attesi in questa struttura di fondazione?

Siccome si va da A a B, allora i cedimenti saranno proporzionali all'ordinata?



Ora si immagina che avvenga uno scarico fino a C. Qui il materiale è OC e l'OCR vale

$$OCR = \frac{e_v'(B)}{e_v'(C)} \rightarrow \text{le lettere hanno una sequenza temporale}$$

Poi si ricarica il materiale e si va nel punto D, dove l'OCR vale

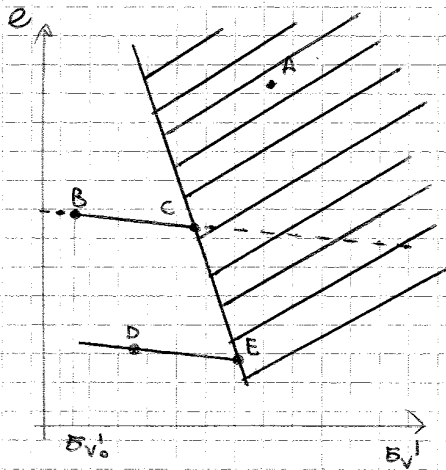
$$OCR = \frac{e_v'(C)}{e_v'(D)}$$

Se, caricando, si arriva in B, in esso l'OCR vale

$$OCR = 1 \rightarrow \text{tensione } e_p' \text{ e attuale coincidono}$$

Ora, essendo un materiale NC, ci sarebbero cedimenti e grandi deformazioni plastiche.

Da qui si capisce una cosa:



Si considera la NCL.

Dato il punto A, cosa rappresenta?

Esso non rappresenta nulla perché l'indice dei vuoti corrispondente a questo livello tensionale sarebbe così alto che non ci sarebbe contatto tra particelle. Però non può esistere un mezzo poroso così (il più è una sospensione). In natura si trovano mezzi porosi in cui a C corrisponde un valore e_v' sulla NCL.

Quindi, individuate le variabili di stato e individuato lo spazio in cui vive l'oggetto fisico, tale spazio non è totalmente accessibile, cioè il punto immagine che rappresenta lo stato fisico non può occupare tutta la regione perché esistono vincoli di natura strutturale che fanno sì che alcuni punti non siano compatibili con la resistenza, la struttura interna, etc. Così si capisce che non tutto il piano di compressione è accessibile e gli stati fisici significativi solo sotto e sulla curva di normal consolidazione.

Ciò cambia molto l'analisi e capire il comportamento effettivo di un materiale e ci sono 2 opzioni

→ se il materiale è sotto la NCL, è OC

→ se il materiale è sulla NCL, è NC

Se poi c'è un punto B, questo è rappresentativo dello stato OC. Per calcolare l'OCR, si traccia una retta parallela alla curva di scarico che interseca la NCL (dove cambia il comportamento) nel punto C. L'OCR è dato dal rapporto tra il punto C e il punto B.

↓ In pratica, si sta facendo il ragionamento inverso e si dice che, se il materiale è nel punto B, poiché questo ha buona memoria, quando si carica esso ha comportamento elastico e poi plastico, e cui l'OCR è dato dal rapporto

Così, implicitamente, non c'è solo una definizione, ma si usa il comportamento del materiale a definirne lo stato e, quando questo cambia, si è nella massima tensione subita e_p' (perché ricorda).

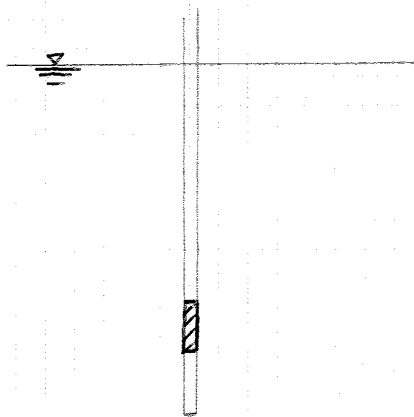
4 Prova edometrica:

Si è visto lo studio della storia di un deposito naturale con le sue proprietà meccaniche dal punto di vista teorico.
Ora si vede l'ambito sperimentale:

di fronte a una formazione si vuole determinare σ_p' e il livello di consolidazione (NC o OC).

Per fare ciò, si ricorre alla prova edometrica, che è una simulazione della compressione UNIDIMENSIONALE.

Essa è una prova molto importante e introdotta da Terzaghi (1923), a studiare questi fenomeni.



S'immagina di avere un deposito naturale e di eseguire un sondaggio a prelevare a una determinata profondità un campione detto campione indisturbato:

è un campione che preserva la struttura e il contenuto d'acqua naturale w_n e la composizione del fluido interstiziale del materiale in situ (è un campione rappresentativo del materiale in sede).

Infatti, quando si vuole studiare la storia di un materiale, questa è impressa nella struttura e dunque bisogna prelevare in modo da preservare la struttura, la composizione chimica e il contenuto d'acqua naturale.

Dal campione, in laboratorio si ricava un piccolo campione cilindrico (a disco) con

$$D = 50 \text{ mm} \quad H = 19 \text{ mm} \quad (\text{in genere, } D/H = 2,5)$$

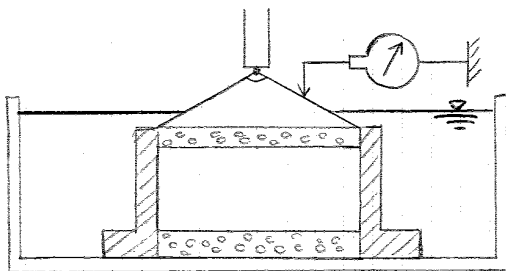
Poiché si vogliono simulare le condizioni esistenti in situ (grande deposito dove ogni piano verticale è un piano di simmetria e non ci sono azioni orizzontali ma solo tensioni verticali), lo si mette in un anello rigido in acciaio.

Il campione è in argilla, con bassa conducibilità, a cui la deformazione non può avvenire subito senza che migrasse l'acqua. Per questo, alle basi del disco si mette uno strato di pietra porosa.

Nella parte superiore poi si mette il cappello, a applicare i carichi, tramite un pistone (il carico vale N).

Poiché, nel carico, si vuole misurare la deformazione, si usa un micrometro decimale che permette di misurare l'assessamento del provino.

Il tutto è inserito in una scatola cilindrica in plexiglass (trasparente), in cui si immette acqua e si crea un ambiente sommerso (poiché è a lunga durata e c'è rischio di essiccamento).



Ora però c'è un aspetto delicato:

s'immagini di applicare il primo gradino di carico.

Se lo si applica a un cubetto di calcestruzzo, si legge subito il valore di deformazione. Se lo si applica ad argilla, non si legge nulla perché la conducibilità idraulica è molto bassa. Così all'inizio si trova in condizioni non drenate e non può deformarsi lateralmente, poiché è confinato lateralmente, a cui non succede niente.

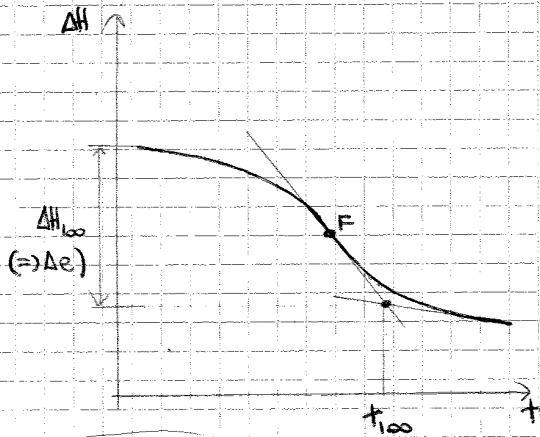
⇒ bisogna aspettare un intervallo di tempo perché si possa dissipare la sovrappressione interstiziale, cioè espellere l'acqua in modo da consentire la variazione di volume del provino (deformazione non istantanea ma nel tempo perché deve avvenire consolidazione)

Così, a ogni gradino di carico (es $\Delta\sigma_v' = 25 \text{ kPa}$), in laboratorio succede che il carico va tenuto a 24h (a deformazione lenta) e si riporta in un diagramma con

→ asse x (logaritmica): tempo t

→ asse y = accorciamento ΔH con un certo carico.

Poi periodicamente si legge l'accorciamento e si ottiene una curva avente un certo andamento, che tipicamente presenta un punto di flesso F. Essendo riportato in un diagramma semilogaritmico, il tempo è molto lungo e si potrebbe aspettare anni e leggere minuziosamente, ma si avrebbe così un processo non legato alla consolidazione (con deformazioni secondarie dovute al creep del materiale).



Portanto, si considerano la tangente al flesso F e la tangente nel punto finale e la loro intersezione definisce il tempo t_{100} , in cui convenzionalmente si dice che si è dissipata tutta la sovrappressione ed è avvenuto il processo di consolidamento. L'ordinata corrispondente dà l'accorciamento ΔH_{100} , da cui si ricava Δe .

↓ Il assettamento non è istantaneo ma dura 24h a ogni carico e, a ogni gradino di carico, corrispondono tante curve di questo tipo, utile a individuare t_{100} .

⇒ PROVA NON ISTANTANEA

Ora, quando si applica il carico all'istante $t = t_0$, si sta applicando l'incremento totale $\Delta\sigma_v$.

Poiché si è in condizioni non drenate, l'acqua non può uscire dal provino e si ha

$$\Delta u = \Delta\sigma_v$$

e, a differenza, si ha

$$\Delta\sigma_v' = 0$$

All'istante $t = t_{100}$, invece, la sovrappressione Δu si è dissipata tutta, cioè

$$\Delta u = 0$$

e dunque

$$\Delta\sigma_v' = \Delta\sigma_v$$

5 Metodo edometrico per il calcolo dei cedimenti:

Finora si sono determinati la ϵ_p' e l' α_{ce} , ma ora interessa una cosa più importante: applicato un carico, qual è il cedimento conseguente all'applicazione di questo carico?

Per rispondere, bisogna trovare il **LEGAME COSTITUTIVO**, che lega il mondo tensionale al mondo delle deformazioni.

Per semplicità, interessa indagare sulla natura della deformazione plastica, a cui si trascura ogni contributo viscoso, comportando una grande semplificazione nella formulazione del legame costitutivo, che lega ϵ_v' e l'indice dei vuoti.

Evidenze sperimentali dimostrano che, se la curva è rappresentata nel piano semilogaritmico, la risposta del materiale è rappresentata da una bilatera e dunque ci si può riferire alla pendenza della bilatera a calcolare le grandezze d'interesse.

Si definisce così l'indice di compressione C_c come la pendenza del ramo di compressione (variazione di indice dei vuoti x un ciclo logaritmico di tensioni).

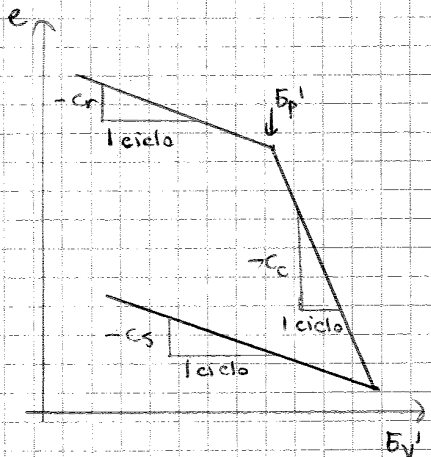
$$C_c = - \frac{\Delta e}{\Delta \log \epsilon_v'} \quad \rightarrow \text{segno "-" perché c'è una diminuzione e la pendenza, a definizione, è una quantità definita positiva}$$

Analogamente, si può caratterizzare il ramo di ricompressione con l'indice di ricompressione

$$C_R = - \frac{\Delta e}{\Delta \log \epsilon_v'}$$

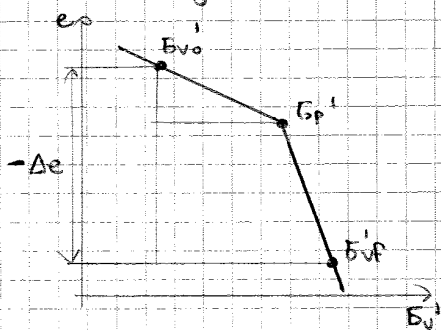
La pendenza è minore di C_c perché questo ramo è caratterizzato da deformazione elastica, mentre l'altro ha deformazione elastica e plastica. Se si scarica il materiale, si parla di **INDICE DI SCARICO** C_s (definizione analoga) e, in genere, si ha

$$C_R = C_s$$



Questi sono detti **indici di compressibilità** che, a definizione, sono adimensionali e sono deducibili dalla prova edometrica.

Ora, questi risultati sono applicabili al calcolo dei cedimenti che subisce uno strato argilloso sotto l'azione di un carico.



Si suppone di avere un certo risultato edometrico con una certa tensione ϵ_p' .

Si suppone di avere uno stato iniziale di partenza rappresentato da un punto con tensione ϵ_{v0}' e si immagina di applicare un incremento di carico $\Delta \epsilon_v'$, a arrivare a ϵ_{vf}' , tale che

$$\epsilon_{v0}' < \epsilon_p' \quad \epsilon_{vf}' = \epsilon_{v0}' + \Delta \epsilon_v' > \epsilon_p'$$

Per calcolare il cedimento, si sa che a definizione la deformazione verticale vale

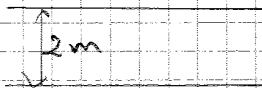
$$\epsilon_{zz} = \frac{\Delta H}{H_0} = - \frac{\Delta e}{1 + e_0}$$

Questo è l'incaricamento subito dagli ultimi 2 metri di argilla

IV) Si ripete il calcolo x gli altri strati e si SOMMA, ottenendo il cedimento che subisce la struttura sul terreno.

Così si è trovato un metodo x calcolare il cedimento di strutture che interagiscono con terreni e ciò serve x importanti requisiti di progetto, cioè sicurezza e funzionalità.

OSSERVAZIONE I



Si consideri una strata isolata spessa 2m e si immagini che

$$E'_{v0} = 75 \text{ kPa} \quad e_0 = 1,2 \quad E_p' = 200 \text{ kPa} \quad \Delta E'_{v0} = 60 \text{ kPa} \quad C_r = 0,1 \quad C_c = 0,8$$

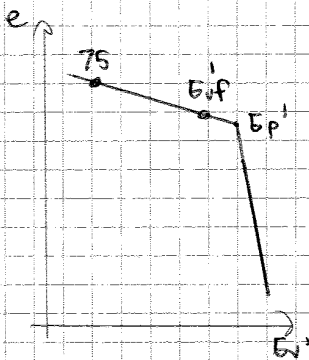
Se si calcola il cedimento con la formula di prima, si ottiene

$$\Delta H = 8 \text{ cm}$$

ma ciò è sbagliato perché il materiale non arriva in campo plastico (e infatti il contributo di C_c è negativo, come se il terreno si sollevasse).

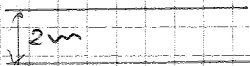
Dunque il materiale non arriva a E_p' e tutto avviene nel ramo di ricomprensione, x cui

$$\Delta H = \frac{H_0}{1+e_0} \left(C_r \log \frac{E'_{vf}}{E'_{v0}} \right) = 2 \text{ cm} \quad \rightarrow \text{cedimento modesto}$$



⇒ se non si è in NC, diventa importante considerare il solo ramo di ricarica e nei calcoli bisogna mettere un controllo di questo tipo e, di conseguenza, adattare la formula.

OSSERVAZIONE II

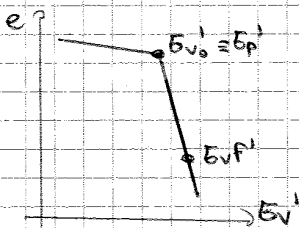


Se si prende sempre uno spessore di 2m ma con

$$E'_{v0} = 75 \text{ kPa} \quad e_0 = 1,2 \quad E_p' = 75 \text{ kPa} \quad \Delta E'_{v0} = 60 \text{ kPa} \quad C_r = 0,1 \quad C_c = 0,8$$

ora succede che si parte dal punto di snervamento $E'_{v0} \equiv E_p'$ e dunque il materiale è in NC e il moto avviene direttamente solo sul ramo di ricomprensione, x cui

$$\Delta H = \frac{H_0}{1+e_0} \left(C_c \log \frac{E'_{vf}}{E_p'} \right) = 14 \text{ cm}$$



⇒ così esistono due casi estremi (OC e NC) e si nota che, a parità di comportamento, di sezione stratigrafica, di caratteristiche di plasticità e di parametri di sondaggio, la storia geologica è diversa e dunque servono interventi diversi.

Dunque s'immagina di prendere un punto in corrispondenza di uno stato tensionale e , a esso, associare una pendenza m_v data dal fattore m_v

$$m_v = \frac{\Delta \varepsilon_v}{\Delta \sigma'_v} \quad m_v = \text{INDICE DI COMPRESSIBILITÀ}$$

Si nota che questo parametro è l'inverso di un modulo, detto modulo edometrico

$$E_{ed} = \frac{\Delta \sigma'_v}{\Delta \varepsilon_v} = \frac{1}{m_v}$$

Così si è ottenuto un altro parametro a descrivere il materiale.

Ovviamente, queste grandezze non sono indipendenti tra di loro ma c'è un LEGAME TRA I PARAMETRI DI COMPRESSIBILITÀ:

Se si considera l'incremento della deformazione verticale $d\varepsilon_v$, esso vale

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v &= -\frac{de}{1+e} = \\ &= \frac{1}{1+e} C_c d(\log \sigma'_v) \end{aligned}$$

Si passa da logaritmo in base decimale a logaritmo in base naturale, a poter così derivare

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v &= \frac{1}{1+e} \frac{C_c}{2,3} d(\ln \sigma'_v) = \\ &= \frac{1}{1+e} \frac{C_c}{2,3} \frac{d\sigma'_v}{\sigma'_v} \end{aligned}$$

Di conseguenza, il modulo edometrico, inteso come modulo tangente, vale

$$\begin{aligned} E_{ed} &= \frac{d\sigma'_v}{d\varepsilon_v} = \frac{2,3(1+e)\sigma'_v}{C_c} \\ E_{ed} &= \frac{2,3(1+e)\sigma'_v}{C_c} \end{aligned}$$

→ si nota che il modulo di deformazione edometrica dipende da C_c (e questo ha senso)

Si può notare che tale modulo non è una costante del materiale ma, a il compartimento naturalmente, dipende dallo stato di tensione corrente e , a questo, non va bene a il calcolo del cedimento, perché andrebbe calcolato passo passo.

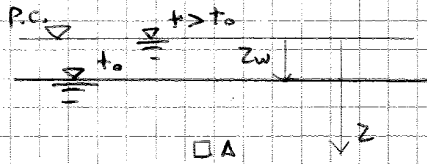
Di conseguenza, bisogna capire dove il punto cioè lo stato di sforzo corrente e da qui trovare la tangente.

VALORI TIPICI	Sabbie sciolte	$E_{ed} = 10 \div 40 \text{ MPa}$
	Sabbie dense	$E_{ed} = 50 \div 150 \text{ MPa}$

7 Fenomeni di sovraconsolidazione:

nella storia tensionale, si è visto il fenomeno più ricorrente che genera oc, cioè **APPLICAZIONE E RIMOZIONE DI CARICO**, ad es legata all'erosione.
Tale fenomeno però può essere indotto da altri fattori:

→ sovraconsolidazione dovuta a oscillazioni del livello di falda



Si consideri un terreno con un dato P.C. e si supponga che all'istante iniziale t_0 , la falda sia in una certa posizione, a profondità z_w .
Poi si suppone che, all'istante $t > t_0$, ci sia stato un innalzamento del livello di falda fino al P.C.

Si consideri un elemento A posto alla generica profondità z :

se il livello di falda aumenta, si può intuire che in A aumenti la pressione u e dunque la tensione efficace diminuisca e, di conseguenza, la tensione di sovraconsolidazione coincide con la tensione agente quando la falda era nella posizione iniziale, al tempo t_0 .

Così la tensione σ_p' è data dalla tensione iniziale $\sigma_{v0}'(t_0)$, che vale

$$\begin{aligned} \sigma_p' &= \sigma_{v0}'(t_0) = \gamma z - \gamma_w(z - z_w) = \\ &= \gamma' z + \gamma_w z_w \end{aligned}$$

Nella condizione attuale, la tensione corrente $\sigma_{v0}'(t)$ è data da

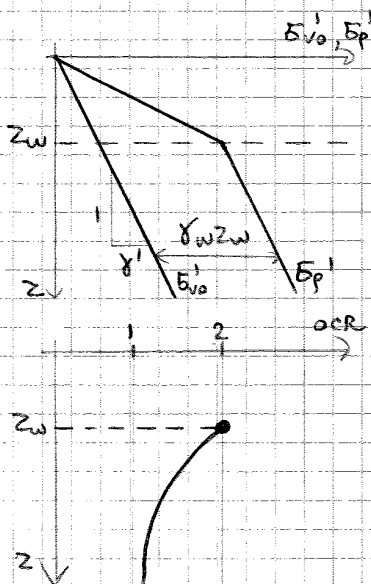
$$\sigma_{v0}'(t) = \gamma z - \gamma_w z = \gamma' z$$

Così l'ocr vale

$$\text{OCR} = \frac{\sigma_p'}{\sigma_{v0}'} = 1 + \frac{\gamma_w z_w}{\gamma' z}$$

$$\text{OCR} = 1 + \frac{\gamma_w z_w}{\gamma' z}$$

Si nota che, a $z = z_w$, OCR vale 2 mentre, se la profondità aumenta, allora $z \rightarrow \infty$ e $\text{OCR} \rightarrow 1$



Ora, FISSATA LA PROFONDITÀ z_w ALL'ISTANTE t_0 , si riporta su un diagramma l'andamento di σ_{v0}' e di σ_p' , in funzione di z .
La tensione σ_{v0}' è data da una retta di pendenza γ' , mentre in passato c'era un altro andamento, con differenza $\gamma_w z_w$ (dalla formula).

Se ora si riporta l'andamento dell'OCR in termini di z , questo va da 2 e tende asintoticamente ad aumentare con la profondità, fino al valore unitario.

Questi 2 andamenti a confronto sintetizzano la storia tensionale del materiale, cioè quando si sintetizza la storia tensionale del materiale, significa realizzare i diagrammi di σ_{v0}' (ottenuto da calcoli), di σ_p' (da esperimenti, con prove a diverse profondità) e da qui di OCR e da qui si diagnostica la modalità con cui è avvenuto il processo di sovraconsolidazione.

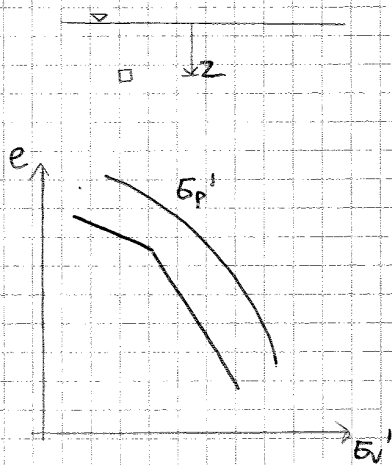
Inoltre, dai diagrammi si hanno degli ordini di grandezza e si nota che oscillazioni del livello di falda danno OCR molto bassi.

Si può dimostrare che l'OCR dovuto al creep vale

$$OCR = \left(\frac{t}{t_{100}} \right)^{\frac{C_{cr}}{C_c - C_r}}$$

Così emerge l'idea che lo stato NC sia un concetto astratto, a causa di questo fenomeno viscoso, poiché negli anni, se il materiale è sotto la stessa σ_v , non è NC ma in natura ogni materiale ~~almeno~~ è almeno leggermente OC.
 Può essere interessante speculare sulla storia ma, ai fini ingegneristici, basta determinare correttamente la tensione σ_p' , qualunque sia la causa, poiché in termini meccanici non cambia nulla.

OSSERVAZIONE: QUALITÀ DEL CAMPIONE



Si consideri il piano di compressione e si immagini di avere un deposito naturale.

A una certa profondità z , si preleva un provino e lo si porta in laboratorio.

Se si immagina di lavorare il provino e spalmarlo nel portacampioni, si ottiene una curva che è una retta perché, modellandolo, si è distrutta la struttura e dunque si è eliminata la memoria.

Se però si presta attenzione e cura nel movimento, nella perdita di contenuto d'acqua, etc., si ottiene la classica curva con σ_p' .

Da qui si deduce che un prerequisito fondamentale a determinare la storia tensionale è la qualità del campione perché dev'essere realmente indisturbata (si mantiene inalterata la struttura, il contenuto d'acqua e la composizione di fluido interstiziale).

Se non è accurato, si cancella la memoria impressa nella struttura.

Solitamente, se la prova è fatta bene, il ginocchio è così evidente che si determina a occhio nudo.

Altrimenti, può essere presente una curvatura relativamente dolce e, a il passaggio poco netto, è difficile individuare σ_p' .

In questo caso, σ_p' è determinato con il metodo di Casagrande:

→ si determina il punto di massima curvatura A

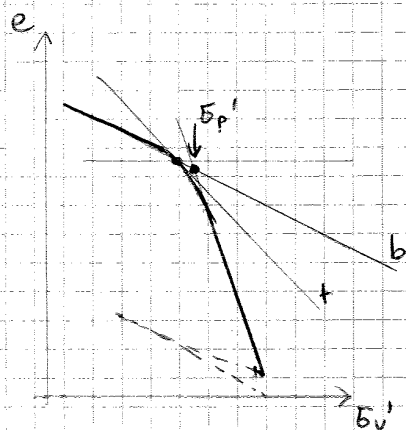
→ da A si tracciano l'orizzontale a e la tangente t

→ da qui si determina la bisettrice b dell'angolo formato tra le rette a e t

→ si immagina di prolungare il ramo di compressione e da qui si ottiene σ_p' , che corrisponde all'intersezione con b .

È una costruzione grafica che si applica quando non si sa trovare σ_p' .

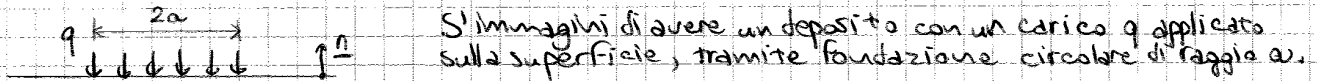
Per ricavarla, si è scaricato il materiale, ricaricato, e si è ottenuta una curva ma è evidente che in essa σ_p' è data dal massimo carico in precedenza e così, conoscendo σ_p' nel ciclo precedente, Casagrande ha tarato il metodo in questo modo



Calcolo dei cedimenti

Finora il calcolo dei cedimenti è stato fatto con carichi distribuiti a estensione infinita, o avere un caso monodimensionale.
In realtà, l'estensione è finita edunque bisogna calcolare il cedimento alle varie profondità.

2 Calcolo delle tensioni indotte da carichi applicati sulla superficie



Questo è il classico problema della teoria elastica e il problema che si sta affrontando è un problema al contorno.
Ciò significa che

→ l'emispazio reale è sostituito nel modello concettuale da un semispazio elastico, isotropo (si assume che le proprietà del mezzo non dipendano dalla direzione in cui lo si carica) e omogeneo (le proprietà del mezzo non sono funzione del punto)

→ proprio perché è un problema al finito, bisogna specificare sempre e in modo conveniente le condizioni al contorno, cioè cosa succede sulla FRONTIERA. In questo caso, sulla frontiera si sta applicando una fondazione e il suo effetto è un carico uniformemente distribuito. Dunque passare dal problema reale al modello significa definire opportunamente le condizioni al contorno, in questo caso

$$\sigma_{ij} n_j = \begin{cases} q & -a \leq x \leq a \\ 0 & x < -a \vee x > a \end{cases} \quad \rightarrow \text{si introduce il versore } \vec{n} \text{ in modo da scrivere le componenti normali di sforzo}$$

Sinota che sulla frontiera non ci sono tensioni tangenziali.

Poiché è un problema al finito, devo essere soddisfatte le equazioni di equilibrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0$$

le equazioni di deformazione

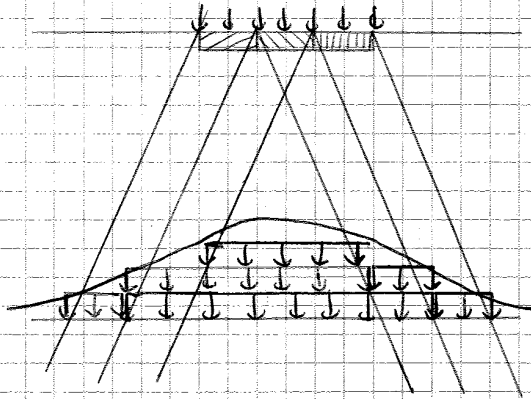
$$\epsilon_{ij} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

e il legame costitutivo

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

In tal modo si è impostato il problema elasto-statico e da qui si possono calcolare tensioni, deformazioni e spostamenti, in particolare sulla superficie (questi danno il cedimento).

Ora, però, viene da pensare che se si è vicini all'asse baricentrico (A) o lontani da esso (B), si trovano valori diversi di $\Delta\sigma_z$ x la diversa distanza dal carico. Proprio perché il livello tensionale in A è diverso da quello in B, questa distribuzione non convince e s'immagina che ci sia una DISTRIBUZIONE RADIALE che va smorzandosi verso l'infinito.



S'immagini di avere un piano di riferimento su cui calcolare l'incremento di tensione.

Poi si suddivide la fondazione in 3 parti e si considera il cono di diffusione relativo alla zona centrale, pendenza 1:2.

Si nota che il cono di diffusione diffonde il carico in una zona e dà un certo incremento di tensione.

Ora si prende la zona a sinistra e si considera l'incremento. Si nota che questa diffonde il carico nell'altro cono e si va a sommare a quello precedente, cioè cambia il diagramma delle tensioni.

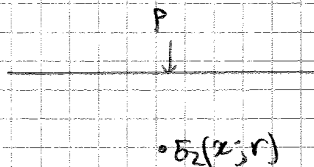
Infine, si considera il diagramma di diffusione della porzione a destra, dove gli incrementi si sommano.

Così si è scoperto come viaggiare l'incremento di tensione:

questo incremento è massimo in corrispondenza del centro e tende a smorzarsi man mano che si va verso i bordi, come ci si aspetta dal punto di vista teorico (ma ciò è fatto in maniera intuitiva).

Con il raffinamento della soluzione rispetto a quella precedente, si è applicato un principio potente, cioè il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

Boussinesq provò a considerare porzioni di area sempre più piccole x raffinare, fino a $dA \rightarrow 0$ (cioè forza unitaria applicata in un punto).



M.Fatti, egli applicò una forza unitaria sul mezzo e trovò sui vari punti una distribuzione tensionale $\sigma_z(x, r)$, funzione della posizione x e della distanza radiale r . Poi, x trovare la soluzione relativa al carico applicato sull'area finale, si integrò sull'area circolare. L'incremento $\Delta\sigma_z$ dipende solo da

→ profondità

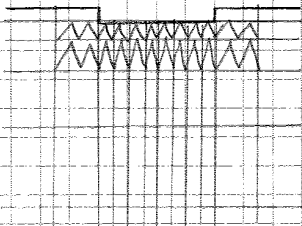
→ dimensione dell'area

Da qui si trova la soluzione

$$\Delta\sigma_z = q \left\{ 1 - \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{a}{z} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\}$$

Come detto prima, questa soluzione dipende dalla profondità e dalle dimensioni della fondazione.

⇒) S'INFITTSCE NELLE ZONE CHE CONTRIBUISCONO MAGGIORMENTE AL CALCOLO



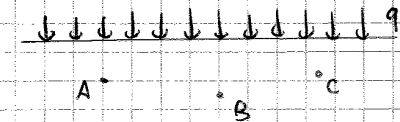
Cio' significa che, quando si fa una griglia, si infittisce nella zona perturbata e si poi si satura, perche' nella zona superiore c'e' un maggiore gradiente e dunque si infittisce.

Ora, riprendendo la formula

$$\Delta \sigma_z = q \left\{ 1 - \frac{1}{[1 + (a/z)^2]^{3/2}} \right\}$$

se si fa tendere l'area dell'impronta all'infinito (cioe' $a \rightarrow \infty$), si rientra nel caso di carico infinitamente esteso e si sta riportando nel caso monodimensionale, dove

$$\Delta \sigma_z = q, \forall z$$



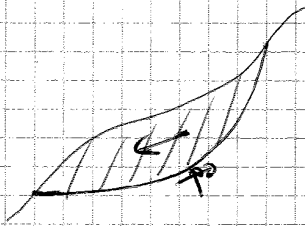
C'incremento e' pari al carico x ogni punto considerato, cioe' nel problema in cui il carico e' infinitamente esteso (caso monodimensionale), l'incremento della tensione verticale e' uguale al carico applicato, indipendentemente dal punto. Per questo, nella prova edometrica, si e' presa $\sigma_v = q$.

RESISTENZA AL TAGLIO

1. Si sa che nella tecnica delle costruzioni, e resistenza del calcestruzzo, si parla di resistenza a trazione, flessione, compressione e taglio:

in genere non si parla mai di resistenza di un materiale ma si specifica sempre qualcos'altro, cioè il MECCANISMO DI ROTURA.

Così, la prima cosa da fare e capire cosa succede in un terreno è immaginare il meccanismo:



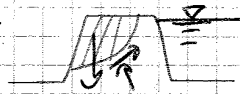
Immaginando di avere un pendio, cosa succede quando c'è una frana?

All'interno dell'ammasso si crea una superficie di scivolamento che diventa una discontinuità cinematica, in cui la parte superiore, e effetto della gravità, può scorrere rispetto a quella tratteggiata e queste 2 parti si scambiano punto a punto delle azioni normali e tangenziali.

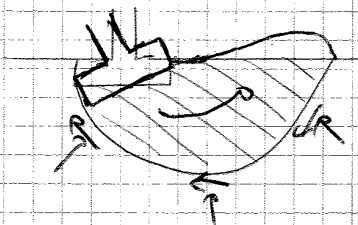
Allora lo scivolamento si procura quando le tensioni indotte lungo la superficie di scivolamento superano la resistenza che la parte a velocità nulla può offrire, cioè quello che produce lo scivolamento è un'azione di taglio e la resistenza che offre il terreno e impedirlo è la resistenza al taglio.

Ciò avviene perché si produce una rottura in cui, e geometria, carichi e condizioni di contorno si passano a nuove sforzi taglianti che raggiungono il valore limite.

Questo meccanismo si produce in situazioni diverse:



si consideri una struttura di ritenuta costituita da una diga in terra e si immagini che si verifichi una rottura di certo tipo, e cui una porzione scivola rispetto alla zona che rimane in posto. Se si considerano componente normale e tangenziale, le tensioni tangenziali danno un'azione di taglio che, se eguaglia la resistenza disponibile, porta a rottura.



Si immagini di avere una fondazione superficiale (es. pilota di fondazione). Se si incrementa progressivamente il carico P gravante, questo non può crescere all'infinito perché, a un certo punto, sotto la fondazione si crea una superficie di scivolamento. Così la parte superiore (fondazione + terreno) si comporta come un tutt'uno e la fondazione ruota (e collassa) e il materiale si gonfia a lato. A ciò si oppone la resistenza al taglio che il materiale può opporre lungo la superficie di scivolamento.

Dunque questa rottura non riguarda i singoli granuli e le particelle (non è a compressione) ma si comporta come un corpo rigido che può scivolare sulla superficie di scivolamento, che rappresenta una discontinuità cinematica poiché in campo di velocità è diversa nell'attraversare questa superficie.

non tutti i punti del piano di Mohr sono accessibili perché i materiali hanno resistenza finita e ~~è~~

→ i punti con significato fisico sono all'interno o sotto la curva

→ la regione esterna è inaccessibile perché quei punti rappresentano stati tensionali non compatibili con la resistenza del materiale.

Allora le rette di Coulomb inviluppano tutti gli stati fisici possibili e, a questo, si parla di inviluppo di rottura

↓ dato il criterio di rottura, tutti i punti (anche quelli ultimi) si trovano questo comune confine

ora, il criterio di rottura si scrive come

$$\tau = \mu \sigma'$$

dove μ è la pendenza della retta ma questa può essere individuata con l'angolo φ'

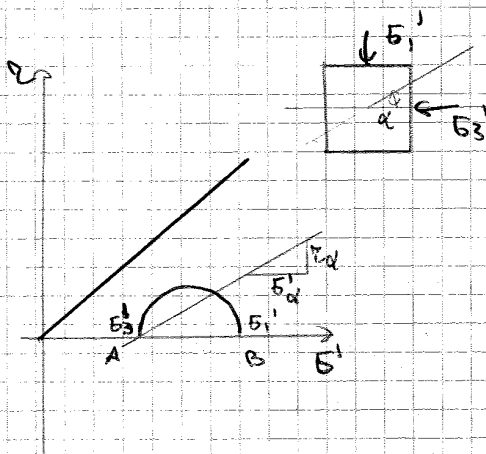
$$\mu = \tan \varphi'$$

e così si ha

$$\tau = \sigma' \tan \varphi'$$

$$\tau = \sigma' \tan \varphi'$$

Poiché φ' serve a individuare la pendenza dell'inviluppo e della linea che rappresenta la resistenza al taglio, si parla di angolo di resistenza al taglio.



ora, si considerino le rette di rottura con l'angolo φ' e si consideri un elemento di terreno soggetto a uno stato di sforzo rappresentato dalle tensioni σ_1' e σ_3' (principali). Si sa che nel piano di Mohr lo stato di sforzo è rappresentato da un cerchio (l'origine dei piani è in A).

ora, esistono in M corrispondenza di questo stato di sforzo, dei potenziali piani di scivolamento, cioè succede qualcosa applicando σ_1' e σ_3' ? No perché in un potenziale piano deve verificarsi che le tensioni σ' e τ rispettino la legge

$$\tau = \sigma' \tan \varphi'$$

ma non ci sono tensioni tangenziali né sul piano verticale né in quello orizzontale, a cui non possono mai essere piani di scivolamento

⇒ i piani principali non possono mai essere piani di scivolamento perché su di essi non opera mai alcuna tensione tangenziale

Si sa però che il cerchio di Mohr rappresenta graficamente lo stato di sforzo agente nel punto e dunque, considerando uno degli infiniti piani appartenenti alla stella (ad es. inclinando l'elemento di α rispetto all'orizzontale), su di esso agiscono σ' e τ . Però, neanche questo piano è un piano di rottura perché nessun punto si trova sull'inviluppo di rottura (e dunque nessuna combinazione σ' - τ può essere di rottura)

Da questo fatto si deduce poi un'altra proprietà.

Si consideri un cerchio di Mohr a rottura, dove il raggio PT si può esprimere come

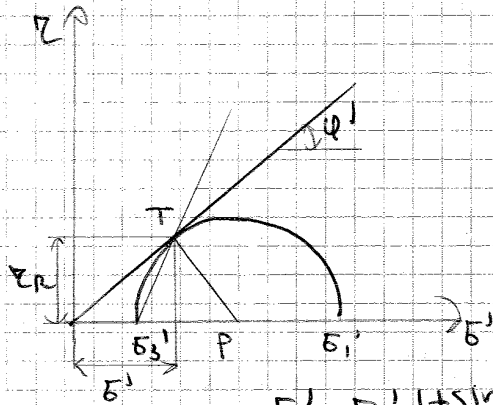
$$\overline{PT} = \overline{OP} \sin \varphi' = \frac{1}{2}(\sigma_1' - \sigma_3')$$

dove \overline{OP} è la coordinata del centro del cerchio di Mohr, a cui

$$\frac{1}{2}(\sigma_1' + \sigma_3') \sin \varphi' = \frac{1}{2}(\sigma_1' - \sigma_3')$$

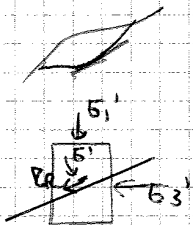
$$\Rightarrow \sigma_1' = \sigma_3' \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

Criterio di Mohr nelle tensioni principali



$$\sigma_1' = \sigma_3' \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}$$

Casi se prima ci si riferiva alle componenti di sforzo agenti sul piano di rottura nelle prove di laboratorio (provina cilindrica in condizioni assialsimmetriche) si applicano le tensioni σ_1' e σ_3' e si porta a rottura incrementando la tensione finché non si crea un piano di rottura (mai verticale od orizzontale) in cui si generano τ_c e σ' e diventa utile lo stato di sforzo in termini di tensioni principali.



Ora, si sa che il comportamento dei materiali naturali è anelastico e anisotropo, cioè dipende dalla storia e, a questo, si studia il percorso delle sollecitazioni introducendo delle variabili opportune.

Pertanto, bisogna poter rappresentare l'involucro non solo sul piano di Mohr ma anche sul piano degli invarianti.

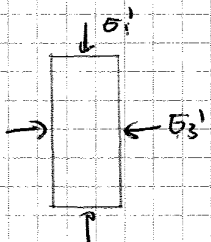
Rappresentazione dell'involucro di rottura sul piano degli invarianti

CONDIZIONI ASSIALSIMMETRICHE

Si ricorda che gli invarianti sono

→ tensione media $p' = \frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3}$

→ deviatore di tensione $q = \sigma_1' - \sigma_3'$



In condizioni assial-simmetriche si ha un prisma cilindrico con tensioni principali σ_1' (maggiore) e σ_3' (minore) e si sa che

$$\sigma_2' = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} = \sigma_3'$$

Prove sperimentali per la determinazione dei parametri di resistenza al taglio:

S'immagini si studiare la stabilità di una fondazione a pendio, di cui si deve fare la verifica di stabilità.

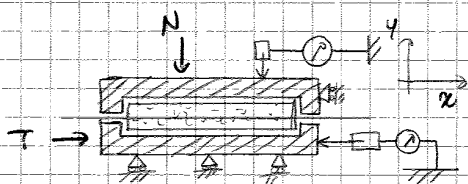
Cio' si può fare conoscendo la resistenza al taglio del terreno φ' e questo equivale a determinare i parametri che caratterizzano l'involuppo, cioè tracciare l'involuppo.

⇒ bisogna vedere le prove e gli aspetti che permettano di determinare i parametri.

Esistono più dispositivi

Apparecchi di taglio diretto

Essi servono a determinare la resistenza a taglio del terreno.



S'immagini di avere un prisma di terreno a sezione quadrata o circolare (es. limo sabbioso).

Per esprimere la resistenza a taglio, bisogna fare in modo da provocare un piano di rottura e, a fare ciò, si realizza la scatola di Casagrande.

Essa è una scatola divisa a metà, con parte inferiore e superiore (dal punto di vista meccanico, sono due telai) in cui è alloggiato il campione.

Ora, se si riesce a far scorrere un telaio rispetto all'altro, si crea un piano di rottura e lì si misura la resistenza al taglio.

Dunque si cerca di realizzare un meccanismo di scorrimento, facendo spostare il telaio inferiore (che può scorrere su carrelli) e, a evitare il trascinarsi, si inserisce un carrello verticale sulla superficie superiore. Così non scorre orizzontale ma può farlo in verticale.

Così si applicano la forza N e la forza T sulla parte inferiore, provocando uno scivolamento relativo e lì, misurando la forza T , si può definire la resistenza a rottura.

È però importante misurare lo spostamento, che non si può trascurare, a cui si mette un micrometro centesimale solidale a un piano fisso a misurare lo spostamento orizzontale e, a precisione, uno a lo spostamento verticale.

Ora, se si vuole determinare φ' , bisogna tracciare l'involuppo di rottura e, a fare ciò, servono 2 punti.

⇒ bisogna procurarsi 2 coppie (σ' ; τ)

→ anche di più a livello sperimentale a questioni di attendibilità del dato sperimentale

(1) Si suppone di applicare un certo valore di N , che rapportato all'area A del prisma, dà il valore σ' .

Per fissare le idee, si suppone che questa tensione agente sulla direzione normale al piano di rottura valga

$$\frac{N}{A} = \sigma' = 50 \text{ kPa}$$

Inoltre, il fatto che i dati sperimentali si collochino su una retta costituisce una validazione sperimentale dell'ipotesi di Coulomb e del criterio di rottura.

È veramente così?

Nell'apparecchiatura, si è messo un micrometro x misurare gli spostamenti orizzontali x e di spostamenti verticali y .
In fatti, la parte inferiore si muove rispetto a quella superiore, non necessariamente con scorrimento orizzontale ma anche verticale.

Dunque la prova ha un'altra interpretazione:

La si può interpretare alla luce dei teoremi sul LAVORO (concetto importante nell'energia).

Quando si applica un carico assiale N e un tagliante T , si compie lavoro e questo vale

$$T dx - N dy$$

↓
se il provino tende ad aumentare di volume
(la parte superiore si alza rispetto a quella inferiore), allora N compie lavoro positivo

All'istante di rottura, questo lavoro compiuto si dissipa, poiché la rottura è un processo dissipativo.
Come dissipa?

Così. Dunque il criterio di rottura nasce da un'ipotesi di dissipazione e, a seconda di come si ipotizza la dissipazione, viene fuori un criterio di rottura (es con calore, o vincere gli attriti, etc.).

Qui si scrive sotto forma di ATTRITO, che vale il coefficiente di attrito $\mu \times N'$ e dissipa energia in virtù dello spostamento relativo

$$T dx - N' dy = \mu N' dx$$

Questo è il cosiddetto modello di dissipazione di Taylor (1948).
Ora si divide $x N' dx$ e l'area A del provino, si saprà che

$$\frac{T}{A} = \tau \qquad \frac{N'}{A} = \sigma'$$

e si ottiene

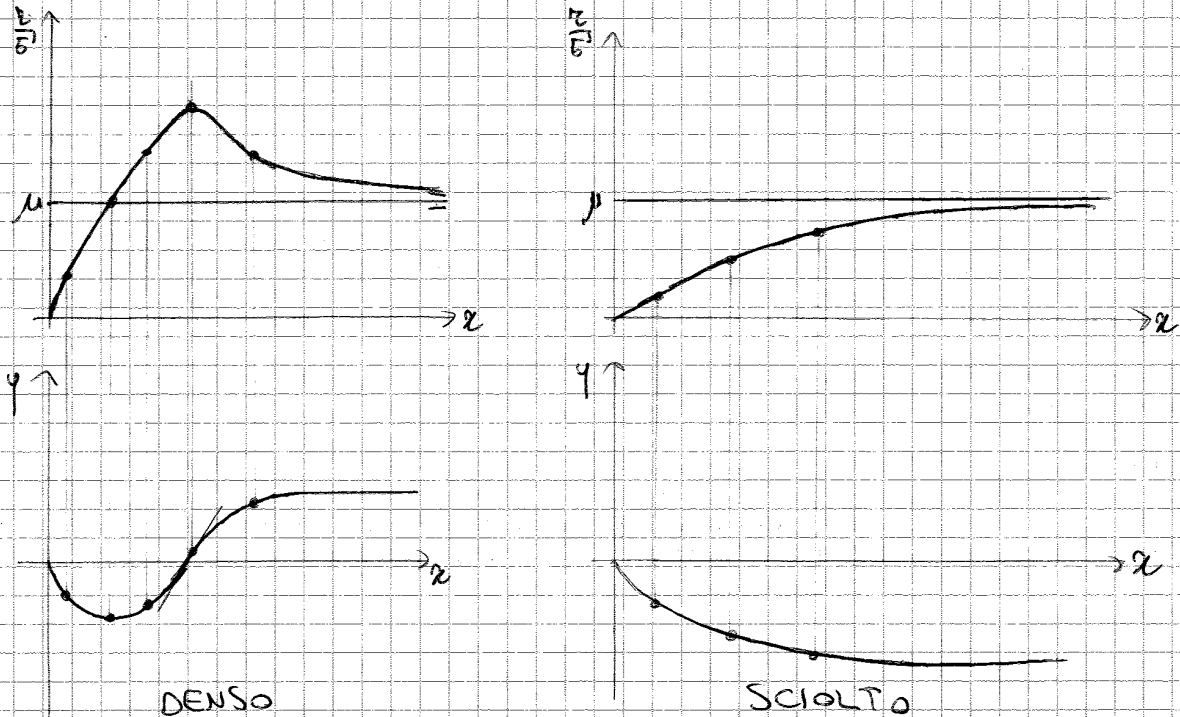
$$\frac{\tau}{\sigma'} = \mu + \frac{dy}{dx}$$

Coulomb diceva che, in rottura

$$\frac{\tau}{\sigma'} = \mu$$

ora invece è uguale a qualcos'altro.

INFLUENZA DELLA DILATANZA SUL COMPORTAMENTO DEL MATERIALE



Si considerino 2 diagrammi, a sinistra con il rapporto $\frac{\sigma}{\sigma_0}$ in funzione di ϵ e μ in funzione di ϵ , con riferimento alla prova di taglio diretto.

Taylor dice che

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \mu + \frac{dy}{d\epsilon}$$

Nel primo diagramma, di fatto si riporta una curva sforzo-deformazione, che può essere ricavata passo x passo:

Si immagina di aver ricavato x lo spostamento una certa curva

$$y = y(\epsilon)$$

in cui all'inizio il provino si comprime ($y < 0$) e poi si dilata, aumentando finché non c'è più variazione di volume.

Nel diagramma di sopra, si riporta il valore μ come valore di riferimento. Allora esiste un istante della prova dove

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \mu$$

ed è quando $\frac{dy}{d\epsilon} = 0$, cioè in A ma anche nella condizione asintotica, a cui la curva tocca e tende al valore μ .

ora si consideri un punto B, in corrispondenza di esso, poiché $\frac{dy}{d\epsilon} < 0$, si ha che $\frac{\sigma}{\sigma_0} < \mu$

Nel punto C si ha che $\frac{\sigma}{\sigma_0} > \mu$ e il rapporto $\frac{dy}{d\epsilon}$ è massimo in corrispondenza del punto di flesso F. Da qui in poi, la pendenza diminuisce e dunque si aggiunge una quantità inferiore fino all'asintoto.

Ora, guardando i diagrammi, si nota che indipendentemente dalle condizioni di stato iniziale (adensamento), esiste una configurazione finale (quella dovuta alle grandi deformazioni) dove il materiale continua la deformazione plastica senza caduta di resistenza.

⇒ esiste una situazione comune, dove il materiale può fluire spontaneamente senza variazione di volume e caduta di resistenza, cioè esiste una configurazione ultima, oltre la quale la derivata di σ' e τ' e le variazioni di volume sono nulle.

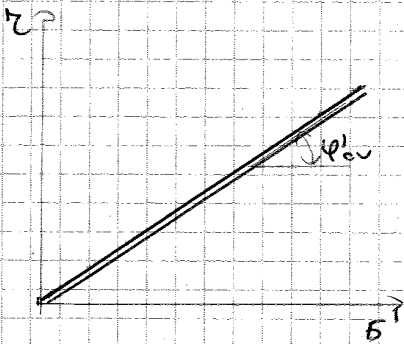
$$\text{E configurazione ultima} \quad \left| \frac{\partial \sigma'}{\partial \tau} = \frac{\partial \tau}{\partial \tau} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial \tau} = 0 \right.$$

Questa è una CONDIZIONE STAZIONARIA dett. e condizione di stato critico.

Ora si considerano i valori di σ' e τ' raggiunti in questa configurazione limite e li si riportano sul piano di Mohr.

Si ottiene un involucro rettilinea e passante x l'origine, espresso dunque dalla relazione

$$\tau' = \sigma' \tan \varphi'$$



L'angolo φ' è però quello riferito alla condizione ultima dove non c'è più variazione di volume e non interviene la dilatazione.

Pertanto si indica questo angolo come angolo di stato critico φ'_{cu} (o angolo a volume costante) e, x distinguere questo caso, si traccia l'involucro di condizione critica con una doppia linea.

$$\tau' = \sigma' \tan \varphi'_{cu}$$

PROPRIETÀ DELLA RESISTENZA DI STATO CRITICO

→ Si sa che nei materiali a densità c'è una resistenza di picco e poi una resistenza di stato critico.

Questi due valori rappresentano una proprietà del materiale?

Una proprietà è una quantità che non dipende dallo stato iniziale (se no si dice "parametro") e dunque la resistenza di picco non è una proprietà perché dipende dal grado di adensamento (infatti nel scialto non esiste).

Dunque quando si parla di picco, si parla di una quantità che non rappresenta una proprietà e dunque varia ogni volta con lo stato iniziale.

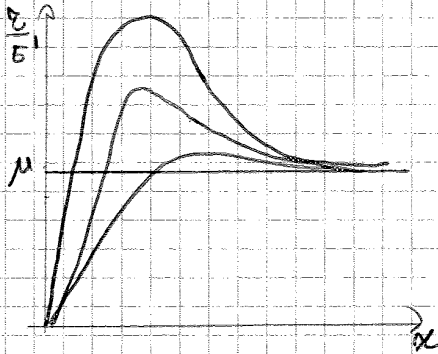
Invece, la resistenza di stato critico non dipende dalle condizioni di stato iniziale (x qualunque sabbia, c'è un unico valore) e di conseguenza esso è un parametro intrinseco del materiale che dipende solo da

→ MORFOLOGIA DELLE PARTICELLE

→ COMPOSIZIONE MINERALOGICA DELLE PARTICELLE

Se si conoscono morfologia e composizione, questo parametro può essere identificato facilmente.

Influenza della tensione normale σ'_2



Ora a parità di sabbia (es. sabbia densa), cosa succede al variare dello sforzo normale N nella prova sperimentale?

Si immagina di eseguire 3 prove, con

$$\sigma'_2 = 50 \text{ kPa}, 100 \text{ kPa}, 500 \text{ kPa}$$

In tutti i casi si ottiene la resistenza di stato critica, rappresentata da μ e un andamento con picco e comportamento post-picco, che tende a μ .

In realtà, intuitivamente, nella II prova aumenta σ'_2 e, nel portare a rottura, la variazione di volume è meno libera perché è maggiore il confinamento (c'è minore variazione x la maggiore dilatazione). Riducendo la componente di dilatazione, si riduce la resistenza di taglio, poiché vale

$$\left(\frac{\tau}{\sigma'_1}\right)_{\max} = \mu + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max}$$

si sta parlando del valore di picco

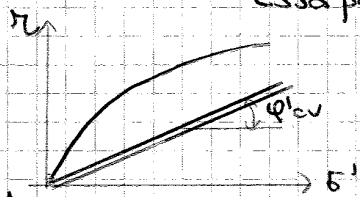
e se σ'_2 cresce, $(dy/dx)_{\max}$ e dunque la resistenza $(\tau/\sigma'_1)_{\max}$ diminuiscono.

Così la curva sforzo-deformazione risulta essere caratterizzata da un picco meno accentuato e, se si incrementa ulteriormente la tensione di confinamento a valori molto elevati, la curva può addirittura avere comportamento duttile, con picco poco pronunciato.

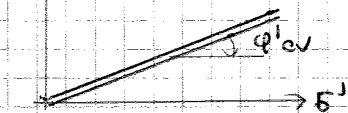
⇒ il comportamento varia al variare dello stato di sforzo perché varia la dilatazione

Così x un materiale addensato non basta parlare di addensamento ma, poiché la dilatazione è influenzata anche dall'entità dello stato di sforzo, dipende anche da esso.

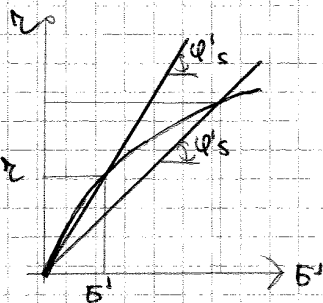
CONSEGUENZA: l'involuppo di picco (cioè l'involuppo relativo al punto di rottura, dove si raggiunge il massimo) di una sabbia densa è un involuppo curvilineo. Essa passa $x=0$ e ha curvatura pronunciata in prossimità di esso.



Così in una sabbia densa c'è un involuppo con marcata curvatura e c'è una condizione di stato critico finale caratterizzata da doppia retta (bisogna fare una distinzione).



Nel caso di sabbie sciolte, invece, esiste un unico involuppo di rottura perché le condizioni di stato critico e di picco coincidono e, ovviamente, ϕ'_{cv} è lo stesso in entrambi i casi (perché è legato solo alle caratteristiche intrinseche del materiale).



Ora, come si può fare se si volesse introdurre un angolo di resistenza al taglio di picco ϕ'_s ? Essendo l'involuppo non lineare, si ragiona con la logica del modulo elastico:

data la tensione di riferimento del problema reale σ'_1 , a questa corrisponde una certa resistenza di taglio e i valori sono legati dalla secante con ϕ'_s .

Se il problema è caratterizzato da un livello di sforzo maggiore, si ottiene una resistenza diversa perché il valore ϕ'_s è diverso.