NUMERO: 1688A - ANNO: 2015

# A P P U N T I

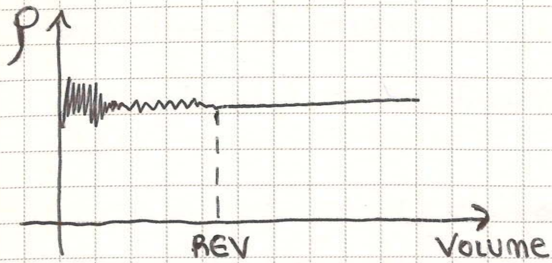
STUDENTE: Chezzi

MATERIA: Meccanica dei Fluidi +Eserc + Temi. Prof. Boano_Butera

# I FLUIDI

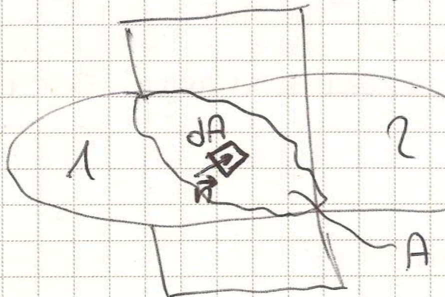
UN FLUIDO È UN CORPO MATERIALE CHE OPPONE POCA RESISTENZA ALLE VARIAZIONI DI FORMA. QUANDO LA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE È BASSA, LE FORZE CHE È NECESSARIO APPLICARE AL FLUIDO TENDONO AD ESSERE SEMPRE PIÙ PICCOLE.
I FLUIDI SI DIVIDONO IN LIQUIDI E GAS: IL LIQUIDO SI OPPONE ALLE VARIAZIONI DI VOLUME MENTRE IL GAS NON SI OPPONE CON LA STESSA RESISTENZA.

## REV: VOLUME RAPPRESENTATIVO ELEMENTARE ($\ll$ mm)




IL REV È IL VOLUME MINIMO PER POTER STUDIARE IL FLUIDO COME UN SISTEMA CONTINUO.

LE FORZE SI DISTINGUONO IN FORZE DI MASSA E DI SUPERFICIE.
LE FORZE DI MASSA AGISCONO SUL CORPO, SONO PROPORZIONALI ALLA MASSA E AGISCONO A DISTANZA (ES. GRAVITÀ).
LE FORZE DI SUPERFICIE, INVECE, SONO APPLICATE SUL CONTORNO.




BISOGNA APPLICARE UN SISTEMA DI FORZE $\vec{\Pi}$ EQUIVALENTE ALLE FORZE CHE 1 IMPRIMEVA SU 2.

$\frac{d\vec{\Pi}}{dA} = \vec{\phi}_n$ : SFORZO UNITARIO CHE AGISCE SULLA SUPERFICIE AVENTE $\vec{n}$ COME VERSORE NORMALE

$[N/m^2] = [Pa]$

SPINTA ELEMENTARE $\leftarrow d\vec{\Pi} = \vec{\phi}_n \, dA$

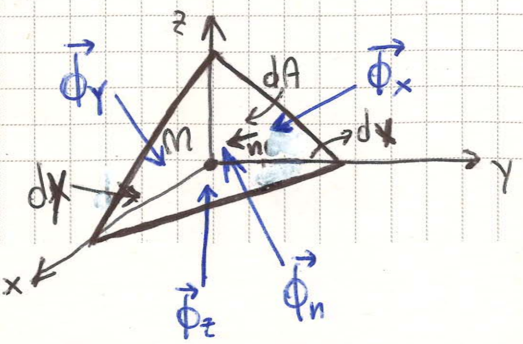
$\vec{\Pi} = \int d\vec{\Pi} = \int_A \vec{\phi}_n \, dA$ : SPINTA

$\vec{\phi}_n \longrightarrow$ COMPONENTE NORMALE $\begin{cases} \text{COMPRESSIONE} > 0 \\ \text{TRAZIONE} < 0 \end{cases}$ (IL FLUIDO NON SOPPORTA SFORZI DI TRAZIONE)

$\vec{\phi}_n = \vec{\phi}_n(M; \vec{n})$

M ↓ PUNTO DI APPLICAZIONE

$\vec{n}$ ↘ DISPOSIZIONE NELLO SPAZIO




LA PORZIONE DI FLUIDO È IN EQUILIBRIO ATTRAVERSO FORZE DI MASSA E DI SUPERFICIE

FORZE DI MASSA + FORZE DI SUPERFICIE = 0

$\vec{F} \cdot m_{\text{TETRAEDRO}}$ → $\rho \cdot V \sim 0^3$ ; FORZE DI SUPERFICIE → $\sim 0^2$

$\vec{F}$ ↓ FORZE DI MASSA PER UNITÀ DI MASSA

TRASCURABILI

• COMPRIMIBILITÀ: $\Delta W = -\frac{\Delta P \cdot W}{\varepsilon}$

$W$ → VOLUME INIZIALE $[m^3]$

$\Delta P$ → INCREMENTO DI PRESSIONE

$\varepsilon$ → MODULO DI ELASTICITÀ DI VOLUME (O MODULO DI ELASTICITÀ A COMPRESSIONE CUBICA)

$$\varepsilon_{H_2O} = 2 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

ES. $W = 1\,l$, $\Delta P = 10^5\,Pa$; $\Delta W = \frac{-10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3}\,m^3}{2 \cdot 10^9} = -0{,}5 \cdot 10^{-7}\,m^3 = -0{,}5 \cdot 10^{-1}\,cm^3 = -0{,}05\,cm^3$

PER QUESTO MOTIVO, IN MOLTE APPLICAZIONI, SI PUÒ CONSIDERARE L'ACQUA UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE.

$$M = \rho \cdot W,\ dM = 0 \rightarrow d\rho W + \rho dW = 0;\ \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dW}{W}$$

$$\Delta W = -\frac{\Delta P \cdot W}{\varepsilon};\ \frac{\Delta W}{W} = -\frac{\Delta P}{\varepsilon} \rightarrow \frac{dW}{W} = -\frac{dP}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{\varepsilon}}$$

## I GAS

• $PV = nRT$ (PER I GAS PERFETTI)

$$\frac{PV}{\frac{PESO}{V}} = \frac{nRT}{\frac{PESO}{V}}\ (PESO = m \cdot g);\quad \frac{P}{\gamma} = \frac{848 \cdot T}{\frac{m}{n}}\quad \frac{m}{n} \rightarrow PM \qquad 848 = \frac{R}{g}$$

• $PV^n = COSTANTE$ (TRASFORMAZIONE POLITROPICA)

$$\frac{PV^n}{\frac{PESO^n}{V^n}} = \frac{COST.}{PESO^n} \qquad \frac{P}{\gamma^n} = COSTANTE$$

$$\frac{dP}{\gamma^n} + \frac{P(-n)}{\gamma^{n+1}} d\gamma = 0;\quad \frac{dP}{P} - n\frac{\gamma^n}{\gamma^{n+1}} d\gamma = 0;\quad \frac{dP}{nP} = \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dP}{\varepsilon}$$

$$\boxed{\varepsilon = n \cdot P}$$

$P$ → PRESSIONE ASSOLUTA

$n$: 1 o 1,67

ISOTERMA ← 1

1,67 → TRASFORMAZIONE ADIABATICA PER GAS MONOATOMICI

PRESSIONE:

$1 \frac{N}{m^2} = 1\,Pa$

$1\,atm = 101330\,Pa$

$1\,atm_{TECNICA} = 1\,Kg_P/cm^2 = 9{,}806 \cdot \frac{N}{10^{-4}\,m^2} = 98060 \frac{N}{m^2}$

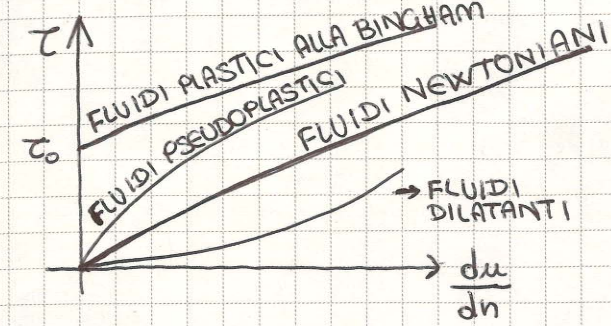
$1\,bar = 10^5 \frac{N}{m^2} = 100\,000 \frac{N}{m^2}$

$\tau = \mu \dfrac{du}{dn}$ ← LEGGE DI NEWTON    n: DIREZIONE $\perp$ A QUELLA DEL MOTO

$\dfrac{du}{dn} \neq 0 \Rightarrow$ NASCONO DELLE $\tau$ NELLA DIREZIONE DEL MOTO, CIOÈ C'È ATTRITO TRA LE PARTICELLE FLUIDE

$\left[\dfrac{du}{dn}\right] = \left[\dfrac{1}{T}\right]$ ← ESPRIME UNA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE ANGOLARE

I FLUIDI CHE SEGUONO QUESTA LEGGE CON UN VALORE DI COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ DINAMICA ($\mu$) COSTANTE PRENDONO IL NOME DI FLUIDI NEWTONIANI.




→ ES: ACQUA, OLIO, ARIA, GLICERINA... (LA PENDENZA DELLA RETTA È IL COEFFICIENTE DI VISCOSITÀ DINAMICA $\mu$).

I FLUIDI PLASTICI ALLA BINGHAM HANNO UN COMPORTAMENTO SIMILE AI FLUIDI NEWTONIANI: PER PICCOLE DEFORMAZIONI LO SFORZO DEVE SUPERARE UN VALORE DI SOGLIA $\tau_0$ IN MODO DA POTER AVERE DELLE DEFORMAZIONI ANGOLARI (ES. DENTIFRICIO).

I FLUIDI PSEUDOPLASTICI HANNO UNA TANGENTE ALLA CURVA NON COSTANTE, QUINDI LA VISCOSITÀ VARIA IN FUNZIONE DELLA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE E PER QUESTO SI PARLA DI VISCOSITÀ APPARENTE (LA VISCOSITÀ DIMINUISCE VERSO UN VALORE COSTANTE ALL'AUMENTARE DELLA VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE ANGOLARE) (ES. POLIMERI).

NEI FLUIDI DILATANTI SI HA IL COMPORTAMENTO OPPOSTO: LA VISCOSITÀ APPARENTE AUMENTA ALL'AUMENTARE DELLA VELOCITÀ DI DEFORMAZ. ANGOLARE

FLUIDI TIXOTROPICI: $\tau \downarrow$ SE $t \uparrow$

FLUIDI REOPECTICI: $\tau \uparrow$ SE $t \uparrow$

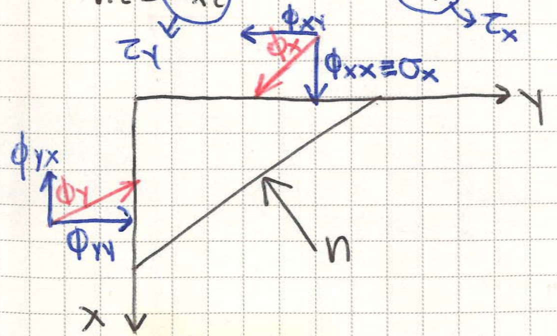
IL LORO COMPORTAMENTO NON DIPENDE DAL TEMPO

$$\vec{\phi}_n = \vec{\phi}_x \cos\widehat{nx} + \vec{\phi}_y \cos\widehat{ny} + \vec{\phi}_z \cos\widehat{nz}$$

$$\phi_{nx} = \phi_{xx} \cos\widehat{nx} + \phi_{yx} \cos\widehat{ny} + \phi_{zx} \cos\widehat{nz}$$

$$\phi_{ny} = \phi_{xy} \cos\widehat{nx} + \phi_{yy} \cos\widehat{ny} + \phi_{zy} \cos\widehat{nz}$$

$$\phi_{nz} = \phi_{xz} \cos\widehat{nx} + \phi_{yz} \cos\widehat{ny} + \phi_{zz} \cos\widehat{nz}$$




IL PEDICE DELLE $\tau$ È QUELLO TRA X, Y, Z CHE NON COMPARE NEI VARI SFORZI CON PEDICI NON UGUALI.

## FLUIDI IN QUIETE (IDROSTATICA)

$\vec{v} = 0 \rightarrow \tau = \mu \dfrac{du}{dn} = 0$

IN UN FLUIDO IN QUIETE SI HA ASSENZA DI SFORZI TANGENZIALI QUALUNQUE SIA LA SUA VISCOSITÀ.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 132

SE $\text{grad}\, U = 0 \Rightarrow \text{grad}\, p = 0$ LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI SONO ANCHE SUPERFICI DI EGUAL PRESSIONE CIOÈ ISOBARICHE.

INOLTRE, SICCOME LA DENSITÀ È FUNZIONE DELLA PRESSIONE E DELLA TEMPERATURA, A T COSTANTE UNA SUPERFICIE ISOBARICA SARÀ ANCHE UNA SUPERFICIE ISOCORA CIOÈ A EGUAL DENSITÀ.

SE LE FORZE DI MASSA SONO DOVUTE SOLO ALLA GRAVITÀ: $\vec{F} = -g\, \text{grad}\, z$

$$\vec{F} = -g\left(\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}}_{=0}\vec{i} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}}_{=0}\vec{j} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial z}}_{=1}\vec{k}\right) = -g\vec{k}$$

IN QUESTO CASO, LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI SONO QUELLE CHE HANNO Z COSTANTE CIOÈ I PIANI ORIZZONTALI.

EQUIPOTENZIALI $\Rightarrow z =$ COSTANTE $\Rightarrow p =$ COSTANTE

PER I FLUIDI PESANTI E INCOMPRIMIBILI L'EQUAZIONE INDEFINITA DELLA STATICA DIVENTA:

PESANTE: IL CAMPO DELLE FORZE DI MASSA È QUELLO DOVUTO UNICAMENTE ALLA GRAVITÀ

$$\rho(-g\, \text{grad}\, z) = \text{grad}\, p$$

$$-\gamma\, \text{grad}\, z = \text{grad}\, p$$

SE IL FLUIDO È INCOMPRIMIBILE $\gamma =$ COSTANTE $\rightarrow -\text{grad}\, z = \text{grad}\, \frac{p}{\gamma}$

$$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$$

INTEGRANDO SI HA: $\boxed{z + \frac{p}{\gamma} = \text{COSTANTE}}$ ← LEGGE DI STEVINO

LA LEGGE DI STEVINO ESPRIME, PER PUNTI APPARTENENTI ALLO STESSO FLUIDO, IL LEGAME TRA LA POSIZIONE DEI PUNTI E LA PRESSIONE.

$z$: QUOTA

$\frac{p}{\gamma}$: ALTEZZA PIEZOMETRICA (UNA PRESSIONE DIVISA PER UN PESO SPECIFICO È DIMENSIONALMENTE UNA LUNGHEZZA)

$z + \frac{p}{\gamma}$: QUOTA PIEZOMETRICA

OSSERVAZIONI SULLA LEGGE DI STEVINO

1) $z + \frac{p}{\gamma} =$ COSTANTE, SE $z =$ COSTANTE $\Rightarrow p =$ COSTANTE

2) $\vec{F} = -g\, \text{grad}\, z \Rightarrow$ BISOGNA SEMPRE UTILIZZARE L'ASSE Z RIVOLTO VERSO L'ALTO

$h_P$ $> 0 \Rightarrow z_P < z_{PCIR}$ (P STA SOTTO IL PCIR) $\rightarrow P_{REL} > 0$

$h_P$ $< 0 \Rightarrow z_P > z_{PCIR}$ (P STA SOPRA IL PCIR) $\rightarrow P_{REL} < 0$

$(P_P \geq -101330\ Pa)$

(LIMITE MAX DI QUANTO P PUÒ STARE SOPRA IL PCIR) $h_P \geq -\dfrac{101330\ Pa}{\gamma} \leftarrow \gamma h_P \geq -101330\ Pa$

QUANDO NEGATIVO: $|h_P| \leq \dfrac{101330\ Pa}{\gamma}$

NEL CASO DELL'ACQUA: $\gamma = 9806\ N/m^3 \Rightarrow h_P = 10{,}33\ m$

ESISTERÀ ANCHE UN PIANO DEI CARICHI IDROSTATICI ASSOLUTO DOVE $P_{ASS} = 0$.

$$z_N + \frac{P_N^*}{\gamma} = z_{PCIA} + \cancel{\frac{P^*_{PCIA}}{\gamma}}^{=0} \Rightarrow P_N^* = \gamma(z_{PCIA} - z_N) = \gamma \cdot h_N$$

$h_N$: AFFONDAMENTO DAL PCIA (NON PUÒ ESSERE NEGATIVO)

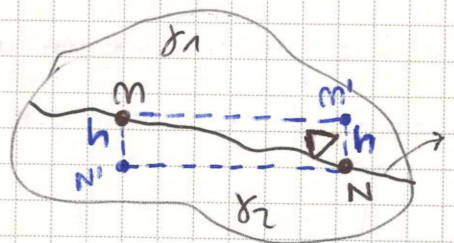
LA DISTANZA TRA IL PCIR E IL PCIA SI CALCOLA COME:

$$z_{PCIR} + \frac{\cancel{P_{PCIR}}^{0}}{\gamma} = z_{PCIA} + \frac{\cancel{P_{PCIA}}^{-101330\ Pa}}{\gamma}$$

$$z_{PCIA} - z_{PCIR} = \frac{101330}{\gamma}$$

SE ACQUA: 10,33 m

SE MERCURIO: 76 cm




$\gamma_1, \gamma_2$ FLUIDI NON MISCIBILI (ES. ACQUA E OLIO) (IN QUIETE E PESANTI)

SUPERFICIE DI SEPARAZIONE

$N \in \gamma_2$

$z_N = z_{N'} \Rightarrow P_N = P_{N'}$

$P_{N(\gamma_1)} \Rightarrow z_{m'} + \dfrac{P_{m'}}{\gamma_1} = z_N + \dfrac{P_N}{\gamma_1} \rightarrow P_N = P_{m'} + \gamma_1 (\underbrace{z_{m'} - z_N}_{h})$

$P_{N'(\gamma_2)} \Rightarrow m \in \gamma_2 \rightarrow z_m + \dfrac{P_m}{\gamma_2} = z_{N'} + \dfrac{P_{N'}}{\gamma_2} \rightarrow P_{N'} = P_m + \gamma_2 (\underbrace{z_m - z_{N'}}_{h})$

$P_m = P_{m'}$

$\gamma_1 \neq \gamma_2 \Rightarrow h = 0 \Rightarrow$ LA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE È ORIZZONTALE

IL FLUIDO MANOMETRICO RICEVE UNA PRESSIONE DA PARTE DEL FLUIDO NEL SERBATOIO MA ANCHE UNA DA PARTE DELL' AMBIENTE.
ALL' EQUILIBRIO SI AVRANNO 2 MENISCHI E LO STRUMENTO MISURERÀ LA LORO DISTANZA.

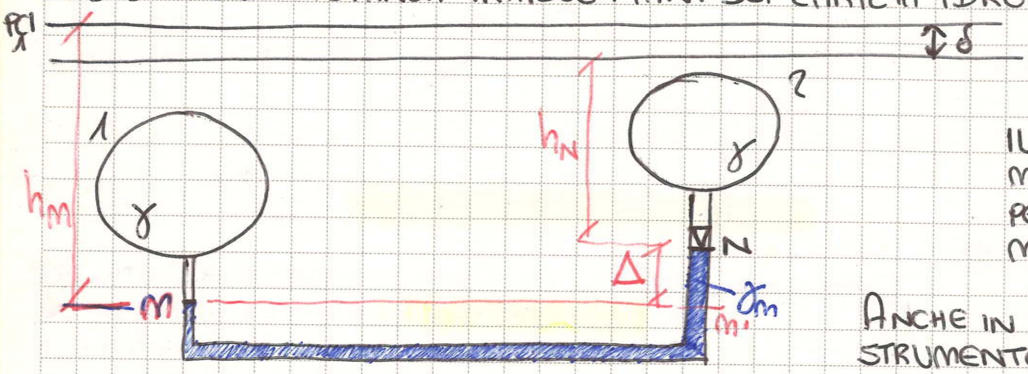
$$p_m = p_{m'}$$

$$z_0 + \frac{\overset{=0}{p_0}}{\gamma_m} = z_{m'} + \frac{p_{m'}}{\gamma_m} \rightarrow p_{m'} = \gamma_m (z_0 - z_{m'}) = \gamma_m \cdot \Delta$$

$$p_m \left(\overset{SE}{\in \gamma}\right) = \gamma \cdot h_m \rightarrow \text{AFFONDAMENTO DEL PUNTO } m \text{ DAL PCIR DI } \gamma$$

$$\gamma \cdot h_m = \gamma_m \cdot \Delta \rightarrow h_m = \frac{\gamma_m \cdot \Delta}{\gamma}$$

UN ALTRO STRUMENTO È IL **MANOMETRO DIFFERENZIALE**. ESSO NON PERMETTE DI POSIZIONARE I PCI MA, DATI DUE SERBATOI, PERMETTE DI CALCOLARE LA DISTANZA TRA I DUE PIANI DEI CARICHI IDROSTATICI.




IL FLUIDO MANOMETRICO HA PESO SPECIFICO MAGGIORE DI $\gamma$.

ANCHE IN QUESTO CASO LO STRUMENTO MISURA LA DISTANZA TRA I 2 MENISCHI.

$$p_1 > p_2 \Longrightarrow PCI_1 > PCI_2$$

m E m' HANNO LA STESSA PRESSIONE SE SI CONSIDERA $m \in \gamma_m$.
MA, PER AVERE LA STESSA PRESSIONE, IL PUNTO m' SI FA 'AIUTARE' DA UNA COLONNA DI FLUIDO PIÙ PESANTE DEL FLUIDO $\gamma$.
IL SERBATOIO 1 HA UN AFFONDAMENTO MAGGIORE E QUINDI $p_1 > p_2$.

$$p_m = p_{m'}$$

$$z_N + \frac{p_N}{\gamma_m} = z_{m'} + \frac{p_{m'}}{\gamma_m} \rightarrow p_{m'} = p_N + \gamma_m \underbrace{(z_N - z_{m'})}_{\Delta}$$

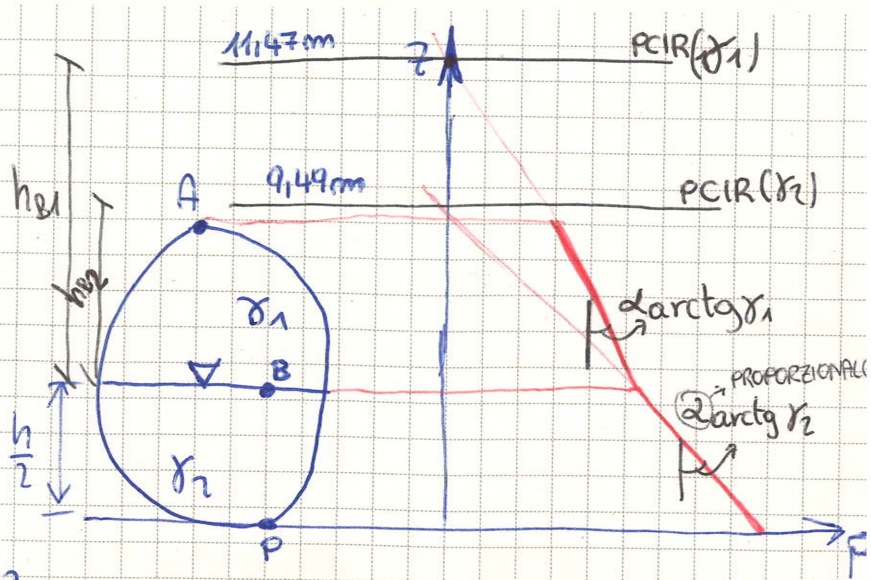
$$\gamma h_m = p_N + \gamma_m \cdot \Delta$$

$$p_N = \gamma \cdot h_N = \gamma \cdot (h_m - \delta - \Delta)$$

$$\gamma h_m = \gamma (h_m - \delta - \Delta) + \gamma_m \cdot \Delta$$

# ESERCITAZIONE 1

## Es. 1




$h_{TOT} = 4m$

$\gamma_1 = 9806\ N/m^3$

$\gamma_2 = 12395\ N/m^3$

$n_P = 1{,}2\ Kg_P/cm^2$

$P_A$?

QUOTE PCIR 1/2 ?

DIAGRAMMA DELLE PRESSIONI?

$$P_P = 1{,}2 \cdot \frac{9{,}806}{10^{-4}} = 117672\ Pa$$

$$z_P + \frac{P_P}{\gamma_2} = z_B + \frac{P_B}{\gamma_2}$$

$$P_B = P_P + \gamma_2 (z_P - z_B) = 117672 + 12395(-2) = 92882\ Pa$$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma_1} = z_B + \frac{P_B}{\gamma_1}$$

$$P_A = P_B + \gamma_1 (z_B - z_A) = 92882 + 9806(2-4) = 73270\ Pa$$

$$P_R = \gamma \cdot h = \gamma \cdot (z_{PCIR} - z_R) \rightarrow h = \frac{P_R}{\gamma}$$

$$P_P = \gamma_2 \cdot h_{P(2)} \rightarrow h_{P(2)} = z_{PCIR\,\gamma_2} - z_P = \frac{P_P}{\gamma_2} = \frac{117672}{12395} = 9{,}49\ m$$

$$P_A = \gamma_1 \cdot h_{A(1)} \rightarrow h_{A(1)} = z_{PCIR} - z_A = \frac{P_A}{\gamma_1} = \frac{73270}{9806} = 7{,}47\ m$$

$$z_{PCIR_2} - \cancel{z_P}^{\,0} = 9{,}49\ m$$

$$z_{PCIR_1} - \cancel{z_P}^{\,0} = (7{,}47 + 4) = 11{,}47\ m$$

PER 2 FLUIDI SOVRAPPOSTI, NON MISCIBILI ED IN CONDIZIONE DI QUIETE IL PCIR DEL FLUIDO CHE SI TROVA PIÙ IN BASSO STA SEMPRE PIÙ IN BASSO DEL PCIR DEL FLUIDO CHE SI TROVA PIÙ IN ALTO.

$d\vec{S} = p \cdot \vec{n}\, dA$

$\vec{S} = \int d\vec{S}$

SICCOME L'AREA A È CONTENUTA IN UN PIANO, IL VERSORE $\vec{n}$ IN OGNI PUNTO HA LA STESSA DIREZIONE QUINDI LE SPINTE ELEMENTARI $d\vec{S}$ SONO TRA DI LORO TUTTE PARALLELE.
QUESTO SIGNIFA CHE $\vec{S} \parallel \vec{n}$ E CHE $S = \int dS$.

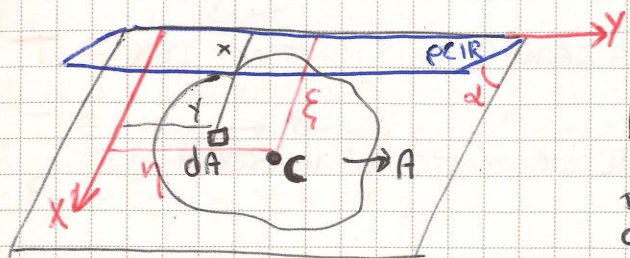
$$S = \int dS = \int_A p\, dA = \int \gamma \cdot \underbrace{h}_{z_{PCIR} - z} \cdot dA = \int \gamma \cdot x \,\mathrm{sen}\,\alpha\, dA = \gamma\, \mathrm{sen}\,\alpha \int x\, dA$$

PER DEFINIZIONE DI BARICENTRO, $x_G = \frac{\int x\, dA}{A}$. ALLORA, $A x_G = \int x\, dA$.

SOSTITUENDO NELLA FORMULA DELLA SPINTA SI HA: $S = \gamma \cdot \mathrm{sen}\,\alpha \cdot A \cdot x_G$.

$S = \gamma \cdot A \cdot h_G = p_G \cdot A$ ← LA SPINTA RISULTA ESSERE UGUALE ALLA PRESSIONE NEL BARICENTRO PER L'AREA DELLA SUPERFICIE.

RIMANE PERÒ DA TROVARE IL CENTRO DI SPINTA, OVVERO IL PUNTO IN CUI VIENE APPLICATA QUESTA SPINTA.




$C = (\xi ; \eta)$

LE COORDINATE DEL CENTRO DI SPINTA SONO MISURATE RISPETTO A UN SISTEMA DI RIFERIMENTO DOVE L'ASSE y COINCIDE CON LA LINEA DI SPONDA E L'ASSE x APPARTIENE ALLA SUPERFICIE INCLINATA ED È DIRETTO SECONDO LA DIREZIONE DI MASSIMA PENDENZA.

PER STUDIARE LA COORDINATA $\xi$ SI PUÒ DIRE CHE LA SPINTA MOLTIPLICATA PER $\xi$ DETERMINA UN MOMENTO DI ROTAZIONE INTORNO ALL' ASSE y CHE DEVE ESSERE UGUALE AL MOMENTO DATO DA TUTTE LE SPINTE ELEMENTARI.

$$S \cdot \xi = \int p\, dA \cdot x = \int \gamma \cdot h \cdot x\, dA = \int \gamma\, x\, \mathrm{sen}\,\alpha \cdot x\, dA = \gamma\, \mathrm{sen}\,\alpha \int_A x^2\, dA$$

$$\downarrow$$

$$\cancel{\gamma\, \mathrm{sen}\,\alpha}\, x_G \cdot A \cdot \xi = \cancel{\gamma\, \mathrm{sen}\,\alpha} \cdot \int_A x^2\, dA$$

$$\xi = \frac{\int_A x^2\, dA}{x_G \cdot A} = \frac{I}{M}$$

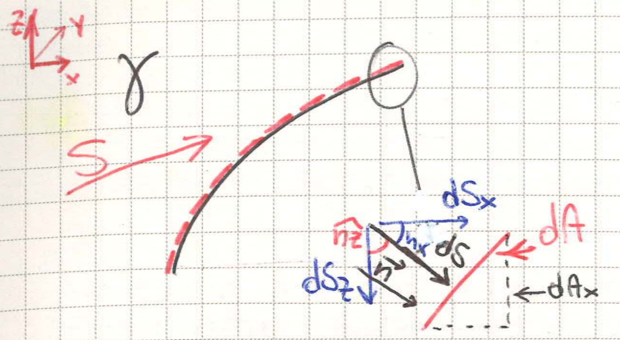
$I$ → MOMENTO D'INERZIA DI A FATTO RISPETTO ALLA LINEA DI SPONDA

$M$ → MOMENTO STATICO DI A FATTO RISPETTO ALLA LINEA DI SPONDA.

PER CALCOLARE $\eta$ SI PUÒ DIRE CHE IL MOMENTO DATO DALLA RISULTANTE APPLICATA IN C (CHE HA UN BRACCIO $\eta$ RISPETTO ALL' ASSE x) DEVE ESSERE UGUALE AL MOMENTO DATO DALLE SPINTE ELEMENTARI CHE SONO DISTRIBUITE SULLA FIGURA.

# SPINTE SU SUPERFICI CURVE

## - METODO DELLE COMPONENTI




SI PRENDE UN TRATTO DI SUPERFICIE CURVA SU CUI GRAVA UN FLUIDO DI PESO SPECIFICO $\gamma$ (IN QUIETE).
SI IMMAGINA CHE LA SUPERFICIE, CHE HA AREA A, SIA REALIZZATA DA TANTE SUPERFICI INFINITESIME PIANE.
SU OGNUNA DI QUESTE SUPERFICI AGISCE UNA SPINTA ELEMENTARE dS CHE È ORIENTATA SECONDO $\vec{n}$.

ESSA AVRÀ ~~DELLE~~ COMPONENTI LUNGO X, Y E Z:

$$dS_x = dS \cdot \cos\widehat{nx} \implies S_x = \int dS_x$$

$$dS_y = dS \cdot \cos\widehat{ny}$$

$$dS_z = dS \cdot \cos\widehat{nz}$$

$A_x, A_y, A_z$ SONO LE PROIEZIONI DI A LUNGO I 3 ASSI.

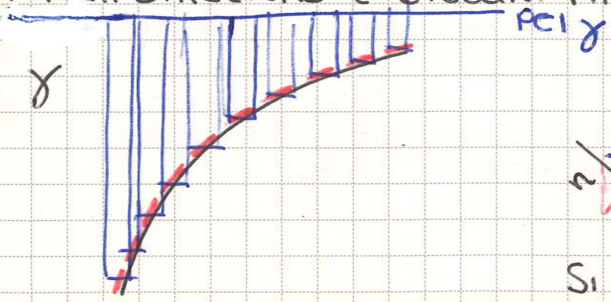
$$dS_x = \gamma \cdot h \cdot dA \cdot \cos\widehat{nx} = \gamma \cdot h \cdot dA_x$$

$$S_x = \int \gamma \cdot h \cdot dA_x = \gamma \cdot h_G \cdot A_x$$

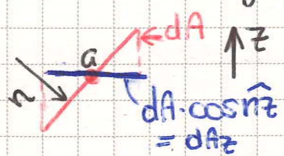
$h_G$: AFFONDAMENTO DEL BARICENTRO DELLA SUPERFICIE PROIETTATA

$$S_y = \int dS_y = \int \gamma \cdot h \cdot dA_y = \gamma \cdot h_G \cdot A_y$$

PER LA DIREZIONE Z BISOGNA FARE UN ALTRO RAGIONAMENTO:




$$dS_z = \gamma \cdot h \cdot dA \cdot \cos\widehat{nz}$$




$$dS_z = \gamma \cdot h \cdot dA_z$$

SI CALCOLA $dA_z$ PER TUTTE LE SUPERFICI INFINITESIME dA, POI SU OGNUNA DI QUESTE SI COSTRUISCE UN CILINDRO DI BASE $dA_z$ E ALTEZZA h DEL PUNTO.

$\gamma \cdot dA_z$ È UN VOLUME CHE DESCRIVE IL VOLUME DI FLUIDO COMPRESO TRA LA SUPERFICIE INFINITESIMA E IL PCI.

$$S_z = \int dS_z = \int \gamma \cdot h \cdot dA_z = \gamma \cdot \int h \, dA_z = \gamma \cdot W$$

$W$ → VOLUME DI FLUIDO COMPRESO TRA LA SUPERFICIE CURVA E IL PCI.

$$\vec{S}_{FLUIDO} \rightarrow AB = -\vec{S}_{AB} \rightarrow FLUIDO$$

SI PUÒ ISOLARE UN VOLUME DI FLUIDO DOVE PARTE DELLA SUA SUPERFICIE DI CONTORNO COINCIDE CON LA SUPERFICIE CURVA AB E CONSIDERARE L'EQUILIBRIO DI QUESTA PORZIONE DI FLUIDO.

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = 0 \quad ; \quad \vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_0 = 0$$

$$\vec{S}_{FLUIDO} \rightarrow AB = -\vec{\Pi}_0$$

$$-\vec{\Pi}_0 = \vec{G} + \vec{\Pi}_1$$

$$|\vec{\Pi}_1| = A_{ABC} \cdot p_{G_{ABC}}$$

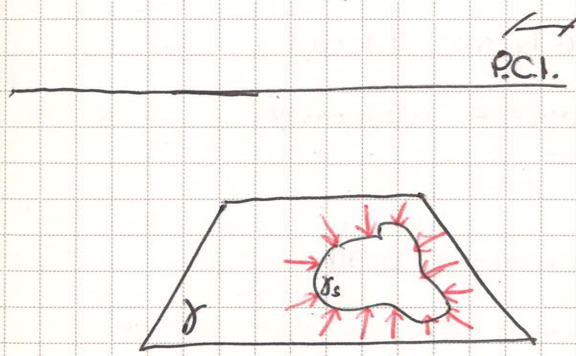
SE SI VUOLE CALCOLARE LA SPINTA CHE IL FLUIDO IMPARTISCE SULLA SUPERFICIE CURVA DE SI PUÒ CHIUDERE OPPORTUNAMENTE E RIEMPIRE IL VOLUME $W_2$ CON LO STESSO FLUIDO $\gamma$ CHE SI TROVA NEL RECIPIENTE E CHE HA LO STESSO PCI.

$$\vec{S}_{FLUIDO} \rightarrow DE = \vec{S}_{FLUIDO} \rightarrow W_2 = \vec{\Pi}_2$$

$$\vec{G}_1 + \vec{\Pi} = 0 \; ; \; \vec{G}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_3 = 0$$

$$\vec{\Pi}_2 = -\vec{G}_1 - \vec{\Pi}_3 = +\gamma W_2 \vec{k} - \vec{\Pi}_3$$

$$|\vec{\Pi}_3| = A_{DEF} \cdot p_{G_{DEF}}$$




QUALE SPINTA RICEVE IL SOLIDO $\gamma_s$ DA PARTE DEL FLUIDO $\gamma$ QUANDO SI TROVA IN QUELLA POSIZIONE?

LE SPINTE ELEMENTARI ESERCITATE DAL FLUIDO SULLA SUPERFICIE DEL SOLIDO NON DIPENDONO DAL FATTO CHE CI SIA UN SOLIDO MA DIPENDONO SOLO DALL'AFFONDAMENTO DEI PUNTI.
QUINDI SI PUÒ SOSTITUIRE IL SOLIDO CON DEL FLUIDO DI PESO SPECIFICO $\gamma$ AVENTE STESSO PCI E ISOLARE UN VOLUME DI FLUIDO AVENTE ESATTAMENTE LO STESSO CONTORNO DEL SOLIDO IN ESAME.


A QUESTO VOLUME DI FLUIDO SI PUÒ APPLICARE L'EQUAZIONE GLOBALE DELL'EQUILIBRIO IN CONDIZIONI STATICHE.

$$\vec{G} + \vec{\Pi} = 0$$

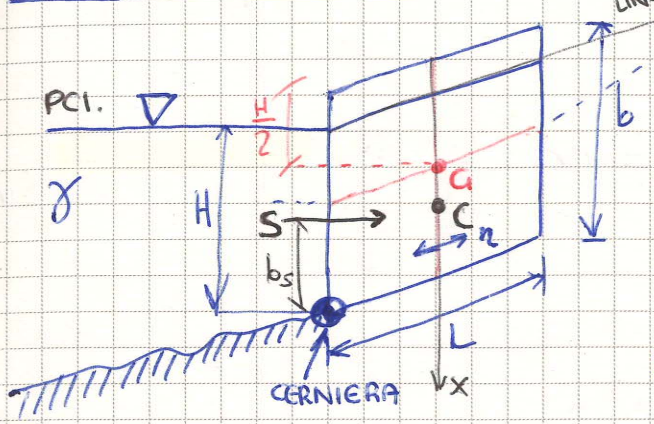
$$\vec{\Pi} = -\vec{G} = -(\gamma \cdot W \cdot \vec{k}) = \underbrace{\gamma W \cdot \vec{k}}_{ARCHIMEDE}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\sigma \cdot e \cdot L = \Pi_0 \\ |\Pi_0| = p \cdot D \cdot L \end{array}\right\} \Rightarrow 2\sigma \cdot e \cdot \cancel{L} = p \cdot D \cdot \cancel{L} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{p \cdot D}{2 \cdot e}} \leftarrow \text{FORMULA DI MARIOTTE}$$

L'IPOTESI ALLA BASE È CHE IL PESO DEL FLUIDO SIA TRASCURABILE.

## ESERCITAZIONE 2

### Es. 1: PARATOIA PIANA




$b = 4m$

$L = 10\,m$

$H = 3\,m$

$\gamma = 9806\ \frac{N}{m^3}$

$|\vec{S}| = ?$

$C_{SPINTA} = ?$

MOMENTO RISPETTO ALLA CERNIERA?

(hp: ACQUA A MONTE RAGGIUNGE h RISPETTO ALLA BASE)

$$S = p_G \cdot A$$

$$S = H \cdot L \cdot \gamma \cdot \frac{H}{2} = 9806 \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 10 = 441\,270\ N$$

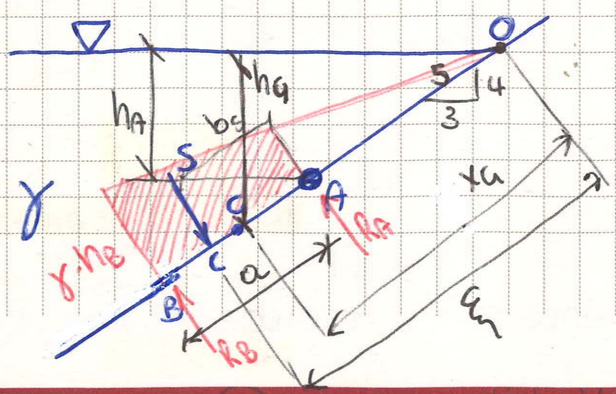
$$\eta = \frac{I_{xy}}{M} = 0$$

$$\xi = \frac{I}{M} = \frac{I_G}{M} + x_G = \frac{\frac{1}{12} L H^3}{A \cdot x_G} + x_G = \frac{\frac{1}{12} L H^3}{LH \cdot \frac{H}{2}} + x_G = \overset{\frac{H}{2}}{x_G} + \frac{1}{6}H = \frac{2}{3}H = 2m$$

$$C = (2m, 0)$$

MOMENTO RISPETTO ALLA CERNIERA $= S \cdot b_S = 441\,270\ N \cdot 1\,m = 441\,270\ Nm$

### Es. 2




$a = 4m$

$h_A = 2m$

$\gamma = 9806\ N/m^3$

$R_B$ ?

MOMENTO PER APRIRE LA PARATOIA ?

DIAGRAMMA PRESSIONI ?

A) $S \cdot b_S - R_B \cdot b_{R_B} = 0$

$$R_B = \frac{S \cdot b_S}{b_{R_B} = a}$$

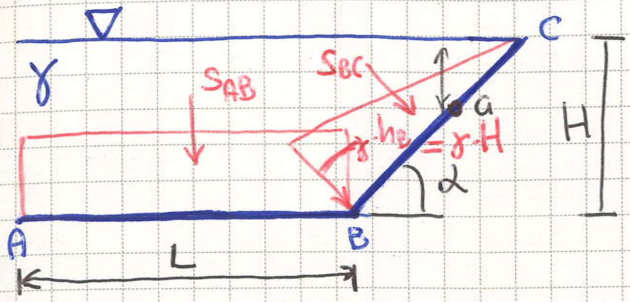
② $P_2 = P_1 - \gamma \cdot \Delta h$

$P_1 = \dfrac{F_1}{A_1}$

$P_2 = \dfrac{P_{AUTO}}{A_2}$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{P_{AUTO}}{A_2} + \gamma \cdot \Delta h \longrightarrow F_1 = \frac{P_{AUTO}}{A_2} \cdot A_1 + \gamma \cdot \Delta h \cdot A_1$$
$$= 50 + (9806 \cdot 0{,}87) \cdot 2 \cdot 10^{-4}$$
$$= 51{,}7 \text{ N}$$

## Es. 4: SBARRAMENTO




- PERFETTA TENUTA IN A, CIOÈ L'ACQUA NON SI PUÒ INFILTRARE SOTTO E DETERMINARE DELLE SPINTE VERSO L'ALTO
- FLUIDO FINO ALLA QUOTA H, CIOÈ AL LIVELLO MASSIMO DELLO SBARRAMENTO

a) QUAL È LA MINIMA LUNGHEZZA L AFFINCHÈ, SOTTO L'AZIONE DEL FLUIDO γ, L'ELEMENTO NON SI RIBALTI ?

b) DEFINITA L, PER QUALE VALORE DI α È MINIMA?

L'ELEMENTO RISCHIA DI RIBALTARSI RUOTANDO INTORNO AL PUNTO B. ALLORA:

a) $B)\ S_{AB} \cdot b_{S_{AB}} - S_{BC} \cdot b_{S_{BC}} = 0$ ← LUNGHEZZA MINIMA

$$\begin{cases} S_{AB} = \gamma \cdot h_{G_{AB}} \cdot A_{AB} = \gamma \cdot H \cdot L \cdot 1 \\ b_{S_{AB}} = \dfrac{L}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_{BC} = \gamma \cdot h_{G_{CB}} \cdot A_{CB} = \gamma \cdot \dfrac{H}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{H}{\operatorname{sen}\alpha} \\ b_{S_{BC}} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{H}{\operatorname{sen}\alpha} \end{cases}$$

IL CENTRO DI SPINTA SI TROVA A 1/3 DALLA BASE

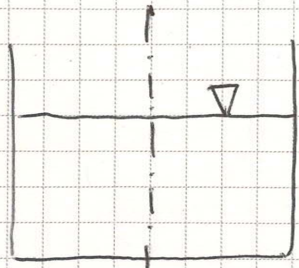
$$(\cancel{\gamma} \cdot H \cdot L \cdot 1) \cdot \left(\frac{L}{\cancel{2}}\right) - \left(\cancel{\gamma} \cdot \frac{H}{\cancel{2}} \cdot 1 \cdot \frac{H}{\operatorname{sen}\alpha}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} \frac{H}{\operatorname{sen}\alpha}\right) = 0$$

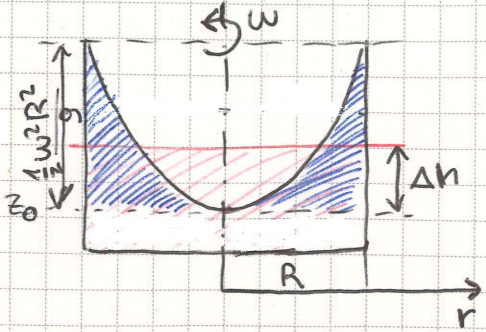
$$L^2 - \frac{H^2}{3\operatorname{sen}^2\alpha} = 0 \Longrightarrow L = \frac{H}{\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\alpha}$$

b) BISOGNA MASSIMIZZARE IL DENOMINATORE $\Longrightarrow \alpha = 90° \Longrightarrow L_{min} = \dfrac{H}{\sqrt{3}}$

$$\text{grad}\, z + \text{grad}\,\frac{u}{g} = -\,\text{grad}\,\frac{p}{\gamma} \xrightarrow{\int} z + \frac{u}{g} = -\frac{p}{\gamma} + c \quad (*)$$

CASO: CILINDRO






UN CONTENITORE CILINDRICO INIZIALMENTE FERMO VIENE MESSO IN ROTAZIONE CON VELOCITÀ ANGOLARE ω.

$A = -\omega^2 r$ ← '−' PERCHÈ ACCELERAZIONE CENTRIPETA DIRETTA VERSO L'INTERNO

$$u = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + c$$

SOSTITUENDO IN (*) SI HA:

$$z - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g} + c = -\frac{p}{\gamma} + \text{COST.}$$

$$z - \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g} = -\frac{p}{\gamma} + c_1$$

SULLA SUPERFICIE LIBERA DEL FLUIDO $p=0 \Rightarrow z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r^2}{g} + z_0$

LA QUOTA MASSIMA CHE RAGGIUNGE IL FLUIDO VALE: $z_{max} = z_0 + \frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^2}{g}$

L'ALTEZZA DEL PARABOLOIDE VALE $z_{max} - z_0 = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^2}{g}$

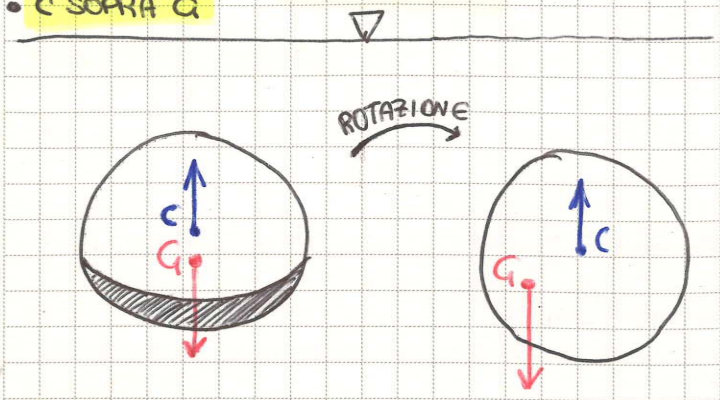
IN CONDIZIONI DI QUIETE, IL VOLUME DI FLUIDO IN BLU OCCUPA INVECE IL VOLUME DI UN CILINDRO CHE SI DISPORRÀ A UNA CERTA QUOTA.
SICCOME IL VOLUME DEL PARABOLOIDE È LA METÀ DEL VOLUME DEL CILINDRO AD ESSO CIRCOSCRITTO, ALLORA IL VOLUME DI FLUIDO IN BLU VALE

$$\underbrace{\pi R^2}_{\text{BASE DEL CILINDRO}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\omega^2 R^2}{g}}_{\text{ALTEZZA DEL CILINDRO}} \cdot \frac{1}{2} = \pi R^2 \cdot \underbrace{\Delta h}_{\text{ALTEZZA DEL CILINDRO QUANDO IL FLUIDO È IN QUIETE (ROSSO)}}$$

$$\Delta h = \frac{1}{4}\frac{\omega^2 R^2}{g}$$

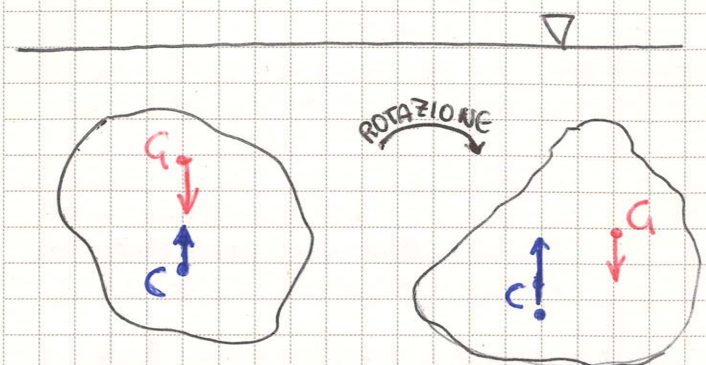
## CASO: CENTRO DI SPINTA ≠ BARICENTRO

• C SOPRA G



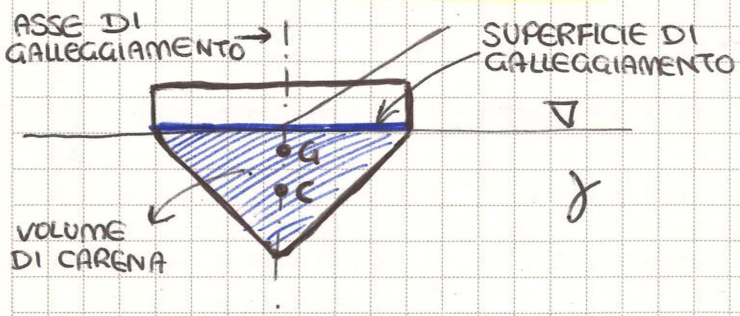

FACENDO RUOTARE IL CORPO, IL CENTRO DI SPINTA RIMANE NELLO STESSO PUNTO MA IL BARICENTRO SI È SPOSTATO. ALLORA, SUL CORPO AGISCE UNA COPPIA DI FORZE CHE GENERA UNA ROTAZIONE OPPOSTA E RIPORTA IL CORPO NELLE CONDIZIONI DELL'EQUILIBRIO PRECEDENTE.

• C SOTTO G



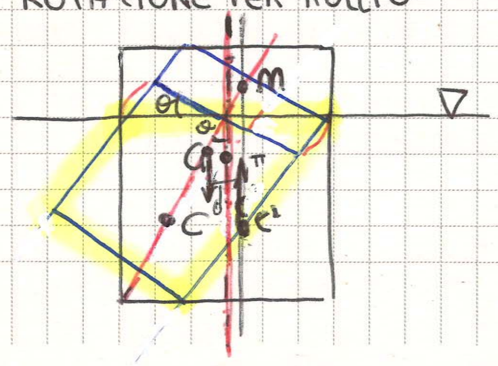

SE VIENE APPLICATA UNA ROTAZIONE NASCE UNA COPPIA DESTABILIZZANTE PERCHÈ ESSA FORNISCE UN'ULTERIORE ROTAZIONE CHE INCREMENTA LA ROTAZIONE.

## STABILITÀ DEI GALLEGGIANTI




SE IL GALLEGGIANTE RUOTA INTORNO AD UN ASSE TRASVERSALE SI HA UN MOTO DI BECCHEGGIO.
SE RUOTA INTORNO A UN ASSE LONGITUDINALE SI HA UN MOTO DI ROLLIO.
PER LA STABILITÀ I MOTI DI ROLLIO SONO PIÙ PERICOLOSI

- ROTAZIONE PER ROLLIO




PICCOLE ROTAZIONI ⇒ IL VOLUME CHE SI IMMERGE È UGUALE AL VOLUME CHE EMERGE

$$M = \pi \cdot d$$

LA RETTA SU CUI AGISCE LA SPINTA DATA DAL FLUIDO INCONTRA L'ASSE DI GALLEGGIAMENTO IN UN PUNTO.
SE QUESTO PUNTO SI TROVA AL DI SOPRA DEL BARICENTRO LA COPPIA È STABILIZZANTE

LA VELOCITÀ DI RITORNO DELLA BARCA È PROPORZIONALE AL MOMENTO CHE SI GENERA E QUINDI ALLA DISTANZA d TRA LE 2 FORZE.
PER DISTANZE METACENTRICHE ELEVATE SI HANNO RITORNI VELOCI (UTILI PER IMBARCAZIONI SPORTIVE) $\underbrace{\text{ELEVATE}}_{(\cong 90\ cm \div 1{,}5\ m)}$
LE NAVI PER PASSEGGERI O MERCANTILI HANNO DISTANZE METACENTRICHE PIÙ BASSE.

# $\boxed{\text{CINEMATICA}}$

PERMETTE DI DESCRIVERE IL MOTO DEL FLUIDO.

$x \quad u = \dfrac{dx}{dt}$

$y \quad v = dy/dt$

$z \quad w = dz/dt$

IL CAMPO DI MOTO È NOTO QUANDO SI HA NOTO IL VALORE DI $\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t)$ IN TUTTI I PUNTI DEL CAMPO MA ANCHE IN TUTTI I TEMPI DI INTERESSE

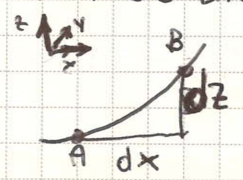
$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z,t) \rightarrow \left.\begin{array}{l} u = u(x,y,z,t) \\ v = v(x,y,z,t) \\ z = z(x,y,z,t) \end{array}\right\} \text{APPROCCIO EULERIANO}$$

APPROCCIO LAGRANGIANO: PERDE DI VISTA IL CAMPO DI MOTO NEL SUO COMPLESSO MA SI FOCALIZZA SULLA STORIA DI UNA PARTICELLA FLUIDA E NE VALUTA IL PERCORSO, I TEMPI DI PERCORRENZA, LE ACCELERAZIONI...

APPROCCIO EULERIANO

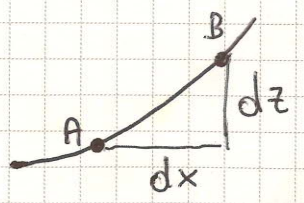
ACCELERAZIONE IN UN PUNTO : $A_x = \dfrac{\partial u}{\partial t}$

APPROCCIO LAGRANGIANO




ACCELERAZIONE TOTALE = ACCELERAZ. LOCALE $\dfrac{\partial \vec{u}}{dt}$ + ACCELERAZIONE CONVETTIVA $\dfrac{V_A \rightarrow V_B}{dt}$

## ACCELERAZIONE CONVETTIVA



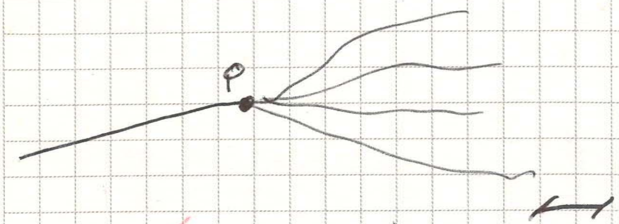

$$u_B = u_A + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

ACCELERAZIONE CONVETTIVA LUNGO x DELLA PARTICELLA CHE NEL TEMPO dt PASSA DA A A B $= \dfrac{u_B - u_a}{dt} =$

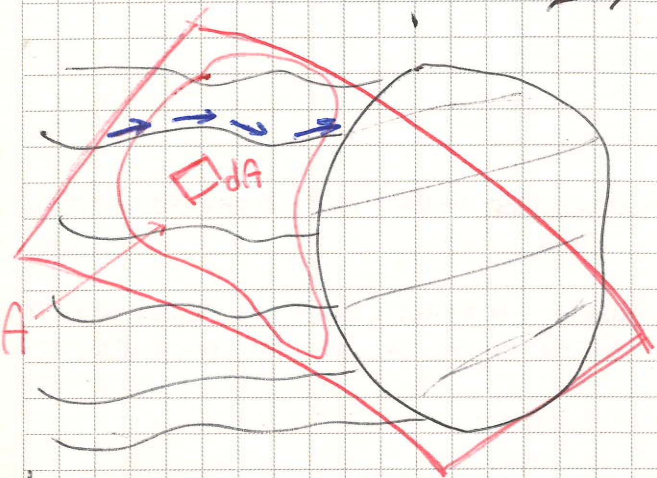
$$= \frac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} + \frac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w}$$

## LINEE DI FUMO

LA LINEA DI FUMO È IL LUOGO DEI PUNTI OCCUPATI DA TUTTE LE PARTICELLE CHE SONO PASSATE PER UNO STESSO PUNTO.




TRAIETTORIE, LINEE DI FLUSSO E LINEE DI FUMO COINCIDONO SOLO SE IL MOTO È STAZIONARIO.

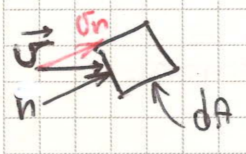



SI CONSIDERI UNA LINEA CHIUSA. UN TUBO DI FLUSSO È UNA SUPERFICIE IMMAGINARIA CHE SI REALIZZA CONSIDERANDO TUTTE LE LINEE DI FLUSSO CHE PASSANO DA QUESTA LINEA CHIUSA.

SE IL VETTORE VELOCITÀ NON CAMBIA NEL TEMPO IL TUBO DI FLUSSO RIMANE SEMPRE LO STESSO, ALTRIMENTI ASSUMERÀ CONTORNI DIVERSI.

IL TUBO DI FLUSSO, PER IL FATTO DI ESSERE TANGENTE IN OGNI PUNTO AL VETTORE VELOCITÀ, NON È ATTRAVERSATO DA FLUIDO.

SE SI PRENDE UNA SUPERFICIE IN MODO DA TAGLIARE IL TUBO DI FLUSSO SI OTTERRÀ UNA SUPERFICIE A CHE È ATTRAVERSATA DA FLUSSO.




SI DEFINISCE PORTATA ELEMENTARE $dQ = \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA = v_n\, dA$.

ESSA ESPRIME IL VOLUME DI FLUIDO CHE PASSA NELL'UNITÀ DI TEMPO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE dA.

$$Q = \int dQ = \int_A v_n\, dA$$

$v_n$ PUÒ CAMBIARE DA PUNTO A PUNTO SPOSTANDOSI LUNGO A.

LA PORTATA Q ESPRIME IL VOLUME DI FLUIDO CHE NELL'UNITÀ DI TEMPO PASSA ATTRAVERSO LA SUPERFICIE A.
DI SOLITO È ESPRESSA IN $m^3/s$ O A VOLTE IN $l/s$.

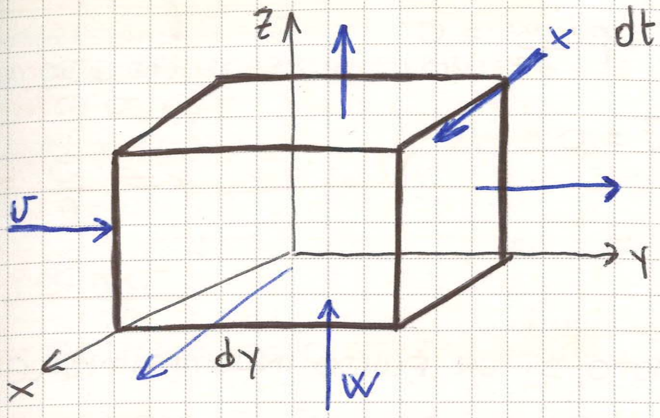
$v_n > 0$ : FLUIDO ENTRANTE

$v_n < 0$ : FLUIDO USCENTE

SE A È LA SEZIONE TRASVERSALE, CIOÈ IN OGNI PUNTO $A \perp \vec{v}$, ALLORA $Q = \int_A v\, dA$ PERCHÈ $v_n = v$.

$[\rho\, dQ\, dt] = \left[\frac{m}{L^3} \cdot \frac{L^3}{T} \cdot T\right]$ MASSA CHE ATTRAVERSA $dA$ NEL TEMPO $dt$

- EQ. IN FORMA LOCALE (O INDEFINITA)




- IL VOLUME È FERMO ED È ATTRAVERSATO DA UN FLUIDO
- IL FLUIDO È SEDE DI UN CAMPO DI MOTO:

$u // x$
$v // y$
$w // z$

MASSA ENTRANTE — MASSA USCENTE

y) $\cancel{\rho v\, dx dz dt} - \left(\cancel{\rho v} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dx dz dt$

z) $\cancel{\rho w\, dx dy dt} - \left(\cancel{\rho w} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz\right) dx dy dt$

x) $\cancel{\rho u\, dy dz dt} - \left(\cancel{\rho u} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dy dz dt$

$$(*)\quad M_{IN}^{dt} - M_{OUT}^{dt} = -\frac{\partial \rho v}{\partial y} dy dx dz dt - \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz dx dy dt - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz dt = \Delta M_{INT.}^{dt}$$

(**)

MASSA INIZIALE $= \rho\, dx dy dz$

VARIAZIONE DI MASSA NELL' UNITÀ DI TEMPO $= \frac{\partial(\rho\, dx dy dz)}{\partial t}$

IL VOLUME DI CONTROLLO NON CAMBIA

VARIAZIONE DI MASSA AVVENUTA IN $dt$ $(\Delta M_{INT}^{(dt)})$ $= \frac{\partial(\rho\, dx dy dz)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$

RIMETTENDO INSIEME (*) E (**) SI HA:

$$-\frac{\partial \rho u}{\partial x} \cancel{dx dy dz dt} - \frac{\partial \rho v}{\partial y} \cancel{dy dx dz dt} - \frac{\partial \rho w}{\partial z} \cancel{dz dx dy dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \cancel{dx dy dz dt}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0} \longleftrightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0}$$

$\int_A \rho v_n \, dA \, dt$ È GIÀ LA DIFFERENZA TRA MASSA ENTRANTE E MASSA USCENTE.

$$\boxed{\int_A \rho v_n \, dA \, dt = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dt \, dW} = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \rho \, dW$$

SE FLUIDI INCOMPRIMIBILI:

$$\int_A \rho v_n \, dA \, dt = \int_W \cancelto{0}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \, dt \, dW$$

$$\cancel{\rho} \int_A v_n \, dA \, \cancel{dt} = 0 \qquad \leftarrow \rho = \text{COSTANTE}$$

$$A = A_e + A_o + A_u$$

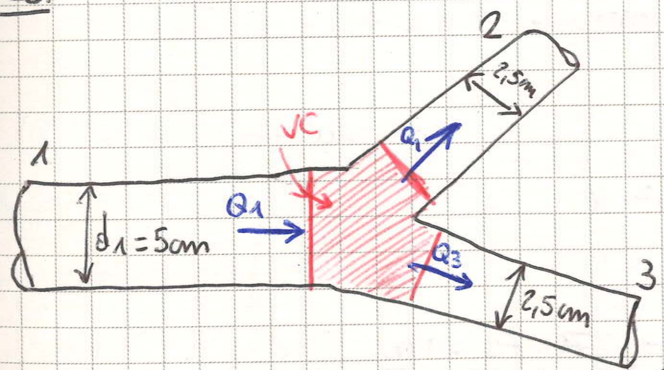
e = FLUSSO ENTRANTE
o = FLUSSO NULLO
u = FLUSSO USCENTE

$$\int_A v_n \, dA = \underbrace{\int_{A_e} v_n \, dA}_{Q_e} + \cancelto{0}{\int_{A_o} v_n \, dA} + \underbrace{\int_{A_u} v_n \, dA}_{\underset{<0}{Q_u}} = 0$$

$$Q_e - |Q_u| = 0$$

$$Q_e = Q_u$$

Es.




$Q_1 = 0{,}015 \ m^3/s$

$v_2 = 12{,}19 \ m/s$

$v_3$ ?

hp: • MOTO STAZIONARIO
• FLUIDO INCOMPRIMIBILE

IL FATTO CHE UNA ~~CONDOTTA~~ SI DIVIDE IN 2 CONDOTTE CON DIAMETRO UGUALE NON È CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER DIRE CHE LA PORTATA SI DIVIDE IN MANIERA UGUALE TRA LE 2 CONDOTTE.

$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

$$Q_1 = V_2 \cdot A_2 + v_3 \cdot A_3$$

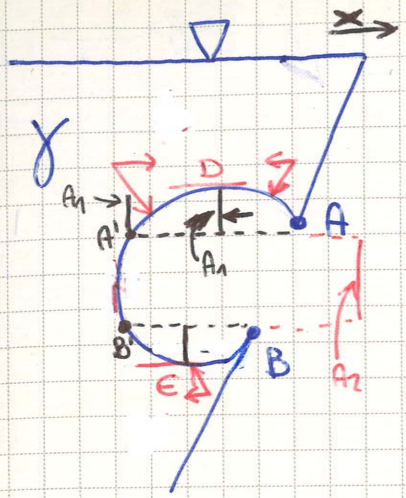
$$v_3 = \frac{Q_1 - v_2 A_2}{A_3} = \frac{0{,}015 - 12{,}19 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}025^2}{4}}{\frac{\pi \cdot 0{,}025^2}{4}} = 18{,}38 \ m/s$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 132

# ESERCITAZIONE 3

**Es1:** CALCOLARE LA SPINTA SULLA SUPERFICIE CURVA A-B UTILIZZANDO IL METODO DELLE COMPONENTI.




$$//x \quad -S_{AD_x}+S_{DE_x}-S_{EB_x}=S_x$$

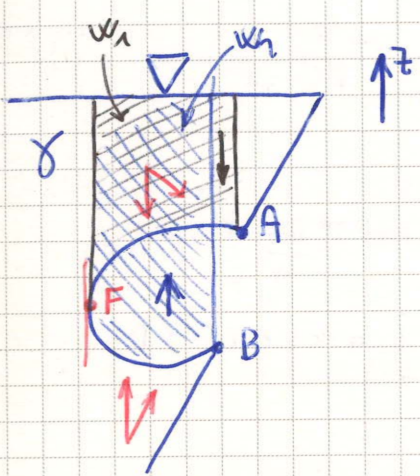
OPPURE

$$S_{AA'_x}=S_{AD_x}+S_{DA'_x}=-\gamma\cdot h_{G_x}A_1+\gamma\cdot h_{G_x}\cdot A_1=0$$

$$S_{BB'_x}=0$$

QUINDI, IN TOTALE LA COMPONENTE LUNGO x DELLA SPINTA È SEMPLICEMENTE LA SPINTA CHE SI OTTIENE SU $A_2$, OVVERO LA PROIEZIONE DI A'B' IN DIREZIONE x:

$$S_x=\gamma\cdot h_{G_{A_2}}\cdot A_2$$

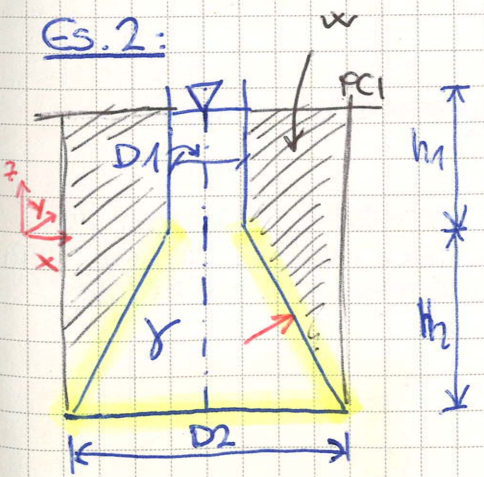



$$S_z=-\gamma\cdot W_1+\underbrace{\gamma\cdot W_2}=\gamma\,(W_2-W_1)$$

SPINTA VERTICALE DEL FLUIDO COMPRESO TRA F E B

IL VOLUME COMUNE A $W_1$ E $W_2$ NON DÀ CONTRIBUTO.

**Es.2:**




$D_1 = 1\ m$

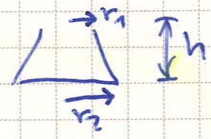
$D_2 = 4\ m$

$h_1 = 2\ m$

$h_2 = 6\ m$

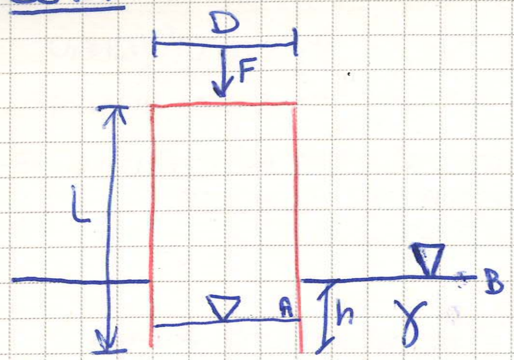
$\gamma = 9806\ N/m^3$

VOLUME TRONCO DI CONO $=\frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$




MODULO E DIREZIONE DELLA SPINTA SULLA SUPERFICIE TRONCOCONICA?

Es. 4




$D = 2\,m$

$L = 8\,m$

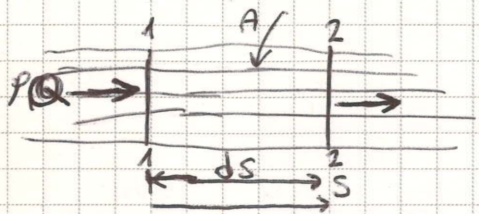
$F = 98060\,N$

DI QUANTO SI IMMERGE IL BICCHIERE?

L'ARIA SEGUE LA LEGGE DEI GAS PERFETTI E QUINDI HA UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMA.

## EQUAZIONE DI CONTINUITÀ APPLICATA ALLE CORRENTI

UNA CORRENTE È IL MOTO DI UN FLUIDO DOVE LE TRAIETTORIE HANNO TUTTE LA STESSA DIREZIONE (ES. FLUIDO IN UNA TUBAZIONE).




MENTRE IL TUBO DI FLUSSO È IN OGNI PUNTO TANGENTE AL VETTORE VELOCITÀ LA CORRENTE NON LO È (ES. UN FIUME CHE AUMENTA IL SUO LIVELLO HA UNA COMPONENTE VERTICALE VERSO L'ALTO).

LE CORRENTI VENGONO DESCRITTE TRAMITE LA LORO ASCISSA CURVILINEA S E CI SI RIFERISCE ALLE GRANDEZZE NELLE SEZIONI TRASVERSALI.

MASSA TRA 1 E 2: $A\,ds \cdot \rho$

VARIAZIONE DI MASSA INTERNA NEL TEMPO dt: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho A ds)dt = \frac{\partial \rho A}{\partial t} ds dt$

MASSA ENTRANTE NEL TEMPO dt: $\rho Q dt$

MASSA USCENTE NEL TEMPO dt: $\left(\rho Q + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds\right) dt$

$$\cancel{\rho Q} dt - \left(\cancel{\rho Q} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} ds\right) dt = 0$$

$$-\frac{\partial \rho Q}{\partial s} \cancel{ds dt} = \frac{\partial (\rho A)}{\partial t} \cancel{ds dt}$$

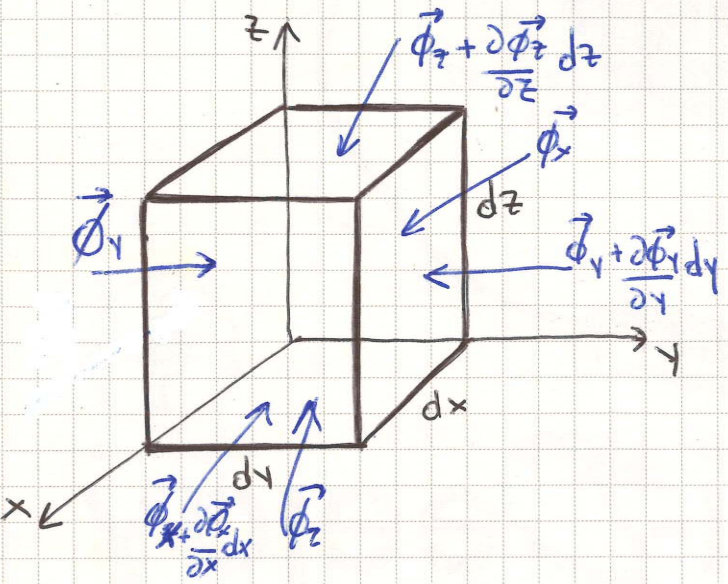
$$\boxed{\frac{\partial \rho Q}{\partial s} + \frac{\partial \rho A}{\partial t} = 0}$$

# EQUAZIONE INDEFINITA DELL'EQUILIBRIO IN CONDIZIONI DINAMICHE (FORMA LOCALE)

$d\vec{R} = dm \cdot \vec{A}$ ← SISTEMA DI FORZE INFINITESIMO CHE AGISCE SULLA PARTICELLA

→ FORZE DI MASSA $\vec{F}$

→ FORZE DI SUPERFICIE $\vec{\phi}$




LA PARTICELLA È UN PARALLELEPIPEDO DI LATI $dx, dy, dz$

$dm = \rho\, dx\, dy\, dz$

F DI MASSA $= \vec{F} \rho\, dx\, dy\, dz$

FORZE DI SUPERFICIE:

$$\vec{\phi}_y\, dx\, dz - \left(\vec{\phi}_y + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} dy\right) dx\, dz = -\frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} dy\, dx\, dz \qquad \text{(FACCE} \perp \text{ASSE } y\text{)}$$

$$\vec{\phi}_z\, dx\, dy - \left(\vec{\phi}_z + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} dz\right) dx\, dy = -\frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z} dz\, dx\, dy \qquad \text{(FACCE} \perp \text{ASSE } z\text{)}$$

$$\vec{\phi}_x\, dy\, dz - \left(\vec{\phi}_x + \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz = -\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} dx\, dy\, dz \qquad \text{(FACCE} \perp \text{ASSE } x\text{)}$$

$$\rho \vec{F} \cancel{dx\, dy\, dz} + \cancel{dx\, dy\, dz} \left(-\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} - \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} - \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z}\right) = \rho \cancel{dx\, dy\, dz} \cdot \vec{A}$$

$$\boxed{\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z}}$$

CONSIDERAZIONI:

1. SE $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{A} = 0$ E $\vec{\phi}_x = p\vec{i}$, $\vec{\phi}_y = p\vec{j}$, $\vec{\phi}_z = p\vec{k}$

$\rho \vec{F} = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} = \text{grad}\, p$ È LA STESSA DI QUELLA IN CONDIZIONI STATICHE

$$\int_W \left(\frac{\partial \vec{\phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\phi}_z}{\partial z}\right) dW = -\int_A \left(\vec{\phi}_x \cos\widehat{nx} + \vec{\phi}_y \cos\widehat{ny} + \vec{\phi}_z \cos\widehat{nz}\right) dA =$$

$$= -\int_A \vec{\phi}_n \, dA = -\vec{\Pi}_{\sigma+\tau}$$

$$-\int_W \rho \, d\vec{A} \, dW = -\int_W \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right] dW \overset{\text{EQ. DI CONTINUITÀ}}{=}$$

$$= -\int_W \left(\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \vec{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{v}}{\partial z}\right) dW =$$

$$= -\int_W \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dW - \int_W \left(\frac{\partial \rho u \vec{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{v}}{\partial z}\right) dW$$

SI CONSIDERANO SEPARATAMENTE I 2 INTEGRALI:

$$-\int_W \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} dW \overset{W \text{ NON DIPENDE DA } t}{=} \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\int_W \rho \vec{v} \, dW}_{} = \vec{I}$$

RAPPRESENTA LA DIMINUZIONE DI QUANTITÀ DI MOTO NELL'UNITÀ DI TEMPO ALL'INTERNO DEL VOLUME CONSIDERATO. SI DICE ANCHE CHE È IL TERMINE DOVUTO ALLE INERZIE LOCALI PERCHÈ DIPENDE DALLE VARIAZIONI TEMPORALI DI DENSITÀ E VELOCITÀ.

SE $\rho$ = COSTANTE E MOTO PERMANENTE $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0\right) \Rightarrow \vec{I} = 0$

L'ALTRO INTEGRALE ERA:

$$-\int_W \left(\frac{\partial \rho u \vec{v}}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \vec{v}}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \vec{v}}{\partial z}\right) dW \overset{\text{NORMALE ENTRANTE POSITIVA}}{=} +\int_A \rho \vec{v} \, \underbrace{(u\cos\widehat{nx} + v\cos\widehat{ny} + w\cos\widehat{nz})}_{v_N} dA$$

$$= \int_A \rho \vec{v} \cdot v_n \, dA$$

$v_N$: COMPONENTE NORMALE DELLA VELOCITÀ

RIMETTENDO INSIEME TUTTI I PEZZI SI HA:

$$\vec{G} + \vec{I} + \int_A \rho \vec{v} \cdot v_N \, dA + \vec{\Pi} = 0$$

$v_n \, dA$: VOLUME CHE NELL'UNITÀ DI TEMPO PASSA ATTRAVERSO LA SUPERFICIE $dA$ $(L^3/T)$

$\rho v_N dA : \left[\frac{M}{\cancel{L^3}} \cdot \frac{\cancel{L^3}}{T}\right]$: MASSA CHE NELL'UNITÀ DI TEMPO PASSA ATTRAVERSO LA SUPERFICIE INFINITESIMA $dA$

$\rho v_N dA \cdot \vec{v} : \left[\frac{M}{T} \cdot \frac{L}{T}\right]$: ESPRIME LA QUANTITÀ DI MOTO DELLA MASSA CHE NELL'UNITÀ DI TEMPO PASSA ATTRAVERSO $dA$ (È UN FLUSSO DI QUANTITÀ DI MOTO)

$$\vec{\Pi}_0 + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$-\vec{\Pi}_0 = \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

SPESSORE PIASTRA UNITARIO

$$S_x = -\Pi_{0x} = M_{ex} - M_{ux} = \beta \rho v^2 \cdot a \cdot 1 - (\beta \rho v^2 \cdot a \cdot 1) \cdot \cos\alpha =$$

$$= \beta \rho v^2 \cdot a \cdot 1 (1 - \cos\alpha)$$

$$S_y = M_{ey} - M_{uy} = 0 - \beta \rho v^2 \cdot a \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = \beta \rho v^2 \cdot a \cdot 1 \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha} =$$

$$= \beta \cdot \rho \cdot v^2 \cdot a \cdot 1 \sqrt{1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} = \beta \cdot \rho \cdot v^2 \cdot a \cdot 1 \sqrt{2(1-\cos\alpha)}$$

A PARITÀ DI SEZIONE E VELOCITÀ DI ARRIVO LA SPINTA CHE IL FLUIDO IMPARTISCE ALLA PIASTRA SI MASSIMIZZA PER $\alpha = 180°$.

$$S_{MAX} = \beta \cdot \rho \cdot v^2 \cdot a \cdot 1 \sqrt{2 \cdot 2}$$ ⟹ IL GETTO TORNA INDIETRO

## $\boxed{\text{SCHEDA 2}}$

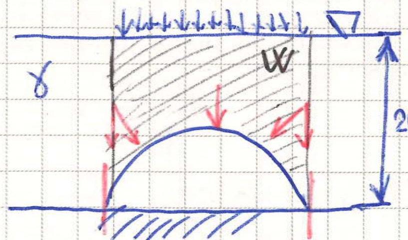
**Es. 1:** UNA MONGOLFIERA HA RAGGIO 5 m. L'ARIA AL SUO INTERNO VIENE RISCALDATA IN MODO CHE LA SUA DENSITÀ SIA INFERIORE DEL 40% DI QUELLA ESTERNA, CONSIDERATA IN CONDIZIONI STANDARD. QUANTE PERSONE, ORIENTATIVAMENTE, PUÒ SOLLEVARE? (1 PERS. = 80 kg)

$\downarrow G_{PERSONE}$ $\downarrow G_{FLUIDO\ MONG.}$ = SPINTA ARIA ESTERNA

$$\text{SPINTA ARIA ESTERNA} = \cancel{g} \cdot \rho_{ARIA} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = n \cdot m \cdot \cancel{g} + \cancel{g}\, \rho_{ARIA\ INT} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$(1{,}2 - \underbrace{0{,}6 \cdot 1{,}2}_{\rho\ ARIA\ INTERNA}) \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = n \cdot 80 \implies n = 3{,}14 \implies 3 \text{ PERSONE}$$

**Es. 2:** UNA CUPOLA EMISFERICA DEL RAGGIO DI 5 m VIENE CEMENTATA SUL FONDO DEL MARE A 20 m DI PROFONDITÀ. LA RISULTANTE DELLE FORZE IDROSTATICHE AGENTI SU DI ESSA VALE CIRCA?




CEMENTATA ⟹ NON CI SONO INFILTRAZIONI DI ACQUA SOTTO CHE POTREBBERO DARE SPINTA VERSO L'ALTO

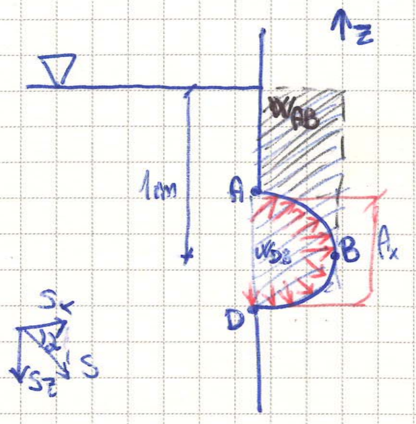
$$S_V = \gamma \cdot W = \gamma\left(\pi R^2 \cdot h - \frac{2}{3}\pi R^3\right) =$$

$$= 9806\left[\pi \cdot 5^2 \cdot 20 - \frac{2}{3}\pi \cdot 5^3\right] =$$

$$= 12\,800\,000 \text{ N}$$ ← MANCA LA PRESSIONE DELL'ARIA

$$S_V = 12\,800\,000 + (101\,330 \cdot \pi \cdot 5^2) = 20\,790\,000 \text{ N}$$

**Es. 9:** SU UNA PARETE VERTICALE DI UN RECIPIENTE C'È UNA PROTUBERANZA SEMISFERICA DI DIAMETRO 0,8 m. SE IL SUO CENTRO È 1 m SOTTO IL PCI, L'INCLINAZIONE SULL'ORIZZONTALE DELLA SPINTA CHE LA CALOTTA RICEVE DAL LIQUIDO È?



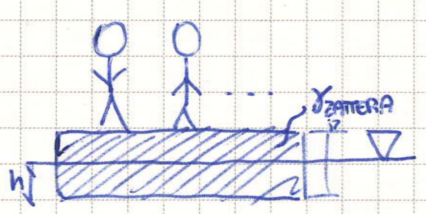

$$S_x = \gamma \cdot h_G \cdot A_x = \gamma \cdot 1 \cdot \pi R^2$$

$$S_z = \gamma \cdot W_{AB} - \gamma W_{DB} = \gamma \underbrace{(W_{AB} - W_{DB})}_{V_{SEMISFERA}} =$$

$$= -\gamma \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\cancel{\gamma} \frac{2}{3} \cancel{\pi R^3}}{\cancel{\gamma} \cdot 1 \cdot \cancel{\pi R^2}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} R \simeq 15°$$

**Es. 10:** UNA ZATTERA FLUVIALE È SCHEMATIZZATA COME UN PARALLELEPIPEDO DI BASE 3m × 5m E ALTEZZA 30 cm. SE ESSA È COSTITUITA DI MATERIALE DI P.S. 7000 N/m³, QUANTE PERSONE POSSONO SALIRVI PRIMA CHE AFFONDI PER TUTTA L'ALTEZZA?




$$n_{PERSONE} \cdot m \cdot g + \gamma_{ZATT} \cdot V_{ZATT} = \gamma_{H_2O} \cdot V_{ZATT}$$

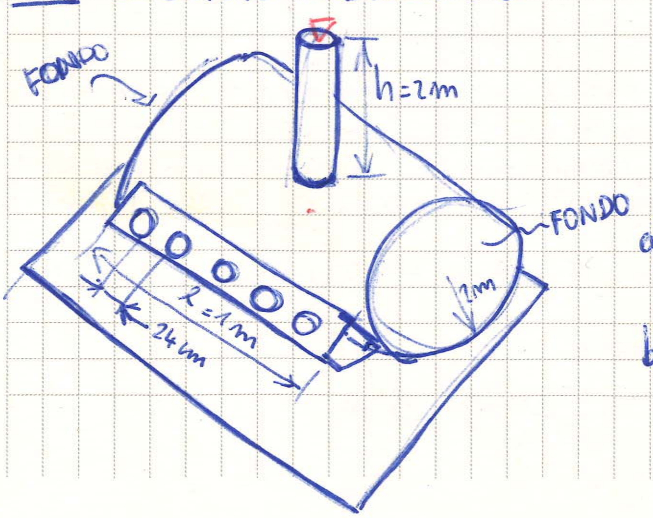
$$n_{PERSONE} = \frac{\gamma_{H_2O} \cdot V_{ZATT} - \gamma_{ZATT} \cdot V_{ZATT}}{m \cdot g} =$$

$$= \frac{9806\,(3 \cdot 5 \cdot 0{,}3) - 7000\,(3 \cdot 5 \cdot 0{,}3)}{80 \cdot 9{,}81}$$

$\simeq$ 16 PERSONE

## ESERCITAZIONE 4

**Es:** SERBATOIO IMBULLONATO




$\gamma = 9806$ N/m³

$l = 1$ m

PESO GUSCIO = 4,5 KN

a) CALCOLARE LA SOLLECITAZIONE NEI BULLONI TRASCURANDO IL CONTRIBUTO DEI 2 FONDI.

b) CALCOLARE LA SPINTA ORTOGONALE AI 2 FONDI.

$$\begin{cases} p_A \cdot \dfrac{\pi D^2}{4} = 98060 \text{ N} \\ \gamma \cdot h = p_A + \gamma (L - x) \\ 101330\, L = x (p_A + 101330) \end{cases}$$

$$p_A = \frac{98060}{\pi \cdot \frac{2^2}{4}} = 31213 \text{ Pa}$$

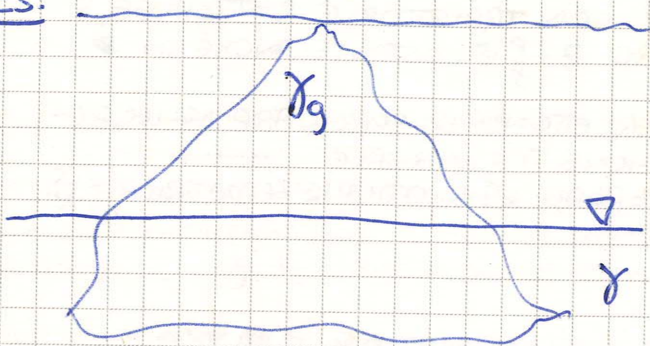
$$x = \frac{101330 \cdot 8}{101330 + 31213} = 6{,}12 \text{ m}$$

$$9806 \cdot h = 31213 + 9806\,(8 - 6{,}12)$$

$$h = \frac{31213 + 9806\,(8 - 6{,}12)}{9806} = 5{,}06 \text{ m}$$

(PROBABILE ESERCIZIO ESAME!)

Es.




$\gamma > \gamma_g$

FRAZIONE DI ICEBERG CHE EMERGE, NOTI I PESI SPECIFICI DEI 2 FLUIDI?

## TEOREMA DI BERNOULLI

hp:
- FLUIDO IDEALE ($\tau = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$), $\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad}\, p$
- $\vec{F} = -g\, \text{grad}\, z$
- FLUIDO INCOMPRIMIBILE ($\gamma = \text{cost.}$)

$$\rho(-g\, \text{grad}\, z - \vec{A}) = \text{grad}\, p$$

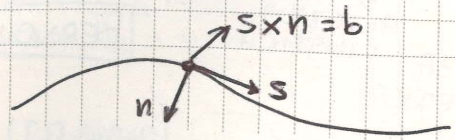
$$-\gamma\, \text{grad}\, z - \rho \vec{A} = \text{grad}\, p$$

$$-\text{grad}\, z - \underbrace{\frac{\rho}{\gamma}}_{\frac{1}{g}} \vec{A} = \frac{\text{grad}\, p}{\gamma}$$

$$-\frac{\vec{A}}{g} = \text{grad}\, z + \text{grad}\, \frac{p}{\gamma}$$ ← $\gamma$ ENTRA NEL GRADIENTE PERCHÈ È COSTANTE

$$\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{\vec{A}}{g}$$

ANZICHÈ UTILIZZARE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO SI UTILIZZA UNO SOLIDALE CON LA PARTICELLA (TERNA INTRINSECA):

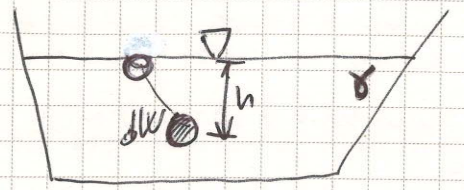



S: ASSE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA
n: ASSE DIRETTO VERSO IL CENTRO DI CURVATURA
b: ASSE BINORMALE

H ESPRIME L'ENERGIA MECCANICA DELL'UNITÀ DI PESO DEL FLUIDO ED È DATA DALLA SOMMA DI 3 ENERGIE POSSEDUTE DAL FLUIDO:

- UN'ENERGIA POTENZIALE DOVUTA AL FATTO CHE LA PARTICELLA SI TROVA AD UNA QUOTA $z$;
- UN'ENERGIA DI PRESSIONE $\left(\frac{p}{\gamma}\right)$
- UN'ENERGIA CINETICA $\left(\frac{V^2}{2g}\right)$

PER CAPIRE IL SIGNIFICATO DI ENERGIA DI PRESSIONE SI UTILIZZA IL SEGUENTE CONCETTO:

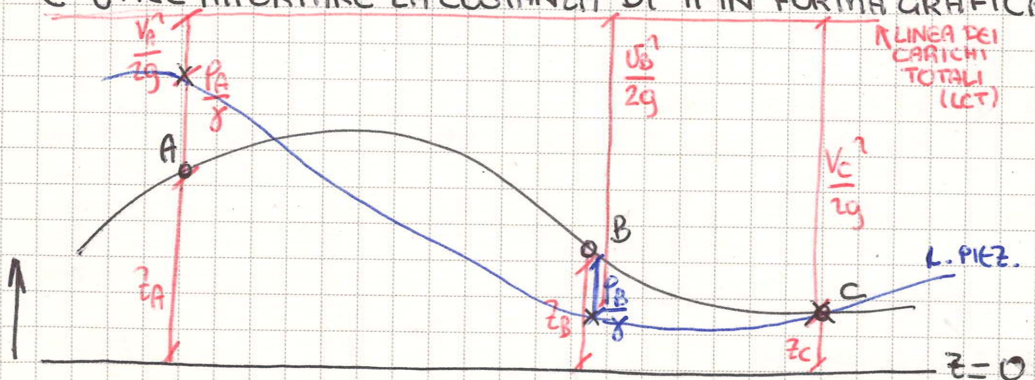



$PESO_{dW} = \gamma \cdot dW$

$p = \gamma \cdot h$

SE SI RIPORTA IN SUPERFICIE IL VOLUME $dW$, IL SISTEMA DI FORZE CHE LO HA RIPORTATO IN SUPERFICIE HA RISULTANTE NULLA PERCHÉ IN OGNI MOMENTO C'È EQUILIBRIO TRA IL $PESO_{dW}$ E LA SPINTA DI ARCHIMEDE QUINDI IL LAVORO COMPIUTO È NULLO.
È PERÒ AUMENTATA LA SUA ENERGIA POTENZIALE, QUINDI DEVE PER FORZA ESSERE DIMINUITA UN'ALTRA FORMA DI ENERGIA, CIOÈ QUELLA DOVUTA ALLA PRESSIONE CHE IN SUPERFICIE SARÀ NULLA.

È UTILE RIPORTARE LA COSTANZA DI H IN FORMA GRAFICA:




$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} > 0$$

LA COSTANZA DI H PUÒ ESSERE ESPRESSA DICENDO CHE LA SOMMA DI 3 SEGMENTI DI VALORE $z, \frac{p}{\gamma}, \frac{V^2}{2g}$ DEVE ESSERE COSTANTE.

hp: $p_A > 0$, $p_B < 0$, $p_C = 0$

LA LINEA PIEZOMETRICA OTTENUTA UNENDO TUTTI I PUNTI DI QUOTA PIEZOMETRICA È IMPORTANTE PERCHÉ LA DISTANZA TRA LA LCT E LA L. PIEZ È PARI ALL'ALTEZZA CINETICA.
QUESTO PERMETTE DI DETERMINARE LE ZONE DI UN IMPIANTO IN CUI SI HANNO VELOCITÀ MAGGIORI O MINORI.
SE LE 2 LINEE SONO PARALLELE LE VELOCITÀ SONO COSTANTI.
SE LE 2 LINEE SI ALLONTANANO IN QUELLA ZONA SI AVRÀ VELOCITÀ MAGGIORE.
SE LE 2 LINEE SI AVVICINANO VUOL DIRE CHE IN QUELLA ZONA LA VELOCITÀ STA DIMINUENDO.

$$H_P = H_Q$$

$$z_P + \frac{p_P}{\gamma} + \cancelto{\simeq 0}{\frac{V_P^2}{2g}} = z_Q + \cancelto{=0}{\frac{p_Q}{\gamma}} + \frac{V_Q^2}{2g}$$

$$Q = V_{CONTR} \cdot A_{CONTR}.$$

$$z_P + \frac{p_P}{\gamma} = z_R + \cancelto{0}{\frac{p_R}{\gamma}} \rightarrow z_P + \frac{p_P}{\gamma} = z_R = h$$

$$h - \left(-\frac{D}{2}\right) = \frac{V_Q^2}{2g} \rightarrow V_Q = \sqrt{2g\left(h + \cancelto{\simeq 0}{\frac{D}{2}}\right)}$$

LE DIMENSIONI DELLA LUCE RISPETTO AL CARICO SONO PICCOLE ($\frac{D}{2} \simeq 0$).

$V_Q$ NON DIPENDE DALLA POSIZIONE DEL PUNTO, QUINDI È LA STESSA PER OGNI TRAIETTORIA E CORRISPONDE ALLA VELOCITÀ MEDIA.

$$Q = V_{CONTR} \cdot A_{CONTR} = C_V \sqrt{2g\left(h + \frac{D}{2}\right)} \cdot C_c \cdot A$$

$C_V$: COEFFICIENTE CORRETTIVO DELLE VELOCITÀ CHE TIENE CONTO DEL FATTO CHE IL FLUIDO NON È PERFETTO MA È REALE.

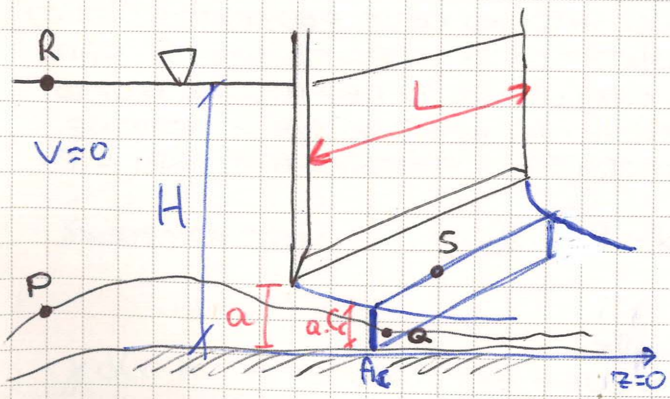
$$C_V = 0{,}97 \div 0{,}98$$

$$Q = C_V \cdot C_c \cdot A \sqrt{2gh} = \mu \cdot A \cdot \sqrt{2gh}$$

$\mu$: COEFFICIENTE DI FLUSSO ($\simeq 0{,}6$)

App.

NOTO IL LIVELLO A MONTE, REGOLARE LA PORTATA CHE PASSA SOTTO UNA PARATOIA.




L: LARGHEZZA PARATOIA

a: APERTURA LUCE

NELLA SEZIONE CONTRATTA LA DISTRIBUZIONE DELLE PRESSIONI È DI TIPO IDROSTATICO.

$$A_c = C_c \cdot A = C_c \cdot a \cdot L$$

NON C'È CONTRAZIONE DELLA VENA SUI FIANCHI PERCHÉ TUTTA LA PROFONDITÀ L È DISPONIBILE PER IL DEFLUSSO.

$$H_P = H_Q$$

$$\underbrace{z_P + \frac{p_P}{\gamma}}_{H} + \cancelto{\simeq 0}{\frac{V_P^2}{2g}} = \underbrace{z_Q + \frac{p_Q}{\gamma}}_{z_S + \cancelto{0}{\frac{p_S}{\gamma}} = a \cdot C_c} + \frac{V_Q^2}{2g}$$

PER CALCOLARE LA PORTATA BISOGNA CONOSCERE LA VELOCITÀ MEDIA NELLA SEZIONE CONTRATTA E SICCOME LE LUCI HANNO DIMENSIONI MODESTE RISPETTO AL CARICO CHE GRAVA SU DI ESSE SI CONSIDERA $V_c = V_a$.

$$V_c = \sqrt{2g\left(h_1 - z_a - \frac{p}{\gamma}\right)}$$

$$Q = C_c \cdot A \cdot C_v \cdot \sqrt{2g\left(h_1 - z_g - \frac{p}{\gamma}\right)} = \mu A \sqrt{2g\left(h - \frac{p}{\gamma}\right)}$$

CARICO SULLA LUCE

SE $P = 0$ (RELATIVA) $\Rightarrow Q = \mu A \sqrt{2gh}$

$$Q_{MAX} = \mu A \sqrt{2g\left(h - \frac{-101330}{\gamma}\right)}$$

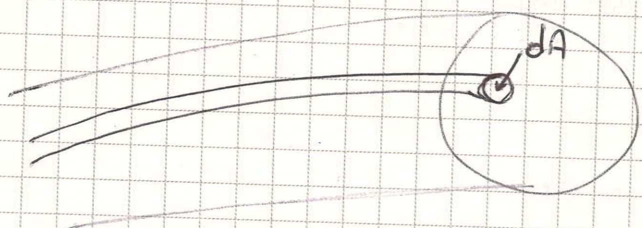
SE $h - \frac{p}{\gamma} = 0 \rightarrow \frac{p}{\gamma} = h \Rightarrow Q = 0$

SE $\frac{p}{\gamma} > h$ IL GAS NEL SERBATOIO A VALLE ENTRA NEL SERBATOIO A MONTE SOTTO FORMA DI BOLLE.

L'IPOTESI DI LAVORARE SOLO SU UNA TRAIETTORIA È MOLTO RESTRITTIVA E NON PERMETTE DI APPLICARE IL TEOREMA DI BERNOULLI IN MOLTE APPLICAZIONI PRATICHE.
PER COMODITÀ SI LAVORA DA UNA SEZIONE TRASVERSALE ALL'ALTRA E PER QUESTO SI ESTENDE IL TEOREMA DI BERNOULLI ALLE CORRENTI.

## POTENZA DI UNA CORRENTE

LA POTENZA DI UNA CORRENTE SI RIFERISCE AD UNA DATA SEZIONE ED È L'ENERGIA CHE QUELLA CORRENTE FA PASSARE IN QUELLA SEZIONE NELL'UNITÀ DI TEMPO.




$v\,dA = dQ$ ← VOLUME DI FLUIDO CHE LA CORRENTE FA PASSARE IN dA NELL'UNITÀ DI TEMPO

$\gamma v\,dA = \gamma\,dQ$ ← PESO DI FLUIDO CHE ATTRAVERSA dA NELL'UNITÀ DI TEMPO

$[H] = \frac{\text{ENERGIA}}{\text{PESO}}$

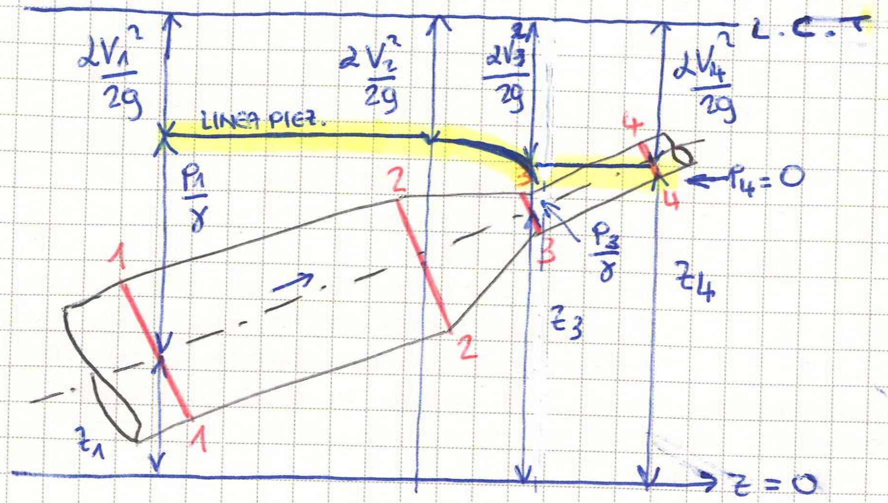
$\gamma\,dQ \cdot H$ ← ENERGIA CHE NELL'UNITÀ DI TEMPO PASSA ATTRAVERSO dA

IL TUBO DI FLUSSO HA SEZIONE COSÌ PICCOLA CHE SI PUÒ CONFONDERE CON UNA TRAIETTORIA E QUINDI SI PUÒ UTILIZZARE IL CARICO TOTALE H.

$$dP = \gamma \cdot dQ \cdot H$$

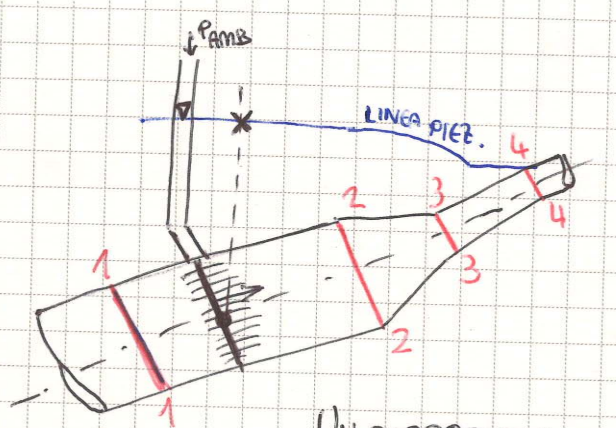
POTENZA INFINITESIMA

ESSENDO $\rho$, $\gamma$ E $Q$ COSTANTI ANCHE $\left(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{\alpha V^2}{2g}\right)$ SARÀ COSTANTE TRA UNA SEZIONE TRASVERSALE E L'ALTRA E RAPPRESENTA UN'ENERGIA MEDIA PER UNITÀ DI PESO DELLA CORRENTE IN QUELLA SEZIONE.




PER RIPORTARE IL CARICO TOTALE SI LAVORA LUNGO LA VERTICALE CHE PASSA PER IL BARICENTRO DELLA SEZIONE.

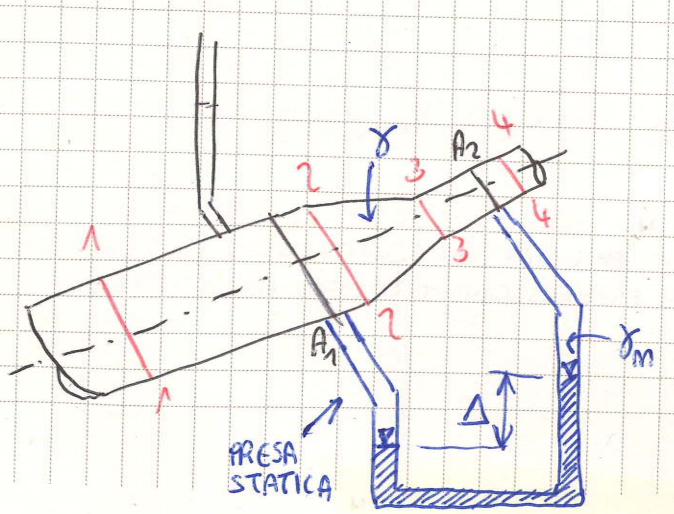
TRA LA SEZIONE 2 E LA 3 LA TUBAZIONE DIMINUISCE DI DIAMETRO QUINDI LE VELOCITÀ AUMENTANO NELLA DIREZIONE DEL MOTO.




SE SI INNESTA UN TUBICINO ORTOGONALMENTE ALLA PARETE E LO SI DRIZZA LUNGO LA VERTICALE, IL FLUIDO NELLA TUBAZIONE RIEMPIE IL TUBICINO FINO ALLA QUOTA PIEZOMETRICA. ESSO TRASFORMA LA SUA ENERGIA DI PRESSIONE IN ENERGIA DI POSIZIONE.

UN DISPOSITIVO DEL GENERE È DETTO PRESA STATICA.

## VENTURIMETRO




IL MANOMETRO DIFFERENZIALE È STATO INSERITO IN 2 SEZIONI DOVE LE TRAIETTORIE SONO RETTILINEE E PARALLELE E QUINDI LA DISTRIBUZIONE DELLE PRESSIONI È DI TIPO IDROSTATICO.
ESSO PERMETTE DI CALCOLARE LA DIFFERENZA TRA LA QUOTA PIEZOMETRICA DELLA SEZIONE $A_1$ E QUELLA DELLA SEZIONE $A_2$.

$$\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)_{A_1}-\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)_{A_2}=\Delta\,\frac{\gamma_m-\gamma}{\gamma}$$

SU QUESTO PRINCIPIO SI BASA IL VENTURIMETRO.

# ESERCITAZIONE 5

## Es.

$x \geq 0$ $\quad u = x$ $\quad P(3,4)$ $\quad$ EQ. TRAIETTORIA?

$y \geq 0$ $\quad v = -y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$ ← LA TRAIETTORIA È TANGENTE IN OGNI PUNTO AL VETTORE VELOCITÀ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \; ; \; \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \; ; \; \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + c_1$$

$$\ln(yx) = c_1 \rightarrow yx = c_2 \Rightarrow c_2 = 4 \cdot 3 = 12 \qquad \boxed{yx = 12}$$

## Es.

$$u = c_1 \cdot v_0 (x^2 - y^2 + xy)$$

$$v = c_1 \cdot v_0 (-2xy - 2yz + 2z^2) \qquad w = ?$$

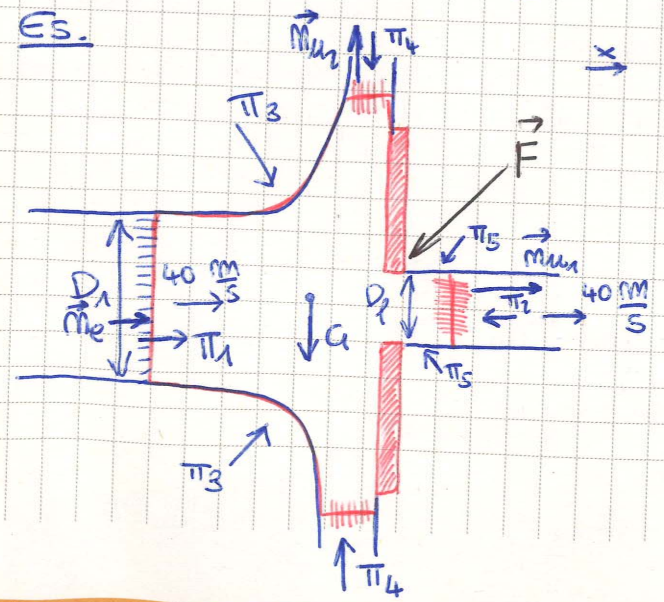
$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\cancel{2c_1 v_0 x} + c_1 v_0 \cdot y + \cancel{(-2c_1 v_0 x)} - 2c_1 v_0 \cdot z + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2c_1 v_0 z - c_1 v_0 y$$

$$w = c_1 v_0 \cdot z^2 - c_1 v_0 yz + c_2$$

## Es.




$D_\ell = 20$ mm

$D_{PIATTO} = 300$ mm

GETTO D'ARIA

$v_e = 40$ m/s

$D_1 = 0{,}08$ m

$\vec{F}$ TALE CHE IL PIATTO RIMANGA FERMO?

LA FORZA CON CUI SI TIENE IL PIATTO FERMO SI SCARICA SUL FLUIDO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE DI CONTATTO FLUIDO-PIATTO, QUINDI $\vec{F}$ DIVENTA UNA FORZA DI SUPERFICIE APPLICATA AL FLUIDO.

$$Q_1 = Q_2 \rightarrow \cancel{A_1} V_e = \cancel{A_2} \cdot V_{max} - \cancel{A_2} \frac{1}{3} V_{max}$$

$$V_e = \frac{2}{3} V_{max} \Rightarrow V_{max} = \frac{3}{2} V_e$$

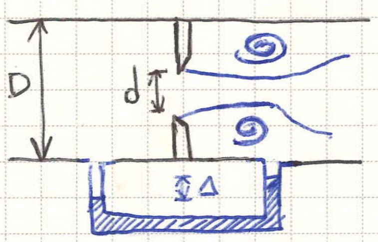
$$\beta_u = \frac{\int_A \left(\frac{3}{2} V_e \frac{r}{R}\right)^2 dA}{V_e^2 \cdot A} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^r \left(\frac{3}{2} V_e \frac{r}{R}\right)^2 r\,dr\,d\theta}{V_e^2 \cdot A} = \frac{\frac{9}{4}\cancel{V_e^2} \cdot 2\pi \int_0^r \frac{r^2}{R^2} \cdot r\,dr}{\cancel{V_e^2} \cdot A}$$

$$= \frac{9}{4} \cdot \frac{2\pi}{A} \cdot \frac{1}{R^2} \int_0^r r^3\,dr = \frac{9}{\cancel{4}_{\,2\cancel{4}}} \cdot \frac{\cancel{2\pi \cdot 4}}{\cancel{\pi D^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{R^2}} \cdot \frac{1}{4} R^{\cancel{4}\,2} = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

$$-F_{x_{SCHERMO \rightarrow FLUIDO}} = 1380 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} - 1034 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} + 1 \cdot \underset{\uparrow\,\rho}{1{,}2} \cdot 3{,}3^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4} - \frac{9}{8} \cdot 1{,}2 \cdot 3{,}3^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}6^2}{4}$$

$$= 97{,}37\,N$$

## DIAFRAMMA

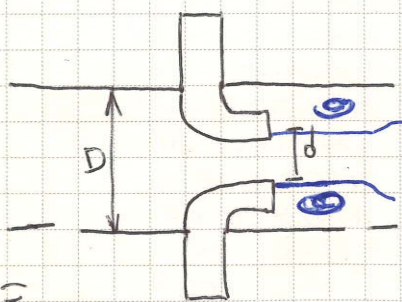



È ESSENZIALMENTE UN PIANO FORATO AL CENTRO CHE HA UNO SPIGOLO VIVO PER PERMETTERE IL DISTACCO DELLA VENA.

IL DIAFRAMMA NON È UNO STRUMENTO MOLTO PRECISO PERCIÒ BISOGNA AVERE UNA CURVA DI TARATURA CHE PERMETTE DI DIRE QUALE PORTATA PASSA QUANDO SI LEGGE UN DISLIVELLO $\Delta$.

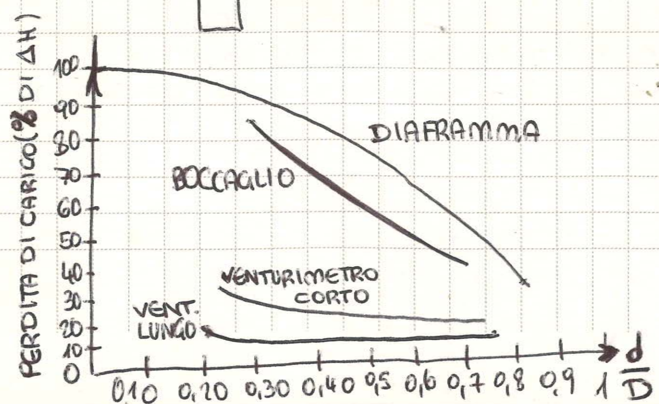
$$Q = Q(\Delta)$$

## BOCCAGLIO




RISPETTO AL DIAFRAMMA, IL BOCCAGLIO ACCOMPAGNA DI PIÙ LA VENA.

IL PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO È UGUALE A QUELLO DEL DIAFRAMMA: SI INSERISCONO I RAMI DI UN MANOMETRO DIFFERENZIALE CHE MISURA LA DIFFERENZA DI QUOTA PIEZOMETRICA E SI RICAVA UNA CURVA DI TARATURA.




IL VENTURIMETRO DÀ LUOGO A PERDITE DI CARICO MINORI MENTRE IL DIAFRAMMA È LO STRUMENTO CHE GENERA PIÙ PERDITE.

$$h+\frac{3}{4}h=\frac{V_Q^2}{2g} \rightarrow V_Q=\sqrt{2g\cdot\frac{7}{4}h}$$

$$Q=A\cdot C_c\cdot C_v\cdot\sqrt{2g\frac{7}{4}h}=A\,0{,}61\cdot 0{,}98\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\sqrt{2gh}=0{,}8\sqrt{2gh}\cdot A$$

SE SI AUMENTA ECCESSIVAMENTE $h$ SI HA UNA DIMINUZIONE DELLA QUOTA PIEZOMETRICA NELLA SEZIONE CONTRATTA E QUESTA DIMINUZIONE POTREBBE INDURRE NELLA SEZIONE CONTRATTA DEI VALORI DI PRESSIONE RELATIVA MINORI DI $-101330$ Pa.

IN QUESTO CASO IL FLUIDO CONTINUA IL SUO MOTO MA SI FORMA UNA SEZIONE DI CONTROLLO (LA SEZIONE CONTRATTA) IN CUI LA PRESSIONE NON SCENDE AL DI SOTTO DI $-101330$ Pa.

$$h_{BAR}=\cancelto{=0}{z}+\frac{p}{\gamma}=-\frac{3}{4}h \rightarrow \frac{p_{BAR}}{\gamma}=-\frac{3}{4}h>-\frac{101330}{\gamma} \longrightarrow h<\frac{4}{3}\,\frac{101330}{\gamma}$$

SE $h>\frac{4}{3}\,\frac{101330}{\gamma}$:

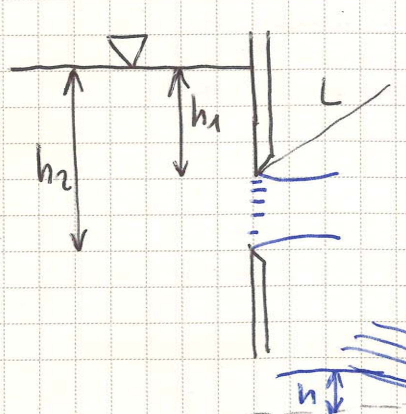
$$\underbrace{z_P+\frac{p_P}{\gamma}}_{h}+\cancelto{=0}{\frac{V_P^2}{2g}}=\cancelto{=0}{z_{BAR}}+\frac{p_{BAR}}{\gamma}+\frac{V_{BAR}^2}{2g}$$

SI IMPONE IL VALORE DI $-\frac{101330}{\gamma}$

$$\frac{v_{BAR}^2}{2g}=h+\frac{101330}{\gamma} \longrightarrow v_{BAR}=\sqrt{2g\left(h+\frac{101330}{\gamma}\right)}$$

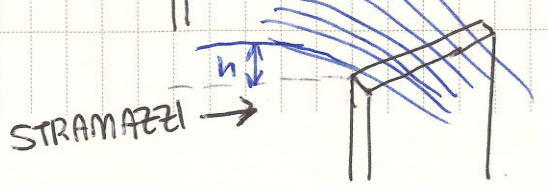
$$Q=\underbrace{0{,}61\cdot A\cdot 0{,}98}_{\mu\simeq 0{,}6}\sqrt{2g\left(h+\frac{101330}{\gamma}\right)}$$

SE L'EFFLUSSO AVVIENE ATTRAVERSO UNA LUCE CHE NON HA DIMENSIONI TRASCURABILI RISPETTO AL CARICO SULLA LUCE, SI SUDDIVIDE LA LUCE IN TANTE LUCI DI ALTEZZA INFINITESIMA PER OGNUNA DELLE QUALI È POSSIBILE CONSIDERARE LE DIMENSIONI TRASCURABILI RISPETTO AL CARICO.




$$Q=\int dQ=\int_A \mu\sqrt{2gh}\,dA=\mu\int_A\sqrt{2gh}\,\underbrace{dA}_{dH\cdot L}=$$

$$=\mu L\int_{h_1}^{h_2}\sqrt{2gh}\,dh=\mu L\sqrt{2g}\cdot\frac{2}{3}\left[h_2^{3/2}-h_1^{3/2}\right]$$




$Q=Q(h)$ LA PORTATA È LETTA IN FUNZIONE DI UN LIVELLO CHE VIENE LETTO A MONTE RISPETTO ALLA SOGLIA DELLO STRAMAZZO PRIMA CHE LE TRAIETTORIE SI CURVINO.

IN QUESTO CASO, L'ENERGIA POTENZIALE $(z_A - z_B)$ SI È SPESA PER LE PERDITE DI CARICO E IN ENERGIA CINETICA.
QUINDI LA PORTATA SARÀ MINORE: $Q = A \cdot V_{UR}$.

SI DEFINISCE CADENTE DEI CARICHI $J$ LA PERDITA DI ENERGIA MECCANICA PER UNITÀ DI PERCORSO.

$$\boxed{J = -\frac{\partial H}{\partial s}}$$

← DERIVATA PARZIALE PERCHÈ H POTREBBE DIPENDERE ANCHE DAL TEMPO

$s$: ASCISSA CURVILINEA CHE INDICA IL PERCORSO

SICCOME È PIÙ AGEVOLE AVERE QUANTITÀ POSITIVE E SICCOME IL CARICO TOTALE DIMINUISCE DURANTE IL PERCORSO (DERIVATA NEGATIVA) SI METTE DAVANTI UN SEGNO '−'.

SI DEFINISCE CADENTE PIEZOMETRICA LA VARIAZIONE DI QUOTA PIEZOMETRICA NELL'UNITÀ DI PERCORSO.

$$CADENZA_{PIEZ.} = -\frac{\partial h}{\partial s}$$

SE MOTO UNIFORME: $H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g}$ ; $\frac{\partial(\alpha V^2/2g)}{\partial s} = 0$
(ANCHE UNIFORME IN MEDIA)
↓
CADENTE DEI CARICHI = CADENTE PIEZOMETRICA

$$\begin{cases} s = 0 \\ H = H_0 \end{cases} \qquad H = H(s)\,?$$

$$\partial H = -J\,ds \rightarrow H\Big|_0^s = -Js\Big|_0^s \quad ; \quad H(s) - H(0) = -\int_0^s J\,ds$$

$$H(s) = H_0 - \underbrace{\int_0^s J\,ds}_{\text{PERDITE DI ENERGIA LUNGO IL PERCORSO TRA 0 E } s} \overset{\text{SE } J=K}{=} H_0 - Js$$

$J$ È COSTANTE SE IL MOTO È UNIFORME (ES. STESSO DIAMETRO TUBAZIONE, STESSA PORTATA, STESSO MATERIALE, ...)

LUNGO IL PERCORSO CI SONO DELLE PERDITE DI CARICO DISTRIBUITE CHE SONO DOVUTE AGLI SFORZI TANGENZIALI CHE NASCONO ALL'INTERNO DEL FLUIDO IN MOTO.
LE PERDITE DI CARICO CONCENTRATE SI VERIFICANO INVECE IN PARTICOLARI SEZIONI E SONO DOVUTE ESSENZIALMENTE A BRUSCHE VARIAZIONI DI GEOMETRIA. PER ESEMPIO:

SBOCCO PARI ALL'INTERA ALTEZZA CINETICA DELLA CORRENTE NELLA SEZIONE A VALLE.

LA POTENZA CEDUTA DALLA CORRENTE ALLA MACCHINA VALE:

$$P_C = \underbrace{\gamma Q H_m}_{P_m} - \underbrace{\gamma Q H_v}_{P_V} = \gamma Q (H_m - H_v)$$

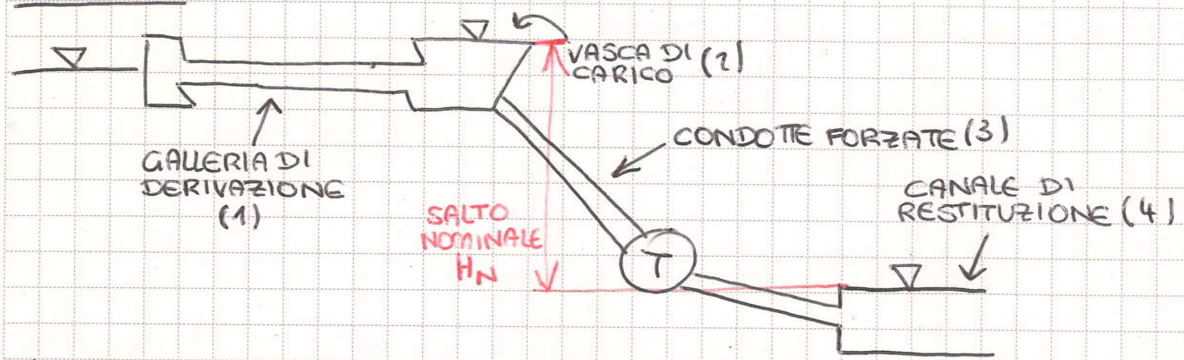
FORTATA TURBINATA

$$P_{el} = \eta \cdot P_{CEDUTA} = \eta \cdot \gamma \cdot Q (H_m - H_v)$$

$\eta$ → RENDIMENTO DEL GRUPPO

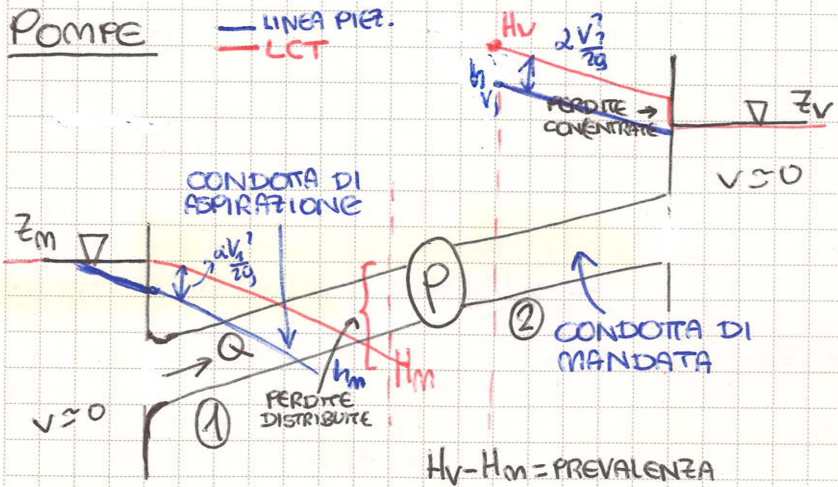
È INTERESSE AUMENTARE IL PIÙ POSSIBILE IL SALTO UTILE RENDENDOLO IL PIÙ VICINO POSSIBILE AL SALTO DISPONIBILE.

ES: DIGA




(2): SERVE A RALLENTARE UN PO' IL FLUSSO E A PERMETTERE UN MIGLIORE IMBOCCO ALL'INTERNO DELLA CONDOTTA FORZATA.

POMPE




$$P_m = \gamma \cdot Q \cdot H_m$$

$$P_V = \gamma \cdot Q \cdot H_V$$

LA POMPA CEDE ENERGIA ALLA CORRENTE:

$$P_{CEDUTA} = \gamma Q (H_V - H_m)$$

$$P_{el} = \frac{\gamma \cdot Q (H_V - H_m)}{\eta_P}$$

$\eta_P$ → RENDIMENTO POMPA

LA PREVALENZA DEVE COPRIRE IL DISLIVELLO TRA I 2 SERBATOI E LE PERDITE DI CARICO CONCENTRATE E DISTRIBUITE CHE SI HANNO IN CONDOTTA.

$$H_V - H_M = Z_V - Z_M + P.CONC. + P_{DISTR.}$$

PREVALENZA MANOMETRICA: $h_V - h_m$

LA PREVALENZA COINCIDE CON LA PREVALENZA MANOMETRICA QUANDO LE VELOCITÀ SONO UGUALI, QUINDI QUANDO I DIAMETRI DELLE 2 CONDOTTE SONO UGUALI.

LE DIFFERENZE TRA LA (2) E LA (*) SONO:

- LA (2) VALE PER QUALUNQUE FLUIDO MENTRE LA (*) VALE SOLO PER UN FLUIDO NEWTONIANO INCOMPRIMIBILE;
- NELLA (2) $\vec{\Pi}$ È DOVUTA A SFORZI NORMALI E TANGENZIALI, MENTRE NELLA (*) LE FORZE DI SUPERFICIE SONO DATE DA 2 ADDENDI: UNO TIENE CONTO DELLA PRESSIONE ($\vec{\Pi}_p$) E L'ALTRO DELLA VISCOSITÀ.

## SCHEDA 3

**Es. 4:** UNA CORRENTE MONODIMENSIONALE HA UN CAMPO DI VELOCITÀ CARATTERIZZATO DALL'ESPRESSIONE $V_x = 6x^2 + 2y + xy$. IN QUALE DEI SEGUENTI INSIEMI È ASSICURATA LA CONSERVAZIONE DELLA MASSA SE IL FLUIDO È INCOMPRIMIBILE?

$$\downarrow$$
$$\text{div } \vec{V} = 0$$

$$\text{div } \vec{V}_x = 0 \Rightarrow 12x + y = 0 \; ; \; y = -12x$$

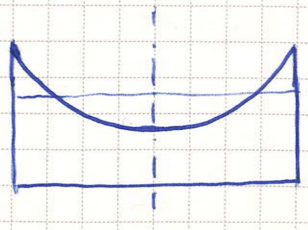
**Es. 6:** STIMARE IL TEMPO NECESSARIO A RIEMPIRE CON ACQUA UN CONTENITORE CONICO DI BASE CIRCOLARE ($D = 1{,}5\ m$) E ALTEZZA $1{,}5\ m$, CON UNA PORTATA IDRICA DISPONIBILE DI CIRCA $0{,}5\ \ell/s$.

$$Q \cdot t = Vol_{CONO}$$

$$V_{CONO} = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{1}{3} h = \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{4} \cdot \frac{1}{3} \, 1{,}5 = 0{,}884\ m^3 = 883{,}57\ \ell$$

$$t = \frac{Vol}{Q} = \frac{883{,}57\ \ell}{0{,}5\ \ell/s} \cong 1767\ s \simeq 30\ MIN$$

**Es. 7:** UN RECIPIENTE CIRCOLARE CILINDRICO ($D = 0{,}2\ m$) RUOTA INTORNO AL PROPRIO ASSE CON VELOCITÀ ANGOLARE DI 600 GIRI AL MINUTO. RISPETTO ALLA SITUAZIONE STATICA, L'INNALZAMENTO ALLA PARETE È?



$$\Delta h = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^2}{2g} = \frac{1}{2} \frac{62{,}83^2 \cdot 0{,}1^2}{2 \cdot 9{,}81} = 1\ m$$

$$\omega = 600\ RPM = (10 \cdot 2\pi)/s = 62{,}83\ \frac{1}{s}$$



$$\frac{\frac{m}{s} \cdot s^2}{\frac{m}{s^2}} = s^3 ?$$

$$600 \frac{giri}{s} = 600 \frac{2\pi}{s} = 1200 \left(\frac{\pi}{s}\right)^2$$

$$\frac{\frac{1}{s^2} \cdot m^2}{m/s^2}$$

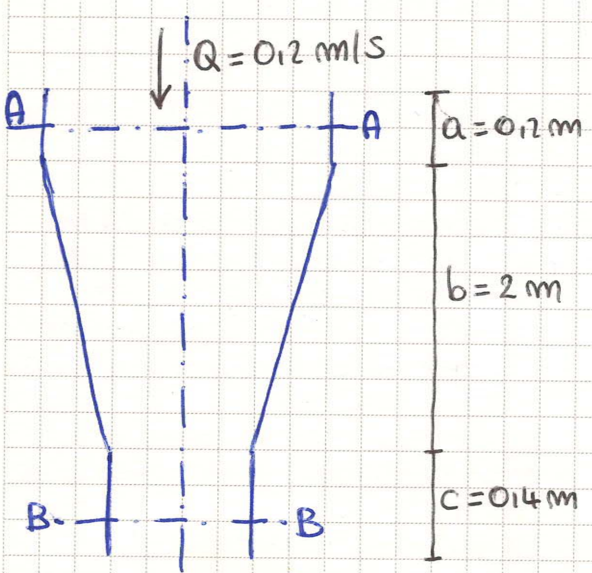
$$Q_e = Q_u \Rightarrow A_e \cancel{V_e} = A_u \cancel{V_u}$$

$$\rho \frac{Q^2}{\frac{\pi D^2}{4}} - \rho \frac{Q^2}{\frac{\pi D^2}{4}} \cdot \cos 60° = F$$

$$\rho \frac{Q^2}{\frac{\pi D^2}{4}} \left(1 - \cos 60°\right) = F$$

$$Q = \sqrt{\frac{F}{\rho(1-\cos 60°)} \cdot \frac{\pi D^2}{4}} = \sqrt{\frac{22{,}2 \cdot \pi \cdot 0{,}15^2/4}{1{,}2\,(1-1/2)}} = 0{,}82\ \frac{m^3}{s}$$

Es.




• FLUIDO: ARIA

• FLUIDO IDEALE

• $V$ = UNIFORMI NELLA SEZIONE

$P_A - P_B = ?$

$D_A = 0{,}4\ m$ $D_B = 0{,}2\ m$

IN CONDIZIONI STATICHE:

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} = z_B + \frac{P_B}{\gamma}$$

$$P_A - P_B = \gamma(z_B - z_A) =$$

$$= 9806(0-2{,}6) = -25495{,}6\ Pa$$

IN CONDIZIONI DINAMICHE:

$$H_A = H_B \Rightarrow z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \underbrace{\alpha}_{=1} \frac{V_A^2}{2g} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \underbrace{\alpha}_{=1} \frac{V_B^2}{2g}$$

$$V_A = \frac{Q}{A_A} \quad , \quad V_B = \frac{Q}{A_B}$$

$$z_A + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g A_A^2} = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{Q^2}{2g \cdot A_B^2}$$

$$H_S = H_u \Rightarrow \underbrace{z_S + \frac{p_S}{\gamma}}_{z_{SUP.LIB}} + \cancel{\frac{V_S^2}{2g}}^{=0} = \underset{\downarrow\, z_G}{z_u} + \cancel{\frac{p_u}{\gamma}}^{=0} + \alpha\frac{V_u^2}{2g}$$

$$\cancel{\alpha}^{1}\frac{V_u^2}{2g} = \underbrace{z_{SUP.LIB} - z_{Gu}}_{H} \Rightarrow V_u = \sqrt{2gH} = 5{,}42\ m/s$$

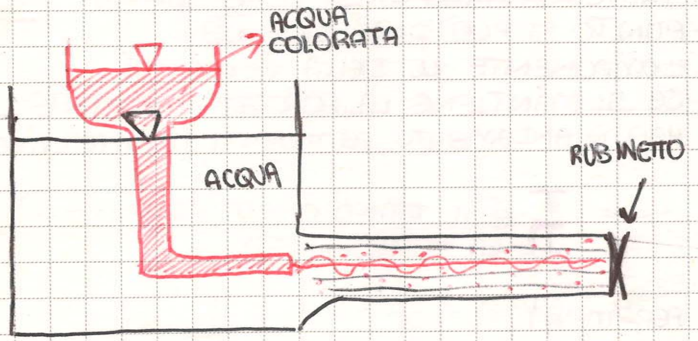
$$Q = V_u \cdot A_u = \frac{\pi D_2^2}{4}\sqrt{2gH} = \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4}\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 1{,}5} = 0{,}0425\ \frac{m^3}{s}$$

$$H_S = H_B \Rightarrow \underbrace{z_S + \frac{p_S}{\gamma}}_{z_{SUP.LIB}} + \cancel{\frac{V_S^2}{2g}}^{=0} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}$$

$$z_{SUP.LIB} - z_B - \frac{Q^2}{2g \cdot A_B^2} = \frac{p_B}{\gamma}$$

$$p_B = \gamma\left(z_{SUP.LIB} - z_B - \frac{Q^2}{2g \cdot A_B^2}\right) = 9806\left(6 - 3 - \frac{0{,}0425^2}{2 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}2^2}{4}}\right) = 29498\ Pa$$

## ESPERIMENTO DI REYNOLDS




ESSENDO IL DIAMETRO DELLA TUBAZIONE ASSEGNATO, SE $Q\uparrow \Rightarrow U\uparrow$.

PER VISUALIZZARE LA TRAIETTORIA DELL'ACQUA SI PRENDE UN SERBATOIO POSTO A UN LIVELLO PIÙ ALTO RIEMPITO CON ACQUA COLORATA.
APRENDO IL RUBINETTO DEL SERBATOIO SI VEDE IL FLUSSO DELL'ACQUA COLORATA CHE PROCEDE VERSO L'USCITA SEGUENDO UN PERCORSO RETTILINEO. SICCOME IL LIQUIDO È LO STESSO, SI PUÒ AFFERMARE CHE ANCHE NELLE ALTRE ZONE DELLA TUBAZIONE LE TRAIETTORIE SONO RETTILINEE E SI HA UN MOTO REGOLARE DI SCORRIMENTO DI UNA TRAIETTORIA SOPRA L'ALTRA. QUESTO MOTO È DETTO LAMINARE.
AUMENTANDO LA VELOCITÀ LA TRAIETTORIA INIZIA AD AVERE DELLE FLUTTUAZIONI CHE STANNO AD INDICARE CHE AL MOTO DI TRASPORTO SI SOMMA UN MOTO DI AGITAZIONE (NELLE TRE DIMENSIONI).
AUMENTANDO ULTERIORMENTE LA VELOCITÀ, QUESTE FLUTTUAZIONI SI AMPLIFICANO FINO A SPEZZARE LE TRAIETTORIE INDICANDO CHE ESSE PROCEDONO VERSO VALLE MA C'È UN MOTO DI RIMESCOLAMENTO IN TUTTA LA MASSA FLUIDA.
QUESTO MOTO È DETTO MOTO TURBOLENTO.
PER CLASSIFICARE UN MOTO COME LAMINARE O TURBOLENTO SI UTILIZZA IL NUMERO DI REYNOLDS CHE È UN PARAMETRO AL DI SOTTO DEL QUALE IL MOTO PUÒ ESSERE CONSIDERATO LAMINARE.

SICCOME VELOCITÀ E PRESSIONE SONO COLLEGATE, ANCHE $p = \bar{p} + p'$.

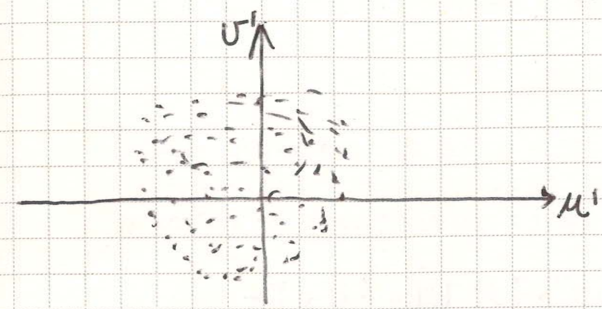
$$u' = u - \bar{u} \Rightarrow \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u'\,dT = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (u-\bar{u})\,dT = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u\,dT - \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \bar{u}\,dT =$$

$$= \bar{u} - \frac{1}{\cancel{T}}\,\bar{u}\cdot\cancel{T} = 0$$ ← LA MEDIA TEMPORALE DELLE FLUTTUAZIONI È NULLA

$\overline{u'^2} \neq 0$

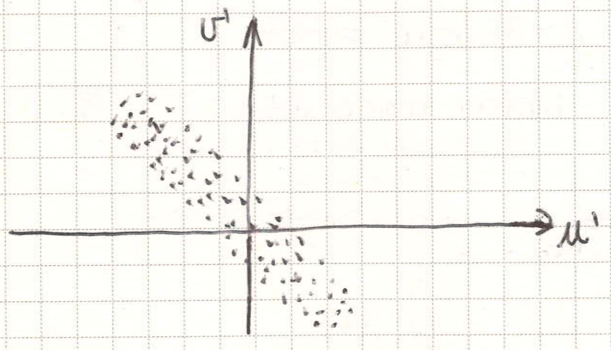
SI DEFINISCE **INTENSITÀ DELLA TURBOLENZA**: $I = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$.

È UNA MISURA CHE CONFRONTA L'AMPIEZZA DELLE FLUTTUAZIONI RISPETTO AL VALORE MEDIO DELLE VELOCITÀ.



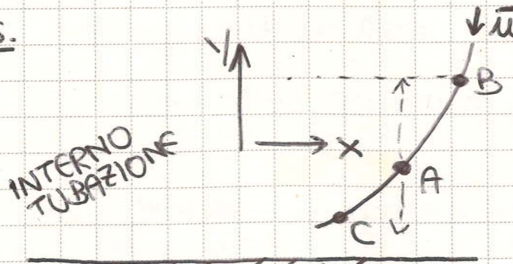

IL MOTO PER SEMPLICITÀ È CONSIDERATO BIDIMENSIONALE.

SE SI AVESSE UN FENOMENO CHE GODE DI ISOTROPIA TUTTI I PUNTI SAREBBERO DISTRIBUITI RISPETTO AI 4 QUADRANTI.




NEL CASO DI MOTO TURBOLENTO SI HA UNA PREFERENZIALE DISPOSIZIONE DEI PUNTI NEL 2° E 4° QUADRANTE.

<u>Es.</u>




$u_C < u_A < u_B$

UN FLUIDO REALE SI MUOVE DI MOTO TURBOLENTO.

I PUNTI DISPOSTI LUNGO UNA SEZIONE NON HANNO TUTTI LA STESSA VELOCITÀ MA LE PARETI FRENANO IL FLUIDO E ANDANDO VERSO L'ASSE SI HA UN VALORE DELLA VELOCITÀ $u$ CHE AUMENTA

UNA PARTICELLA HA UNA FLUTTUAZIONE $v' > 0$ E UNA VELOCITÀ INIZIALE $u_A$ E PASSA DA A A B. I PUNTI CHE SI TROVANO ALLA QUOTA B HANNO IN MEDIA UNA VELOCITÀ MAGGIORE DI $u_A$. QUINDI QUESTA PARTICELLA, UNA VOLTA RAGGIUNTO B, HA $u' < 0$ CIOÈ HA UNA VELOCITÀ PIÙ BASSA DELLE ALTRE.

$u'v' < 0$

$= \int_A \left[ \frac{1}{T}\bar{p}\,T + 0 \right]\vec{n}\,dA = \int_A \bar{p}\,\vec{n}\,dA$ ← QUESTO SUCCEDE QUANDO L'ESPRESSIONE CHE CONTIENE LE GRANDEZZE FLUTTUANTI È LINEARE.

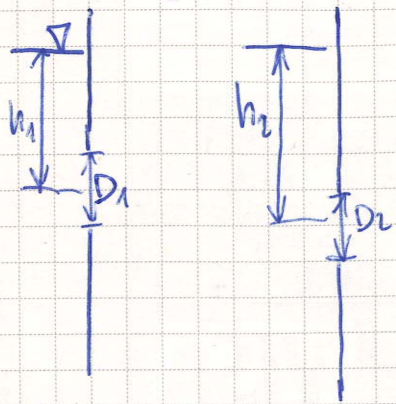
ALLORA SI AVRÀ:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_{\bar{p}} + \vec{I}_{\bar{v}} - \int_A \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n}\,dA + \vec{M}_e - \vec{M}_\mu = 0$$

$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\int_A \rho\,\vec{v}\,v_n\,dA\,dt$ ← SI HA IL PRODOTTO DI 2 GRANDEZZE AVENTI UN VALORE MEDIO E UNA FLUTTUAZIONE QUINDI NON SI POSSONO SOSTITUIRE I VALORI MEDI.

$\boxed{\text{SCHEDA 4}}$

**Es. 9:** SI VUOLE PRATICARE NELLA PARETE DI UN SERBATOIO 2 LUCI CIRCOLARI DI CARICO IDRAULICO $h_1$ E $h_2$. RITENENDO UGUALI I COEFFICIENTI DI EFFLUSSO COME DEVONO RISULTARE I 2 DIAMETRI PERCHÈ LE LUCI DERIVINO UNA PORTATA UGUALE?

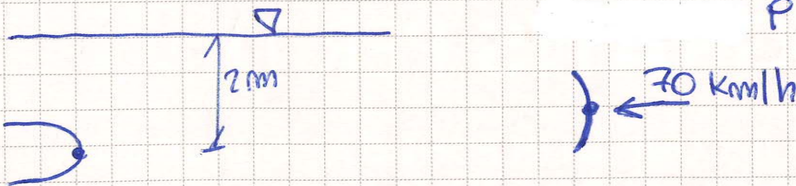



$$Q_1 = \mu \frac{\pi D_1^2}{4}\sqrt{2gh_1}$$

$$Q_2 = \mu \frac{\pi D_2^2}{4}\sqrt{2gh_2}$$

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

**Es. 6:** UN SILURO VIAGGIA ORIZZONTALMENTE A 2 m SOTTO IL LIVELLO DEL MARE A UNA VELOCITÀ DI 70 Km/h. ESATTAMENTE IN ASSE, SULLA PRUA È POSTA UNA PRESA DI PRESSIONE COLLEGATA AD UN MANOMETRO. LA PRESSIONE RELATIVA MISURATA RISULTERÀ PARI A CIRCA?




$P = 9806 \cdot 2\,m = 19612\ Pa$

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{p'}{\gamma} \Rightarrow p' = \frac{\gamma}{2g}\cdot v^2 = \left(\frac{70\cdot 1000}{3600}\right)^2 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{2} = 195418\ Pa$$

$$P_{TOT} = P + P' = 19612 + 1000\cdot\left(\frac{70\cdot 1000}{3600}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = 215030\ Pa$$

**Es. 5:** UNA CONDOTTA PER ACQUA POTABILE PASSA APPENA AL DI SOTTO DEL PIANO STRADALE: IL MINIMO VALORE DELLA PRESSIONE (RELATIVA) NEL SUO BARICENTRO AFFINCHÈ LA FORNITURA SIA ASSICURATA AL 7° PIANO DEGLI EDIFICI È ALL'INCIRCA?

$$Z_{P.ST} + \frac{P_{P.ST}}{\gamma_{P.ST}} = Z_7 + \overbrace{\frac{P_7}{\gamma}}^{=0} \Rightarrow P_{P.ST} = \gamma\cdot(Z_7 - Z_{P.ST}) = 9806\cdot(7\cdot 3) \cong 206\ kPa$$

$$= \int_A \left( \frac{1}{\cancel{T}} \rho \vec{U} \cdot \bar{U}_n \cancel{T} + \frac{1}{T} \rho \int_{t_0}^{t_0+T} \vec{U}' \cdot U_n \, dt \right) dA =$$

$$= \int_A \rho \vec{U} \cdot \bar{U}_n + \rho \overline{\vec{U}' \cdot U_n'} \, dA = \int_A \rho \vec{U} \cdot U_n \, dA + \int_A \rho \overline{\vec{U}' \cdot U_n'} \, dA =$$

$$\vec{M}_e - \vec{M}_u = \int_A \rho \vec{U} \cdot \bar{U}_n \, dA + \underbrace{\int_A \rho \overline{\vec{U}' \cdot U_n'} \, dA}$$

NASCE QUESTO TERMINE CHE È UNA FORZA CHE AGISCE SU UNA SUPERFICIE DI CONTORNO ED È DOVUTO ALLA PRESENZA DEGLI SFORZI TURBOLENTI CHE NASCONO ALL' INTERNO DEL FLUIDO.

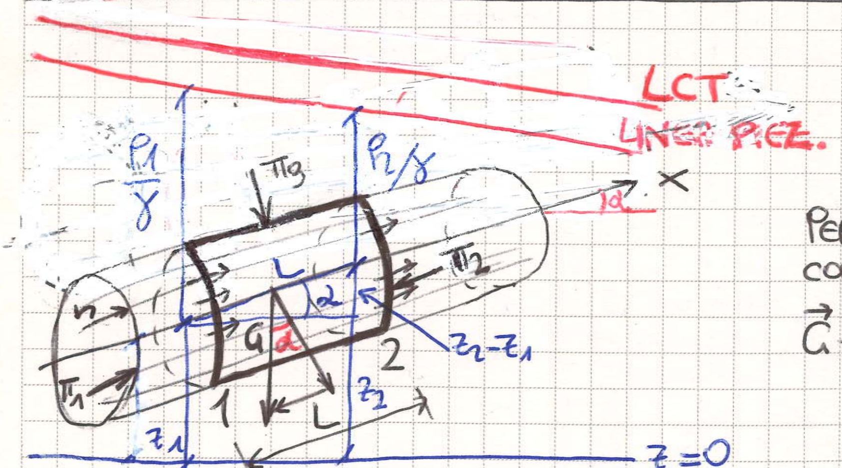
RICOMPONENDO LA (✱) SI HA:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_{\bar{p}} + \vec{I}_{\bar{\vec{U}}} + \vec{M}_e - \vec{M}_{u\,(\bar{\vec{U}}, \bar{U}_n)} - \int_A \mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} dA + \int_A \rho \overline{U' \cdot U_n'} \, dA = 0$$

$\vec{T} = \int_A \mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} dA - \int_A \rho \overline{\vec{U}' \cdot U_n'} \, dA$ è l' AZIONE DI TRASCINAMENTO DI UN VOLUME DI FLUIDO IN MOTO SULL' ESTERNO

$-\vec{T}$ : RESISTENZA CHE IL FLUIDO ESTERNO, AL VOLUME CONSIDERATO, OPPONE AL SUO MOTO

## $\vec{T}$ PER UNA CORRENTE IN MOTO UNIFORME E PERMANENTE




• FLUIDO REALE

$\vec{T}$ CON RIFERIMENTO ALLA PARETE

PER IL VOLUME DI FLUIDO COMPRESO TRA 1 E 2 VALE:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_p + \underbrace{\cancel{\vec{I}}}_{=0} + \underbrace{\vec{M}_e - \vec{M}_u}_{=0} - \vec{T} = 0$$

MOTO PERMANENTE — MOTO UNIFORME

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_p = \vec{T}$$

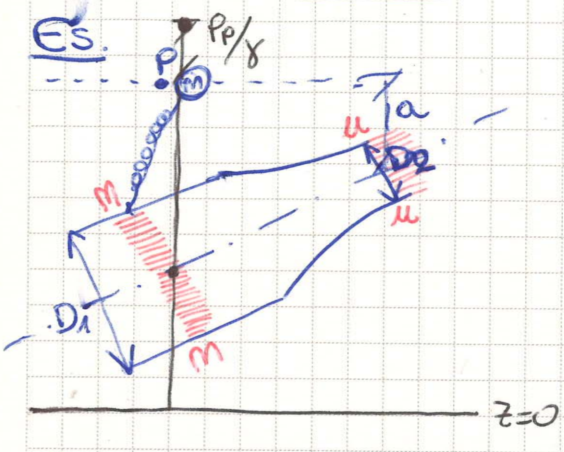
$$\vec{T} = \underbrace{\int_A \mu \frac{\partial \vec{U}}{\partial n} dA}_{} - \underbrace{\int_A \rho \overline{\vec{U}' \cdot U_n'} \, dA}_{}$$

ESISTE SOLO SULLA SUPERFICIE LATERALE

$\vec{T}$ È DIRETTA NELLA DIREZIONE DEL VETTORE VELOCITÀ

# ESERCITAZIONE 7

## Es.




$\gamma = 9806\ N/m^3$

$D_1 = 0{,}2\ m$

$D_2 = 0{,}1\ m$

$n = 0{,}1\ Kg_p/cm^2$

$a = 0{,}5\ m$

Hp: LIQUIDO PERFETTO

Q?

$p_u = 0$

$z_p + \frac{p_p}{\gamma}$ È LA QUOTA PIEZOMETRICA INDICATA DAL MANOMETRO METALLICO MA, SICCOME LA DISTRIBUZIONE DELLE PRESSIONI È DI TIPO IDROSTATICO, È ANCHE LA QUOTA PIEZOMETRICA NELLA SEZIONE M.

$$H_m = H_u \Rightarrow z_m + \frac{p_m}{\gamma} + \underset{=1}{\alpha}\frac{V_m^2}{2g} = z_u + \cancel{\frac{p_u}{\gamma}}^{0} + \underset{=1}{\alpha}\frac{V_u^2}{2g}$$

$$z_{m_p} - z_u + \frac{p_{m_p}}{\gamma} = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right]$$

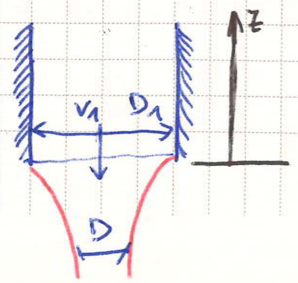
$$\underbrace{z_p - z_u}_{a} + \underbrace{\frac{p_p}{\gamma}}_{\frac{n \cdot 9{,}8}{10^{-4}\cdot\gamma}} = \frac{Q^2}{2g}\left[\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right]$$

$$a + \frac{n \cdot 9{,}8}{10^{-4}\cdot\gamma} = \frac{Q^2}{2\cdot 9{,}8}\left[\frac{16}{\pi^2\cdot 0{,}1^4} - \frac{16}{\pi^2 \cdot 0{,}2^4}\right]$$

$Q = 0{,}0439\ m^3/s$

## Es.

UN RUBINETTO TERMINA CON UN TRATTO CILINDRICO A BASE CIRCOLARE, AD ASSE VERTICALE E SBOCCA IN ATMOSFERA. AMMESSO CHE IL LIQUIDO EFFLUENTE SIA PERFETTO, E SI COMPORTI COME UN SISTEMA CONTINUO, DETERMINARE LA FORMA DELLA VENA FLUIDA A VALLE DELLA SEZIONE DI SBOCCO.

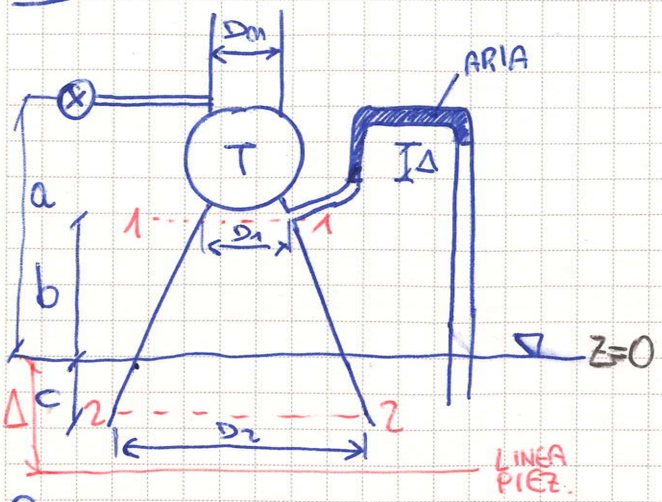



$$V_1 \cdot \frac{\pi D_1^2}{4} = V \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

$$D = D_1 \cdot \sqrt{\frac{V_1}{V}}$$

$$H_1 = H \Rightarrow \underset{=0}{z_1} + \cancel{\frac{p_1}{\gamma}}^{=0} + \frac{V_1^2}{2g} = z + \cancel{\frac{p}{\gamma}}^{=0} + \frac{V^2}{2g}$$

Es.




$D_m = 0{,}8\ m$

$D_1 = 1\ m$

$D_2 = 3\ m$

$a = 6\ m$

$b = 3\ m$

$c = 2\ m$

$\Delta = 0{,}3\ m$

$n = 26\ \frac{Kg_p}{cm^2}$

$\eta = 0{,}82$

RITENENDO TRASCURABILI LE PERDITE DI CARICO LUNGO IL DIFFUSORE E PARI ALL' INTERA ALTEZZA CINETICA LA PERDITA DI SBOCCO, DETERMINARE LA PORTATA Q E LA POTENZA W DELLA TURBINA E LA SPINTA SUL DIFFUSORE NOTE LE INDICAZIONI Δ E n.

$$H_1 - \alpha\frac{V_2^2}{2g} = H_{SERB.}$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \overset{=1}{\cancel{\alpha}}\frac{V_1^2}{2g} - \overset{=1}{\cancel{\alpha}}\frac{V_2^2}{2g} = H_S$$

$$\Delta \rightarrow \delta = \Delta\frac{\gamma - \overset{=0}{\gamma_m}}{\gamma} = \Delta = 0{,}3\ m$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \Big(\overset{=0}{z_S + \frac{p_S}{\gamma}}\Big) = -\Delta$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} = -\Delta \ ;\ b + \frac{p_1}{\gamma} = -\Delta ;\ \frac{p_1}{\gamma} = -\Delta - b$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha\frac{V_1^2}{2g} - \alpha\frac{V_2^2}{2g} = \underbrace{z_S + \frac{p_S}{\gamma}}_{=0} + \alpha\cancel{\frac{V_S^2}{2g}}^{=0}$$

$$\cancel{b} - \cancel{b} - \Delta + \overset{=1}{\cancel{\alpha}}\frac{V_1^2}{2g} - \overset{=1}{\cancel{\alpha}}\frac{V_2^2}{2g} = 0$$

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) = \Delta$$

$$\frac{Q^2}{2 \cdot 9{,}806}\left(\frac{16}{\pi^2 \cdot 1^4} - \frac{16}{\pi^2 \cdot 3^4}\right) = 0{,}3$$

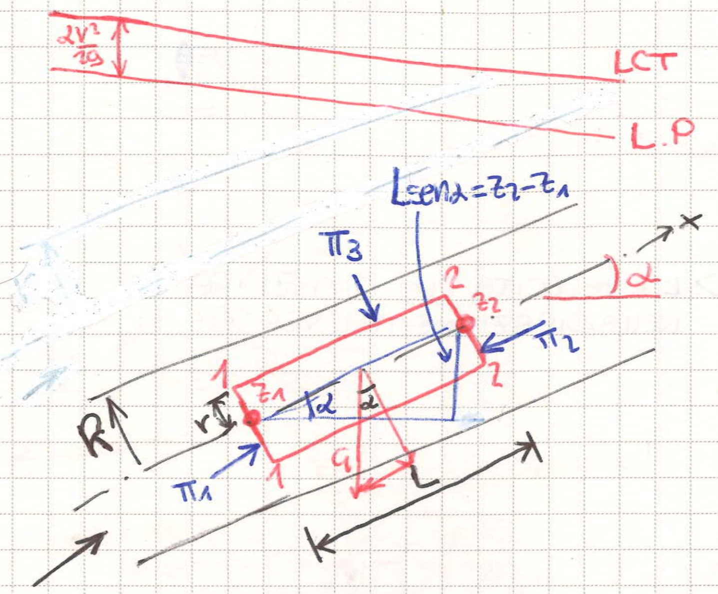
$$Q = 1{,}916\ m^3/s$$

# $\vec{T}$ PER UNA CORRENTE IN MOTO UNIFORME E PERMANENTE IN TUBAZIONI CIRCOLARI

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_{\bar{\rho}} + \vec{I}_{\bar{V}} + \vec{Me}_{\bar{V}} - \vec{Mu}_{\bar{V}} - \int_A \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dA + \int_A \rho \overline{\vec{u}' u_n'} dA = 0$$

$$\vec{T} = \int_A \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} dA - \int_A \rho \overline{\vec{u}' u_n'} dA$$

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_{\bar{\rho}} + \vec{I}_{\bar{V}} + \vec{Me}_{\bar{V}} - \vec{Mu}_{\bar{V}} - \vec{T} = 0$$




$\tau = \tau(r)$

SICCOME IL MOTO È UNIFORME E PERMANENTE, LE $\tau$ HANNO LA STESSA DISTRIBUZIONE IN TUTTE LE SEZIONI.

IL VOLUME DI FLUIDO SI TROVA IN EQUILIBRIO:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_{\bar{\rho}} + \cancel{\vec{I}_{\bar{V}}}^{=0} + \underbrace{\vec{Me}_{\bar{V}} - \vec{Mu}_{\bar{V}}}_{=0} - \vec{T} = 0$$

MOTO PERMANENTE — MOTO UNIFORME

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_{\bar{\rho}} - \vec{T} = 0$$

$$\vec{T} = G + \vec{\Pi}_{\bar{\rho}} \xrightarrow{\text{LUNGO } x} T = -G\,\text{sen}\alpha + \Pi_1 - \Pi_2$$

$$G = \gamma \cdot A_b \cdot L$$

$$T = -\gamma \cdot A_b \cdot L\,\text{sen}\alpha + p_1 A_b - p_2 A_b = -\gamma A_b (z_2 - z_1) + p_1 A_b - p_2 A_b =$$

$$= \gamma A_b \left[ z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - z_2 - \frac{p_2}{\gamma} \right] = \gamma A_b (h_1 - h_2) = \gamma A_b \cdot L \frac{h_1 - h_2}{L} = \gamma W J$$

$$T = \int_A \underbrace{\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n}}_{} dA - \int_A \underbrace{\rho \overline{\vec{u}' u_n'}}_{} dA \Rightarrow \tau = \frac{T}{A_{LAT}}$$

SONO UNIFORMI SULLA SUPERFICIE LATERALE $\Rightarrow T = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} A_{LAT} - \rho \overline{\vec{u}' u_n'} A_{LAT}$

$$\tau = \frac{T}{A_{LAT}} = \frac{\gamma W J}{A_{LAT}} = \underbrace{\frac{\gamma \pi r^{\cancel{2}} \cdot \cancel{L} \cdot J}{2 \cancel{\pi} \cancel{r} \cdot \cancel{L}}}_{} = \gamma \cdot \frac{r}{2} \cdot J$$

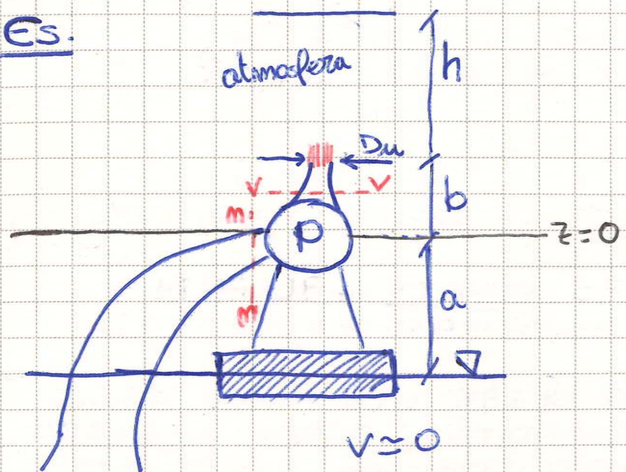
T È DATA DALLA SOMMA DI TUTTE LE $\tau$ SULLA SUPERFICIE LATERALE

LA CORRENTE HA UNA SEZIONE CIRCOLARE

LA PROPORZIONE TRA I 2 CONTRIBUTI DIPENDE DAL NUMERO DI REYNOLDS E QUINDI DA QUANTO È SVILUPPATA LA TURBOLENZA.
SE IL MOTO È LAMINARE LO SFORZO TURBOLENTO È NULLO.
LO SFORZO TURBOLENTO SI AZZERA PRIMA DI ARRIVARE CONTRO LA PARETE ($u'$ NON PUÒ AVERE MEDIA 0 CONTRO LA PARETE!) E SI HA UNO STRATO VISCOSO DI SPESSORE VARIABILE A SECONDA DELLA VELOCITÀ E DEL DIAMETRO DELLA TUBAZIONE (ANCHE IN MOTI ESTREMAMENTE TURBOLENTI).

## $\boxed{\text{ESERCITAZIONE 8}}$

**Es.**




$D_u = 5$ cm

$a = 2$ m

$b = 1$ m

$h = 20$ m

$\eta = 0,75$

hp: FLUIDO IDEALE (ACQUA)

Q?

$P_{el}$?

$$H_u = H_f \Rightarrow z_u + \underbrace{\cancel{\frac{p_u}{\gamma}}}_{=0} + \underbrace{\alpha}_{=1}\frac{V_u^2}{2g} = z_f + \underbrace{\cancel{\frac{p_f}{\gamma}}}_{=0} + \underbrace{\alpha}_{=1}\underbrace{\cancel{\frac{V_f^2}{2g}}}_{=0}$$

FINALE

$$\frac{V_u^2}{2g} = z_f - z_u$$ ← LA VELOCITÀ DA AVERE IN USCITA DIPENDE DALLA QUOTA $z_f$ CHE SI DEVE RAGGIUNGERE

$$V_u = \sqrt{2g(z_f - z_u)} = \sqrt{2gh} = 19,8 \text{ m/s}$$

$$Q = \frac{\pi D_u^2}{4} \cdot V_u = \frac{\pi \cdot 0,05^2}{4} \cdot 19,8 = 0,039 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$P_{el} = \frac{P_{idr}}{\eta} = \frac{\gamma Q \cdot (H_v - H_m)}{\eta}$$

IL FLUIDO È IDEALE QUINDI NELLA CONDOTTA DI MANDATA E NEL TRATTO A VALLE AVRÀ CARICO COSTANTE. INOLTRE, IL CARICO È COSTANTE IN TUTTA LA CONDOTTA DI ASPIRAZIONE (PARI AL CARICO NEL SERBATOIO).

$$H_v - H_m = H_u - H_s = z_u + \underbrace{\cancel{\frac{p_u}{\gamma}}}_{=0} + \underbrace{\alpha}_{=1}\frac{V_u^2}{2g} - \left(z_s + \frac{p_s}{\gamma}\right) = b + h - (-a) =$$

$$= b + h + a = 23 \text{ m}$$

$$P_{el} = \frac{9806 \cdot 0,039 \cdot 23}{0,75} = 11,68 \text{ kW}$$

$$\frac{L^2 \cancel{Q}\, dQ}{A_c^2 \cdot g} = -\cancel{Q}\, dt$$

$$dQ = -\frac{A_c^2 \cdot g}{L^2}\, dt$$

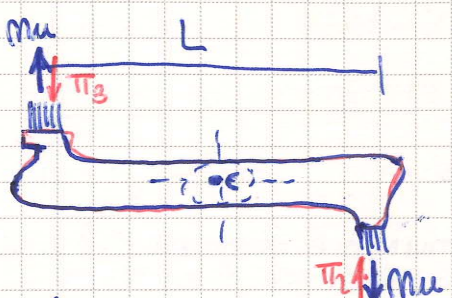
$$Q\Big|_{Q_0}^{Q} = -\frac{A_c^2 \cdot g}{L^2}\, t\Big|_{0}^{t} \rightarrow Q - Q_0 = -\frac{A_c^2 \cdot g}{L^2} \cdot t$$

$$Q(t) = Q_0 - \frac{A_c^2 \cdot g}{L^2} \cdot t$$

$Q(h=h_0)$

$$F = \rho \frac{Q^2}{A_c} \rightarrow F(t) = \rho \frac{4}{\pi D^2 \cdot e_c}\left(Q_0 - \frac{e_c^2 \pi^2 D^4}{16 L^2} g t\right)^2$$

<u>Es.</u> UN MULINELLO IDRAULICO RUOTA INTORNO ALL' ASSE C. $v$ È LA VELOCITÀ DEI GETTI USCENTI DAI 2 BOCCAGLI AVENTI ALLO SBOCCO DIAMETRO PARI A 5 cm.
DETERMINARE LA COPPIA NECESSARIA PER TENERE FERMO IL MULINELLO.

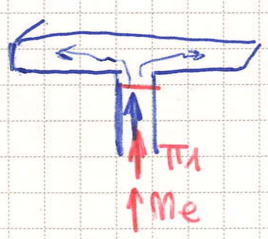



$\gamma = 9806\ N/m^3$

$v = 3\ m/s$

$d = 0{,}05\ m$

$L = 0{,}4\ m$




$=0$ ← $v$ È COSTANTE

$$\underbrace{\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{M}_e - \vec{M}_u}_{\vec{\Pi}_1 + \vec{S}_{M\rightarrow F} + \underset{=0}{\vec{\Pi}_2} + \underset{=0}{\vec{\Pi}_3}} + \cancel{\vec{I}} = 0$$

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{S}_{M\rightarrow F} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = 0$$

$$-\vec{S}_{M\rightarrow F} = \vec{S}_{F\rightarrow M} = \vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

DETERMINANO UNA ROTAZIONE INTORNO A C: $\vec{M}_u$

$$M_u = \rho V^2 A = 1000 \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} = 17{,}67\ N$$

$$\text{COPPIA} = \rho V^2 \cdot A \cdot L = 1000 \cdot 3^2 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} \cdot 0{,}4 = 7{,}1\ Nm$$

QUINDI, PER TENERE IL MULINELLO FERMO OCCORRE ESERCITARE UNA COPPIA UGUALE E CONTRARIA.

$0{,}12 + 0{,}\ 89 - \dfrac{0{,}013}{h^2}$

SI INIZIA TRASCURANDO L'ALTEZZA CINETICA A MONTE DELLA PARATOIA $(0{,}013/h^2 = 0) \Rightarrow h' = 1{,}01$.

IL VALORE OTTENUTO VIENE INSERITO NELLA FORMULA DI $h$:

$$h = 0{,}12 + 0{,}\ 89 - \frac{0{,}013}{1{,}01^2} \Rightarrow h'' = 0{,}99$$

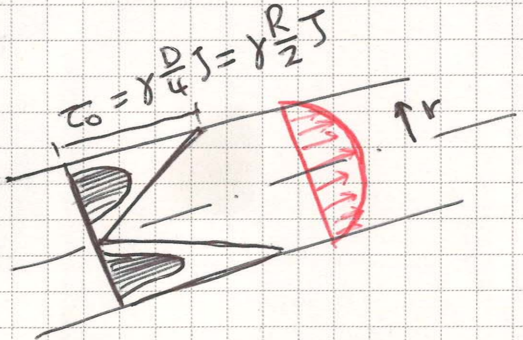
SI CONTINUA IN QUESTO MODO FINO AD OTTENERE UN' UGUAGLIANZA. ESSA SI OTTIENE PER $h = 0{,}99\,m$.

$$\Pi_1 = 9806 \cdot 2 \cdot 0{,}99 \cdot \frac{0{,}99}{2} = 9611\ N$$

$$M_e = \frac{1000 \cdot 1}{4 \cdot 0{,}99} = 253\ N$$

$$F_{F \to P} = -F_{P \to F} = 9611 - 141{,}2 + 253 - 4167 = 5555{,}8\ N$$

PROFILO DI VELOCITÀ PER UNA CONDOTTA CIRCOLARE E MOTO UNIFORME




$\tau = -\mu \dfrac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{u'v'}$ (MOTO TURBOLENTO)

$\tau = -\mu \dfrac{du}{dr}$ (MOTO LAMINARE)

SICCOME IL MOTO È UNIFORME IL PROFILO DI VELOCITÀ SI RIPETERÀ NELLE VARIE SEZIONI DELLA CONDOTTA.

- MOTO TURBOLENTO

$$\gamma \frac{r}{2} J = -\mu \frac{d\bar{u}}{dr} + \rho \overline{u'v'}$$

$$d\bar{u} = -\frac{\gamma J}{\mu} \frac{r}{2} dr + \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'}\, dr$$

$$\bar{u} = -\frac{\gamma J}{\mu \cdot 2} \frac{r^2}{2} + \int_0^r \frac{\rho}{\mu} \overline{u'v'}\, dr + C_1$$

IL VALORE DI $C_1$ SI CALCOLA IMPONENDO LA CONDIZIONE AL CONTORNO $r = D/2 \Rightarrow \bar{u} = u_p$ (CONDIZIONE DI ADERENZA DEL FLUIDO ALLA PARETE).

$$Q=\int_A \mu(r)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{D/2}\mu(r)\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{D/2}\frac{\gamma J}{4\mu}\left[\frac{D^2}{4}-r^2\right]r\,dr\,d\theta=$$

$$=2\pi\frac{\gamma J}{4\mu}\int_0^{D/2}\left(\frac{D^2}{4}-r^2\right)r\,dr=\frac{2\pi\gamma J}{4\mu}\left[\frac{D^2}{4}\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big|_0^{D/2}\right]=$$

$$=2\pi\frac{\gamma J}{4\mu}\left(\frac{D^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{D^2}{4}-\frac{1}{4}\frac{D^4}{16}\right)=\frac{2\pi\gamma J}{4\mu}\frac{D^4}{16}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=$$

$$=\frac{2\pi\gamma J}{4\mu}\frac{D^4}{16}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi\gamma J}{\mu}\cdot\frac{D^4}{128}$$ ← FORMULA DI POISEUILLE

PORTATA CHE PASSA ALL'INTERNO DI UNA CONDOTTA CIRCOLARE DI DIAMETRO D QUANDO IL FLUIDO HA VISCOSITÀ $\mu$ E PESO SPECIFICO $\gamma$ SOTTO L'AZIONE DI UN'ASSEGNATA CADENTE J ED IL MOTO È LAMINARE

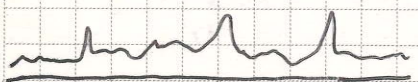
$$V_{MEDIA}=\frac{Q}{A}=\frac{\frac{\cancel{\pi}\gamma J}{\mu}\cdot\frac{D^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{128}\,32}}{\cancel{\pi}\cancel{D^2}/\cancel{4}}=\frac{\gamma J}{\mu}\cdot\frac{D^2}{32}=\frac{1}{2}V_{MAX}$$

SOLO SE MOTO LAMINARE

PER LE VARIE APPLICAZIONI È IMPORTANTE TROVARE DELLE FORMULE CHE INDICANO DA COSA È INFLUENZATA LA CADENTE J E COME CALCOLARLA.

LA CADENTE J, E QUINDI LE PERDITE DI CARICO, DIPENDE SICURAMENTE DALLA VISCOSITÀ DEL FLUIDO E DALLA TURBOLENZA.

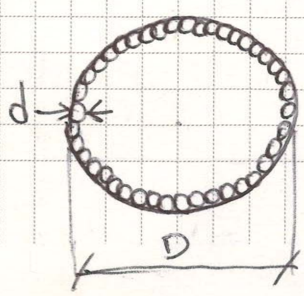
SE LA PARETE DELLA TUBAZIONE PRESENTA DELLE ASPERITÀ (SCABREZZA) SI HANNO DEI DISTACCAMENTI DI VORTICI E QUINDI SONO CAUSA DI INSTABILITÀ DEL MOTO CON CONSEGUENTI DISSIPAZIONI DI ENERGIA.



$\varepsilon$: SCABREZZA ASSOLUTA [L]

LA SCABREZZA VIENE DEFINITA IN TERMINI DI PERDITE DI CARICO CHE CAUSA.

## ESPERIMENTO DI NIKURADZE




SI FANNO ADERIRE, ATTRAVERSO DEL COLLANTE, DEI GRANULINI DI SABBIA OMOGENEA ALL'INTERNO DELLA TUBAZIONE.
IN QUESTO CASO, IL VALORE DI SCABREZZA È DATO DAL DIAMETRO DEL GRANULINO.

LE TUBAZIONI IN COMMERCIO UTILIZZANO UNA SCABREZZA EQUIVALENTE: SI CALCOLA LA PERDITA DI

* MOTO TURBOLENTO COMPLETAMENTE SVILUPPATO E TUBI LISCI : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log_{10}\left(\frac{1}{3{,}71}\frac{\varepsilon}{D}\right)$

PER DISTINGUERE IL MOTO TURBOLENTO DI TRANSIZIONE DA QUELLO COMPLETAMENTE SVILUPPATO SI USA $Re^*$.

$$Re^* = \frac{u^* \varepsilon}{\nu} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \cdot \frac{\varepsilon}{\nu} = \sqrt{\frac{\gamma D J}{4 \rho}} \cdot \frac{\varepsilon}{\nu} = \sqrt{\frac{\gamma \cancel{D}}{4} \frac{\lambda v^2}{2g\cancel{D}\cdot\rho}} \cdot \frac{\varepsilon}{\nu} =$$

VELOCITÀ D'ATTRITO

$$= \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \cdot \underbrace{\frac{v \cdot D}{\nu}}_{Re} \cdot \frac{\varepsilon}{D} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}}\, Re \cdot \frac{\varepsilon}{D}$$

$Re^* > 70$ : MOTO TURBOLENTO COMPLETAMENTE SVILUPPATO

$Re^* < 5$ : MOTO TURBOLENTO DI TRANSIZIONE IN TUBO LISCIO

$5 < Re^* < 70$ : MOTO TURBOLENTO DI TRANSIZIONE IN TUBO SCABRO

## PROF. BOANO

### DISSIPAZIONI ENERGETICHE

QUALUNQUE FLUIDO IN MOVIMENTO, PER EFFETTO DI ATTRITI E ALTRI FENOMENI, DISSIPA DELL'ENERGIA.
QUESTE DISSIPAZIONI DI ENERGIA SI TRADUCONO IN:

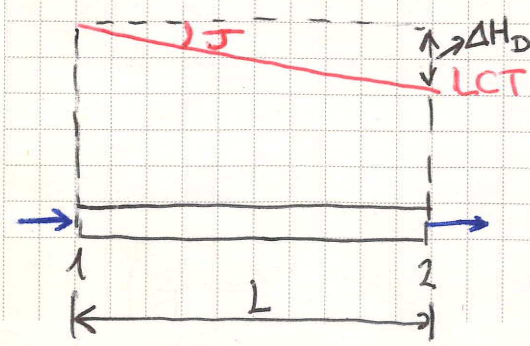
- PERDITA DI CARICO (TOTALE) → $\Delta H$

DOVUTE A SFORZI TANGENZIALI $\tau_{visc.} + \tau_{turb.}$

FLUIDI → PERFETTI ($\tau = 0$) → H = COSTANTE (NO DISSIPAZIONI D'ENERGIA)
└→ REALI ($\tau \neq 0$) ↔ DISSIPAZIONI ENERGETICHE → H DIMINUISCE

### PERDITE DI CARICO DISTRIBUITE

SI VERIFICANO SU TUTTA LA LUNGHEZZA INTERESSATA DAL FLUIDO.




IL PUNTO CHIAVE È DETERMINARE J, SPESSO INDICATA COME PENDENZA MOTRICE (O CADENTE PIEZOMETRICA).