NUMERO: 1690A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Contadin

MATERIA: Medodi Numerici e Calcolo Scientifico + Eserc + Temi. Prof.Pieraccini

ARITMETICA FINITA

1) $\beta = 10$, $t = 6$
Arrotondamento

$x = 57347,2 \cdot 10^{-1}$; $y = 0,573949 \cdot 10^4$; $z = 57,343861 \cdot 10^2$

a) Errore relativo commesso $\quad fl(x) = 0,573472 \cdot 10^4 \rightarrow$ non ho arrotondato, avevo già 6 cifre di mantissa

$fl(fl(x) \ominus y)$

$fl(x) \ominus y = 0,573472 \cdot 10^4 \ominus 0,573949 \cdot 10^4 = -4,77 = -0,477 \cdot 10$

errore relativo : $\dfrac{|(x \ominus y) - (x - y)|}{|(x-y)|} = 0$

$x \oplus z \quad \rightsquigarrow z = 57,343861 \cdot 10^2 \; fl(z) = 0,573438 \cdot 10^4$

$fl(fl(x) \oplus fl(z))$

$x \oplus z = fl(x) \oplus fl(z) = 0,573472 \cdot 10^4 \oplus 0,573438 \cdot 10^4 = 11469,1$
$= 0,114691 \cdot 10^5$

$x + z = 11469,1061 = 0,114691061 \cdot 10^5$

errore relativo : $\dfrac{|(x \oplus z) - (x+z)|}{|(x+z)|} = 5,32 \cdot 10^{-7} = 0,53 \cdot 10^{-6}$

$fl(fl(x) - fl(z))$

$x \ominus z = 0,573472 \cdot 10^4 \ominus 0,573438 \cdot 10^4 = 0,34$; $x - z = 0,3339$

errore relativo: $\dfrac{|(x \ominus z) - (x-z)|}{|(x-z)|} = 0,018 = \overset{0,18}{0,1} \cdot 10^{-1}$

b) $e_1 = 0 < \varepsilon_m \qquad \varepsilon_m = \frac{1}{2}\beta^{1-t} = \frac{1}{2} 10^{-5}$

$e_2 = 0,53 \cdot 10^{-6} < \varepsilon_m$ opero con arrotondamento

$e_3 = 0,1 \cdot 10^{-1} >> \varepsilon_m$

c) caso 1 : non si verifica cancellazione numerica perché, sebbene i numeri siano vicini tra loro, essi sono già numeri di macchina quindi non ho errori di arrotondamento

caso 2 : somma di due numeri vicini tra loro, non dà origine a cancellazione numerica

caso 3 : diff. tra due numeri vicini tra loro che dà origine alla cancellazione numerica in quanto z non è un numero di macchina. La differenza ha portato quindi all'amplificazione dell'errore con conseguente perdita di cifre significative

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 228

SISTEMI LINEARI

1) $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare la soluzione del sistema usando il metodo di eliminazione gaussiana con pivoting parziale per righe

$$P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$P_{13}P_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & -2 \\ -1/2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} -6 & 0 & 2 & -2 \\ -1/2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$-6x_1 + 2x_3 = -2 \Rightarrow -6x_1 + 4 = -2 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$2x_2 + 2x_3 = 4 \Rightarrow 2x_2 + 4 = 4 \Rightarrow x_2 = 0$$
$$-x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b) Scrivere fattorizzazione $PA = LU$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 228

b) Individuare un metodo iterativo convergente per la sua soluzione, dopo aver, eventualmente, manipolato opportunamente la matrice del sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_{12}A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Permutando la prima e la seconda riga, la matrice risulta a predominanza diagonale stretta per righe. Quindi i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono

c) Usare un metodo diretto opportuno per risolvere il sistema lineare $Ax = b'$, con $b' = (3, 5, 5)^T$

$LUx = Pb'$; $Ux = y$

$Ly = Pb'$ $\qquad Pb' = P_{12}b' = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 5$
$y_2 = 3$
$\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 + y_3 = 5 \Rightarrow y_3 = 3$

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 1$
$2x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$
$3x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = 1$

$x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

③ Sia dato il sistema lineare $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

a) Stabilire se il metodo di Jacobi è applicabile per la risoluzione del sistema lineare.

$$A = \begin{pmatrix} & & F \\ & D & \\ E & & \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} M = D \\ N = E + F \end{matrix}$$

$B_J = D^{-1}(E+F) \rightarrow$ Il metodo è applicabile poiché D è invertibile ($a_{ii} \neq 0$).

d) Il metodo di Gauss-Seidel è applicabile in quanto la matrice $(E+D)$ $(B_{GS} = -(E+D)^{-1} F)$ è invertibile poiché non è singolare.
Il metodo converge poiché A è a predominanza diagonale stretta per righe.

$$x_1 = \frac{6-2x_2+3x_3}{7} \qquad x_1^{(1)} = \frac{6}{7}$$

$$x_2 = \frac{7-3x_1+2x_3}{6} \qquad x_2^{(1)} = \frac{7-3(6/7)}{6} = \frac{31}{42}$$

$$x_3 = \frac{5+x_1-2x_2}{4} \qquad x_3 = \frac{5+6/7-2(31/42)}{4} = \frac{23}{21}$$

$$e^{(1)} = \|x^{(1)} - x^*\|_\infty = \max\left|\left(\frac{6}{7}-1, \frac{31}{42}-1, \frac{23}{21}-1\right)\right| = \frac{11}{42} \cong 0{,}262$$

$$x_1^{(2)} = \frac{6-2(31/42)+3(23/21)}{7} = \frac{164}{147}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{7-3(164/147)+2(23/21)}{6} = \frac{859}{882}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{5+164/147-2(859/882)}{4} = \frac{919}{882}$$

$$e^{(2)} = \|x^{(2)} - x^*\|_\infty = \max\left|\left(\frac{164}{147}-1, \frac{859}{882}-1, \frac{919}{882}-1\right)\right| = \frac{17}{147} \cong 0{,}116$$

4-5 E' assegnato il sistema lineare $Ax=b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Stabilire se il metodo di Jacobi è applicabile al sistema dato

Sì, è applicabile in quanto la matrice D è invertibile $(a_{ii} \neq 0)$

b) In caso di risposta affermativa, stabilire se il metodo di Jacobi converge

La matrice non è a predominanza diagonale, quindi per verificare la convergenza del metodo occorre calcolare il raggio spettrale della matrice d'iterazione e verificare che sia < 1.

c) Effettuare due passi del metodo a partire da un vettore iniziale a scelta. Monitorare l'andamento dell'errore sapendo che la soluzione esatta è $x^* = (0,1,0)^T$.

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1^{(1)} = \frac{1/3\, x_3^{(0)}}{3} = 0$$

$$x_2 = 1 \qquad\qquad e^{(1)} = 0$$

$$x_3 = \frac{6 x_1^{(1)}}{2} = 0$$

Non occorre effettuare ulteriori passi perché il metodo converge già alla soluzione.

(6) E' assegnato il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Stabilire se il metodo di GS è applicabile al sistema dato

Sì, è applicabile poiché la matrice $(E+D)$ è non singolare e quindi invertibile

b) Stabilire se il metodo di GS converge

Calcoliamo $\rho(B_J)$, in quanto per il teorema di Stein Rosenberg si ha $0 < \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$ oppure $1 < \rho(B_J) < \rho(B_{GS})$

$$B_J = D^{-1}(E+F)$$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & -1/2 \\ 0 & 0-\lambda & -2 \\ -8 & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B_J - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2) - 0 - \frac{1}{2}(0 - 8\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4) \Rightarrow \rho(B_G) = 2 > 1$$

Il metodo quindi non converge

$$-\lambda\left[-\lambda(\lambda^2)\right]+1\left[\lambda\left(-\frac{1}{4}\right)\right]=\lambda^4-\frac{\lambda^2}{4}=\lambda^2\left(\lambda^2-\frac{1}{4}\right)$$

$$\rho(B_J)=\frac{1}{2}<1$$

Per il teorema di Stein Rosenberg $0<\rho(B_{GS})<\rho(B_J)<1$ quindi poiché $\rho(B_J)<1$ il metodo converge.

b) Effettuare alcuni passi del metodo a partire dal valore iniziale $X_0=(0,0,0,0)^T$

$$\begin{cases} X_1 - X_4 = 0 \\ -X_1 + 2X_2 = -1 \\ 3X_3 = 0 \rightsquigarrow X_3 = 0 \\ -X_1 + 4X_4 = 3 \end{cases}$$

$X_1^{(1)} = X_4^{(0)} = 0$

$X_2^{(1)} = \dfrac{-1 + X_1^{(1)}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$X_3 = 0$

$X_4^{(1)} = \dfrac{3+X_1^{(1)}}{4} = \dfrac{3}{4}$

$X_1^{(2)} = X_4^{(1)} = \dfrac{3}{4}$

$X_2^{(2)} = \dfrac{-1+3/4}{2} = -\dfrac{1}{8}$

$X_3 = 0$

$X_4^{(2)} = \dfrac{3+3/4}{4} = \dfrac{15}{16}$

$X_1^{(3)} = X_4^{(2)} = \dfrac{15}{16}$

$X_2^{(3)} = \dfrac{-1+15/16}{2} = -\dfrac{1}{32}$

$X_3^{(3)} = 0$

$X_4^{(3)} = \dfrac{3+15/16}{4} = \dfrac{63}{64}$

9) Sia dato il sistema lineare $Ax=b$, con

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la cui soluzione esatta è $x=(0,1,1,0)^T$

a) Analizzare la convergenza del metodo di GS

La matrice non è né simmetrica (def. positiva) né a predominanza diagonale, occorre quindi calcolare il raggio spettrale.

Calcoliamo $\rho(B_J)$

$$-\lambda\left[-\lambda(\lambda^2)+\frac{1}{4}(2\lambda)\right]=\lambda^4-\frac{1}{2}\lambda^2 \Rightarrow \rho(B_J)=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$$

Per il teorema di Stein Rosenberg $0<\rho(B_{GS})<\rho(B_J)<1$

Quindi il metodo converge

(11) E' assegnata la matrice

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Analizzare la convergenza del metodo di GS nella risoluzione del sistema lineare $Ax=b$, con b qualunque

La matrice non è né simmetrica (def. positiva) né a predominanza diagonale. Essa è però tridiagonale con elementi diagonali non nulli, possiamo quindi ricondurci allo studio di $\rho(B_J)$

$B_J = D^{-1}(E+F)$

$$\begin{pmatrix}1/4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-\lambda & 1/4 & 0 & 0\\ 0 & 0-\lambda & -1 & 0\\ 0 & -2 & 0-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(B_J-\lambda I)=-\lambda\det\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 0\\ -2 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda\left[-\lambda\left(\lambda^2\right)+1\left(+2\lambda\right)\right]+\cancel{\frac{1}{4}\left[\ 0\ \right]}=$$

$$=\lambda^4-2\lambda^2=\lambda^2(\lambda^2-2) \Rightarrow \rho(B_J)=\sqrt{2}>1$$

Si ha $\rho(B_{GS})=\rho^2(B_J)$, quindi il metodo non converge

$$Pc = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 2$
$\frac{1}{2}y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 0$
$y_2 + y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = 2$
$\frac{1}{2}y_3 + y_4 = 1 \Rightarrow y_4 = 0$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ 2x_3 + 4x_4 = 2 \Rightarrow x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(13) Ripetere l'esercizio 12 con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{34}P_{13}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$P = P_{34}P_{13}$

$$P_2 = P_{34} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 & 15/4 \end{vmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/4 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 15/4 \end{pmatrix}$$

$LUx = Pb \qquad Ux = y$

$$Pb = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 2$
$\frac{1}{2}y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 1$
$y_3 = 0$
$y_2 + \frac{1}{4}y_3 + y_4 = 1 \Rightarrow y_4 = 0$

b) Aggiungendo la coppia di punti $(x_5, y_5) = (0, 7)$, scrivere il nuovo polinomio interpolante $P_5(x)$ ancora posto nella forma Ruffini-Horner.

$\omega_0(x) = 1$

$\omega_1(x) = (x+2)$

$\omega_2(x) = (x+2)(x+1)$

$\omega_3(x) = (x+2)(x+1)(x-1)$

$\omega_4(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

$\omega_5(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$

$$P_5(x) = -3 + (x+2)\left(5 + (x+1)\left(-2 + (x-1)\left(1 + (x-2)\left(0 - \frac{1}{2}(x-3)\right)\right)\right)\right)$$

② Siano assegnate le seguenti coppie di valori (x_i, y_i) per $i = 0, \dots, 4$

x_i	-2	-1	1	2	3
y_i	-7	0	2	9	28

a) Si determini il polinomio $p_4(x)$ interpolante i dati assegnati, scrivendolo in forma di Lagrange

$$\ell_0(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)(-2-3)}$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)(-1-3)}$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-2)(x-3)}{(1+2)(1+1)(1-2)(1-3)}$$

$$\ell_3(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)}{(2+2)(2+1)(2-1)(2-3)}$$

$$\ell_4(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)}{(3+2)(3+1)(3-1)(3-2)}$$

$$P_4(x) = -7\ell_0(x) + 0\ell_1(x) + 2\ell_2(x) + 9\ell_3(x) + 28\ell_4(x)$$

$\omega_0(x) = 1$
$\omega_1(x) = x+2$
$\omega_2(x) = x-0$
$\omega_3(x) = x-1$
$\omega_4(x) \rightsquigarrow$ non viene considerato perché il polinomio è di terzo grado

$p_3(x) = -5 + (x+2)(3 + (x-0)(-1 + (x-1)))$

b) Aggiungendo il punto $(-1,1)$, si scriva il polinomio $P_4(x)$ interpolante i dati assegnati, scrivendolo in forma di Ruffini-Horner. Si commenti il risultato ottenuto.

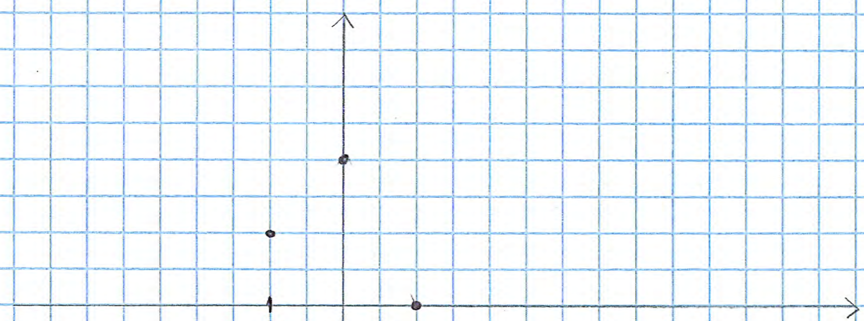
$p_4(x) = -5 + (x+2)(3 + (x-0)(-1 + (x-1)(1 + 0(x-2))))$

$\omega_4(x) = (x+2)(x-0)(x-1)(x-2)$

$P_4(x) = P_3(x) \rightsquigarrow$ poiché l'ultima differenza divisa è nulla il polinomio è comunque di terzo grado

4) Dato l'intervallo $[a,b] = [-1,1]$, determinare la spline cubica naturale relativa ad $[a,b]$ che interpola le seguenti coppie di dati (x_i, y_i) per $i = 0,1,2$.

$(-1,1)$ $(0,2)$ $(1,0)$



$$S_3(x) = \begin{cases} S_3^{(0)}(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 & x \in [-1,0] \\ S_3^{(1)}(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3 & x \in (0,1] \end{cases}$$

$S_3^{(0)}(-1) = 1 \Rightarrow a_0 - b_0 + c_0 - d_0 = 1$ 1)

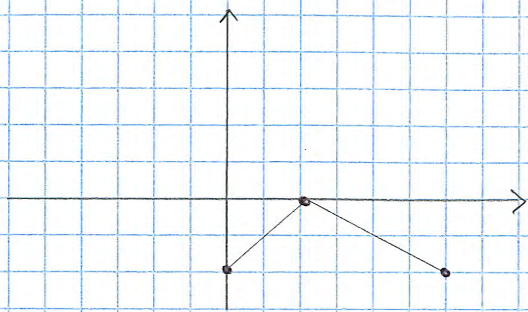
$S_3^{(0)}(0) = 2 \Rightarrow a_0 = 2$

$S_3^{(1)}(1) = 0 \Rightarrow a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$ 2)

Condizioni di interpolazione

(5) Sono assegnati l'intervallo $[a,b]=[0,3]$ e le seguenti coppie di dati: $(0,-1)$; $(1,0)$; $(3,-1)$. Determinare le seguenti spline interpolanti le coppie di dati assegnati, costruite sull'intervallo $[0,3]$:

a) La spline di ordine 1



$$S_1(x)=\begin{cases} S_1^{(0)}(x) = a_0 + b_0 x & x \in [0,1] \\ S_1^{(1)}(x) = a_1 + b_1 x & x \in (1,3] \end{cases}$$

$S_1^{(0)}(0) = -1$; $a_0 = -1$ — Condizioni di interpolazione

$S_1^{(0)}(1) = 0$; $\Rightarrow a_0 + b_0 = 0$

$S_1^{(1)}(3) = -1$; $\Rightarrow a_1 + 3b_1 = -1$

$S_1^{(0)}(1) = S_1^{(1)}(1) \Rightarrow a_0 + b_0 = a_1 + b_1 = 0$

$b_0 = 1$

$a_1 + b_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -b_1 = \frac{1}{2}$

$a_1 + 3b_1 = -1 \Rightarrow -b_1 + 3b_1 = -1$

$2b_1 = -1 \Rightarrow b_1 = -\frac{1}{2}$

$$S_1(x)=\begin{cases} S_1^{(0)}(x) = x-1 & \text{se } x \in [0,1] \\ S_1^{(1)}(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{b_1}x + \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1} & \text{se } x \in (1,3] \end{cases}$$

b) La spline di ordine 2, con condizione aggiuntiva $S_2'(0)=1$

$$S_2(x)=\begin{cases} S_2^{(0)}(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 & x \in [0,1] \\ S_2^{(1)}(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 & x \in (1,3] \end{cases}$$

$S_2^{(0)}(0) = -1 \Rightarrow a_0 = -1$

$S_2^{(0)}(1) = 0 \Rightarrow a_0 + b_0 + c_0 = 0$

$S_2^{(1)}(3) = -1 \Rightarrow a_1 + 3b_1 + 9c_1 = -1$

$S_2^{(0)}(1) = S_2^{(1)} \Rightarrow a_0 + b_0 + c_0 = a_1 + b_1 + c_1 = 0$

$(0,-1)$; $(1,0)$; $(3,-1)$

d) Spline cubica naturale

$$S_3(x) = \begin{cases} S_3^{(0)}(x) = a_0 + b_0x + c_0x^2 + d_0x^3 & x \in [0,1] \\ S_3^{(1)}(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3 & x \in (1,3] \end{cases}$$

$S_3^{(0)}(0) = a_0 = -1$ 1)
$S_3^{(0)}(1) = a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = 0$ 2)
$S_3^{(1)}(3) = a_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 = -1$ 3)

$S_3^{(0)}(1) = S_3^{(1)}(1) \Rightarrow a_0 + b_0 + c_0 + d_0 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1$ 4)
$S_3'^{(0)}(1) = S_3'^{(1)}(1) \Rightarrow b_0 + 2c_0 + 3d_0 = b_1 + 2c_1 + 3d_1$ 5)
$S_3''^{(0)}(1) = S_3''^{(1)}(1) \Rightarrow 2c_0 + 6d_0 = 2c_1 + 6d_1$ 6)

$S_3''^{(0)}(0) = b_0 = 0$ 7)
$S_3''^{(1)}(3) = b_1 + 6c_1 + 27d_1 = 0$ 8)

2) $c_0 + d_0 = 1 \Rightarrow d_0 = 1 - c_0 = -\frac{5}{4}$
4) $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$
5) $2c_0 + 3 - 3c_0 = b_1 + 2c_1 + 3d_1 \Rightarrow -c_0 + 3 = b_1 + 2c_1 + 3d_1$
6) $2c_0 + 6 - 6c_0 = 2c_1 + 6d_1 \Rightarrow -4c_0 + 6 = 2c_1 + 6d_1$

5) $c_0 = 3 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = \frac{9}{4}$

6) $-4(3 - b_1 - 2c_1 - 3d_1) + 6 = 2c_1 + 6d_1$
$-12 + 4b_1 + 8c_1 + 12d_1 + 6 = 2c_1 + 6d_1$
$-6 + 4b_1 + 6c_1 + 6d_1 = 0$

8) $b_1 = -6c_1 - 27d_1 = \frac{81}{16}$

6) $-6 - 24c_1 - 108d_1 + 6c_1 + 6d_1 = 0$
$-18c_1 - 102d_1 = 6 \Rightarrow 18c_1 = -102d_1 - 6$
$c_1 = -\frac{17}{3}d_1 - \frac{1}{3} = -\frac{45}{16}$

4) $a_1 = -b_1 - c_1 - d_1 = -\frac{43}{16}$ sostituisco le precedenti relazioni trovate
$-b_1 - c_1 - d_1 + 3b_1 + 9c_1 + 27d_1 = -1$
$2b_1 + 8c_1 + 26d_1 = -1$
$2(-6c_1 - 27d_1) + 8c_1 + 26d_1 = -1$
$-12c_1 - 54d_1 + 8c_1 + 26d_1 = -1$
$-4c_1 - 28d_1 = -1$
$-4\left(-\frac{17}{3}d_1 - \frac{1}{3}\right) - 28d_1 = -1$
$\frac{68}{3}d_1 + \frac{4}{3} - 28d_1 = -1$
$-\frac{16}{3}d_1 = -\frac{7}{3} \Rightarrow d_1 = \frac{7}{16}$

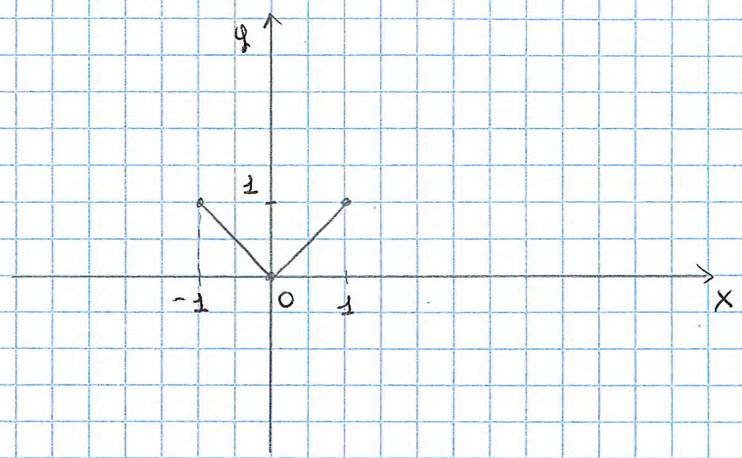
$$S_3(x) = \begin{cases} S_3^{(1)}(x) = \frac{7}{16}x^3 - \frac{45}{16}x^2 + \frac{81}{16}x - \frac{43}{16} & x \in (1,3] \\ S_3^{(0)}(x) = -\frac{5}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 1 & x \in [0,1] \end{cases}$$

6) Assegnati la funzione $f(x) = x^4$ e i punti

$$(x_i, f(x_i)), \quad x_i = -1, 0, 1$$

determinare: a) la retta $r(x)$ che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati

$(-1, 1)$; $(0, 0)$; $(1, 1)$



x_i	-1	0	1
y_i	1	0	1

$r(x_i) = a_1 + a_2 x_i$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3} \\ 2a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0 \end{array}$$

$$r(x) = \frac{2}{3} + 0 \cdot x = \frac{2}{3}$$

⑦ Sono assegnate le seguenti coppie di dati $(0,1)$; $(1,2)$; $(2,-2)$; $(3,4)$. Si vogliono approssimare con una funzione del tipo $f(x) = a_1x + a_2\cos(\pi x)$. Si determini la funzione $f(x)$ del tipo indicato che meglio approssima tali dati usando il metodo dei minimi quadrati. Si risolva il sistema delle equazioni normali usando un metodo diretto opportuno, motivando la scelta.

x_i	0	1	2	3
y_i	1	2	-2	4

$$f(x) = a_1x + a_2\cos(\pi x)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^TA = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^Ty = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Utilizzo l'eliminazione gaussiana:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 5 \\ -1/3 & 4 & -16/3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 6a_1 = 5 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{6} \\ 4a_2 = -\frac{16}{3} \Rightarrow a_2 = -\frac{4}{3} \end{array}$$

$$f(x) = \frac{5}{6}x - \frac{4}{3}\cos(\pi x)$$

⑧ Sono assegnate le seguenti coppie di valori (x_i, y_i) per $i = 1, \dots, 4$

x_i	1	2	3	4
y_i	$\sqrt[3]{2^{22}}$	1	1	$\sqrt[3]{2^{32}}$

Determinare i parametri α_1 e α_2 in modo che la funzione $f(x) = \alpha_1 2^{\alpha_2 x}$ approssimi i dati nel senso dei minimi quadrati

$$y = \alpha_1 2^{\alpha_2 x} \Rightarrow \log_2 y = \log_2(\alpha_1 2^{\alpha_2 x})$$

$$\log_2 y = \log_2 \alpha_1 + \alpha_2 x \log_2 2$$

$$\underbrace{\log_2 y_i}_{z} = \underbrace{\log_2 \alpha_1}_{a_1} + \underbrace{\alpha_2}_{a_2} x_i$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 228

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 7/2 \\ 7/2 & 21/4 \end{pmatrix}$$

$$A^T z = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 29/4 \end{pmatrix}$$

Utilizzo l'eliminazione gaussiana senza pivoting perché la matrice è simmetrica definita positiva

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 7/2 & 11/2 \\ 7/8 & 35/16 & 39/16 \end{array}\right)$$

$$4a_1 + \frac{7}{2} a_2 = \frac{11}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{35}{16} a_2 = \frac{39}{16} \Rightarrow a_2 = \frac{39}{35}$$

$$z = \frac{2}{5} + \frac{39}{35} t \qquad a_2 = \alpha_2$$

$$a_1 = \log_2 \alpha_1 \qquad \alpha_1 = 2^{a_1} = 2^{2/5}$$

$$y = 2^{2/5} x^{39/35}$$

(10) Assegnate le coppie $(0,-2), (1,0), (2,2), (3,-2), (4,-6)$ si determini la funzione del tipo $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right)$ che meglio approssima i dati nel senso dei minimi quadrati.

x_i	0	1	2	3	4
y_i	-2	0	2	-2	-6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 1 \\ 10 & 30 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} -8 \\ -26 \\ -10 \end{pmatrix}$$

somma y
somma $y \times 2^a$ colonna
" $y \times 3^a$ colonna

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 228

(12) Si determini la spline di ordine 2 che interpola i dati $(-1,2)$; $(0,1)$; $(1,2)$ e con derivata prima nulla nell'estremo di ascissa $x=1$.

$$S_2(x) = \begin{cases} S_2^{(0)}(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 & x \in [-1,0] \\ S_2^{(1)}(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 & x \in (0,1] \end{cases}$$

$$S_2^{(0)}(-1) = a_0 - b_0 + c_0 = 2$$
$$S^{(0)}(0) = a_0 = 1$$
$$S^{(1)}(1) = a_1 + b_1 + c_1 = 2$$

$$S_2^{(0)}(0) = S_2^{(1)}(0) \Rightarrow a_0 = a_1 = 1$$
$$S_2'^{(0)}(0) = S_2'^{(1)}(0) \Rightarrow b_0 = b_1 = 2$$

$$S_2'^{(1)}(1) = b_1 + 2c_1 = 0 \Rightarrow b_1 = -2c_1 = 2$$

$$1 - 2c_1 + c_1 = 2 \Rightarrow c_1 = -1$$

$$1 - 2 + c_0 = 2 \Rightarrow c_0 = 3$$

$$S_2(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + 1 \\ -x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$\omega_0+\omega_1+\omega_2=4 \Rightarrow \omega_0=-\omega_1-\omega_2+4=8/9$

$2\omega_1+3\omega_2=8 \Rightarrow 2\omega_1=8-3\omega_2=\frac{8}{3} \Rightarrow \omega_1=\frac{\cancel{8}4}{\cancel{6}3}$

$4\omega_1+9\omega_2=\frac{64}{3}$

$2(8-3\omega_2)+9\omega_2=\frac{64}{3}$

$16-6\omega_2+9\omega_2=\frac{64}{3} \Rightarrow 3\omega_2=\frac{16}{3} \Rightarrow \omega_2=\frac{16}{9}$

③ Nell'esercizio ① i punti $x_0=1$ e $x_2=3$ sono simmetrici poiché hanno pesi uguali. Si tratta di una formula di Newton-Cotes costruita su 3 nodi.
Nell'esercizio ② la formula non corrisponde a nessuna di quelle studiate

④ Ricavare i pesi della formula dei trapezi

$n=2 \qquad \int_a^b f(x) = \omega_1 f(a) + \omega_2 f(b)$

$f(x)=1 \qquad \omega_1+\omega_2=\int_a^b 1\,dx = b-a$

$f(x)=x \qquad a\omega_1+b\omega_2=\int_a^b x\,dx=\frac{b^2-a^2}{2}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b-a\\ \frac{(b^2-a^2)}{2}\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & b-a\end{matrix}\right|\begin{matrix}b-a\\ \frac{(b^2-a^2)}{2}-a(b-a)\end{matrix}$$

$\omega_1+\omega_2=b-a \Rightarrow \omega_1=\frac{b-a}{2}$

$(b-a)\omega_2=\frac{(b-a)(b+a)}{2}-a(b-a)$

$(b-a)\omega_2=\frac{b^2+\cancel{ab}-\cancel{ab}-a^2}{2}-ab+a^2$

$(b-a)\omega_2=\frac{b^2-a^2-2ab+2a^2}{2}$

$(\cancel{b-a})\omega_2=\frac{(b-a)^{\cancel{2}}}{2} \Rightarrow \omega_2=\frac{b-a}{2}$

⑦ Per approssimare l'integrale

$$\int_{-1/2}^{1/2} |x|\,dx = \frac{1}{4}$$

si applichi la formula dei trapezi composita prima con 3 poi con 4 nodi. Si calcoli in entrambi i casi l'errore commesso confrontando l'approssimazione ottenuta con l'integrale esatto e si commenti il risultato

$$N=3 \Rightarrow h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{1}{2}$$

$$I_N^T = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + f(b)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 2f\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$E = |f(x) - I_N^T| = 0$ $\rightsquigarrow$ l'errore è 0 perché la restrizione della funzione integranda ad ogni intervallino è una retta

$$N=4 \Rightarrow h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{1}{3}$$

$$I_N^T = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(a+ih) + f(b)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 2\sum_{i=1}^{2} f(a+ih) + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 2\cdot\left[f\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + f\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\right] + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 2\cdot\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{18}$$

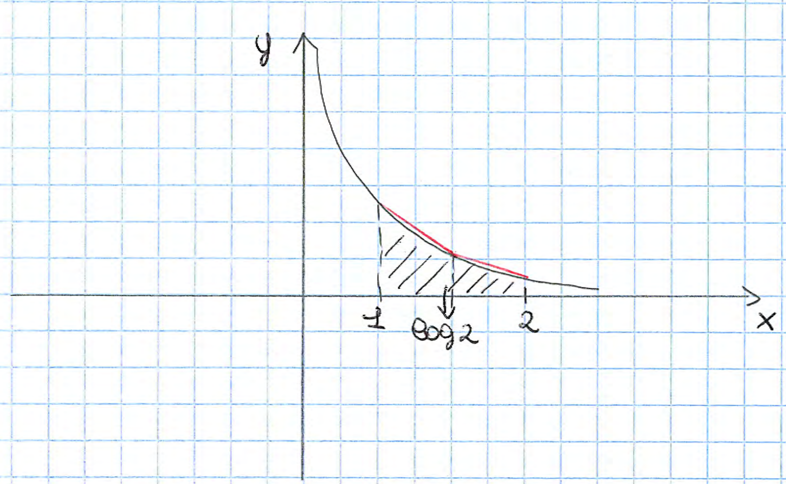
$E = f(x) - I_N^T = -\frac{1}{36}$ $\Rightarrow$ l'errore è negativo perché la formula dei trapezi integra la funzione per eccesso

(9) Osservando che

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$$

si vuole approssimare il valore $\log 2$ utilizzando la formula dei trapezi composita.

a) Effettuando considerazioni geometriche, stabilire se il valore che si ottiene è una stima per eccesso o per difetto di $\log 2$



L'approssimazione sarà per eccesso perchè la funzione lineare a tratti sta sempre sopra a $\frac{1}{x}$.

b) Dimostrare l'affermazione precedente con considerazioni analitiche

$$R_N^T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(c) \qquad c \in [1,2]$$

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$ $\rightsquigarrow$ poichè la derivata seconda è positiva l'errore sarà negativo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 228

$$T_2^S = \frac{\pi}{12}\left(1 + 2f\left(0+\frac{\pi}{2}\right) + 4\left(f\left(0+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + f\left(0+\frac{\pi}{2}\cdot 2-\frac{\pi}{4}\right)\right) - 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(1 + 2 + 4\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) - 1\right) =$$

$$= \frac{\pi}{12}\left(\cancel{1} + 2 + 4 - \cancel{1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

c) Confrontare il numero di intervalli e di valutazioni di funzione necessari ad approssimare l'integrale assegnato con le formule composite dei Trapezi e di Simpson volendo garantire un errore inferiore a 10^{-6}

TRAPEZI: $|R_N^T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(c)| = \frac{\pi^3}{12N^2} \cdot 11 < 10^{-6}$

$$N^2 > \frac{\pi^3}{12 \cdot 10^{-6}} \cdot 11 \Rightarrow N > 5331$$

Valutazioni di funzione: $N+1 = 5332$

SIMPSON: $|R_N^S| = \frac{b-a}{2880} h^4 |f^{IV}(c)|$

$$f'''(x) = 6(-\operatorname{sen}x \operatorname{sen}^2 x + \cos x \cdot 2\operatorname{sen}x\cos x) - 9\cos^2 x(-\operatorname{sen}x) +$$
$$+ 4\cos x(-\operatorname{sen}x) - 4\operatorname{sen}x(\cos x) =$$
$$= -6\operatorname{sen}^3 x + 12\cos^2 x \operatorname{sen}x + 9\cos^2 x \operatorname{sen}x - 4\cos x \operatorname{sen}x - 4\cos x \operatorname{sen}x$$
$$= -6\operatorname{sen}^3 x + 21\cos^2 x \operatorname{sen}x - 8\cos x \operatorname{sen}x$$

$$f^{IV}(x) = -18\operatorname{sen}^2 x\cos x + 21(2\cos x(-\operatorname{sen}x)\operatorname{sen}x + \cos^2 x \cdot \cos x) - 8(-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}x + \cos x\cos x)$$
$$= -18\operatorname{sen}^2 x\cos x - 42\cos x\operatorname{sen}^2 x + 21\cos^3 x + 8\operatorname{sen}^2 x - 8\cos^2 x$$

$$f^{IV}(x) = -60\operatorname{sen}^2 x\cos x + 21\cos^3 x - 8\cos 2x$$

$$f^{IV}(x) = 27(\cos^3 x - 2\cos x \sin^3 x) - 6\cos x - 8\cos 2x$$

b) Utilizzare il metodo di bisezione per approssimare la radice con un errore non superiore a 0,1, motivando perchè siete certi di avere errore superiore a 0,1.

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{3-2}{2^{k+1}} < 0{,}1$$

$$k+1 > \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)$$

$$k+1 > \log_2\left(\frac{1}{0{,}1}\right) = 3{,}32$$

$$k > \log_2\left(\frac{1}{0{,}1}\right) - 1 = 2{,}32$$

L'approssimazione x_4 garantirà un errore $< 0{,}1$.

$$x_1 = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} \qquad f(a)f(x_1) = (-1)\left(\frac{17}{8}\right) < 0$$

$a_1 = a$; $b_1 = x_1$

$$x_2 = \frac{2 + 5/2}{2} = \frac{9}{4} \qquad f(a)f(x_2) = (-1)\left(\frac{17}{64}\right) < 0$$

$a_2 = a$; $b_2 = x_2$

$$x_3 = \frac{2 + 9/4}{2} = \frac{17}{8} \qquad f(a)f(x_3) = (-1)\left(-\frac{223}{512}\right) > 0$$

$a_3 = x_3$; $b_3 = b_2$

$$x_4 = \frac{17/8 + 9/4}{2} = \frac{35}{16}$$

(2) E' assegnata la funzione

$$f(x) = x^3 + 5x - \sin(\pi x) + 3$$

a) Si dimostri che la funzione ha un'unica radice reale e la si localizzi in un intervallo di ampiezza 1.

$$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{>0} + \underbrace{5 - \pi\cos(\pi x)}_{>0}$$

$\cos(\pi x)$ → oscilla tra -1 e 1

La funzione è continua e va da $-\infty$ a $+\infty$ (prevale x^3) e la sua derivata prima è sempre positiva → funzione crescente → un'unica soluzione reale

③ Svolgere l'esercizio 6.5 del libro di testo

Determinare la radice $\varepsilon \cong 0{,}5$ dell'equazione $x + \ln x = 0$ utilizzando le seguenti formule iterative

$$x_{n+1} = \underbrace{-\ln x_n}_{\phi_1(x)} \qquad x_{n+1} = \underbrace{e^{-x_n}}_{\phi_2(x)} \qquad x_{n+1} = \underbrace{\frac{x_n + e^{-x_n}}{2}}_{\phi_3 x}$$

Quali di queste 3 formule produce una successione convergente? Quale delle 3 è da preferirsi? Costruirne una quarta migliore di quelle date.

$$\phi_1'(x) = -\frac{1}{x} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |\phi_1'(x^*)| = \left|-\frac{1}{0{,}5}\right| = 2 > 1$$

Non convergente

$$\phi_2'(x) = -e^{-x} \qquad \lim_{k\to\infty} \left|\frac{e_{k+1}}{e_k}\right| = |\phi_2'(x^*)| = |-e^{-0{,}5}| = 0{,}6$$

Convergente → convergenza lineare $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} < 1$

$$\phi_3'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-x_n}\right)$$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{e_{k+1}}{e_k}\right| = |\phi_3'(x^*)| = \left|\frac{1}{2}\left(1 - e^{-0{,}5}\right)\right| = 0{,}19$$

Convergenza lineare

Il terzo metodo è da preferirsi perché ha una convergenza più rapida. Un metodo migliore consiste nel metodo di Newton che ha ordine di convergenza 2.

④ E' assegnata la funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

a) Mostrare che f ha una sola radice reale e localizzarla in un intervallo

f è continua e va da $-\infty$ (per $x \to -\infty$) a $+\infty$ (per $x \to +\infty$)

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \to f(-1) = 5$; $f(1) = 1$

$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ la funzione cambia concavità

c) Analizzare il comportamento della successione originata tramite il metodo di Newton a partire da $x_0 = 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{3}{-3} = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{1}{0}$$ => il metodo si ferma

d) Determinare x_0 tale che la successione originata tramite il metodo di Newton (in aritmetica infinita) a partire da x_0 contenga il valore 0.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow 0 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_0 = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_0 = \frac{x_0^3 - 3x_0 + 3}{3x_0^2 - 3}$$

$$x_0 - \frac{x_0^3 - 3x_0 + 3}{3x_0^2 - 3} = 0 \Rightarrow \frac{x_0(3x_0^2 - 3) - x_0^3 + 3x_0 - 3}{3x_0^2 - 3} = 0$$

$$\frac{3x_0^3 - \cancel{3x_0} - x_0^3 + \cancel{3x_0} - 3}{3x_0^2 - 3} = 0$$

$$\frac{2x_0^3 - 3}{\cancel{3x_0^2 - 3}} = 0 \Rightarrow 2x_0^3 = 3 \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

e) Perché nel testo del punto precedente è necessario specificare "in aritmetica infinita"?

Perché nell'aritmetica finita, a causa degli arrotondamenti, difficilmente si trova x_1 esattamente uguale a zero.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 228

iii) In caso di risposta affermativa alla domanda 5(b)i, indicare l'ordine di convergenza.

$\phi_2'(x) = \frac{2x}{3} e^{-x^2/3}$ si annulla in $x=0$, però $x=0$ non è il punto fisso, infatti:

$x = \phi(x) \Rightarrow x = e^{-x^2/3}$ per $x=0$

$$0 \neq e^0 = 1$$

L'ordine di convergenza è quindi $p=1$ (lineare)

⑥ Dopo aver localizzato le radici dell'equazione non lineare $f(x) = x^3 - x - 5$, studiare la convergenza del metodo di punto fisso applicato alle funzioni:

si arriva con formula di Newton

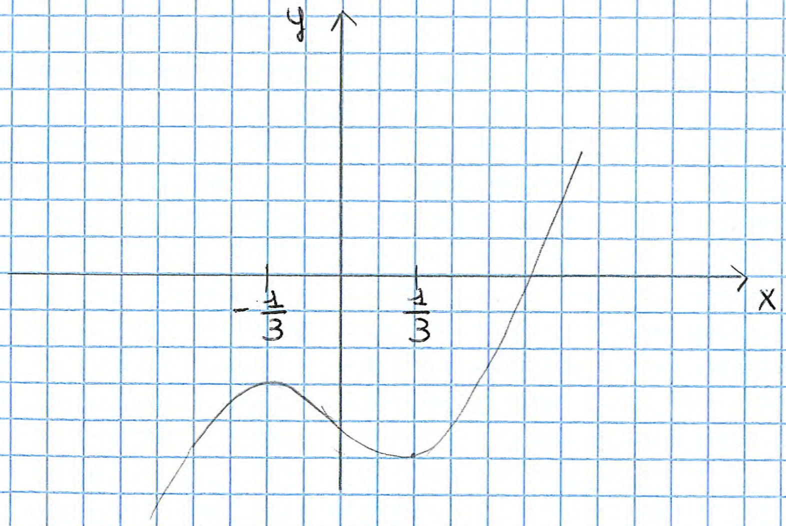
a) $\phi(x) = x^3 - 5$ b) $\phi(x) = (x+5)^{1/3}$ c) $\phi(x) = \frac{2x^3+5}{3x^2-1}$

La funzione $f(x)$ è continua e va da $-\infty$ (per $x \to -\infty$) a $+\infty$ (per $x \to +\infty$).

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -4,7$ $f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \to$ la funzione cambia concavità

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -5,27$



$f(1) = -5 < 0$ $\Rightarrow x^* \in [1,2]$
$f(2) = 1 > 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 228

b) Studiare la convergenza del metodo di Newton per approssimare le radici

1) $f(2)f(3) < 0$

2) $f'(x) = 3x^2 - 4x > 0 \quad \forall\, x_0 \in [2,3]$

3) $f''(x) = 6x > 0 \quad \forall\, x_0 \in [2,3]$

bastano queste se $f(x_0)$ e $f''(x_0)$ sono concordi

4) $\left| \dfrac{f(a)}{f'(a)} \right| < b-a \Rightarrow \left| \dfrac{-1}{4} \right| < 1$

$\left| \dfrac{f(b)}{f'(b)} \right| < b-a \Rightarrow \left| \dfrac{8}{15} \right| < 1$

Il metodo di Newton converge a $x^* \; \forall\, x_0 \in [2,3]$ e l'ordine di convergenza è $p=2$.

c) Applicare un passo del metodo di Newton

$x_0 = 2 \Rightarrow x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$x_1 = 2 - \dfrac{-1}{4} = \dfrac{9}{4}$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \dfrac{437}{198}$

d) Applicare un passo del metodo delle secanti

$x_0 = 2$
$x_1 = 3$ $\Rightarrow x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$

$x_2 = 3 - \dfrac{f(3)}{\dfrac{f(3)-f(2)}{3-2}} = 3 - \dfrac{8}{\dfrac{8+1}{1}} = 3 - \dfrac{8}{9} =$

$= \dfrac{19}{9}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 228

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z'(x) = A\,z(x) + g(x) \\ z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

③ Si ricavi la regione di assoluta stabilità per ciascuno dei seguenti metodi numerici:

a) Eulero esplicito

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k \Rightarrow y_{k+1} = y_k \underbrace{(1 + h\lambda)}_{F(h\lambda)}$$

$$R_a = \{ h\lambda \in \mathbb{C} : |F(h\lambda)| < 1 \} \Rightarrow |1 + h\lambda| < 1$$

b) Eulero implicito

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_{k+1}, y_{k+1})$$

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_{k+1} \Rightarrow y_{k+1}(1 - h\lambda) = y_k$$

$$y_{k+1} = \frac{y_k}{1 - h\lambda}$$

$$R_a = \{ h\lambda \in \mathbb{C} : |F(\lambda h)| < 1 \} \Rightarrow \left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1$$

c) Heun

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k)) \right)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(\lambda y_k + \lambda (y_k + \lambda h y_k) \right)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\lambda y_k + \frac{h}{2}\lambda y_k + \frac{h^2}{2}\lambda^2 y_k$$

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{1}{4} f(t_k, y_k) + \frac{3}{4} f\left(t_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}h f\left(t_k + \frac{2}{3}h, y_k\right)\right)\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + h\left(\frac{\lambda y_k}{4} + \frac{3}{4}\lambda\left(y_k + \frac{2}{3}h\lambda y_k\right)\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{\lambda}{4}y_k + \frac{3}{4}h\lambda y_k + \frac{1}{2}\lambda^2 h^2 y_k$$

$$y_{k+1} = y_k\left(1 + \frac{h\lambda}{4} + \frac{3}{4}h\lambda + \frac{1}{2}(\lambda h)^2\right)$$

$$y_{k+1} = y_k\left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(\lambda h)^2\right)$$

$$\left|1 + h\lambda + \frac{1}{2}(\lambda h)^2\right| < 1$$

④ Per ciascuno dei seguenti problemi di Cauchy, si stabilisca se ha senso cercare un passo h per cui un qualche metodo numerico sia assolutamente stabile; in caso affermativo si esegua un passo di integrazione con i metodi 3a, 3c, 3e, 3f, scegliendo un passo h che soddisfi la condizione di assoluta stabilità.

a) $y' = -10y$, $y(0) = 1$

Soluzione esatta: $y(t) = e^{-10t}$

$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \rightsquigarrow$ asintoticamente stabile

Eulero esplicito: $|1 + h\lambda| < 1$

$$|1 - 10h| < 1$$

$$-1 < 1 - 10h < 1 \Rightarrow -2 < -10h < 0$$

$$-\frac{1}{5} < -h < 0 \Rightarrow h < \frac{1}{5}$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) \qquad h = \frac{1}{20}$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + hf(t^{(0)}, y^{(0)}) \Rightarrow y_{k+1} = 1 + \frac{1}{20}(-10) = \frac{1}{2}$$

Heun: $\left|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2\right| < 1$

$$\left|1 - 10h + \frac{1}{\cancel{2}_1}\cdot \cancel{100}^{50} h^2\right| < 1$$

$$-1 < 1 - 10h + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{100}^{50} h^2 < 1$$

$$-2 < -10h + 50h^2 < 0$$

$$y^{(1)} = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} f\left(t_0 + \frac{2}{3}h,\ 1 - \frac{10}{15}\right)\right)$$

$$y^{(1)} = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} f\left(t_0 + \frac{2}{3}h,\ \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$y^{(1)} = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{4} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}_2}\left(-\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{3}}\right)\right)$$

$$y^{(1)} = 1 + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{4} - \frac{5}{2}\right) = \frac{31}{40}$$

b) $y' = 10y, \quad y(0) = 1$

Soluzione esatta: $y(t) = e^{10t}$

$\lim_{t \to +\infty} y(t) = +\infty \leadsto$ non è asintoticamente stabile quindi nessun metodo sarà assolutamente stabile

c) $\begin{cases} y'' + 5y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad z_1 = y$, $\quad z_2 = y'$

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = -6z_1(t) - 5z_2(t) \\ z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 1 \end{cases}$$

$$z'(t) = A z(t) + g(t) \qquad z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

Analizzo gli autovalori di A per verificare che il sistema sia asintoticamente stabile

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-5-\lambda) + 6 = 5\lambda + \lambda^2 + 6$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0 \qquad \lambda = -2, \quad \lambda = -3$$

$\mathrm{Re}\, \lambda_i < 0 \to$ Asintoticamente stabile

$$\frac{9}{2}h^2 - 3h = 0 \quad \Rightarrow \quad h\left(\frac{9}{2}h - 3\right) = 0 \qquad h = 0, \quad h = \frac{2}{3}$$

$h < \frac{2}{3}$ $\rightarrow$ scelgo $h = \frac{1}{2}$

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \frac{h}{2}\left(f(t^{(k)}, z^{(k)}) + f(t^{(k+1)}, z^{(k)} + hf(t^{(k)}, z^{(k)}))\right)$$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \frac{h}{2}\left(f(t^{(0)}, z^{(0)}) + f(t^{(1)}, z^{(0)} + hf(t^{(0)}, z^{(0)}))\right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6\cdot 1 - 5\cdot 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -6\cdot 1 - 5\cdot 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -11 \end{pmatrix}\right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 5/2 \\ -31/2 \end{pmatrix}\right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 13/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}$$

Eulero modificato: $\left| 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 \right| < 1$

Stesse condizioni di Heun $h < \frac{2}{3}$ $\rightarrow$ scelgo $h = \frac{1}{2}$

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + hf\left(t^{(k)} + \frac{h}{2}, z^{(k)} + \frac{h}{2}f(t^{(k)}, z^{(k)})\right)$$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + hf\left(t^{(0)} + \frac{h}{2}, z^{(0)} + \frac{h}{2}f(t^{(0)}, z^{(0)})\right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}f\left(t^{(0)} + \frac{h}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -6\cdot 1 - 5\cdot 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}f\left(t^{(0)} + \frac{h}{2}, \begin{pmatrix} 5/4 \\ -7/4 \end{pmatrix}\right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5/4 \\ -6\left(\frac{5}{4}\right) - 5\left(-\frac{7}{4}\right) \end{pmatrix}$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/8 \\ 5/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/8 \\ 13/8 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 228

e) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(3) = 1 \\ y'(3) = 1 \end{cases}$ $\qquad z_1 = y$, $z_2 = y'$

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = 2z_1(t) - z_2(t) \\ z_1(3) = 1 \\ z_2(3) = 1 \end{cases} \qquad z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Analizzo gli autovalori di A per verificare che il sistema sia asintoticamente stabile

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(-1-\lambda) - 2 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

$\exists$ Re $\lambda_i > 0$ $\rightarrow$ il sistema non è asintoticamente stabile quindi nessun metodo sarà assolutamente stabile

f) $\begin{cases} y'' - 8y' + 17y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -2 \end{cases}$ $\qquad z_1 = y$, $z_2 = y'$

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = -17z_1(t) + 8z_2(t) \\ z_1(0) = 2 \\ z_2(0) = -2 \end{cases} \qquad z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -17 & 8 \end{pmatrix}$$

Analizzo gli autovalori di A per verificare che il sistema sia asintoticamente stabile

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -17 & 8-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(8-\lambda) + 17 = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 17}}{1} = 4 \pm i \qquad \text{Re}\,\lambda_i > 0$$

Il sistema non è asintoticamente stabile quindi nessun metodo sarà assolutamente stabile

Heun: $\left| 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 \right| < 1$

$$-1 < 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 < 1$$

$$-2 < h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 < 0$$

Se $\lambda = -4+i$ $\quad h(-4+i) + \frac{1}{2}h^2(15-8i) + 2 = 0$

$$h_{1,2} = \frac{4-i \pm \sqrt{15-8i - 4\cdot 2\cdot(15-8i)}}{2(15-8i)} = \text{non acc.}$$

Se $\lambda = -4-i$ $\quad h(-4-i) + \frac{1}{2}h^2(15+8i) + 2 = 0$

$$h_{1,2} = \frac{4+i \pm \sqrt{15+8i - 4\cdot 2\cdot(15+8i)}}{2(15+8i)} = \text{non acc.}$$

Se $\lambda = -4+i$ $\quad h(-4+i) + \frac{1}{2}h^2(15-8i) = 0$

$$h\left(-4+i + \frac{1}{2}h(15-8i)\right) = 0 \qquad h=0 \rightarrow h>0$$

$$h = \frac{(4-i)\cdot 2}{(15-8i)} = \frac{8}{17} + \frac{2}{17}i$$

Se $\lambda = -4-i$ $\quad h(-4-i) + \frac{1}{2}h^2(15+8i) = 0 \qquad h=0 \rightarrow h>0$

$$h\left(-4-i + \frac{1}{2}h(15+8i)\right) = 0$$

$$h = \frac{(-4-i)\cdot 2}{15+8i} = -\frac{8}{17} + \frac{2}{17}i$$

$$0 < h < \frac{8}{17} + \frac{2}{17}i$$

Scelgo $h = \frac{1}{3}$

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} + \frac{h}{2}\left(f(t_k, z_k) + f(t_{k+1}, z^{(k)} + hf(t_k, z_k)\right)$$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \frac{1}{6}\left(f(t^{(0)}, z^{(0)}) + f\left(t^{(1)}, z^{(0)} + \frac{1}{3}f(t^{(0)}, z^{(0)}\right)\right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix}8\\-17\cdot 4 - 8\cdot 8\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}8\\-17\cdot 4 - 8\cdot 8\end{pmatrix}\right)$$

(5) Si esegua un passo di integrazione anche con i rimanenti metodi numerici, per i problemi individuati al punto precedente

a) $\begin{cases} y' = -10y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Eulero implicito: $R_a \Rightarrow \left| \frac{1}{1+h\lambda} \right| < 1$ → in realtà metodo incondizionatamente stabile

$-1 < \frac{1}{1+h\lambda} < 1$ $\qquad \lambda = -10$

$\frac{1}{1+h\lambda} > -1 \qquad \vee \qquad \frac{1}{1+h\lambda} < 1$

$\frac{1}{1+h\lambda} + 1 > 0 \qquad \frac{1}{1+h\lambda} - 1 < 0$

$\frac{1+1+h\lambda}{1+h\lambda} > 0 \qquad \frac{\cancel{1}-\cancel{1}-h\lambda}{1+h\lambda} < 0$

$\frac{2+h\lambda}{1+h\lambda} > 0 \qquad \frac{-h\lambda}{1+h\lambda} > 0$

$h > -\frac{2}{\lambda} \Rightarrow h < \frac{1}{5} \qquad h > 0$

$h > -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow h < \frac{1}{10} \qquad h > -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow h < \frac{1}{10}$

$0 < h < \frac{1}{10}$

Scelgo $h = \frac{1}{20}$

$y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1})$

$y^{(1)} = y^{(0)} + \frac{1}{20} f(t^{(1)}, y^{(1)})$

$y^{(1)} = 1 + \frac{1}{\cancel{20}} (-\cancel{10}) \cdot y^{(1)}$

$y^{(1)} + \frac{1}{2} y^{(1)} = 1$

$\frac{3}{2} y^{(1)} = 1 \Rightarrow y^{(1)} = \frac{2}{3}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 228

Trapezi: $z^{(1)} = z^{(0)} + \frac{h}{2}\left(f(t^{(0)}, z^{(0)}) + f(t^{(1)}, z^{(1)}) \right)$

$h = \frac{1}{2}$ $\quad z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6\cdot1-5\cdot1 \end{pmatrix} + A z^{(1)} \right)$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -11/4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} A z^{(1)}$$

$$z^{(1)} - \frac{1}{4} A z^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -7/4 \end{pmatrix}$$

$$\left(I - \frac{1}{4}A\right) z^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -7/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 3/2 & 5/4 \end{pmatrix} z^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ -7/4 \end{pmatrix}$$

g) $\begin{cases} y'' + 8y' + 17y = 0 \\ y(1) = 4 \\ y'(1) = 8 \end{cases}$ $\qquad z_1'(t) = z_2(t)$, $z_1(t) = y$, $z_2(t) = y'$

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = -17 z_1(t) - 8 z_2(t) \\ z_1(1) = 4 \\ z_2(1) = 8 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -17 & -8 \end{pmatrix}$$

Eulero implicito: scelgo $h = \frac{1}{2}$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + h f(t^{(1)}, z^{(1)})$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} A z^{(1)}$$

$$\left(I - \frac{1}{2}A\right) z^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 17/2 & 5 \end{pmatrix} z^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Trapezi: scelgo $h = \frac{1}{2}$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \frac{h}{2}\left(f(t^{(0)}, z^{(0)} + f(t^{(1)}, z^{(1)}) \right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ -17\cdot4-8\cdot8 \end{pmatrix} + A z^{(1)} \right)$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -33 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} A z^{(1)}$$

$$z^{(1)}\left(I - \frac{1}{4}A\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ -25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 17/4 & 3 \end{pmatrix} z^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 \\ -25 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 228

Scelgo $h = \frac{1}{2}$: $y_{k+1} = y_k + hf(t_k + y_k)$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \frac{1}{2} f(t^{(0)}, z^{(0)})$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -3\cdot 1 - 3\cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$$

⑦ E' assegnato il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y_1' = -449\, y_1(x) - 429\, y_2(x) \\ y_2' = -369\, y_1(x) - 349\, y_2(x) \\ y_1'(0) = 1 \\ y_2'(0) = 2 \end{cases} \qquad x \in (0,1)$$

Stabilire se il problema è stiff. Volendo usare il metodo di Eulero esplicito per integrarlo numericamente, determinare un passo h per cui i prodotti $h\lambda_i$, per gli autovalori con $Re\,\lambda_i < 0$, appartengano alla regione di assoluta stabilità del metodo.

Analizzo gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} -449 & -429 \\ -369 & -349 \end{pmatrix}$

$$\det \begin{vmatrix} -449-\lambda & -429 \\ -369 & -349-\lambda \end{vmatrix} = (-449-\lambda)(-349-\lambda) - 369\cdot 429 = 0$$

$$= (-449)(-349) + 449\lambda + 349\lambda + \lambda^2 - 369\cdot 429 = 0$$

$$= 156701 + 798\lambda + \lambda^2 - 158301 = 0$$

$$= \lambda^2 + 798\lambda - 1600 = 0$$

$$(\lambda + 800)(\lambda - 2) = 0 \qquad \lambda_1 = -800 \quad \lambda_2 = 2$$

Un autovalore con $Re\,\lambda > 0$
$L = 1$ (passo di integrazione)
$Re(\lambda_2)L = 2\cdot 1 = 2$ non grande
$Re(\lambda_1)L = -800\cdot 1 = -800 \ll -1$
} problema stiff

Eulero esplicito: $|1 + h\lambda| < 1$

$$-1 < 1 + h\lambda < 1$$

$$-2 < h\lambda < 0 \qquad \lambda_1 = -800$$

$$-2 < -800h < 0 \implies 0 < h < \frac{1}{400}$$

(9) Assegnato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u''(t) = 3u^2(t) - 6u(t) + 4(u'(t))^2 - \sin(\pi t) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 2 \end{cases}$$

effettuare un passo con il metodo di Eulero esplicito con $\Delta t = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = 3 \cdot z_1^2(t) - 6 \cdot z_1(t) + 4 \cdot z_2(t)^2 - \sin(\pi t) \\ z_1(0) = 1 \\ z_2(0) = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3-6 & 4 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\pi t) \end{pmatrix}$$

Eulero esplicito: $h = \frac{1}{4} = \Delta t$

$$z^{(1)} = z^{(0)} + hf(t^{(0)}, z^{(0)})$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(0) \end{pmatrix}\right]$$

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix} \Rightarrow z^{(1)} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 21/4 \end{pmatrix}$$

(10) Assegnato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = u^3(t) + \log(u^2(t) + 1) + t^2 - 2t \\ u(1) = 4 \end{cases}$$

effettuare un passo con il metodo di Eulero esplicito con $\Delta t = \frac{1}{4}$

Eulero esplicito: $\Delta t = \frac{1}{4} = h$

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k)$$

$$y^{(1)} = y^{(0)} + hf(t^{(0)}, y^{(0)})$$

$$y^{(1)} = 4 + \frac{1}{4}\left(4^3 + \log(4^2+1) + 1 - 2\right)$$

$$y^{(1)} = 4 + \frac{1}{4}\left(64 + \log(17) - 1\right)$$

$$y^{(1)} = 4 + \frac{63}{4} + \frac{\log(17)}{4} = \frac{79}{4} + \frac{1}{4}\log(17)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 228

METODI NUMERICI E CALCOLO SCIENTIFICO

ESERCIZI PDE

Capitolo 1

1. Consideriamo il problema del filo elastico

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\mu \dfrac{du}{dx}\right) = f & \text{in } (0,L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

con $\mu = \mu(x) = \begin{cases} 5 & \text{se } x < L/2 \\ 3 & \text{se } x > L/2 \end{cases}$

a) Posto $h = \dfrac{L}{N+1}$ con N dispari, siano $x_j = jh$, $0 \le j \le N+1$, i nodi di una suddivisione di $[0,L]$ in N+1 intervalli equispaziati $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Scrivere la formulazione variazionale discreta del problema, relativa agli elementi finiti lineari su tale suddivisione.

Moltiplico ambo i membri dell'equazione differenziale per uno spostamento ammissibile v e integriamo i prodotti risultanti sull'intervallo $[0,L]$

$$-\int_0^L \frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) v \, dx = \int_0^L f v \, dx$$

Integro per parti il primo membro:

$$-\left[\mu \frac{du}{dx} v\right]_L^0 + \int_0^L \mu \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = \int_0^L f v \, dx$$

v è una funzione continua derivabile a tratti con derivata continua, ed essa si annulla agli estremi: $v(0) = v(L) = 0$.
Otteniamo quindi

$$\int_0^L \mu \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = \int_0^L f v \, dx$$

La matrice A è tridiagonale simmetrica ed è di ordine N pari alla dimensione di V_h.

$h_j = h \quad \forall \ j = 1, \dots, N+1$

$\frac{L}{2} = x_M$ con $M = \frac{(N+1)}{2}$ numero intero (N+1 pari per hp)

Si ha che $I_j \subset [0, L/2]$ se $j \leq M$ e

$I_j \subset [L/2, L]$ se $j > M$

$$a_{jk} = \begin{cases} \frac{\mu_{j-1/2}}{h_j} + \frac{\mu_{j+1/2}}{h_{j+1}} & \text{se } k = j \\ -\frac{\mu_{j-1/2}}{h_j} & \text{se } k = j-1 \\ -\frac{\mu_{j+1/2}}{h_{j+1}} & \text{se } k = j+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Nel nostro caso $\mu_{j-1/2} = \begin{cases} 5 & \text{se } j \leq M \\ 3 & \text{se } j > M \end{cases}$

$$\mu_{j+1/2} = \begin{cases} 5 & \text{se } j < M \\ 3 & \text{se } j \geq M \end{cases}$$

$$a_{jj} = \frac{1}{h} \begin{cases} 10 & \text{se } 1 \leq j < M \\ 8 & \text{se } j = M \\ 6 & \text{se } M < j \leq N \end{cases}$$ diagonale

$$a_{j,j+1} = \frac{1}{h} \begin{cases} -5 & \text{se } 1 \leq j < M \\ -3 & \text{se } M \leq j \leq N-1 \end{cases}$$ sopradiagonale

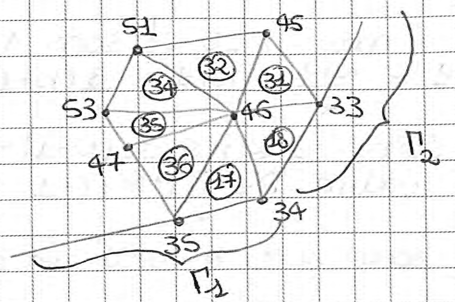
$$a_{j,j-1} = \frac{1}{h} \begin{cases} -5 & \text{se } 2 \leq j < M \\ -3 & \text{se } M \leq j \leq N \end{cases}$$ sottodiagonale

Capitolo 2

1) Si consideri la discretizzazione mediante elementi finiti lineari del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + 5u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \Gamma_D \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \Gamma_N \end{cases}$$

su una triangolazione di Ω, mostrata qui sotto



Per ciascuno dei 3 casi:

a) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \Gamma_N$

b) $\Gamma_1 \subset \Gamma_D$, $\Gamma_2 \subset \Gamma_N$

c) $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset \Gamma_D$

si elenchino gli elementi di matrice $a_{46,k}$ a priori $\neq 0$ presenti nella riga 46 della corrispondente matrice di rigidezza A. per ciascuno di essi, si indichino i triangoli che danno un contributo $\neq 0$ all'elemento di matrice. Si supponga che, per il caso b), nel vertice 34 sia imposta la condizione di Dirichlet.

a)

$a_{46,46}$	$T_{17}, T_{18}, T_{31}, T_{32}, T_{34}, T_{35}, T_{36}$
$a_{46,45}$	T_{31}, T_{32}
$a_{46,51}$	T_{32}, T_{34}
$a_{46,53}$	T_{34}, T_{35}
$a_{46,47}$	T_{35}, T_{36}
$a_{46,35}$	T_{36}, T_{17}
$a_{46,34}$	T_{17}, T_{18}
$a_{46,33}$	T_{18}, T_{31}

Triangolo T_1 Procedo in senso antiorario

$\nabla \varphi_{52} = \left(\frac{1}{h}, 0\right)$

$52 \to 1 \to \varphi_{1,x} = \dfrac{y_2 - y_3}{2A(T)} = \dfrac{y_{72} - y_{76}}{h^2} = \dfrac{h-0}{h^2} = \dfrac{1}{h}$

$72 \to 2$

$76 \to 3$ $\quad A(T) = \frac{1}{2} h^2$

$\varphi_{1,y} = -\dfrac{x_2 - x_3}{2A(T)} = 0$

$\nabla \varphi_{72} = \left(0, \frac{1}{h}\right)$

$72 \to 2$ $\quad \varphi_{2,x} = \dfrac{y_3 - y_1}{2A(T)} = 0$

$76 \to 3$

$52 \to 1$

$\varphi_{2,y} = -\dfrac{x_3 - x_1}{2A(T)} = -\dfrac{0-h}{h^2} = \dfrac{1}{h}$

Triangolo T_2

$\nabla \varphi_{52} = \left(0, -\frac{1}{h}\right)$

$52 \to 1$ $\quad \to \varphi_{1,x} = \dfrac{y_2 - y_1}{2A(T)} = \dfrac{y_{31} - y_{72}}{h^2} = 0$

$31 \to 2$

$72 \to 3$

$\varphi_{1,y} = -\dfrac{x_2 - x_1}{2A(T)} = -\dfrac{h-0}{h^2} = -\dfrac{1}{h}$

$\nabla \varphi_{72} = \left(-\frac{1}{h}, 0\right)$

$72 \to 3$ $\quad \varphi_{3,x} = \dfrac{y_1 - y_2}{2A(T)} = \dfrac{y_{52} - y_{31}}{2A(T)} = \dfrac{0-h}{h^2} = -\dfrac{1}{h}$

$52 \to 1$

$31 \to 2$

$\varphi_{3,y} = -\dfrac{x_1 - x_2}{2A(T)} = -\dfrac{x_{52} - x_{31}}{h^2} = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 228

$$\mu_T = \frac{1}{3}\left(\mu(1) + \mu(2) + \mu(3)\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(1,4 + 2,1 + 1,6\right) = \frac{17}{10} = 1,7$$

Lunghezza 3-4 $= h + \frac{1}{2}h = \frac{3}{2}h$

Il triangolo può essere scomposto in due sottotriangoli aventi in comune il segmento 3-4, ed altezza h.

L'area di ciascun sottotriangolo è pari a:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}h \cdot h = \frac{3}{4}h^2$$

L'area del triangolo è quindi: $\frac{3}{4}h^2 \cdot 2 = \frac{3}{2}h^2 = A(T)$

Calcoliamo i gradienti:

$$\nabla\varphi_1 = \left(\frac{1}{3h}, -\frac{2}{3h}\right)$$

$$\varphi_{1,x} = \frac{y_2 - y_3}{2A(T)} = \frac{2h - h}{3h^2} = \frac{1}{3h}$$

$$\varphi_{1,y} = -\frac{x_2 - x_3}{2A(T)} = -\frac{h + h}{3h^2} = -\frac{2}{3h}$$

$$\nabla\varphi_2 = \left(\frac{1}{3h}, \frac{1}{3h}\right)$$

$$\varphi_{2,x} = \frac{y_3 - y_1}{2A(T)} = \frac{h - 0}{3h^2} = \frac{1}{3h}$$

$$\varphi_{2,y} = -\frac{x_3 - x_1}{2A(T)} = -\frac{0 - h}{3h^2} = +\frac{1}{3h}$$

4) Si voglia risolvere il problema di Dirichlet nel quadrato $\Omega = (0,L)^2$

$$\begin{cases} -\nabla(\mu \nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

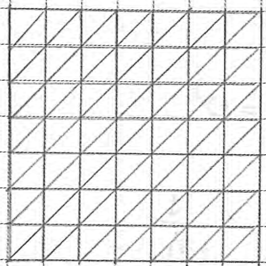
con $\mu = \mu(x,y) = \begin{cases} 3 & \text{se } y < L/2 \\ 5 & \text{se } y > L/2 \end{cases}$

Si discretizzi il problema mediante elementi finiti lineari su una triangolazione uniforme di Ω come quella mostrata nella successiva figura, avente passo costante $h = \frac{L}{N+1}$ e nodi $\bar{x}_{\ell m} = (x_\ell, y_m) = (\ell h, mh)$ con $0 \le \ell, m \le N+1$.

Si supponga N dispari, in modo che si abbia $y_m = \frac{L}{2}$ per $m = \frac{N+1}{2}$

a) Si scriva l'equazione algebrica soddisfatta in ogni nodo della triangolazione (si usi la notazione a due indici $u_{\ell m}$ per indicare l'incognita nel nodo $\bar{x}_{\ell m}$)

b) Usando la notazione ad un indice, si scriva la matrice di rigidezza A di tale sistema algebrico



a) Per l'ipotesi su N (dispari), μ è costante in ogni triangolo, possiamo quindi costruire le matrici di rigidezza locali di ciascun triangolo T relative al termine

$$\int_T \nabla u \cdot \nabla v \, d\bar{x}$$

e poi moltiplicarle per il valore di μ su ciascun triangolo

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 228

Triangolo T''

$$\nabla \varphi_1 = \left(0, -\frac{1}{R}\right)$$

$$\varphi_{1,x} = \frac{y_2 - y_3}{2A(T'')} = 0$$

$$\varphi_{1,y} = -\frac{x_2 - x_3}{2A(T'')} = -\frac{R - 0}{R^2} = -\frac{1}{R}$$

$$\nabla \varphi_2 = \left(\frac{1}{R}, 0\right)$$

$$\varphi_{2,x} = \frac{y_3 - y_1}{2A(T'')} = \frac{R - 0}{R^2} = \frac{1}{R}$$

$$\varphi_{2,y} = -\frac{x_3 - x_1}{2A(T'')} = -\frac{0 - 0}{R^2} = 0$$

$$\nabla \varphi_3 = \left(-\frac{1}{R}, \frac{1}{R}\right)$$

$$\varphi_{3,x} = \frac{y_1 - y_2}{2A(T'')} = \frac{0 - R}{R^2} = -\frac{1}{R}$$

$$\varphi_{3,y} = -\frac{x_1 - x_2}{2A(T'')} = -\frac{0 - R}{R^2} = +\frac{1}{R}$$

Calcoliamo ora gli elementi della matrice $A^{(T')}$ non metto μ perché moltiplico dopo per il valore di ciascun triangolo

$$a_{11} = \int_T \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 \, d\bar{x} \overset{\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 \cdot A(T')}{=} \frac{1}{2} R^2 \frac{1}{R^2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = \int_T \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \, d\bar{x} = \frac{1}{2} R^2 \cdot 0 = 0$$

$$a_{13} = \int_T \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_3 \, d\bar{x} = \frac{1}{2} R^2 \left(-\frac{1}{R^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$a_{22} = \int_T \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_2 \, d\bar{x} = \frac{1}{2} R^2 \frac{1}{R^2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{23} = \int_T \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_3 \, d\bar{x} = \frac{1}{2} R^2 \left(-\frac{1}{R^2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$a_{33} = \int_T \nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_3 \, d\bar{x} = \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2}\right) = 1$$

Introduciamo ora i valori di μ_i

Se $m < \frac{N+1}{2}$ tutti i triangoli stanno al di sotto della linea $y = \frac{L}{2}$, si ottiene:

$$-3u_{l,m-1} - 3u_{l-1,m} + 12u_{l,m} - 3u_{l+1,m} - 3u_{l,m+1} = f(x_l, y_m)h^2$$

Se $m > \frac{N+1}{2}$ i triangoli stanno sopra la linea $y = \frac{L}{2}$, si ha quindi:

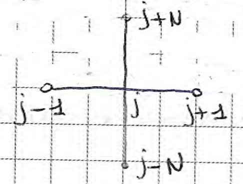
$$-5u_{l,m-1} - 5u_{l-1,m} + 20u_{l,m} - 5u_{l+1,m} - 5u_{l,m+1} = f(x_l, y_m)h^2$$

Se $m = \frac{N+1}{2}$ i triangoli T_1, T_2, T_3 sono sopra la linea $y = \frac{L}{2}$ mentre i triangoli T_4, T_5, T_6 sono sotto:

$$-3u_{l,m-1} - 4u_{l-1,m} + 16u_{l,m} - 4u_{l+1,m} - 5u_{l,m+1} = f(x_l, y_m)h^2$$

Se il nodo x_{lm} è invece un nodo interno debole dovranno essere cancellate le incognite relative ai nodi di bordo, poiché in questi viene imposta la condizione di Dirichlet

b) Passiamo alla notazione ad un solo indice



Riscriviamo le equazioni con questa nuova notazione

Se $m < \frac{N+1}{2}$

$$-3u_{j-N} - 3u_{j-1} + 12u_j - 3u_{j+1} - 3u_{j+N} = f_j h^2$$

Se $m > \frac{N+1}{2}$

$$-5u_{j-N} - 5u_{j-1} + 20u_j - 5u_{j+1} - 5u_{j+N} = f_j h^2$$

Se $m = \frac{N+1}{2}$

$$-3u_{j-N} - 4u_{j-1} + 16u_j - 4u_{j+1} - 5u_{j+N} = f_j h^2$$

La matrice A è quindi una matrice di ordine N^2 ($1 \le l, m \le N \rightarrow 1 \le j \le N^2$) simmetrica e pentadiagonale, con 2 diagonali a distanza ± 1 dalla diag. principale e due che distano $\pm N$ dalla diag. principale.

a) Si costruisca la matrice di massa B relativa alle funzioni di base di Lagrange su tale triangolazione, assumendo densità costante $\rho = 1$ e supponendo di aver imposto condizioni di Dirichlet omogenee su tutto il bordo.

La matrice B è simmetrica e di ordine 4 poiché 4 sono i nodi interni alla triangolazione. Essa è inoltre una matrice definita positiva e sparsa.
La matrice di massa $B^{(T)}$ su ogni triangolo è indipendente dalla numerazione locale ed è data da:

$$B^{(T)} = \rho_T A(T) \begin{pmatrix} 1/6 & 1/12 & 1/12 \\ 1/12 & 1/6 & 1/12 \\ 1/12 & 1/12 & 1/6 \end{pmatrix}$$ nel nostro caso $\rho_T = 1$

Gli elementi diagonali della matrice B sono quindi dati da

$$b_{jj} = \frac{1}{6} \sum_{T \in \mathcal{T}(j)} \text{area}(T)$$

mentre gli elementi non diagonali:

$$b_{jk} = \frac{1}{12} \sum_{T \in \mathcal{T}(j) \cap \mathcal{T}(k)} \text{area}(T)$$

$$b_{11} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{h^2}{2} + h^2 + h^2 + 2h^2 + h^2 + h^2 \right) = \frac{13}{12} h^2$$

$$b_{12} = \frac{1}{12} \left(2h^2 + h^2 \right) = \frac{1}{4} h^2 = b_{21}$$

$$b_{13} = \frac{1}{12} \left(2h^2 + h^2 \right) = \frac{1}{4} h^2 = b_{31}$$

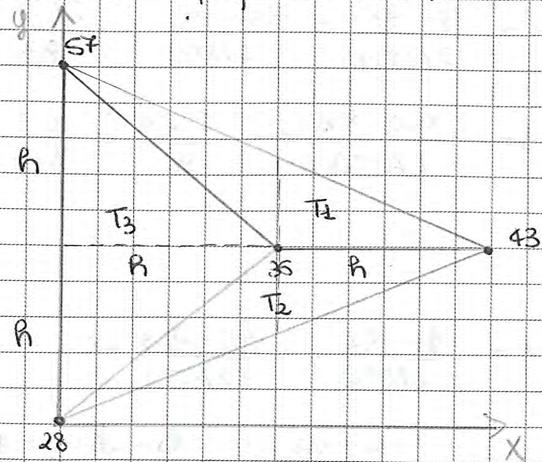
$$b_{14} = \frac{1}{12} \left(0 \right) = 0 = b_{41}$$

$$b_{23} = \frac{1}{12} \left(2h^2 \cdot 2 \right) = \frac{1}{3} h^2 = b_{32}$$

$$b_{22} = \frac{1}{6} \left(2h^2 + 2h^2 + h^2 + 2h^2 + 2h^2 + 4h^2 \right) = \frac{13}{6} h^2$$

$$b_{24} = \frac{1}{12} \left(4h^2 + 2h^2 \right) = \frac{1}{2} h^2 = b_{42}$$

⑥ Supponiamo che i 3 triangoli in figura facciano parte di una triangolazione di un dominio piano Ω, e siano tali che tutti i loro vertici (numerati 28, 36, 43 e 57) siano nodi interni alla triang.



Sia A la matrice di rigidezza relativa alla discretizzazione del termine

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\bar{x}$$

mediante elementi finiti lineari sulla triangolaz. considerata

a) Elencare gli elementi di A che possono essere calcolati a partire dalla sola conoscenza dei triangoli in figura

Gli elementi calcolabili sono: $a_{36,36}$ → tutti i triang. condividono il nodo x_{36}

$a_{28,36} = a_{36,28}$
$a_{36,57} = a_{57,36}$
$a_{36,43} = a_{43,36}$
} i nodi 28, 43, 36, 57 sono condivisi da due triangoli

b) Calcolare tali elementi

Calcolo i gradienti delle funzioni di base

Triangolo T_1 $\quad A(T_1) = \frac{1}{2} h^2$

$$\nabla \varphi_{36} = \left(-\frac{1}{h}, -\frac{2}{h} \right)$$

36 → 1
43 → 2
57 → 3

$$\varphi_{1,x} = \frac{y_2 - y_3}{2A(T_1)} = \frac{y_{43} - y_{57}}{2A(T_1)} = \frac{h - 2h}{h^2} = -\frac{1}{h}$$

$$\varphi_{1,y} = -\frac{x_2 - x_3}{2A(T_1)} = -\frac{x_{43} - x_{57}}{2A(T_1)} = -\frac{2h - 0}{h^2} = -\frac{2}{h}$$

Triangolo T_3 $\quad A(T_3) = \frac{2h \cdot h}{2} = h^2$

$\nabla\varphi_{36} = \left(\frac{1}{h}, 0\right)$

36 → 1
57 → 2
28 → 3

$$\varphi_{1,x} = \frac{y_2 - y_3}{2A(T_3)} = \frac{y_{57} - y_{28}}{2A(T_3)} = \frac{2h - 0}{2h^2} = \frac{1}{h}$$

$$\varphi_{1,y} = -\frac{x_2 - x_3}{2A(T_3)} = 0$$

$\nabla\varphi_{57} = \left(-\frac{1}{2h}, \frac{1}{2h}\right)$

57 → 2
28 → 3
36 → 1

$$\varphi_{2,x} = \frac{y_3 - y_1}{2A(T_3)} = \frac{y_{28} - y_{36}}{2A(T_3)} = \frac{0 - h}{2h^2} = -\frac{1}{2h}$$

$$\varphi_{2,y} = -\frac{x_3 - x_1}{2A(T_3)} = -\frac{x_{28} - x_{36}}{2A(T_3)} = -\frac{0 - h}{2h^2} = \frac{1}{2h}$$

$\nabla\varphi_{28} = \left(-\frac{1}{2h}, -\frac{1}{2h}\right)$

28 → 3
36 → 1
57 → 2

$$\varphi_{3,x} = \frac{y_1 - y_2}{2A(T_3)} = \frac{y_{36} - y_{57}}{2A(T_3)} = \frac{h - 2h}{2h^2} = -\frac{1}{2h}$$

$$\varphi_{3,y} = -\frac{x_1 - x_2}{2A(T_3)} = -\frac{x_{36} - x_{57}}{2A(T_3)} = -\frac{h - 0}{2h^2} = -\frac{1}{2h}$$

Calcolo elementi della matrice A:

$$a_{36,36} = \int_{T_1} \nabla\varphi_{36} \cdot \nabla\varphi_{36}\, dx + \int_{T_2} \nabla\varphi_{36} \cdot \nabla_{36}\, dx + \int_{T_3} \nabla\varphi_{36} \cdot \nabla\varphi_{36}\, dx =$$

$\mu = 1$

$$= \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{4}{h^2}\right) + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{4}{h^2}\right) + h^2 \frac{1}{h^2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 6$$

$$a_{28,36} = \int_{T_2} \nabla\varphi_{28} \cdot \nabla\varphi_{36}\, d\bar{x} + \int_{T_3} \nabla\varphi_{28} \cdot \nabla\varphi_{36}\, d\bar{x} =$$

$$= \frac{1}{2}h^2\left(-\frac{2}{h^2}\right) + h^2\left(-\frac{1}{2h^2}\right) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$a_{36,57} = \int_{T_1} \nabla\varphi_{36} \cdot \nabla\varphi_{57}\, d\bar{x} + \int_{T_3} \nabla\varphi_{36} \cdot \nabla\varphi_{57}\, d\bar{x} =$$

$$= \frac{1}{2}h^2\left(-\frac{2}{h^2}\right) + h^2\left(-\frac{1}{2h^2}\right) = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$a_{36,43} = \int_{T_1} \nabla\varphi_{36} \cdot \nabla\varphi_{43}\, d\bar{x} + \int_{T_2} \nabla\varphi_{36} \cdot \nabla\varphi_{43}\, d\bar{x} = \frac{1}{2}h^2\left(-\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h^2}\right) + \frac{1}{2}h^2\left(-\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h^2}\right) =$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3$$

V insieme degli spostamenti ammissibili

$V = \{ v : [0,1] \to \mathbb{R} \,/\, v$ è continua, derivabile a tratti con derivata continua, tale che $v(0) = 0 \}$

Si ottiene la formulazione variazionale

$$\begin{cases} \omega \in V, \lambda \in \mathbb{R} \text{ e soddisfano} \\ \int_0^1 \mu \frac{d\omega}{dx} \frac{dv}{dx} dx + 3\omega(1)v(1) = \lambda \int_0^1 \rho \omega v dx \quad \text{per ogni } v \in V \end{cases}$$

Introducendo ora la discretizzazione sull'intervallo $(0,1)$, restringiamo V al sottospazio V_h degli spostamenti ammissibili discreti, ottenendo la seguente formulazione variazionale discreta:

$$\begin{cases} \omega_h \in V_h, \lambda \in \mathbb{R} \text{ e soddisfano} \\ \int_0^1 \mu \frac{d\omega_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx + 3\omega_h(1)v_h(1) = \lambda \int_0^1 \rho \omega_h v_h dx \quad \text{per ogni } v_h \in V_h \end{cases}$$

$V_h = \{ v_h \in V \,|\, v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \text{ per } j = 1, \dots, N \text{ e } v(0) = 0 \}$

avendo posto $I_j = |x_{j-1}, x_j| = h|j-1, j|$.

b) Calcolare gli elementi delle matrici A e B, con i quali si esprime il problema discreto nella forma algebrica $A\omega = \lambda B\omega$

$v_h \to \varphi_j$

$\omega_h \to \sum_{k=1}^{N} \omega_k \varphi_k$ poiché in $x=0$ ho condizione di Dirichlet

Ottengo: $\sum_{k=1}^{N} \omega_k \left(\int_0^1 \mu \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx + 3\varphi_k(1)\varphi_j(1) \right) = \lambda 2 \sum_{k=1}^{N} \omega_k \left(\int_0^1 \varphi_k \varphi_j dx \right)$

$a_{jk} = \int_0^1 \mu \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx + 3\varphi_k(1)\varphi_j(1) \qquad 1 \leq j, k \leq N$

$\to$ definita solo sull'intervallo I_N

L'unica funzione di base $\neq 0$ in $x = 1$ è φ_N, perciò il termine $3\varphi_k(1)\varphi_j(1)$ influenzerà solamente l'elemento a_{NN}.

Capitolo 5

1. Si consideri il problema ai valori iniziali e al bordo

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u = f & \text{in } (0,1),\ t>0 \\ u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, & \text{per } t>0 \\ u(x,0)=u_0(x) & \text{in } (0,1) \end{cases}$$

con $\alpha>0$, $\beta, \gamma \geq 0$ costanti

a) Scrivere la formulazione variazionale del problema

Moltiplico ambo i membri dell'equazione differenziale per uno spostamento ammissibile v ed integro sull'intervallo $(0,1)$

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v\, dx - \underbrace{\alpha \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v\, dx}_{\text{Integro per parti}} + \beta \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} v\, dx + \int_0^1 \gamma u v\, dx = \int_0^1 f v\, dx$$

$$\underbrace{\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \right]_1^0}_{=0} - \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dv}{dx}\, dx$$

v è una funzione continua e derivabile a tratti con derivata continua e tale che $v(0)=v(1)=0$

Ottengo infine, per $t>0$:

$$\begin{cases} u(t) \in V \text{ e soddisfa} \\ \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v\, dx + \alpha \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dv}{dx}\, dx + \beta \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} v\, dx + \int_0^1 \gamma u v\, dx = \int_0^1 f v\, dx \\ \text{per ogni } v \in V \end{cases}$$

$V = \{ v : [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ v$ è continua, derivabile a tratti con derivata prima continua e tale che $v(0)=v(1)=0 \}$

Otteniamo quindi: $A = A_\alpha + A_\beta + A_\gamma$

$A_\alpha = \frac{\alpha}{h}$ tridiag $[-1 \quad 2 \quad -1]$

$A_\beta = \beta$ tridiag $\left[-\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right]$

$A_\gamma = \gamma h$ tridiag $\left[\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}\right]$

$$A = \text{tridiag}\left[\left(-\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma h}{6}\right) \quad \left(\frac{2\alpha}{h} + 0 + \frac{2\gamma h}{3}\right) \quad \left(-\frac{\alpha}{h} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma h}{6}\right)\right]$$

$B = h$ tridiag $\left[\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}\right]$

c) Discretizzare in tempo mediante il metodo di Eulero implicito con passo costante Δt, scrivendo il sistema algebrico che si deve risolvere ad ogni passo temporale

Abbiamo ottenuto il sistema: $\begin{cases} B u' + A u = f, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

$u' = F(u,t) = -B^{-1}Au + B^{-1}f(t)$

$u^{k+1} = u^k + \Delta t\, F(u^{k+1}, t^{k+1})$

$u^{k+1} = u^k + \Delta t\,(-B^{-1}Au^{k+1}) + \Delta t B^{-1} f(t_{k+1})$

$= u^k - \Delta t B^{-1} A u^{k+1} + B^{-1} f(t_{k+1})$

$u^{k+1}(1 + \Delta t B^{-1}A) = u^k + \Delta t B^{-1} f(t_{k+1})$

Moltiplico per B (in modo da non dover calcolare la matrice inversa B^{-1})

$u^{k+1}(B + \Delta t A) = B u^k + \Delta t f(t_{k+1}) \quad k \geq 0$

$$C = B + \Delta t A = \left[\frac{\gamma h}{6} + \Delta t\left(-\frac{\alpha}{h} - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma h}{6}\right) \quad \frac{2\gamma h}{3} + \Delta t\left(\frac{2\alpha}{h} + \frac{2\gamma h}{3}\right) \quad \frac{\gamma h}{6} + \Delta t\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma h}{6}\right)\right]$$

Introducendo i valori: $\alpha = \frac{1}{10}$; $\beta = 0$; $\gamma = 3$

$$h = \frac{1}{N+1} = \frac{1}{10}$$

$$\tilde{B}^{-1}A = \text{tridiag}\Big[\frac{6}{\cancel{8}} \cdot \cancel{10}^{\,2} \left(-\frac{1 \cdot \cancel{10}}{\cancel{10} \cdot 1} + \frac{\cancel{3} \cdot 1}{\underset{2}{\cancel{6}} \cdot 10} \right) \quad \frac{6 \cdot \cancel{10}^{\,2}}{\cancel{8}} \left(2\,\frac{1}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{1} + \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 1}{\cancel{3}\, \underset{5}{\cancel{10}}} \right)$$

$$10\left(-\frac{1}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{1} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}_2} \cdot \frac{1}{10} \right) \quad 10\left(2 \cdot \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} + \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \underset{5}{\cancel{10}}} \right) \quad 10\left(-\frac{10}{10} + \frac{3 \cdot 1}{2\,\cancel{6} \cdot 10} \right);$$

$$\frac{6}{\cancel{8}} \cdot \cancel{10}^{\,2} \left(2\,\frac{1}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} + \frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot \underset{5}{\cancel{10}}} \right) \quad \frac{6}{\cancel{8}} \cdot \cancel{10}^{\,2} \left(-\frac{1}{\cancel{10}} \cdot \cancel{10} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{6}_2} \cdot \frac{1}{\cancel{10}} \right) \Big]$$

$$\tilde{B}^{-1}A = \text{tridiag}\left[\frac{132}{5} \quad -\frac{57}{5}; \; -\frac{19}{2} \quad 22 \quad -\frac{19}{2}; \; -\frac{57}{5} \quad \frac{132}{5} \right]$$

Cerchi C_1, C_9: centro in $\frac{132}{5}$ e raggio $\frac{57}{5}$

Cerchi $C_2 \to C_8$: centro in 22 e raggio 19

Poichè la matrice è simmetrica, i suoi autovalori sono reali, è quindi possibile analizzare gli intervalli di Gerschgorin $\hat{C}_i$, dati dall'intersezione dei cerchi di Gershgorin con l'asse reale

Intervalli $\hat{C}_1, \hat{C}_9 = \left[15, \frac{189}{5} \right]$

Intervalli $\hat{C}_2, \dots, \hat{C}_8 = [3, 41]$

Quindi tutti gli autovalori soddisfano la limitazione $0 < \lambda < 41$.

$$\Delta t \le \frac{2}{\max|\lambda_h|} = \frac{2}{41}$$

b) Scrivere la discretizzazione in tempo del sistema precedente mediante il metodo dei trapezi (Crank-Nicolson) con passo costante Δt. Precisare le componenti della matrice C del sistema algebrico $Cu^{n+1} = g^{n+1}$ che si deve risolvere al tempo t^{n+1}.

$$\begin{cases} u' + Au = f, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$$u' = -Au + f = F(u,t)$$

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2}\left(F(u^k, t^k) + F(u^{k+1}, t^{k+1})\right)$$

$$= u^k + \frac{\Delta t}{2}\left(-Au^k + f(t^k) - Au^{k+1} + f(t^{k+1})\right)$$

$$= u^k - \frac{\Delta t}{2}Au^k + \frac{\Delta t}{2}f(t^k) - \frac{\Delta t}{2}Au^{k+1} + \frac{\Delta t}{2}f(t^{k+1})$$

$$u^{k+1}\left(I + \frac{\Delta t}{2}A\right) = \left(I - \frac{\Delta t}{2}A\right)u^k + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t^k) + f(t^{k+1})\right)$$

$$C = I + \frac{\Delta t}{2}A = \begin{cases} 1 + \frac{\cancel{20}^{10}}{h^2}\frac{\Delta t}{\cancel{2}} = 1 + \frac{10}{h^2}\Delta t & \text{se } k = j \\ -\frac{5}{2h^2}\Delta t & \text{se } k = j+1 \text{ con } j \neq pN \\ -\frac{5}{2}\frac{\Delta t}{h^2} & \text{se } k = j+N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) Dire se è necessario imporre una condizione di stabilità asintotica sul passo temporale Δt; in caso affermativo, precisare quale

Non è necessario imporre una condizione di stabilità asintotica sul passo temporale Δt poiché il metodo di Crank-Nicolson è incondizionatamente stabile

$\nabla\varphi_{32} = \left(\frac{1}{R}, -\frac{1}{\sqrt{3}R}\right)$

32 → 2
44 → 3
31 → 1

$$\varphi_{32,x} = \frac{y_3 - y_1}{2A(T_1)} = \frac{y_{44} - y_{31}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} R^2} = \frac{\sqrt{3}R - \frac{\sqrt{3}}{2}R}{\frac{\sqrt{3}R^2}{2}} = \frac{1}{R}$$

$$\varphi_{32,y} = -\frac{\overset{x_{44} - x_{31}}{x_3 - x_1}}{2A(T_1)} = -\frac{\frac{3}{2}R - R}{\frac{\sqrt{3}R^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}R}$$

Triangolo T_2

$\nabla\varphi_{31} = \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3R}\right)$

1 → 31
2 → 44
3 → 43

$$\varphi_{31,x} = \frac{y_2 - y_3}{2A(T_2)} = \frac{y_{44} - y_{43}}{2A(T_2)} = 0$$

$$\varphi_{31,y} = -\frac{x_2 - x_3}{2A(T_2)} = -\frac{\frac{3}{2}R - \frac{1}{2}R}{\frac{\sqrt{3}R^2}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3R}$$

Triangolo T_3

$\nabla\varphi_{31} = \left(\frac{1}{R}, -\frac{1}{\sqrt{3}R}\right)$

1 → 31
2 → 43
3 → 30

$$\varphi_{31,x} = \frac{y_{43} - y_{30}}{2A(T_3)} = \frac{\sqrt{3}R - \frac{\sqrt{3}}{2}R}{\frac{\sqrt{3}R^2}{2}} = \frac{1}{R}$$

$$\varphi_{31,y} = -\frac{x_{43} - x_{30}}{2A(T_3)} = -\frac{\frac{1}{2}R - 0}{\frac{\sqrt{3}R^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}R}$$

Triangolo T_4

$\nabla\varphi_{31} = \left(\frac{1}{R}, +\frac{1}{\sqrt{3}R}\right)$

31 → 1
30 → 2
18 → 3

$$\varphi_{31,x} = \frac{y_{30} - y_{18}}{2A(T_4)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R - 0}{\frac{\sqrt{3}R^2}{2}} = +\frac{1}{R}$$

$$\varphi_{31,y} = -\frac{x_{30} - x_{18}}{2A(T_4)} = -\frac{0 - \frac{1}{2}R}{\frac{\sqrt{3}R^2}{2}} = +\frac{1}{\sqrt{3}R}$$

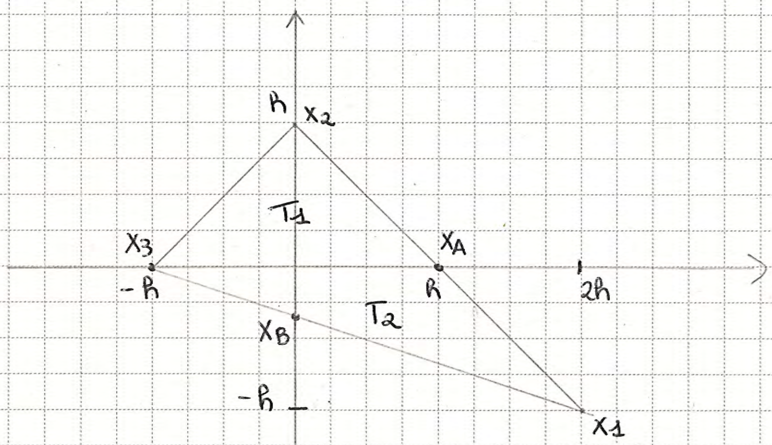
$\int_{T_i} \varphi\,dx = \frac{1}{3}\,\text{Area}(T_i)\cdot 1$ (volume piramide di altezza 1 che ha come base l'area del triangolo considerato)

$$= \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{4}h^2\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{12}h^2$$

$$a_{31,31} = \frac{\sqrt{3}}{12}h^2 \sum_{i=1}^{6} \beta\cdot\nabla\varphi_{31}\Big|_{T_i} = \frac{\sqrt{3}}{12}h^2\left(-\cancel{\frac{1}{h}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}h}} + \cancel{\frac{2\sqrt{3}}{3h}} + \cancel{\frac{1}{h}} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}h}} + \cancel{\frac{1}{h}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}h}} + \right.$$
$$\left. - \cancel{\frac{2\sqrt{3}}{3h}} - \cancel{\frac{1}{h}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}h}}\right) = 0$$

$$a_{31,32} = \frac{\sqrt{3}}{12}h^2\left(\beta\cdot\nabla\varphi_{32}\Big|_{T_1} + \beta\cdot\nabla\varphi_{32}\Big|_{T_6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}h^2\left(\frac{1}{h} + \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}h}} + \frac{1}{h} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}h}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{\;}h$$

④ Sia T il triangolo mostrato in figura, di coordinate $\bar{x}_1 = (2h, -h)$, $\bar{x}_2 = (0, h)$ e $\bar{x}_3 = (-h, 0)$



Calcolare la matrice $C^{(T)} \in \mathbb{R}^{3\times}$ dell'elemento, relativa alla discretizzazione mediante elementi finiti lineari del termine convettivo

$$\int_T (\bar{a}\cdot\nabla u)\,v\,d\bar{x}$$

Il vettore $\bar{a}$ è conosciuto solo nei vertici del triangolo, dove vale

$\bar{a}(\bar{x}_1) = \bar{a}_1 = (2,1)$ $\quad\quad$ $\bar{a}(\bar{x}_2) = \bar{a}_2 = (4,1)$ $\quad\quad$ $\bar{a}(\bar{x}_3) = \bar{a}_3 = (3,2)$

Capitolo 6

(1) Si consideri la legge di conservazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 5\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con la condizione iniziale

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Scrivere l'espressione della soluzione esatta $u(x,t)$

Poniamo $a = 5$, sappiamo che $u(x,t) = u_0(x - at)$

Linee caratteristiche: $\frac{dx}{dt} = a \Rightarrow x = at + \underset{x_0}{\underset{\uparrow}{b}} = 5t + 1 \Rightarrow x - 5t = 1$

$$u(x,t) = \begin{cases} 4 & \text{se } x - 5t < 1 \\ 3 & \text{se } x - 5t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 4 & \text{se } x < 1 + 5t \\ 3 & \text{se } x > 1 + 5t \end{cases}$$

u è costante sulle linee caratteristiche

b) Posto $\Delta x = 10^{-1}$ e definite le celle $V_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ con $x_{j\pm 1/2} = (j \pm 1/2)\Delta x$, calcolare le medie di cella U_j^0 di u_0

u_0 ha un salto in $x = 1 = 10 \cdot \Delta x$, questo è il centro della cella V_{10}. Quindi in ogni cella V_j con $j \neq 10$ u_0 è costante

$$U_j^0 = \begin{cases} 4 & \text{se } j \leq 9 \\ 3 & \text{se } j \geq 11 \end{cases}$$

Mentre $U_{10}^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{1-\Delta x/2}^{1+\Delta x/2} u_0(x)\,dx = \frac{1}{\Delta x}\int_{1}^{1+\Delta x/2} u_0(x)\,dx + \frac{1}{\Delta x}\int_{1-\Delta x/2}^{1} u_0(x)\,dx =$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left[3 \cdot x\right]_1^{1+\Delta x/2} + \frac{1}{\Delta x}\left[4 \cdot x\right]_{1-\Delta x}^{1} = \frac{1}{\Delta x}\left(\cancel{3} + \frac{3\Delta x}{2} - \cancel{3} + \cancel{4} - \cancel{4} + \frac{4}{2}\Delta x\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\Delta x}}\left(\frac{3}{2}\cancel{\Delta x} + \frac{4}{2}\cancel{\Delta x}\right) = \frac{7}{2}$$

② Per l'equazione di trasporto: $\frac{\partial u}{\partial t} - 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

Siano $\{u_j^0\}$ le medie di cella al tempo $t=0$, relative alle celle $(x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ di ampiezza $\Delta x = 4 \cdot 10^{-1}$, definite come

$$u_j^0 = \begin{cases} 0 & \text{se } j \le 15 \\ 4 & \text{se } j \ge 16 \end{cases}$$

a) Calcolare il più grande passo temporale Δt per cui il metodo di Lax-Wendroff è stabile

$$CFL = 1 = |a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{|a|} = \frac{\cancel{4}^{\,2} \cdot 10^{-1}}{\cancel{2}} = 2 \cdot 10^{-1}$$

b) Posto $\Delta t = 5 \cdot 10^{-2}$, determinare il primo valore di k per cui la media di cella u_{13}^k al tempo $t_k = k\Delta t$, calcolata con il metodo di LW, sia diversa da 0.

Lax-Wendroff: $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}\lambda a (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}(\lambda a)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-1}} = \frac{1}{8}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{8} \cdot \cancel{(-2)} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cancel{8}\,4} \cancel{(-2)}\right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$= u_j^n + \frac{1}{8}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{32}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

$$= \frac{5}{32}u_{j+1}^n + \frac{15}{16}u_j^n - \frac{3}{32}u_{j-1}^n$$

$k=1 \rightarrow t_1 \rightarrow$ $u_{13}^1 = \frac{5}{32}u_{14}^0 + \frac{15}{16}u_{13}^0 - \frac{3}{32}u_{12}^0 = 0$ → passo a u_{13}^2, per calcolarlo ho bisogno di u_{14}^1

$u_{14}^1 = \frac{5}{32}u_{15}^0 + \frac{15}{16}u_{14}^0 - \frac{3}{32}u_{13}^0 = 0$

$u_{15}^1 = \frac{5}{32}u_{16}^0 + \cancel{\frac{15}{16}u_{15}^0} - \cancel{\frac{3}{32}u_{14}^0} = \frac{5}{32} \cdot 4 = \frac{5}{8}$

$k=2 \rightarrow t_2 \rightarrow$ $u_{13}^2 = \frac{5}{32}u_{14}^1 + \frac{15}{16}u_{13}^1 - \frac{3}{32}u_{12}^1 = 0$ → devo passare a u_{13}^3, per calcolarlo ho bisogno di u_{14}^2, che a sua volta però necessita di u_{15}^1

$u_{14}^2 = \frac{5}{32}u_{15}^1 + \cancel{\frac{15}{16}u_{14}^1} - \cancel{\frac{3}{32}u_{13}^1} = \frac{5}{32} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{256}$

$k=3 \rightarrow t_3 \rightarrow$ $u_{13}^3 = \frac{5}{32}u_{14}^2 + \cancel{\frac{15}{16}u_{13}^2} - \cancel{\frac{3}{32}u_{12}^2} = \frac{5}{32} \cdot \frac{25}{256} = \frac{125}{3192}$

Il primo valore è $k=3$

④ Consideriamo la legge di conservazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

Suddividiamo $\mathbb{R}$ in celle $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ di ampiezza $\Delta x = 10^{-1}$, e indichiamo con $\{u_j^n\}$ le medie di cella al generico tempo t_n generate dal metodo di Lax–Friedrichs.

a) Posto $\Delta t = 10^{-2}$, esplicitare la formula che genera le medie di cella al tempo t_{n+1} in funzione di quelle al tempo t_n. Calcolare il numero di Courant c_{cour} e dire se è soddisfatta la condizione CFL.

Lax–Friedrichs: $U_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) - \frac{1}{2} a\lambda \left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$

$C_{cour} = \frac{\Delta t}{\Delta x}|a| = \frac{10^{-2}}{10^{-1}} \cdot 4 = \frac{2}{5} < 1 \rightarrow$ la condizione CFL è rispettata

b) Supponiamo di sapere che $U_j^n = U_j^{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \leq 15 \\ 1 & \text{se } j \geq 18 \end{cases}$

Calcolare le medie di cella U_{16}^n, U_{17}^n, U_{16}^{n+1} e U_{17}^{n+1}

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) \quad \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{10_5}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) = \frac{3}{10} U_{j+1}^n + \frac{7}{10} U_{j-1}^n$$

$$U_{15}^{n+1} = 0 = \frac{3}{16} U_{16}^n + \cancel{\frac{7}{10} U_{14}^n}_{=0} \Rightarrow U_{16}^n = 0$$

$$U_{18}^{n+1} = 1 = \frac{3}{10} U_{19}^n + \frac{7}{10} U_{17}^n \Rightarrow 1 = \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{7}{10} U_{17}^n$$

$$\frac{10}{7}\left(1 - \frac{3}{10}\right) = 1 = U_{17}^n$$

$$U_{16}^{n+1} = \frac{3}{10} U_{17}^n + \cancel{\frac{7}{10} U_{15}^n}_{=0} = \frac{3}{10}$$

$$U_{17}^{n+1} = \frac{3}{1} U_{18}^n + \cancel{\frac{7}{10} U_{16}^n}_{=0} = \frac{3}{10}$$

b) Si scelga un passo temporale Δt corrispondente a $CFL = \frac{3}{4}$

$$\frac{3}{4} = |a| \frac{\Delta t}{\Delta x} = 3 \cdot \frac{\Delta t}{\pi/2} \Rightarrow \frac{\cancel{3}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\pi}{2} = \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi}{8}$$

c) Si calcolino le medie di cella relative alle celle V_{-1}, V_0, V_1 dopo due passi temporali con il metodo di Lax-Wendroff

$$U_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} \lambda a (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2} (\lambda a)^2 (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \qquad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\pi/8}{\pi/2} = \frac{1}{4}$$

$$U_{-1}^1 = U_{-1}^0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (U_0^0 - U_{-2}^0) + \frac{1}{2} \frac{9}{16} (U_0^0 - 2U_{-1}^0 + U_{-2}^0)$$

$$= -\frac{2}{\pi} - \cancel{\frac{3}{8}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right)} + \frac{9}{32}\left(\frac{2}{\pi} + 2 \cdot \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi} + \frac{9}{\underset{4}{\cancel{32}}}\left(\frac{\cancel{8}}{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}$$

$$U_0^1 = U_0^0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (U_1^0 - U_{-1}^0) + \frac{1}{2} \frac{9}{16} (U_1^0 - 2U_0^0 + U_{-1}^0)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \cancel{\frac{3}{8}\left(-\frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\right)} + \frac{9}{32}\left(-\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{9}{\underset{4}{\cancel{32}}}\left(-\frac{8}{\pi}\right) = -\frac{1}{4\pi}$$

$$U_1^1 = U_0^0 - \frac{1}{2} \frac{3}{4} (U_2^0 - U_0^0) + \frac{9}{32} (U_2^0 - 2U_1^0 + U_0^0)$$

$$= -\frac{2}{\pi} - \cancel{\frac{3}{8}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right)} + \frac{9}{32}\left(+\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}$$

$$U_{-1}^2 = U_{-1}^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (U_0^1 - U_{-2}^1) + \frac{9}{32} (U_0^1 - 2U_{-1}^1 + U_{-2}^1)$$

$$= \frac{1}{4\pi} - \cancel{\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\right)} + \frac{9}{32}\left(-\frac{1}{4\pi} - \frac{2}{4\pi} - \frac{1}{4\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} + \frac{9}{32}\left(-\frac{\cancel{4}}{\cancel{4}\pi}\right) = -\frac{1}{32\pi} = U_1^2$$

$$U_0^2 = U_0^1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} (U_1^1 - U_{-1}^0) + \frac{9}{32} (U_1^1 - 2U_0^1 + U_{-1}^1)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} - \cancel{\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi}\right)} + \frac{9}{32}\left(\frac{1}{4\pi} + \frac{2}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\right) = \frac{1}{32\pi}$$

$$u_j^1 = \begin{cases} -\frac{3}{32} + \frac{7}{16} + \frac{21}{32} = 1 & \text{se } j+1 \le 0 \to j \le -1 \\ -\frac{3}{32}\cdot\frac{5}{2} + \frac{7}{16} + \frac{21}{32} = \frac{55}{64} & \text{se } j=0 \\ -\frac{3}{32}\cdot 4 + \frac{7}{16}\cdot\frac{5}{2} + \frac{21}{32}\cdot 1 = \frac{11}{8} & \text{se } j=1 \\ -\frac{3}{32}\cdot 4 + \frac{7}{16}\cdot 4 + \frac{21}{32}\cdot\frac{5}{2} = \frac{193}{64} & \text{se } j=2 \\ -\frac{3}{32}\cdot 4 + \frac{7}{16}\cdot 4 + \frac{21}{32}\cdot 4 = 4 & \text{se } j-1 \ge 2 \to j \ge 3 \end{cases}$$

d) Eseguire un secondo passo temporale

$$u_j^2 = \begin{cases} -\frac{3}{32}\cdot\frac{55}{64} + \frac{7}{16}\cdot 1 + \frac{21}{32}\cdot 1 = \frac{2075}{2048} & \text{se } j \le -1 \\ -\frac{3}{32}\cdot\frac{11}{8} + \frac{7}{16}\cdot\frac{55}{64} + \frac{21}{32}\cdot 1 = \frac{925}{1024} & \text{se } j=0 \\ -\frac{3}{32}\cdot\frac{193}{64} + \frac{7}{16}\cdot\frac{11}{8} + \frac{21}{32}\cdot\frac{55}{64} = \frac{113}{128} & \text{se } j=1 \\ -\frac{3}{32}\cdot 4 + \frac{7}{16}\cdot\frac{193}{64} + \frac{21}{32}\cdot\frac{11}{8} = \frac{1891}{1024} & \text{se } j=2 \\ -\frac{3}{32}\cdot 4 + \frac{7}{16}\cdot 4 + \frac{21}{32}\cdot\frac{193}{64} = \frac{6869}{2048} & \text{se } j \le 3 \end{cases}$$

e) Descrivere le proprietà di convergenza del metodo

Il metodo ha una convergenza del secondo ordine sia in spazio che in tempo.

Errore di discretizzazione $\sim C_1(\Delta x)^2 + C_2(\Delta t)^2$

↳ quanto velocemente tendono a 0 Δx e Δt

L'ordine di consistenza del metodo è 2 e poiché per il teorema di Swartz la u è sufficientemente regolare esso coincide con l'ordine di convergenza dell'errore

Sostituisco u_{j+N} nella discretizzazione con diff. centrate del secondo ordine, ottengo

Non posso dividere per due come nel caso monodimensionale *

$$\frac{-u_{j-N}-u_{j-1}+4u_j-(u_{j-N}+8h)-u_{j+1}}{h^2} = \frac{-2u_{j-N}-u_{j-1}+4u_j-u_{j+1}-8h}{h^2}$$

per $N^2+1 \le j \le N^2+N$

Il termine non dipendente da u $(-8h)$ andrà a finire nel termine noto

$$\cancel{3}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\pi}{3}\Delta u = \frac{f}{3}(\bar{x},t)$$

$$Bu' + Au = g$$

$$a_{jk} = \frac{\pi}{3h^2}\begin{cases} 4 & \text{se } k=j \\ -1 & \text{se } k=j\pm 1 \text{ o } k=j\pm N \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \text{in } 1 \le j \le N^2$$

$$a'_{jk} = \frac{\pi}{3h^2}\begin{cases} 4 & \text{se } k=j \\ -1 & \text{se } k=j\pm 1 \\ -2 & \text{se } k=j-N \end{cases} \quad \text{in } N^2+1 \le j \le N^2+N$$

$$\rho = \text{cost} = 3 \qquad B = \rho I = \cancel{3}I$$

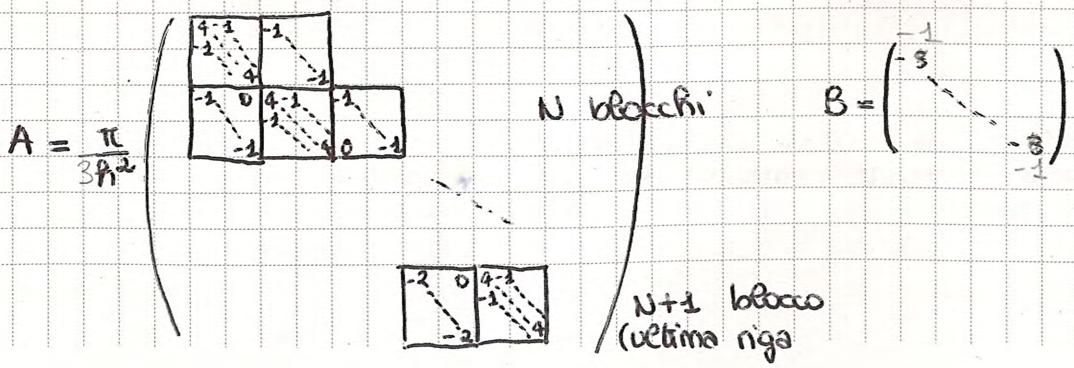
$$g = \frac{f}{3} \quad \text{se } 1 \le j \le N^2$$

$$g = \frac{f}{3} + \frac{8h}{h^2} \quad \text{se } N^2+1 \le j \le N^2+N$$

* $\hookrightarrow$ non ho $1/2$ davanti

b) Si delinei graficamente la struttura di tali matrici (come operato dal comando spy di MATLAB)

A $\rightarrow$ matrice pentadiagonale a blocchi



Integro tra $[0,2]$

$$\int_0^2 -\frac{d}{dx}\mu\left(\frac{du}{dx}\right)v\,dx + \int_0^2 3uv\,dx = \int_0^2 4v\,dx$$

Integro per parti il primo termine

$$\int_0^2 -\frac{d}{dx}\mu\left(\frac{du}{dx}\right)v\,dx = -\left[\mu\frac{du}{dx}v\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx$$

$$\downarrow$$

$$-\mu(2)\cancel{\frac{du(2)}{dx}v(2)} + \mu(0)\frac{du(0)}{dx}v(0)$$

$$v(2)=0$$

Inoltre $\mu(0)\frac{du(0)}{dx} = 5 - 3u(0)$

Si ottiene quindi:

$$\int_0^2 \mu\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + 5\,v(0) - 3\,u(0)v(0) + \int_0^2 3uv\,dx = \int_0^2 4v\,dx$$

Per ora si ha che $u \notin V$, poiché $u(2)=1$ mentre $v(2)=0$

Rilevamento del dato di Dirichlet in 2:

$u = u_2 + 2\varphi_2(x)$, $u_2 \in V$

Sostituisco nell'equazione:

$$\int_0^2 \mu\frac{d(u_2+2\varphi_2(x))}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + 5\mu(0)v(0) - 3\mu(0)u(0)v(0) + \int_0^2 3(u_2+2\varphi_2(x))v\,dx$$

$$= \int_0^2 4v\,dx$$

aggiustamento dovuto a condiz. Robin

$u_2 \in V$ e soddisfa

$$\underbrace{\int_0^2 \mu\frac{du_2}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx}_{\text{termini standard matrice di rigidezza}} \underbrace{-\,3\,v(0)u(0)}_{\text{Influenza } a_{11}} + \underbrace{\int_0^2 3u_2v\,dx}_{\text{richiamo}} = \int_0^2 4v\,dx - 5\,v(0) - \underbrace{\int_0^2 6\varphi_2(x)v\,dx}_{\text{rilevamento}} - 2\int_0^2 \mu\frac{\varphi_2(x)}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx$$

per ogni $v \in V$

Ottenendo la formulazione variazionale continua

Struttura generale matrice A:

$$a_{jk} = \frac{1}{h} \begin{cases} -\mu_{j-1/2} & \text{se } k = j-1 \\ \mu_{j-1/2} + \mu_{j+1/2} & \text{se } k = j \\ -\mu_{j+1/2} & \text{se } k = j+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad 2 \le j \le N+1$$

Fare casi a_{jj}, $a_{j,j-1}$, $a_{j,j+1}$

per $j < M$, $j = M$, $j > M$

$$\mu_{j-1/2} = \begin{cases} 1 & \text{se } j \le M \\ 2 & \text{se } j > M \end{cases} \qquad \mu_{j+1/2} = \begin{cases} 1 & \text{se } j < M \\ 2 & \text{se } j \ge M \end{cases}$$

$$a_{11} = \int_{x_1 \to 0}^{x_2 \to h} \mu \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx - \underbrace{3 \; \varphi_k(0) \varphi_j(0)}_{\text{contributo condiz. Robin (parte DR)}} = \frac{1}{h}\left(\mu_{j-1/2} + \cancel{\mu_{j+1/2}}\right) - 3 \cdot 1 \cdot 1$$

Nell' intervallo I_1 $\mu_{j-1/2} = \mu_{j+1/2} = 1$

$$a_{11} = \frac{\cancel{2}\,1}{h} - 3$$

1 → per eff. condiz. Robin parte Neumann

Termine noto:

se $j = 1$ $\quad f_1 = \int_{x_1}^{x_2} 4\varphi_j \, dx - \underbrace{5 \cdot \varphi_j(0)}_{\text{contributo condiz. Robin (parte Neumann)}} = 4 \cdot \frac{h}{2} - 5 = 2h - 5$

nel primo nodo ho DR + Neumann

$f_1 = f(0)\frac{h_1}{2} - \psi_0$

se $2 \le j \le N+1$ $\quad f_j = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} 4\varphi_j \, dx = 4h \quad \left(4 \cdot \frac{h+h}{2}\right)$

se $j = N+2$ $\quad f_{N+2} = -\underbrace{\int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} 6\, \varphi_2 \varphi_j \, dx}_{\text{rilevam. dato DR}} - \underbrace{2\int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} \mu \frac{d\varphi_2}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} dx}_{\text{rilevam. dato DR}} + \int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} 4\varphi_j \, dx$

$$= -6 \cdot \frac{1}{6}h - 2\int_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} \bigcirc\!\!\!-\, \mu \frac{1}{h^2} + 4h$$

→ indici diversi φ_k e φ_j

Nell' ultimo intervallo $\mu = 2$

$$f_{N+2} = 4h - h + 2 \cdot 2\cancel{h} \frac{1}{h^{\cancel{2}}} = 3h + \frac{4}{h}$$

$$f_j = \begin{cases} 2h - 5 & \text{se } j = 1 \\ 4h & \text{se } 2 \le j \le N+1 \\ 3h + \frac{4}{h} & \text{se } j = N+2 \end{cases}$$

TEMI D'ESAME

Tema ①

① Si vuole determinare la radice dell'equazione non lineare $4x + \sin(\pi x) + 2 = 0$

a) Localizzare la radice in un intervallo di ampiezza 1

Faccio un breve studio di funzione:

- La funzione è continua da $-\infty$ a $+\infty$
- $f'(x) = \underbrace{4 + \pi\cos(\pi x)}_{>0} = 0 \quad \rightarrow$ punti stazionari: $\cos(\pi x) = -\frac{4}{\pi}$

$$t = \arccos\left(-\frac{4}{\pi}\right) = \nexists$$

La derivata prima non si annulla mai ed è sempre positiva $\rightarrow f$ è sempre crescente $\rightarrow \exists!$ soluzione

Per localizzare l'intervallo procedo per tentativi:

$f(0) = 2 > 0$ $\rightarrow$ è maggiore quindi mi sposto a sx perché la fz è crescente
$f(-1) \cong -2 < 0$

$x^* \in (-1, 0)$

b) Approssimarla con il metodo di bisezione con un errore inferiore a 0,1

$$\frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} > \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} > 2^{k+1}$$

$$k+1 > \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right)$$

$$k+1 > \log_2\left(\frac{0+1}{0,1}\right) \Rightarrow k+1 > \log_2(10) = 3,32$$

$$k > 2,32$$

L'iterata x_4 garantirà un errore inferiore a 0,1

$x_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = -\frac{1}{2}$ $\qquad f(x_1) f(a_0) > 0$ $\qquad$ se > 0 sposto a nel punto medio e b resta fermo

$b_1 = b_0$; $a_1 = x_1$

$x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = -\frac{1}{4}$ $\qquad f(x_2) f(a_1) < 0$ $\qquad$ se < 0 sposto b nel punto medio e a resta fermo

b) Sfruttando la fattorizzazione LU, calcolare la soluzione del sistema lineare $Ax=b$.

$LUx = b \rightarrow Ly = b$

$Ux = y$

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ \frac{1}{5}y_1 + y_2 = 2 \rightarrow y_2 = 1 \\ y_3 = 3 \\ \frac{1}{5}y_1 + y_4 = 1 \rightarrow y_4 = 0 \end{cases} \qquad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$5x_1 + x_2 = 5 \rightarrow x_1 = 1$$
$$\frac{19}{5}x_2 + x_3 = 1 \rightarrow x_2 = 0$$
$$3x_3 = 3 \quad x_3 = 1$$
$$6x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0$$
$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Perché non è necessario effettuare la strategia di pivoting, nel calcolare la fattorizzazione LU della matrice A?

Perché la matrice A è già a predominanza diagonale per righe

(3) Sia data la legge di conservazione:

$$u_t - 5u_x = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

Si consideri la condizione iniziale $u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Si consideri una suddivisione dell'asse reale in celle $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ di ampiezza costante $\Delta x = 1$ con $x_i = i\Delta x$, $i \in \mathbb{Z}$

a) Si scelga un passo temporale Δt corrispondente a $C_{cor} = \frac{3}{5}$

$$\frac{3}{5} = |a|\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow \Delta t = \frac{3}{5}\cdot\frac{\Delta x}{|a|} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{25}$$

e) Descrivere le proprietà di convergenza del metodo

Il metodo di Lax-Friedrichs ha una convergenza di ordine 1 in spazio e tempo ed introduce una diffusione artificiale o numerica.
errore discretizzazione $\sim C_1\Delta x + C_2\Delta t$

L'ordine di consistenza del metodo è 1 e poiché per il teorema di Shwartz u è suff. regolare coincide con l'ordine di convergenza dell'errore

④ Si consideri il problema del filo elastico

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\mu \dfrac{du}{dx}\right) + u = 5 & \text{in } (0,1) \\ u(0) = 2 \\ \mu \dfrac{du}{dx}(1) = 3 \end{cases}$$

con $\mu = \mu(x) = x^2+1$. Si introduca una suddivisione di $[0,1]$ in $N+1$ intervalli equispaziati $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ di ampiezza $h = \frac{1}{N+1}$ tramite i nodi $x_j = (j-1)h$, $1 \le j \le N+2$.

a) Scrivere la formulazione variazionale continua del problema

Introduco uno spostamento ammissibile v, l'insieme degli spostamenti ammissibili V è definito come:

$V = \{ v : [0,1] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, derivabile a tratti con derivata prima continua e tale che $v(0) = 0 \}$

Integro nell'intervallo $(0,1)$:

$$\underbrace{\int_0^1 -\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) v\,dx}_{} + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 5v\,dx$$

Integro per parti: $-\left[\mu \dfrac{du}{dx} v\right]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \mu \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx$

$$-\mu(1)\frac{du(1)}{dx}v(1) + \cancel{\mu(0)\frac{du(0)}{dx}v(0)}$$

$v(0)=0$

$\mu \dfrac{du(1)}{dx} = 3$, ottengo quindi:

$$\int_0^1 \mu \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx - 3v(1) + \int_0^1 uv\,dx = \int_0^1 5v\,dx$$

Per ora $u \notin V$, poiché $u(0)=2$ mentre $v(0)=0$

c) Indicare l'ordine (dimensione del sistema lineare) ed esplicitare gli elementi della matrice di rigidezza A ed il termine noto b associati a tale discretizzazione. (Scrivere la prima e l'ultima riga del sistema e indicare la struttura delle righe centrali)

$U_h \to \varphi_j \; N+1$ Ordine $N+1$

$U_h = \sum_{K=1} U_K \varphi_K$

$$\sum_{K=1}^{N+1} U_K \int_0^1 \frac{d\varphi_K}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx + \sum_{K=1}^{N+} U_K \int_0^1 \varphi_j \varphi_K dx = \int_0^1 5\varphi_j dx + 3\varphi_j(1) - \int_0^1 2\frac{d\varphi_0}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx} + $$
$$- \int_0^1 2\varphi_0\varphi_j dx$$

$$\int_0^1 \varphi_j \varphi_K dx = b_{jK} \to b_{jK} = \gamma h \begin{cases} 1/6 & se \; K = j \pm 1 \\ 2/3 & se \; K = j \\ 0 & altrimenti \end{cases} \quad b_{N+2,\,N+2} = \int_{1-h}^1 \varphi_K \varphi_j = \frac{1}{3}h$$

$\gamma = 1 \quad h = cost$

$$= \begin{cases} 1/6\, h & se \; K = j \pm 1 \\ 2/3\, h & se \; K = j \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{d\varphi_K}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = a_{jK} = \frac{1}{h}\begin{cases} -\mu_{j-1/2} & se \; K = j-1 \\ \mu_{j-1/2} + \mu_{j+1/2} & se \; K = j \\ -\mu_{j+1/2} & se \; K = j+1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$a_{N+2,\,N+2} = \int_{1-h}^1 \mu \frac{d\varphi_K}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx = \frac{1}{h}\mu_{N+1+1/2} \quad N+3/2$$

Termine noto:

$j = 1 \qquad \int_0^1 5\varphi_1 dx - \int_0^1 \mu 2 \frac{d\varphi_0}{dx}\frac{d\varphi_1}{dx}dx - \int_0^1 2\varphi_0\varphi_1 dx =$

$$= 5h - 2\int_0^1 -\mu\frac{1}{h^2} - 2\cdot\frac{1}{6\,3}h = \frac{29}{6}h + \frac{2}{h^2}\int_0^h \mu dx$$

$2 \le j \le N+1 \qquad 5h$

$j = N+2 \qquad \frac{5h}{2} + 3$

$$f_j = \begin{cases} 29/6\, h + 2/h^2 \int_0^h \mu dx & se \; j = 1 \\ 5h & se \; 2 \le j \le N+1 \\ \frac{5}{2}h + 3 & se \; j = N+2 \end{cases}$$

Tema ②

① E' assegnato l'integrale $\int_3^{12} \log(x^2) + 1 \, dx$

a) Scrivere la stima dell' errore per la formula di Simpson composita

$$R_N^S = -\frac{b-a}{2880} h^4 f^{IV}(c) \qquad c \in (a,b),\ h = \frac{b-a}{N},\ f \in C^4[a,b]$$

N numero di intervalli

b) Stabilire il numero di intervalli da utilizzare con la formula di Simpson composita per approssimare l'integrale con un errore assoluto inferiore a 10^{-8}

$$f'(x) = 2\cancel{x} \cdot \frac{1}{x^{\cancel{2}}} \quad ; \quad f''(x) = -2x^{-2} \quad ; \quad f'''(x) = 4x^{-3}$$

$$f^{IV}(x) = -12x^{-4}$$

$$\frac{12}{12^{43}} \leq |f^{IV}(x)| \leq \frac{12}{81} = \frac{4}{27} \longrightarrow \text{maggiora l'errore}$$

$$|R_N^S| = \frac{12-3}{2880}\left(\frac{12-3}{N}\right)^4 \cdot \frac{4}{27} \leq 10^{-8}$$

$$= \frac{9}{2880} \cdot \frac{9^4}{N^4} \cdot \frac{4}{27} \leq 10^{-8}$$

$$\Rightarrow N^4 \geq \frac{9}{2880} \cdot \frac{9^4}{10^{-8}} \cdot \frac{4}{27} \Rightarrow N \geq \sqrt[4]{\frac{9}{2880} \cdot \frac{9^4}{10^{-8}} \cdot \frac{4}{27}} = 132$$

c) Cosa ci si può aspettare, qualitativamente, decuplicando il numero di intervalli utilizzati? (motivare la risposta)

Poichè l'errore $R_N^S \propto \frac{1}{N^4}$, ponendo $N' = 10N$, l'errore commesso diminuirà e precisamente sarà:

$$R_N^{S\,'} \propto 10^{-4} R_N^S$$

c) Scrivere una function MATLAB che, ricevuti in ingresso due vettori x, y di medesima lunghezza, approssima i dati (x_i, y_i) con una funzione del tipo $f(x) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + a_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, assemblando il sistema delle equazioni normali, risolvendolo con funzioni predefinite di MATLAB e restituendo in uscita un vettore con i coeff. a_0, a_1, a_2

```
x=[-3 -2 0 2 3];
y=[-2 1 1 -2 -2];
A = [ones(5,1)   cos( /2*x)*ones(N,1)   sin( /2*x) ones(N,1)];
B = A'A;
y = A'y;
y=y';
x = B\y
```

c) Si calcolino le medie di cella relative alle celle ν_{-1}, ν_0, ν_1 ottenute dopo due passi temporali con il metodo di Lax-Wendroff.

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2}\lambda a\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \frac{1}{2}(\lambda a)^2\left(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n\right)$$

$$U_{-1}^1 = -\frac{2}{\pi} - \cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi} + \frac{9}{\cancel{32}\;4}\left(\frac{\cancel{8}}{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}$$

$$U_0^1 = \frac{2}{\pi} + \frac{9}{32}\left(-\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{4\pi} = U_2^1$$

$$U_j^1 = \begin{cases} -1/4\pi & \text{se } j \text{ pari} \\ 1/4\pi & \text{se } j \text{ dispari} \end{cases}$$

$$U_1^1 = -\frac{2}{\pi} + \frac{9}{32}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi}$$

$$U_{-1}^2 = \frac{1}{4\pi} - \cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\right)} + \frac{9}{32}\left(-\frac{1}{4\pi} - 2\cdot\frac{1}{4\pi} - \frac{1}{4\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} + \frac{9}{32}\left(-\frac{1}{\pi}\right) = -\frac{1}{32\pi}$$

$$U_j^2 = \begin{cases} -1/32\pi & \text{se } j \text{ dispari} \\ \frac{1}{32\pi} & \text{se } j \text{ pari} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\pi}{3}\Delta u = \frac{f}{3}(\bar{x}, t)$$

$$u_j(t) = u(x_j, t) \Rightarrow u'(t) - \frac{\pi}{3} C u = \frac{f}{3}(t)$$

$f \in \mathbb{R}^{n^2+N}$

$u \in \mathbb{R}^{n^2+n}$

$f_j(t) = f(x_j, t)$

$\rightarrow A = +\frac{\pi}{3} C$

$$B u' + A u = g$$

$$a_{jk} = \frac{\pi}{3} \frac{1}{h^2} \begin{cases} \left.\begin{matrix} -1 & \text{se } k = j \pm 1 \\ -1 & \text{se } k = j \pm N \\ 4 & \text{se } k = j \end{matrix}\right\} & \text{se } 1 \leq j \leq N^2 \\ \left.\begin{matrix} -1 & \text{se } k = j \pm 1 \\ -2 & \text{se } k = j - N \\ 4 & \text{se } k = j \end{matrix}\right\} & \text{se } j = N^2+1, \ldots, N^2+N \end{cases}$$

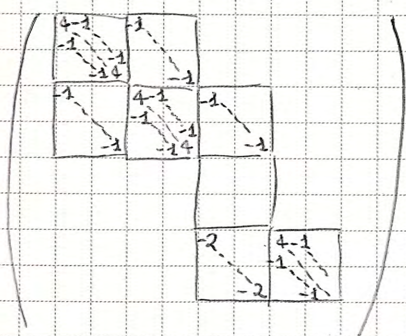
$B = \operatorname{diag} \rho I$ ma $\rho = 1 \Rightarrow B = I$ con $I \in \mathbb{R}^{N^2+N}$

$g = \frac{f}{3} + \frac{8h}{h^2}$ se $j = N^2+1, \ldots, N^2+N$

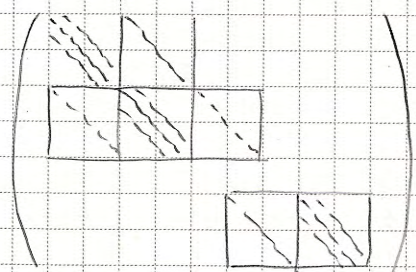
$g = \frac{f}{3}$ se $1 \leq j \leq N^2$

b) Si delinei graficamente la struttura di tali matrici (come operato dal comando spy di MATLAB)

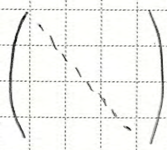
A =



A =



B =



b) Sfruttando la fattorizzazione LU, calcolare la soluzione del sistema lineare $Ax = b$

$Ly = b$

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ \frac{1}{6} y_1 + y_2 = 2 & \rightarrow y_2 = 1 \\ \frac{6}{23} y_2 + y_3 = 3 & \rightarrow y_3 = \frac{63}{23} \\ y_4 = 0 \end{cases} \qquad y = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 63/23 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Ux = y$

$$\begin{array}{ll} 6x_1 + x_2 = 6 & \rightarrow x_1 = 1 \\ \frac{23}{6} x_2 + x_3 = 1 & \rightarrow x_2 = 0 \\ \frac{63}{23} x_3 = \frac{63}{23} & \rightarrow x_3 = 1 \\ 7x_4 = 0 & \rightarrow x_4 = 0 \end{array} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Indicare come procedereste (senza effettuare i calcoli) per risolvere i sistemi lineari $Ax = c_i$, $i = 1, \dots, 100$

$Ly = b$

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ \frac{1}{6} y_1 + y_2 = 1 \\ \frac{6}{23} y_2 + y_3 = \log(3i) + 1 \\ y_4 = \sqrt{i^2+1} \end{cases}$$

$Ux = y$

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 = y_1 \\ \frac{23}{6} x_2 + x_3 = y_2 \\ \frac{63}{23} x_3 = y_3 \\ 7x_4 = y_4 \end{cases}$$

② a) Assegnato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(t) + 102 y'(t) + 200 y(t) = t^2 + 1 & t \in [0, T] \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

indicare il minimo numero di passi da effettuare con il metodo di Eulero esplicito per ottenere un'approssimazione della soluzione in $t = 2$, garantendo la stabilità del metodo

$$\begin{cases} z_1'(t) = z_2(t) \\ z_2'(t) = -102 z_2(t) - 200 z_1(t) + t^2 + 1 \\ z_1(0) = 2 \\ z_2(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y(t) = z_1(t) \\ y'(t) = z_1'(t) = z_2(t) \end{array}$$

$$z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{pmatrix} \qquad g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2+1 \end{pmatrix}$$

$$z^{(1)} - hA\, z^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$ Prendo $h = \frac{1}{2}$

$$z^{(1)}\left(I - \frac{1}{2}A\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5/8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ +100 & 52 \end{pmatrix} z^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13/8 \end{pmatrix}$$

c) Il metodo di Eulero implicito risulterebbe stabile, applicandolo con il passo usato al punto b)?

Sì, perché il metodo è incondizionatamente stabile

③ Sia data la legge di conservazione: $\frac{\partial u}{\partial t} + 4\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0$

Si consideri una condizione iniziale per la quantità u pari a 1 se $x<0$ e pari a 3 se $x \geq 0$. Si consideri una suddivisione dell'asse reale in celle $V_i = \left[x_i - \frac{\Delta x}{2},\ x_i + \frac{\Delta x}{2}\right]$ di ampiezza costante pari a $\Delta x = \frac{1}{2}$, con $x_0 = 0$.

Si vuole utilizzare un passo temporale Δt corrispondente a $Cour = \frac{1}{2}$

a) Si calcolino le medie di cella della condizione iniziale

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \implies U_j^0 = \begin{cases} 1 & \text{se } j \leq -1 \\ 3 & \text{se } j \geq 1 \end{cases}$$

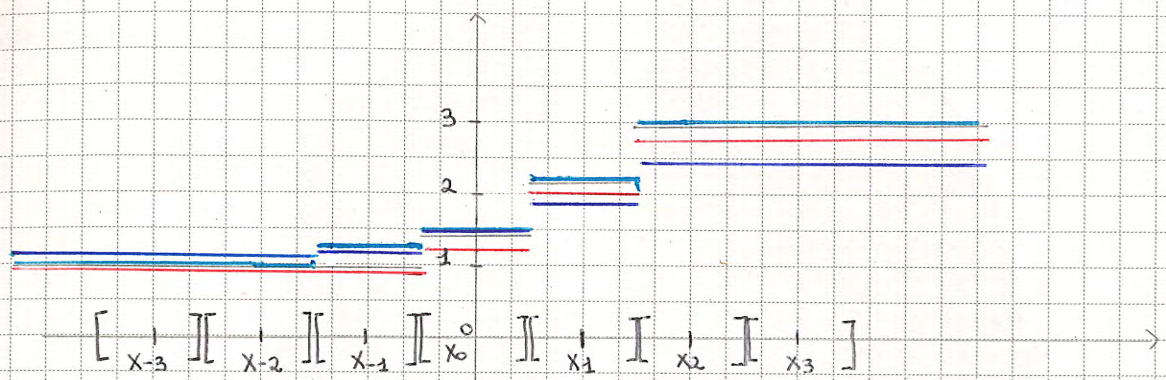
$$U_0^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{0-\Delta x/2}^{0+\Delta x/2} u_0(x)\,dx = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_0^{0+\Delta x/2} 3\,dx + \int_{-\Delta x/2}^{0} x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}\left(\Big[3x\Big]_0^{\Delta x/2} + \Big[x\Big]_{-\Delta x/2}^{0}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\Delta x}}\left(3\frac{\cancel{\Delta x}}{2} + \frac{\cancel{\Delta x}}{2}\right) = 2$$

$$u_j^2 = \begin{cases} 1 & \text{se } j \leq -2 \\ 1 & \text{se } j = -1 \\ 5/4 & \text{se } j = 0 \\ 2 & \text{se } j = 1 \\ 11/4 & \text{se } j \geq 2 \end{cases}$$

d) Dopo aver rappresentato graficamente le medie di cella ottenute con i due metodi dopo due passi temporali, indicare quale dei due risulta più diffusivo



• • } Lax-Friedrichs   • • } Upwind

Il metodo di Lax-Friedrichs è più diffusivo in quanto contiene una diffusività numerica

b) Scrivere la formulazione variazionale discreta del problema, relativa agli elementi finiti lineari su tale suddivisione

Restringiamo V al sottospazio V_h degli spostamenti ammissibili discreti

$$V_h = \{ v \in V : v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \text{ per } 1 \le j \le N+1 \text{ e } v(0)=0 \}$$

Formulazione variazionale discreta:

$$\begin{cases} u_h \in V_h \text{ e soddisfa} \\ \int_0^1 \mu \frac{du_h}{dx}\frac{dv_h}{dx}\,dx + \int_0^1 3 u_h v_h\,dx = \int_0^1 2 v_h\,dx + 2 v_h(1) \quad \text{per ogni } v \in V \end{cases}$$

c) Indicare l'ordine (dimensione sistema lineare) ed esplicitare gli elementi della matrice di rigidezza A e del termine noto b associati a tale discretizzazione (Scrivere la prima e l'ultima riga del sistema e indicare la struttura delle righe centrali)

$u_h = \sum u_k \varphi_k$ Ordine N+1

$v_h = \varphi_j$

$$\sum_{k=1}^{N+2} u_k \Big(\underbrace{\int_0^1 \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}\,dx}_{a_{jk}} + \underbrace{\int_0^1 3\varphi_j\varphi_k\,dx}_{b_{jk}} \Big) = \underbrace{\int_0^1 2\varphi_j\,dx + 2\varphi_j(1)}_{f_j}$$

$$a_{jk} = \frac{1}{h}\begin{cases} -\mu_{j-1/2} & \text{se } k=j-1 \\ \mu_{j+1/2}+\mu_{j-1/2} & \text{se } k=j \\ -\mu_{j+1/2} & \text{se } k=j+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$a_{N+2,N+2} = \int_{1-h}^{1} \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}\,dx = \frac{1}{h}\left(\mu_{N+1+1/2}\right)$$

sostituisco μ e calcolo integrale (lascio $1/h^2$ fuori parentesi poi vedo si può ridurre)

$$b_{jk} = 3h\begin{cases} 2/3 & \text{se } k=j \\ 1/6 & \text{se } k=j\pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$b_{N+2,N+2} = \int_{1-h}^{1} \varphi_k\varphi_j\,dx = 3\cdot\frac{1}{3}h = h$$

$$f_j = \begin{cases} 2h & 1 \le j \le N+1 \\ \cancel{2}\cdot\frac{h}{\cancel{2}} + 2 & j = N+2 \end{cases}$$

c) Calcolare con Lax-Friedrichs le medie di cella dopo due passi temporali

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j+1}+U_{j-1}) - \frac{1}{2}\lambda a(U_{j+1}-U_{j-1})$$

$$U_0^1 = \frac{1}{2}(-1+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\left(-1-1\right) = \frac{3}{5}$$

$$U_{-2}^1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}(1+1) = -3/5$$

$$U_1^1 = \frac{1}{2}(0+0) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}(0) = 0$$

$$U_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{se } j \text{ dispari} \\ \pm\frac{3}{5} & \text{se } j \text{ pari} \end{cases}$$

$$U_{-1}^1 = 0$$

$$U_0^2 = \frac{1}{2}(0+0) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot(0) = 0$$

$$U_1^2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\left(-\frac{3}{5}-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$$

$$U^2 = \begin{cases} 0 & \text{se } j \text{ pari} \\ \pm\frac{9}{25} & \text{se } j \text{ dispari} \end{cases}$$

$$U_{-1}^2 = -\frac{9}{25}$$

② Si consideri il problema del filo elastico

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{du}{dx}\right) + 3u = f & x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 4 \end{cases}$$

$\mu = \mu(x) = 2+x$

$N>0$

$N+1$ intervalli equispaziati

Nodi $\quad 0 \le j \le N+1$

b) Scrivere la formulazione variazionale discreta relativa agli elementi finiti lineari

Restringo V al sottospazio degli spostamenti ammissibili discreti V_h

$$V_h = \{ v \in V \mid v_h|_{I_j} \in \mathbb{P}_1 \text{ per } 1 \leq j \leq N+1 \text{ e } v(0) = v(1) = 0 \}$$

Formulazione variazionale discreta:

$$\begin{cases} u_{1h} \in V_h \text{ e soddisfa} \\ \int_0^1 \mu \frac{du_{1h}}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx + \int_0^1 3 u_{1h} v_h dx = \int_0^1 f v_h dx - \int_0^1 \mu 4 \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx - \int_0^1 12 \varphi_1 v_h dx \end{cases}$$

per ogni $v_h \in V_h$

c) Scrivere il problema algebrico lineare equivalente al punto b)

$$u_h = \sum_{k=1}^{N+1} u_k \varphi_k$$

$$v_h = \varphi_j$$

$$\sum_{k=1}^{N+1} u_k \underbrace{\int_0^1 \frac{d\varphi_k}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx}_{a_{jk}} + \sum_{k=1}^{N+1} u_k \underbrace{\int_0^1 3 \varphi_j \varphi_k dx}_{b_{jk}} = \int_0^1 f \varphi_j dx - \int_0^1 \mu 4 \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx - \int_0^1 12 \varphi_1 \varphi_j dx$$

$$a_{jk} = \frac{1}{h} \begin{cases} -\mu_{j-1/2} & \text{se } k = j-1 \\ \mu_{j-1/2} + \mu_{j+1/2} & \text{se } k = j \\ -\mu_{j+1/2} & \text{se } k = j+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$b_{jk} = 3h \begin{cases} 1/6 & \text{se } k = j \pm 1 \\ 2/3 & \text{se } k = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} h & \text{se } k = j \pm 1 \\ 2h & \text{se } k = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) Sfruttando ciò che si è concluso al punto a), stabilire se Gauss-Seidel converge per la soluzione di $Ax = b$ assegnato

Sì, il metodo di GS converge in quanto la matrice A è simmetrica definita positiva (autovalori reali e positivi)

c) Sfruttando a), fornire una stima per eccesso del numero di condizionamento in norma 2 di A.

$$K(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

A def. positiva: $\|A\|_2 = \lambda_{max}$

$$\|A\|_2^{-1} = \frac{1}{\lambda_{min}}$$

$$\|A\| \, \|A^{-1}\| = \frac{n + \sum_{i=1}^{n-1} 1}{n - \sum_{i=1}^{n-1} 1}$$

Se devo stimare per eccesso considero il massimo valore che potrebbe avere λ_{max} e il minimo per λ_{min}

Il peggior condizionamento si ha nel caso in cui gli autovalori siano distanti tra loro

se $0 < |fl(b)| \ll |fl(a)|$ può accadere $a \oplus b = fl(a)$
perdo il contributo di b

CANCELLAZIONE NUMERICA → può verificarsi quando si esegue la sottrazione di due numeri macchina molto vicini tra loro → perdita di cifre significative → amplificazione errore di approssimazione sugli operandi

(mal condizionamento somma algebrica quando $a+b$ è piccolo)

Può essere evitata usando quando possibile forme alternative per il calcolo di un'espressione

PROBLEMA BEN POSTO → quando ammette una ed una sola soluzione che dipende con continuità dai dati

PROBLEMA BEN CONDIZIONATO → se le perturbazioni sui dati non influenzano eccessivamente i risultati

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq K \frac{\|\delta d\|}{\|d\|} \quad \text{o} \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \simeq K \frac{\|\delta d\|}{\|d\|}$$

$K = K(d)$ → numero di condizionamento del problema

Ben condizionato se $K(d)$ piccolo, mal condizionato se $K(d)$ grande

NUMERICAMENTE STABILE: quando la successione delle operazioni di macchina non amplifica eccessivamente gli errori di arrotondamento

Tutte le operazioni intermedie ed il risultato finale dell'algoritmo devono presentare un errore relativo controllabile con la precisione di macchina

Se $\frac{\|\check{x} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \simeq \varepsilon_m$ → ALGORITMO STABILE

• Norme di matrice: $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ → sommo le righe e prendo il max sulle colonne

$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$, $\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)|$ → spettrale

Il raggio spettrale è il massimo (in modulo) degli autovalori di A → in MATLAB eig(A)

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ → sommo le colonne e prendo il massimo sulla riga

$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)^{1/2}$ → Frobenius
Sommo i quadrati di tutti gli elementi

EQUIVALENZA FRA NORME: $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_\square$
$\exists\, C_1, C_2 \,/\, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad C_1\|x\|_\square \leq \|x\|_* \leq C_2\|x\|_\square$

Numero di condizionamento: $K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$

ELIMINAZIONE GAUSSIANA

Moltiplicatori: $m_{ij} = -\frac{\text{elemento che sto considerando}}{a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}}$

FATTORIZZAZIONE LU:
• la matrice L ha uno sulla diagonale e sotto la diagonale ha $-m_{ij}$ (li posso scrivere già mentre faccio l'eliminazione al posto degli zeri)
• la matrice U è la parte triang. sup. ottenuta con l'eliminazione gaussiana

$A = LU$; il sistema lineare diventa: $L\underbrace{Ux}_{y} = b \Rightarrow Ly = b$
$Ux = y$ ↳ coincide con b all'ultimo passo dell'eliminaz. gauss.

In questo modo se devo risolvere un sys lineare cambiando solamente il vettore dei termini noti non devo rifare tutto da capo ma basta sostituire b con c e risolvere i due sistemi

METODI ITERATIVI

Si usano con matrici sparse di ordine elevato per evitare il FILL-IN → riempimento matrici L e U

Splitting di A: $A = M + N$ $\det(M) \neq 0$ → deve essere non singolare quindi invertibile

$Mx = -Nx + b \rightarrow Mx^{k+1} = -Nx^k + b$

CONVERGENZA: per una qualunque stima iniziale SE E SOLO SE $\rho(B) < 1$ dove $B = M^{-1}N$

Teorema: sia $\|\cdot\|$ una norma di matrice naturale. Se $\|B\| < 1$ il metodo iterativo converge per una qualunque stima iniziale poiché $\rho(B) \leq \|B\|$

Se $\rho(B)$ è vicino a 0 → velocità di convergenza maggiore
" " " " a 1 → velocità di convergenza minore

METODO DI JACOBI

$A = E + D + F$ $A = \begin{pmatrix} & D & F \\ E & & \end{pmatrix}$ $M = D$, $N = (E+F)$

$B_J = -D^{-1}(E+F)$ → D invertibile (non singolare)

$x^{k+1} = D^{-1}(b - Ex^k - Fx^k)$

METODO DI GAUSS-SEIDEL

$A = E + D + F$ $M = E + D$, $N = F$

$B_{GS} = -(E+D)^{-1}F$

$x^{k+1} = D^{-1}(b - E x^{k+1} - Fx^k)$

→ sostituisco incognite già trovate nelle equazioni successive

TEOREMA STEIN-ROSENBERG

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con $a_{ij} \leq 0$, $\forall i \neq j$ e $a_{ii} > 0$, allora si verifica UNO E UNO SOLO dei seguenti risultati:

- $0 < \rho(B_{GS}) < \rho(B_J) < 1$ → GS converge + velocemente
- $1 < \rho(B_J) < \rho(B_{GS})$ → GS più lontano dalla soluzione
- $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 0$
- $\rho(B_{GS}) = \rho(B_J) = 1$

TEOREMA

Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matrice TRIDIAGONALE con elementi diag. non nulli, allora

$$\rho(B_{GS}) = \rho^2(B_J)$$

ovvero il metodo di GS e di Jacobi convergono o divergono simultaneamente ed il tasso asintotico di convergenza del metodo di GS è doppio di quello del metodo di Jacobi.

BASE DI NEWTON

$\omega_0(x) = 1$

$\omega_1(x) = x - x_0$

$\omega_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)$

$\vdots$

$\omega_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$

Differenze divise: $f[x_{i0}, \dots, x_{ik}] = \dfrac{\underbrace{f[x_{i1}, \dots, x_{ik}]}_{\text{dal secondo all'ultimo}} - \underbrace{f[x_{i0}, \dots, x_{ik-1}]}_{\text{dal primo al penultimo}}}{x_{ik} - x_{i0}}$

Vedere procedimento per tavola differenze divise su esercizi + forma annidata di Ruffini-Horner

Le differenze divise non dipendono dall'ordine dei nodi.
Se i nodi sono distinti, i denominatori delle differenze finite sono sempre diversi da zero → tavola ben definita

INTERPOLAZIONE DI HERMITE

Oltre al valore della funzione nel punto do il valore della derivata prima nel punto.

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$
x_0	$f(x_0)$		
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$\dfrac{f[x_0, x_1] - f'(x_0)}{x_1 - x_0}$
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	
$\vdots$			$\vdots$

Spline di grado:
- 2 → continuità della derivata I nelle giunzioni
- 2-3 → continuità delle derivate I, II nelle giunzioni

SPLINE CUBICHE:
1) • NATURALI: $S_3''(x_0) = 0$, $S_3''(x_n) = 0$
2) • PERIODICHE: $S_3'(x_0) = S_3'(x_n)$; $S_3''(x_0) = S_3''(x_n)$
3) • VINCOLATE: $S_3'(x_0) = y_0'$, $S_3'(x_n) = y_n'$
4) • NOT-A-KNOT: $S_3'''(x)$ continua anche in x_1 e x_{n-1} (primo e ultimo nodo interno)

Convergenza

Teorema: Sia $S_3(x)$ la spline cubica interpolante i dati (x_i, y_i) per $i=0,\dots,n$ con condizioni di tipo 1,2,3. Sia $h = \max_i h_i$, $h_i = x_i - x_{i-1}$. → h è il più grande degli intervalli.

- Se $f \in C^2[a,b]$ per $h \to 0$ si ha:

$$\| S_3^{(p)} - f^{(p)} \|_\infty = o(h^{2-p}) \qquad p = 0,1,2$$

La norma $\| \ \|_\infty$ (con spline cubica $^{(v1)}$) tende a 0 più rapidamente di h^2. La derivata della spline cubica converge alla derivata prima di f senza che lo avessimo imposto. Anche la derivata II $o(1)$ tende a 0 ma non so quanto velocemente.

- Se $f \in C^k[a,b]$, $k = 3,4$ e $\frac{h}{h_i} \leq \text{cost}$ per $h \to 0$ si ha:

Se $k > 2$ posso guadagnare ancora qualcosa con la derivata III

$$\| S_3^{(p)} - f^{(p)} \|_\infty = \begin{cases} o(h^{3-p}) & k=3 \\ O(h^{4-p}) & k=4 \end{cases} \qquad p = 0,1,2,3$$

$O(1)$ è costante

PROPRIETÀ SPLINE CUBICHE

Tra tutte le funzioni $f \in C^2[a,b]$ che assumono valori y_i nei nodi x_i e soddisfacenti condizioni di tipo 1,2,3, le spline cubiche sono le sole funzioni che minimizzano l'integrale:

Dice quanto oscilla la funzione che stiamo trattando

$$E(f) = \int_{x_0}^{x_n} [f''(x)]^2 \, dx$$

La spline cubica è quella che oscilla meno

Le spline naturali godono di una proprietà di minimo assoluto

Curvatura di f nel punto x: $\dfrac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$

APPROSSIMAZIONE DERIVATA PRIMA:

- Diff. in avanti: $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \underbrace{\dfrac{1}{2} f''(\varepsilon_+)h}$

ERRORE che si ha approssimando la derivata con il rapporto incrementale. L'errore si comporta come h a meno della cancellazione numerica

- Diff. all'indietro: $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0-h) - f(x_0)}{h} + \dfrac{1}{2} f''(\varepsilon_-)h$

- Diff. centrate: $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + \dfrac{1}{12}(f'''(\varepsilon_+) + f'''(\varepsilon_-))h^2$ — L'errore si comporta in modo simmetrico rispetto a x_0

ERRORE con diff. in avanti o all'indietro: $C_1 h + \dfrac{C_2}{h}$

" " diff. centrate: $C_1 h^2 + \dfrac{C_2}{h}$

Primo termine: errore analitico (approssimo derivata con rapp. increm.)
Secondo termine: errore numerico

h grande $\to$ stime poco accurate
h piccolo $\to$ cancellazione numerica
} compromesso ottimale $h \simeq \sqrt{\varepsilon_m}\,|x_0|$

APPROSSIMAZ. DERIVATA SECONDA

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + \underbrace{\frac{1}{24}(f^{IV}(\varepsilon_+) + f^{IV}(\varepsilon_-))h^2}_{\text{l'errore si comporta come } h^2}$$

Posso inoltre approssimare la derivata di f approssimando la funzione f mediante spline e poi calcolando le derivate di quest'ultima.

Imponiamo che la formula di quadratura $\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x)$ sia esatta su una base dello spazio dei polinomi di grado $n-1$, in particolare $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \dots + w_n &= \int_a^b 1\,dx = b-a \\ w_1 x_1 + \dots + w_n x_n &= \int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2) \\ w_1 x_1^{n-1} + \quad + w_n x_n^{n-1} &= \int_a^b x^{n-1}dx = \frac{1}{n}(b^n - a^n) \end{aligned}$$

Scelgo i pesi in modo che valga l'uguaglianza (vedi esercizi)

PROP. Le formule di Newton-Cotes costruite su n nodi sono esatte per polinomi di grado fino a $d=n-1$ se n PARI, $d=n$ se n DISPARI

CONVERGENZA se $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$

TEOREMA: se $f \in C[a,b]$ e i pesi soddisfano $\sum_{i=1}^{n} |w_i| \leq K$, con K costante indip. da n allora la formula di quadratura è convergente.

I pesi delle formule di Newton-Cotes non soddisfano questo teorema quindi non garantiscono la convergenza

QUADRATURA COMPOSITA

1) Si sceglie una formula di interpolazione base costruita su un numero prefissato r di nodi (piccolo)
2) Si partiziona l'intervallo di integrazione in N intervallini
3) Additività dell'integrale: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$
4) Si applica la formula di quadratura a ciascuno degli integrali a dx

FORMULA TRAPEZI COMPOSITI (nodi equidistanti)

Ripassa formule per MATLAB

$$I_N^T = \frac{h}{2}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{N} f(x_i) + f(x_{N+1})\right)$$

punti interni che dividono un intervallo dall'altro

N+1 valutaz. di fz.

EQUAZIONI NON LINEARI

Esistono solo metodi iterativi

- La convergenza dipende in modo critico dalla scelta di x_0
- I metodi possono convergere a punti che non sono le soluz. cercate, ad esempio se ho più soluzioni e voglio isolarne una

Si deve fare un breve studio preliminare di funzione in modo da localizzare le radici e individuare un intervallo che contenga una e una sola radice

METODO DI BISEZIONE

Si basa sul teorema di esistenza degli zeri per funzioni continue

TH. Se $f \in C[a,b]$ e $f(a)f(b)<0$, $\exists c \in [a,b]$ tale che $f(c)=0$

Pongo $x_m = \frac{a+b}{2}$

- Se $f(a)f(x_m)>0 \rightarrow b_1=b$; $a_1=x_m$; $x_{m1} = \frac{a_1+b_1}{2}$
- Se $f(a)f(x_m)<0 \rightarrow b_1=x_m$; $a_1=a$; $x_{m1} = \frac{a_1+b_1}{2}$

Metodo GLOBALMENTE DIVERGENTE → convergenza SEMPRE garantita, qualunque sia la stima iniziale

STIMA DELL'ERRORE: per garantire un errore assoluto inferiore ad una certa tolleranza ε

$$\frac{b_0-a_0}{2^{k+1}} < \varepsilon \Rightarrow k+1 < \log_2\left(\frac{b_0-a_0}{\varepsilon}\right)$$

Sicuramente $e_k \leq \varepsilon$

TEOREMA (degli estremi di Fourier)

Sia $f \in C^2[a,b]$ chiuso e limitato. Se:

1) $f(a)f(b) < 0$
2) $f'(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$ o $f'(x) < 0 \ \forall x \in [a,b]$ (non si azzera mai in $[a,b]$
   → funzione monotona)
3) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ o $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$ (non cambia segno in $[a,b]$
   → la funzione non cambia concavità)

Allora $f(x)=0$ ha un'unica radice x^* in $[a,b]$ e il metodo di Newton converge a x^* $\forall x_0 \in [a,b]$ tali che $\underbrace{f(x_0)f''(x_0) > 0}_{\text{se non soddisfo questa condizione uso}}$

↓

TEOREMA

Sia $f \in C^2[a,b]$ chiuso e limitato. Se:

1) $f(a)f(b) < 0$
2) $f'(x) > 0 \ \forall x \in [a,b]$ o $f'(x) < 0 \ \forall x \in [a,b]$
3) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ o $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in [a,b]$
4) $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < b-a$ e $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b-a$ → le tangenti mandate dagli estremi cadono nell'intervallo

allora $f(x)=0$ ha un'unica radice x^* in $[a,b]$ e il metodo di Newton converge a x^* $\forall x_0 \in [a,b]$

Metodo di Newton costoso perché richiede ad ogni passo $f(x_k)$ e $f'(x_k)$ → VARIANTI

1) NEWTON ALLE DIFFERENZE: $f'(x_k)$ approssimata con differenze in avanti/all'indietro

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k+h_k)-f(x_k)}{h_k}}$$

TEOREMA : Se $\phi \in C^1$ in un intorno di x^* e $|\phi'(x^*)| < 1$ allora esiste un intorno I di x^* tale che se $x_0 \in I$ la successione converge.
Se viceversa $|\phi'(x^*)| > 1$ la successione non può convergere
Se $|\phi'(x^*)| = 1$ il metodo delle iterate successive può convergere o non convergere

$\phi'(x^*) > 0 \rightarrow$ monotonia
$\phi'(x^*) < 0 \rightarrow$ rimbalzo a dx e sx

Se $\phi'(x^*) = 0 \rightarrow$ convergenza di ordine 2

TEOREMA : Se esiste $[a,b]$ tale che
1) $\phi \in C^1[a,b]$
2) $\phi : [a,b] \mapsto [a,b]$
3) $\exists K < 1$ tale che $|\phi'(x)| \leq K \ \forall x \in [a,b]$
Allora esiste UNO E UN SOLO punto fisso in $[a,b]$ e il metodo delle iterate successive converge ad esso $\forall x_0 \in [a,b]$

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^m} \simeq \frac{\phi^{(m)}(x^*)}{m!}$$

TEOREMA : Se 1) $\phi^{(i)}(x^*) = 0$ per $i = 1, \ldots, m-1$
2) $\phi^{(m)}(x^*) \neq 0$
Allora l'ordine di convergenza è m. In particolare se $m = 1$
$\lim_{k \to \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = \phi'(x^*)$ l'errore al passo k+1 si comporta come $\phi'(x^*)$

L'ordine di convergenza è pari all'ordine della prima derivata che non si annulla nel punto fisso.

ORDINE DI ALCUNI METODI:
- Eulero I/E : $p=1$
- Trapezi: $p=2$
- Heun: $p=2$
- Runge Kutta: variabile, ma $p \leq s$
  - $p_{max} = s$, $s = 1 \to 4$
  - $p_{max} = s-1$, $s = 5 \to 7$
  - $p_{max} = s-2$, $s = 8,9$
  - $p_{max} = s-3$, $s \geq 10$

Un problema è ASINTOTICAMENTE STABILE se: $\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$ per l'esponenziale devo avere esponente minore di 0

Per h fissato, un metodo è ASSOLUTAMENTE STABILE se: $\lim_{k = \infty} y_k = 0$ $k =$ n° passi

Se il problema NON è asintoticamente stabile NESSUN metodo sarà assolutamente stabile

STABILITÀ DI SISTEMI

Sistema di ODE lineari a coeff. costanti

$$y'(t) = Ay(t)$$

gli AUTOVALORI di A sono responsabili della stabilità. In particolare, se $Re\ \lambda_i < 0 \to$ problema asintoticamente stabile

Metodo assolutamente stabile $\to h\lambda_i \in R_a$ $\forall \lambda_i$ (l'autovalore più negativo fornisce la restrizione sul passo)

TABLEU DI BUTCHER:

$$
\begin{array}{c|cccc}
b_1 & & & & \\
b_2 & c_{21} & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
b_s & c_{s1} & \dots\dots & c_{s,s-1} & \\
\hline
 & a_1 & \dots\dots & & a_s
\end{array}
$$

$$\sum_{i=1}^{s} a_i = 1 \qquad b_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij} \qquad \forall i = 1, \dots, s$$

Tableu Eulero esplicito:
$$
\begin{array}{c|c}
0 & 0 \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

Tableu Heun:
$$
\begin{array}{c|cc}
0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/2 & 1/2
\end{array}
$$

$b_1 = 0+0$
$b_2 = 1+0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 179 di 228

Se μ = cost si ha: $\mu \frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2}$

$a_{jk} \begin{cases} 2 & \text{se } k=j \\ -1 & \text{se } k=j\pm1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ $\quad A = \frac{\mu}{h^2}$ tridiag $[-1 \; 2 \; -1]$

Termine noto: $\frac{1}{2} f(x_j)$

Se ho condizioni di Neumann: $A = \frac{\mu}{h^2}$ tridiag $[-1 \; 1; -1 \; 2 \; -1]$ -> se a primo nodo

$A = \frac{\mu}{h^2}$ tridiag $[-1 \; 2 \; -1; -1 \; 1]$ -> se nell'ultimo nodo

TEOREMA DI GERSCHGORIN

Matrice A quadrata di ordine n

Cerchi di Gerschgorin: $C_i = \{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i = \sum_{j \neq i, 1}^{n} |a_{ij}| \}$ $i = 1, \dots, n$

I cerchi hanno centro sull'asse reale nel punto di ascissa a_{ii}, e raggio uguale alla somma dei moduli degli elementi che stanno nella riga i, al di fuori della diag.

TEOREMA

Sia A una matrice reale quadrata di ordine n e siano C_i, $i = 1 \dots n$ i suoi cerchi di Gerschgorin. Allora:

1) Ogni autovalore λ di A sta nell'unione $C = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ dei cerchi di Gerschgorin
2) Se $C' = \bigcup_{k=1}^{m} C_{ik}$ è l'unione di m cerchi di Gerschgorin ed è disgiunta dall'unione dei rimanenti n−m cerchi (C' componente connessa di C -> ogni elemento non spezzato in un insieme spezzato), allora esattamente m autovalori di A stanno in C'.
3) Sia A irriducibile, cioè non esista nessuna permutazione di righe e colonne di A che la trasformi in una matrice diagonale a blocchi, con A_{11}, A_{22} matrici quadrate di ordine < n. Se un autovalore λ si trova sul bordo di C, allora λ appartiene a tutti i cerchi di Gerschgorin di A (i cerchi devono essere collegati)
   ↳ no uno dentro l'altro concentrici

Se un autovalore si trova sul bordo, o esso è incluso in tutti gli altri cerchi di Gerschgorin oppure non può essere autovalore della matrice

Matrice A della discretizz. mediante differenze finite, con μ costante, posso calcolare esplicitamente gli autovalori:

$$\lambda_{h,p} = \frac{2\mu}{h^2}\left(1 - \cos\left(p\frac{\pi h}{L}\right)\right) \qquad p = 1, \dots, N$$

$1 - \cos t \simeq \frac{1}{2}t^2$ se $t \to 0$ ottengo $\Rightarrow \lambda_{h,1} = \mu\frac{\pi^2}{L}$

$\cos(t) \to -1$ se $t \to \pi$

$\lambda_{h,N} = \frac{4\mu}{h^2}$

per $h \to 0$ o $N \to +\infty$

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{\lambda_{h,N}}{\lambda_{h,1}} \sim \frac{4L^2}{\pi^2 h^2}$$ $\to$ matrice via via più malcondizionata al diminuire del passo h

CONSISTENZA, STABILITÀ, CONVERGENZA

Problema discreto: $Au^e - f = r$

$$\|r\|_{2,m} \leq \frac{1}{12} h^2 \max_{x\in[a,L]}\left|\frac{d^4u}{dx^4}(x)\right| = \frac{1}{12}\frac{h^2}{\mu}\max_{x\in[0,L]}\left|\frac{d^2f}{dx^2}(x)\right|$$

$r \to 0$ se $h \to 0$ $\Rightarrow$ CONSISTENZA del metodo numerico

Sottraggo $Au^e - f = r$ e $Au - f = 0$ e ottengo $u^e - u = A^{-1}r$

$$\|u^e - u\|_{2,m} \leq \|A^{-1}\|_2 \|r\|_{2,m}$$

dove $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{h,1}} \leq C\frac{1}{\lambda_1}$

Ottengo infine: $\|u^e - u\|_{2,m} \leq Ch^2 \max_{x\in[a,L]}\left|\frac{d^2f}{dx^2}(x)\right|$ metodo numerico CONVERGENTE

Convergenza del secondo ordine in h.

FILO ELASTICO CON RICHIAMO

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) + \gamma u = f & \text{in } (0,L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{h^2}\left(-\mu_{j-1/2} u_{j-1} + (\mu_{j-1/2} + \mu_{j+1/2}) u_j - \mu_{j+1/2} u_{j+1}\right) + \gamma_j u_j = f_j$$

$$\gamma_j = \gamma(x_j)$$

$$A = A^{(\mu)} + A^{(\gamma)} \qquad A^{(\gamma)} = \mathrm{diag}\left((\gamma_j)_{1 \le j \le N}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 185 di 228

$a_{j,j} \rightarrow$ rietto $\frac{1}{h}\frac{1}{h}$
$a_{j,j-1} \rightarrow$ rietto $(-\frac{1}{h})\frac{1}{h}$
$a_{j,j+1} \rightarrow$ rietto $(-\frac{1}{h})\frac{1}{h}$

Se $\mu =$ cost e griglia equispaziata $a_{jk} = \frac{\mu}{h}\begin{cases} 2 & k=j \\ -1 & k=j\pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$A = \frac{\mu}{h}\,\text{tridiag}[-1\ \ 2\ \ -1]$$

Poiché $\frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}$ è nullo se $|j-k| \geq 2$

Termine noto:

$f_j = \int_0^L f\varphi_j\,dx = f(x_j)\,\frac{h_j + h_{j+1}}{2}$ (formula dei trapezi)

$A^{EF} = hA^{DF}$; $f^{EF} = h f^{DF}$ $\Rightarrow U^{EF} = U^{DF} \rightarrow$ i due metodi forniscono la stessa approssimazione dello spostamento u

- Matrice A definita positiva
- Numero di condizionamento

$\lambda_{h,min} \sim ch$, $\lambda_{h,max} \sim ch^{-1}$ $\quad cond_2(A) = \frac{\lambda_{h,max}}{\lambda_{h,min}} \sim ch^{-2}$

- Errore $\max_{x\in[0,L]} |u(x) - u_h(x)| \leq Ch^2 \max_{x\in[0,L]} \left|\frac{d^2u}{dx^2}(x)\right|$

- Condizioni al bordo di Dirichlet non omogenee

$u_0 = g_0 \qquad u_{N+1} = g_L$

Introduco il rilevamento del dato di Dirichlet $u = u_0 + u_0(L)\varphi_0(L)(x)$ è lo inserisco
dato al bordo di DR non omogeneo
soddisfa cond omogenee
nella formulaz. variaz. continua

Vengono modificate la prima e l'ultima componente del termine noto

$f_1 = f_1 - a_1 g_0$
$f_N = f_N - c_N g_L$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 187 di 228

$$b_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\gamma_{j-1/2} h_j + \gamma_{j+1/2} h_{j+1}\right) & k=j \\ \frac{1}{6}\left(\gamma_{j-1/2} h\right) & k=j-1 \\ \frac{1}{6}\left(\gamma_{j+1/2} h\right) & k=j+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$b_{jk} = \gamma h \begin{cases} 2/3 & k=j \\ 1/6 & k=j\pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad B = \gamma h \,\text{tridiag}\left[\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}\right]$$

Se si ha condizione al bordo di Neumann (o di Robin) si deve modificare l'ultima o la prima componente della matrice ($b_{1,1}$ o $b_{N,N}$ a seconda che sia nel primo o nell'ultimo nodo), che diventa $\frac{1}{3}h$

MEMBRANA ELASTICA

$$\begin{cases} -\nabla\cdot(\mu\cdot\nabla u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

(oppure $-\mu\Delta u$)

→ condizioni di Dirichlet omogenee

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ → laplaciano funzione u

DISCRETIZZAZIONE MEDIANTE DIFFERENZE FINITE

Supponiamo $\mu = \text{cost}$ in $\Omega = (0,L)\times(0,L)$

Passo di discretizzazione: $h = \frac{L}{N+1}$

Griglia equispaziata G_h in $\bar\Omega = [0,L]^2$ formata dai nodi (x_ℓ, y_m) con $x_\ell = \ell h$ e $y_m = mh$.

Nodi interni $1 \le \ell, m \le N$

$u_{\ell m} = 0$ se $\ell \in \{0, N+1\}$ oppure $m \in \{0, N+1\}$

$$A = \begin{pmatrix} D & C & & & & \\ C & D & C & & & \\ & C & D & C & & \\ & & C & D & C & \\ & & & C & D & C \\ & & & & C & D \end{pmatrix}$$

- Autovalori di A contenuti nell'intervallo $\left(0, 8\frac{\mu}{h^2}\right)$ → matrice simm. e def. positiva
- Num. di condiz. peggiora con il raffinamento della griglia
  $cond_2(A) \simeq Ch^{-2} \simeq CN^2$
- Lo schema ha convergenza quadratica
  $$\max_{0 \le e, m \le N} |U(x_e, y_m) - U_{em}| \le Ch^2 \max_{x \in \bar{\Omega}} \left(\left|\frac{\partial U^4}{\partial x^4}\right| + \left|\frac{\partial U^4}{\partial y^4}\right| \right)$$

DISCRETIZZAZIONE MEDIANTE ELEMENTI FINITI 2D

- Condizioni di Dirichlet omogenee

1) V insieme degli spostamenti ammissibili (spazio vettoriale)
Un elemento di V è una funzione definita in $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, che soddisfa opportune condizioni di continuità e derivabilità, e nulla su $\partial\Omega$

2)
$$\begin{cases} -\mu \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow -\int_\Omega \nabla \cdot (\mu \nabla u) v \, d\bar{x} = \int_\Omega f v$$

Moltiplico ambo i membri per uno spostamento amm ed integro su Ω

$\bar{x} = (x, y)$

3) Integro per parti il primo membro:
$$\int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\bar{x} - \cancel{\int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds}$$
$= 0$ → v si annulla su $\partial\Omega$

$\frac{\partial u}{\partial n}$ → derivata normale di u su $\partial\Omega$

4) Formulazione variazionale
$$\begin{cases} u \in V \text{ e soddisfa} \\ \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\bar{x} = \int_\Omega f v \quad \forall v \in V \end{cases}$$

Supponiamo che $\bar{\Omega}$ sia un poligono, suddividiamolo in un numero di triangoli non degeneri T che soddisfino la seguente condizione di ammissibilità:
l'intersezione di due triangoli distinti può soltanto essere
- un intero lato comune ai due triangoli
- un vertice comune ai triangoli
- l'insieme vuoto

} triangolaz. conforme $\mathcal{T}$

$h_T = diam(T) \rightarrow$ max distanza tra i suoi punti (lato maggiore)

$h = \max_{T \in \mathcal{T}} h_T \rightarrow$ misura finezza triangolaz.

$N_h = N_h^i + N_h^b$ ($i \rightarrow$ interni, $b \rightarrow$ bordo)

$$G = \begin{pmatrix} x_j - x_e & y_j - y_e \\ x_k - x_e & y_k - y_e \end{pmatrix}$$ $\bar{x}_j$ $\bar{x}_e$ $\bar{x}_k$ vertici triangolo

se $\det G \neq 0 \rightarrow$ triangolo non degenere

$area(T) = \frac{1}{2} |\det G|$

Dato un triangolo $T \in \mathcal{T}$, sia

$\mathbb{P}_1(T) = \{ p : T \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma \quad \text{con } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \}$

l'insieme dei polinomi algebrici di grado complessivo ≤ 1 definiti su T.

Spazio delle funzioni continue e polinomiali a pezzi sulla triangolazione

$V_h = \{ v_h : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v_h \text{ è continua e } v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \text{ per ogni } T \in \mathcal{T} \}$

Spazio degli spostamenti ammissibili discreti

$V_h = \{ v_h \in V_h : v_h = 0 \text{ su } \partial\Omega \}$

Matrice di rigidezza dell'elemento

$A^{(T)} = (a^{(T)}_{\alpha,\beta})_{1 \leq \alpha,\beta \leq 3} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$a^{(T)}_{\alpha,\beta} = \nabla\varphi_\beta \cdot \nabla\varphi_\alpha \int_T \mu d\bar{x}$

$\mu_T = \frac{1}{area(T)} \int_T \mu d\bar{x}$

$a^{(T)}_{\alpha,\beta} = \mu_T \, area(T) \nabla\varphi_\beta \cdot \nabla\varphi_\alpha$

Numerando i nodi del triangolo in senso ANTIORARIO:

$\varphi_{1,x} = \frac{y_2 - y_3}{2\,area(T)}$ $\quad \varphi_{1,y} = -\frac{x_2 - x_3}{2\,area(T)}$

$\varphi_{2,x} = \frac{y_3 - y_1}{2\,area(T)}$ $\quad \varphi_{2,y} = -\frac{x_3 - x_1}{2\,area(T)}$

$\varphi_{3,x} = \frac{y_1 - y_2}{2\,area(T)}$ $\quad \varphi_{3,y} = -\frac{x_1 - x_2}{2\,area(T)}$

Segni dei gradienti scambiati nel caso di numerazione in senso orario

$\nabla\varphi_1 + \nabla\varphi_2 + \nabla\varphi_3 = 0 \rightarrow$ la somma degli elementi su ogni riga di $A^{(T)}$ è $= 0$

Termine noto su un elemento

$f_j = \frac{1}{3} f(\bar{x}_j) \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}(j)} area(T)}_{\text{somma aree triang. che condividono il nodo}} = \frac{1}{3} f(x_j)\, area(supp\,\varphi_j)$ approssimazione dei trapezi

- Condizionamento della matrice di rigidezza: $cond_2(A) = c h_{min}^{-2}$

  $h_{min} = \min_{T \in \mathcal{T}} h_T$

- Comportamento dell'errore: $u - u_h = v$
  - $\|v\|_2 = \left(\int_\Omega v^2 d\bar{x}\right)^{1/2}$ norma quadratica
  - $\|v\|_E = \left(\int_\Omega \mu \|\nabla v\|^2 d\bar{x}\right)^{1/2}$ norma dell'energia
  - $\|v\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |v(\bar{x})|$ norma del massimo

$u_h \in V_h(g)$

$$u_h(\bar{x}) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k(\bar{x})}_{U_0} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{N_h} g_k \varphi_k(\bar{x})}_{R_g} \qquad g_k = g(\bar{x}_k)$$

Formulazione variazionale discreta → aggiungo pedice h

$v_h = \varphi_j$; sostituisco u_h e ottengo

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk} u_k = \int_\Omega f \varphi_j \, dx + \int_{\Gamma_N} \psi \varphi_j \, ds - \sum_{k=N+1}^{N_h} a_{jk} g_k \qquad \text{con } a_{jk} = \int_\Omega \mu \nabla\varphi_k \cdot \nabla\varphi_j \, d\bar{x}$$

- Condizione di Robin

$$\mu \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = \psi \quad \text{su } \Gamma_N$$

La condizione di Robin modifica l'espressione del termine di bordo:

$$\int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Gamma_N} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = \int_{\Gamma_N} (\psi - \alpha u) v \, ds = \int_{\Gamma_N} \psi v \, ds - \int_{\Gamma_N} \alpha u v \, ds$$

Formulazione variazionale discreta

$$\begin{cases} u_h \in V_h \text{ e soddisfa} \\ \int_\Omega \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\bar{x} + \int_{\Gamma_N} \alpha u v \, ds = \int_\Omega f v \, d\bar{x} + \int_{\Gamma_N} \psi v \, ds \end{cases} \quad \text{per ogni } v_h \in V_h(0)$$

Viene modificata la matrice di rigidezza A.

$$a_{jk} = \int_\Omega \mu \nabla\varphi_k \cdot \nabla\varphi_j \, d\bar{x} + \int_{\Gamma_N} \alpha \varphi_k \varphi_j \, ds$$

Poiché $\alpha \geq 0$, la matrice A risulta ancora simmetrica def. positiva

NUMERO DI PECLÈT LOCALE: $Pe_T = \frac{\|a_T\| h_T}{2\nu}$

NUMERO DI PECLÈT DI GRIGLIA: $Pe_h = \max_T Pe_T$

Diff. dominante se $Pe_h \leq 1$ → vanno bene EF e DF
Convez. dominante se $Pe_h > 1$ → possono essere instabili

PROBLEMI A DIFFUSIONE DOMINANTE

Discretizzazione mediante differenze finite
Il termine convettivo viene discretizzato con diff. centrate nelle direz. x e y

$$u'_{\ell m} + \frac{a_{1,\ell m}}{2h}(u_{\ell+1,m} - u_{\ell-1,m}) + \frac{a_{2,\ell m}}{2h}(u_{\ell,m+1} - u_{\ell,m-1}) +$$

$$+ \frac{\nu}{h^2}(-u_{\ell,m-1} - u_{\ell-1,m} + 4u_{\ell m} - u_{\ell+1,m} - u_{\ell,m+1}) = f_{\ell m}$$

Discretizzazione mediante elementi finiti

Formulaz. variaz. discreta → ho in più a primo membro il termine convettivo

$$\int_\Omega \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, dx + \underbrace{\int_\Omega (a \cdot \nabla u_h) v_h \, dx}_{c_{jk}} + \underbrace{\int_\Omega \nu \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\bar{x}}_{d_{jk}} = \int_\Omega f v \, d\bar{x}$$

$$Bu' + Au = f \quad \Rightarrow \quad A = C + D$$

↳ matrice di rigidezza o diffusione

$C = (c_{jk})$

Matrice $C^{(T)}$ dell'elemento $T \in \mathcal{T}$

$$C^{(T)}_{\alpha,\beta} = \int_T (\bar{a}_T \cdot \nabla\varphi_\beta)\varphi_j \, d\bar{x} = \bar{a}_T \cdot \nabla\varphi_\beta \underbrace{\int_T \varphi_j \, d\bar{x}}_{\text{volume tetraedro che ha come base l'area del triangolo e di altezza 1}} = \frac{1}{3}|T| \, \bar{a}_T \cdot \nabla\varphi_\beta \qquad 1 \leq \alpha, \beta \leq 3$$

MODELLI DI EVOLUZIONE TEMPORALE

Equaz. delle onde: $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla(\mu \nabla u) = f$

- condiz. al bordo su $\partial\Omega$ $\forall t$
- 2 condiz. iniziali su Ω a $t=0$

Equazione del calore: $\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla(\mu \nabla u) = f$ $\quad \mu = \frac{k}{c}$ e $f = \frac{\rho q}{c}$

- condiz. al bordo su $\partial\Omega$ $\forall t$
- 1 condiz. iniziale su Ω a $t=0$

$Bu' + Au = f \Rightarrow u' = -B^{-1}Au + B^{-1}f = F(u,t)$ $\quad 0<t\leq T$ calore $u(0)=u_0$

$Bu'' + Au = f \Rightarrow u'' = -B^{-1}Au + B^{-1}f = F(u,t)$ $\quad 0<t\leq T$ onde $\begin{cases} u(0)=u_0 \\ u'(0)=v_0 \end{cases}$

Semi-discretizzaz. in spazio dell'equaz. del calore mediante diff. finite

$\rho_{e,m} u'_{em} + \frac{\mu}{h^2}(-u_{e,m-1} - u_{e-1,m} + 4u_{em} - u_{e+1,m} - u_{e,m+1}) = f_{em}$

passo a numeraz. ad un indice

$B = \mathrm{diag}(\rho_1, \dots \rho_j, \dots \rho_{N^2})$ se $\rho = \mathrm{cost}$ $B = \rho I$

Semi-discretizz. in spazio mediante EF

Formulaz. variaz. discreta $\begin{cases} u_h(t) \in V_h \text{ e soddisfa} \\ \int_\Omega \rho \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, d\bar{x} + \int_\Omega \mu \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, d\bar{x} = \int_\Omega f v_h \, d\bar{x} \end{cases}$

$\int_\Omega \rho \frac{\partial u_h}{\partial t} v_h \, d\bar{x} = \sum_{k=1}^{N} u'_k \underbrace{\int_\Omega \rho \varphi_k \varphi_j \, d\bar{x}}_{b_{jk}}$

$b_{jk} \rightarrow$ matrice $B \rightarrow$ matrice di massa

Matrice di massa di un elemento

$b_{\alpha,\beta}^{(T)} = \begin{cases} 1/6 & \text{se } \alpha=\beta \\ 1/12 & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$