



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1674A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Bertone

MATERIA: Scienza delle Costruzioni II + Temi + Eserc.
Prof. Chiaia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

RIASSUNTI - TEMI D'ESAME - ESERCIZI

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI II

Programma del corso 2014/15

Docenti: Titolare Prof. Bernardino Chiaia
Coadiutore Dott. Alberto Saporea

1. STRUTTURE IPERSTATICHE

- Cap 14 ✗ Metodo degli spostamenti; calcolo automatico dei telai; travi reticolari piane, telai piani a nodi fissi o a traversi rigidi, grigliati piani, telai spaziali.
- Cap 11 ✗ Metodo degli elementi finiti: cenni.
- Cap 12 ✗ Simmetria strutturale. cap 12 libro 2
- Cap 15 ✗ Telai piani a nodi fissi e a nodi spostabili; carichi termici e spostamenti imposti; telai a maglie non ortogonali.

2. STRUTTURE BI- E TRI-DIMENSIONALI

- Cap 10 ✗ Travi piane ad asse rettilineo e curvilineo: dualità statico-cinematica. Trave su suolo elastico.
- Cap 10 ✗ Lastre piane inflesse: dualità statico-cinematica. Equazione di Sophie Germain con condizioni al contorno. Cenni su lastre a doppia curvatura.
- Cap 12 ✗ Lastre di rivoluzione; membrane e gusci sottili; lastre circolari e lastre cilindriche.

3. DINAMICA DELLE STRUTTURE E PLASTICITA'

- ✗ Sistemi ad un grado di libertà: oscillazioni libere e oscillazioni smorzate. Sollecitazioni armoniche, periodiche, impulsive e generiche. Oscillatore elastico non-lineare; oscillatore elasto-plastico.
- ✗ Sistemi a molti gradi di libertà; rapporto di Rayleigh; metodo di Stodola-Vianello.
- ✗ Sistemi continui. Analisi modale delle travi inflesse. Lastre vibranti.
- ✗ Metodo degli elementi finiti in regime dinamico; dinamica delle strutture intelaiate.
- Cap 18.3 ⊕ Cenni sulla plasticità: analisi incrementale nei sistemi di travi.

Domande scritte:

- ~~Teorema di Dini?~~ NO
- Equazione di Sophie - Germain
- Dinamica dell'oscillatore con smorzamento
- Calcolo automatico dei Telai
- Equilibrio nei gusci assialsimmetrici
- Dinamica dei sistemi continui
- Serbatoio cilindrico in pressione
- Teoria delle lastre piane inflesse
- Analisi modale delle strutture a più gradi di libertà

- Spettro di risposte
- oscillatore elasto-plastico
- oscillatore elastico non lineare
- eq. equilibrio Traslazione lungo la normale nelle lastre di rivoluzione non caricate simmetricamente.
- cenni sulla plasticità

Che sarebbe $\sum_{i=1}^{g \times m} L_{ij} d_j = F_i$

Le funzioni $\{n_k\}$ di forma sono definite su sottodomini dell'intero dominio V .
 Un tipo di funzioni di forma sono le funzioni di Lagrange, esse assumono valore unitario in un nodo e valore nullo su tutti gli altri che compongono il proprio dominio di definizione. All'aumentare dell'ordine della funzione aumenta il grado di precisione.

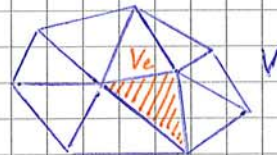
In generale ad ogni nodo K si associa una funzione di Lagrange n_k e si associano g vettori di dimensioni g .

$$\begin{matrix}
 1 & n_k & 0 & \dots & 0 \\
 2 & 0 & n_k & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 g & 0 & 0 & \dots & n_k \\
 & 1 & 2 & \dots & g
 \end{matrix} \quad K=1,2,\dots,m$$

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

Si consideri un dominio elastico V e si suddivida in m sottodomini V_e (detti ELEMENTI FINITI) e ogni elemento contenga m punti nodali.

Nelle zone in cui si hanno intagli si applicano le mesh. A ciascuno degli m punti si associa una



funzione di forma, e quindi una matrice diagonale chiamata MATRICE DI FORMA di g vettori.

$$[n_k] = \begin{bmatrix} n_k & & & \\ & n_k & & \\ & & \ddots & \\ & & & n_k \end{bmatrix} \quad K=1,2,\dots,m$$

vale la proprietà $[n_k]_s = [\delta_k]_s = \begin{cases} [1] & s=K \\ [0] & s \neq K \end{cases}$

• Il campo vettoriale di spostamento u è rappresentabile come

$$\{u_e\}_{g \times 1} = [n_e]_{g \times (g \times m)} \{S_e\}_{(g \times m) \times 1} \quad g = \text{grad. di libertà} \quad m = \text{nodi dell'elemento } V_e$$

• Il vettore delle caratteristiche deformative si ottiene per derivazione:

$$\{q_e\}_{(d \times g) \times 1} = [D]_{(d \times g)} \{u_e\}_{g \times 1} = [D][n_e] \{S_e\} = [B_e] \{S_e\}$$

Si avrà quindi: $[K_e]\{S_e\} = \{F_e\} + \{P_e\}$

$$[K_e][A_e]\{S^e\} = [A_e]\{F^e\} + [A_e]\{P^e\}$$

premultiplicando per $[A_e]^T$ si ottiene:

$$\underbrace{[A_e]^T [K_e] [A_e]}_{[K^e]} \{S^e\} = \underbrace{[A_e]^T [A_e]}_{[I]} (\{F^e\} + \{P^e\})$$

$$[K^e]\{S^e\} = \{F^e\} + \{P^e\}$$

Sommando Tutti gli elementi finiti si ha:

$$\sum [K^e]\{S^e\} = \sum (\{F^e\} + \{P^e\})$$

Si ottiene

$$[K]\{S\} = \{F\}$$

PLV

$$[K] = [L]$$

$$[L]\{S\} = \{F\}$$

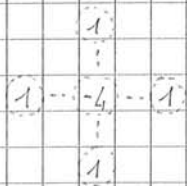
METODO RITZ-GALERKIN

Se si considera l'equazione di Sophie-Gumoin per le lastre ovvero

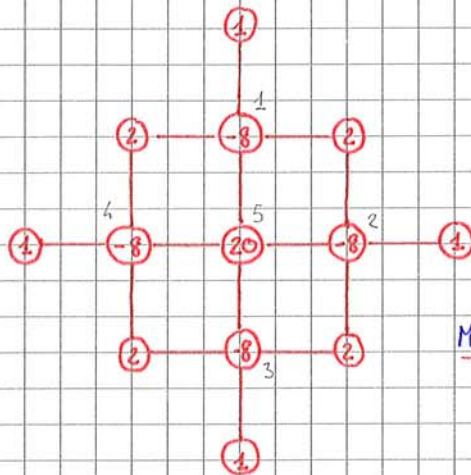
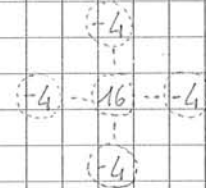
$$\nabla^4 f = \nabla^2(\nabla^2 f)$$

Per ottenere il laplaciano del laplaciano basterà centrare la molecola di calcolo con i vertici della molecola stessa.

1, 2, 3, 4

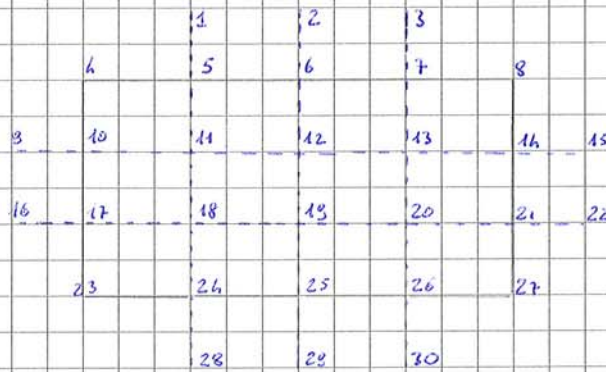


5



MOLECOLA DI CALCOLO per le LASTRE

Lastre doppiamente incrostate, avremo 30 equazioni in 30 incognite



E52

Tirone rigido di forma asimmetrica

A deformazione avvenute il Tirone risultare ruotato di un angolo φ rispetto alla condizione indeformata.

$$\textcircled{1} \delta_i = \frac{X_i \cdot l_i}{E_i A_i} = \delta + \varphi x_i \quad \text{CONGRUENZA}$$

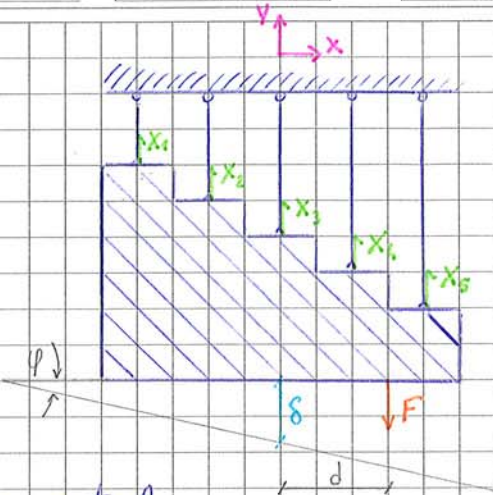
Ton $\varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$ per angoli piccoli

Le equazioni riducenti sono due equilibrio Traslazione verticale ed equilibrio alla rotazione in senso.

$$\left. \begin{aligned} F &= \sum X_i \\ F \cdot d &= \sum X_i \cdot x_i \end{aligned} \right\} \begin{aligned} F &= \delta \left(\sum \frac{E_i A_i}{l_i} \right) + \varphi \left(\sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i \right) \\ F \cdot d &= \delta \left(\sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i \right) + \varphi \left(\sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i^2 \right) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} X_i = \frac{E_i A_i}{l_i} (\delta + \varphi x_i)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \sum \frac{E_i A_i}{l_i} & \sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i \\ \sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i & \sum \frac{E_i A_i}{l_i} x_i^2 \end{array} \right] \text{MATRICE DI RIGIDEZZA DEL SISTEMA, simmetrica per il teorema di Betti.}$$



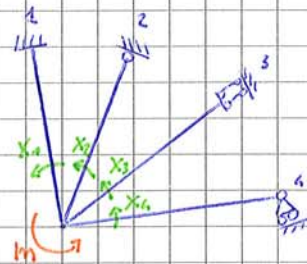
SISTEMI DI TRAVI IN PARALLELO

E53

Considero n Travi collegate tra loro da un nodo - incastro e vincolate in un modo qualsiasi all'altra estremità.

A deformazione avvenute il nodo incastro risultare ruotato di un angolo φ per cui

$$\textcircled{1} \varphi_i = \frac{X_i \cdot l_i}{c_i \cdot E_i \cdot I_i} = \varphi$$



c_i è coefficiente che dipende dal vincolo cui è soggetta la Trave:

$$c_1 = 4 \quad c_2 = c_4 = 3 \quad c_3 = 1$$

È più difficile far ruotare una Trave incastata che una incerniata quindi c è maggiore.

NB da Rigidezza dipende da vincoli c_i e modulo elastico E

CALCOLO AUTOMATICO DEI TELAI

Si consideri un sistema di Travi rettilinee contenute nel piano

Tipologie di nodi e parametri cinematici che ne caratterizzano

la configurazione elastica:

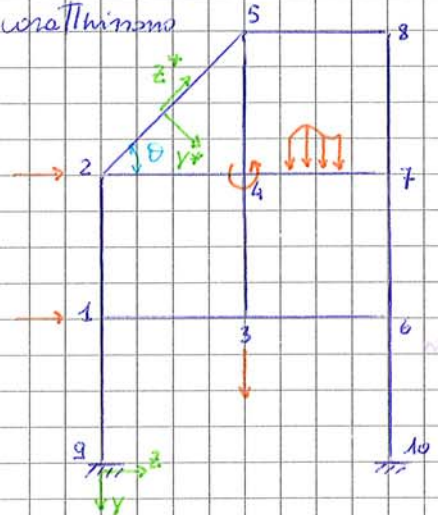
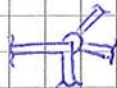
INCASTRO : 3 → 2 Traslazioni
1 rotazione



CERNIERA : 2+h → 2 Traslazioni
h rotazioni



MISTO : 3+h → 2 Traslazioni
h+1 rotazioni



- Numero di nodi e quindi le Travi
- Ogni Trave si dispone in un riferimento locale y^*z^*
- Si isola ciascuna Trave i_j e la si considera incastata nelle sezioni Terminali.
- Si impongono ai Tre spostamenti generalizzati, a ciascun estremo, φ_i, w_i, v_i
- φ_s, w_s, v_s e se ne calcolano le reazioni $M_i, N_i, T_i, M_s, N_s, T_s$
- Assunti positivi (rotazioni e spostamenti) verso entrambi gli estremi.



Si ottiene la

M_i	$4le$	$-6le^2$	0	$2le$	$6le^2$	0	φ_i	M_i^0
T_i	$-6le^2$	$12le^3$	0	$-6le^2$	$-12le^3$	0	v_i	T_i^0
N_i	0	0	A/le	0	0	$-A/le$	w_i	N_i^0
M_s	$2le$	$-6le^2$	0	$4le$	$6le^2$	0	φ_s	M_s^0
T_s	$6le^2$	$-12le^3$	0	$6le^2$	$12le^3$	0	v_s	T_s^0
N_s	0	0	$-A/le$	0	0	A/le	w_s	N_s^0

Vettore incognite iperstatiche

MATRICE DI RIGIDEZZA

Vettore spostam.

Vettore Forze equivalenti al carico esterno

TELAI SPAZIALI

Sono sistemi nelle Tre dimensioni di Troni rettilinee, riavvolte reciprocamente ed eteronome con ingostri, asinire cilindriche e sferiche. Nel caso di modi- ingostri i parametri cinematici sono 6: $N, \bar{T}_x, \bar{T}_y, M_x, M_y, M_z$ per ogni nodo i e s , e cui corrispondono gli spostamenti $u, v, w, \phi_x, \phi_y, \phi_z$. La matrice di rigidità è data dalla combinazione di quella dei Telai piani e dei grigliati piani. (PAGINA 124)

EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \epsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_y}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N_z \\ M_x \end{bmatrix}$$

$$\{q\} = [H]^{-1} \{Q\} \leftrightarrow \{Q\} = [H] \{q\}$$

PROBLEMA ELASTICO DELLA TRAVE RETTILINEA

note equazioni: statiche, cinematiche e costitutive, si ottiene equazione di Lamé

$$[D]^* [H] [D] \{u\} = - \{F\}$$

L = operatore di Lamé

$$[L] = [D]^* [H] [D]$$

6x6 6x6 6x6 6x6

Imponiamo le condizioni al contorno: $[N]^T \{Q\} = \{Q_0\}$

$$\{u\} = \{u_0\}$$

Problema elastico è così sintetizzato:

$$[L] \{u\} = - \{F\} \quad \text{pu} \quad 0 < z < l$$

$$[H] [D] \{u\} = \{Q_0\} \quad \text{pu} \quad z=0, l$$

$$\{u\} = \{u_0\} \quad \text{pu} \quad z=0, l$$

DUALITÀ STATICO-CINEMATICA:

L'operatore matriciale delle equazioni statiche $[D]^*$ è uguale al trasposto dell'operatore matriciale delle equazioni cinematiche $[D]$ a meno dei termini finiti che cambiano segno.

$$[D]^*_{\text{stat}} = [D]^T_{\text{cin}}$$

DESCRIZIONE CINEMATICA

da spostamento assiale w produce una rotazione dell'angolo $\varphi(w) : \varphi(w) = \frac{w}{r}$

da spostamento radiale v produce una dilatazione assiale $\varepsilon(v) : \varepsilon(v) = \frac{v}{r}$

In seguito alla rotazione relativa infinitesima $d\varphi$ delle sezioni estreme del conico, l'angolo tra le sezioni può essere dato dalla somma $(d\vartheta + d\varphi)$, la nuova curvatura sarà: $\chi_{TOTALE} = \frac{(d\vartheta + d\varphi)}{ds}$

$d\varphi$ = curvatura meccanica dovuta a sezioni esterne

$d\vartheta$ = curvatura geometrica intrinseca

da rotazione di curvatura reale: $\chi = \chi_{TOT} - \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}$

Forma Matriciale:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \varepsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/ds & -1/r & +1 \\ 1/r & d/ds & 0 \\ 0 & 0 & d/ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \{q\} = [\delta] \{u^*\}$$

EQUAZIONI COSTITUTIVE

Se il raggio di curvatura è molto superiore alle dimensioni caratteristiche della sezione retta della Trave, possiamo usare le equazioni della Trave ad asse rettilineo.

$$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \varepsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\gamma/LA & 0 & 0 \\ 0 & 1/EA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_y \\ N_z \\ M_x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \{q\} = [\delta] \{u^*\} & \text{eq. cinematiche} \\ \{q\} = [H] \{Q\} & \{u^*\} \{Q\} + \{F^*\} = \{0\} & \text{eq. statiche} \\ \{Q\} = [L] \{q\} & \{q\} = [L^{-1}] \{Q\} & \text{eq. costitutive} \end{cases}$$

Forma matriciale di rotazione si ha: $\{F^*\} = [N] \{F\}$ e $\{u^*\} = [N] \{u\}$

Sostituendo: $[\delta]^* \{Q\} + [N] \{F\} = \{0\}$

$$\{q\} = [\delta] [N] \{u\}$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) $[\delta]^* [H] [\delta] [N] \{u\} + [N] \{F\} = \{0\}$

Per moltiplicare per $[N]^T$: $([N]^T [\delta]^* [H] [\delta] [N]) \{u\} = -\{F\}$ EQ. LAME

b) $\lambda^4 = -4\beta^4$ soluzione equazione omogenea omogenea

$v(z) = e^{\beta z} (C_1 \cos \beta z + C_2 \sin \beta z) + e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z)$ soluzione generale

vale a prescindere che si sia carico concentrato o distribuito.

Le costanti C_1, C_2, C_3, C_4 sono da ricavare imponendo le condizioni al contorno.

FORZA CONCENTRATA SU TRAVE ILLIMITATA

Struttura simmetrica caricata simmetricamente.



si studia la soluzione per z positive poi si ricolta.

Dobbiamo trovare le costanti C_1, C_2, C_3, C_4 :

■ per $z \rightarrow \infty$, $v(z) = 0$ spostamento nullo, il primo termine diverge e il secondo tende a zero quindi $C_1 = C_2 = 0$ $\rightarrow v(z) = e^{-\beta z} (C_3 \cos \beta z + C_4 \sin \beta z)$

■ Nel punto applicazione F, per simmetria, $z=0$ la rotazione è nulla $\phi = -\frac{dv}{dz} \Big|_{z=0} = 0$
 $\beta(C_3 - C_4) = 0 \rightarrow C_3 = C_4 = C$ generica costante $\rightarrow v(z) = C e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z)$

■ Per simmetria il taglio in $z=0$ deve essere pari a $T(0) = -EI v'' \Big|_{z=0} = -\frac{F}{2} \rightarrow C = \frac{F\beta}{2K}$

ricorrendo $v(z) = \frac{F\beta}{2K} e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z)$ soluzione per forza concentrata

Per equilibrio a traslazione verticale $F = 2 \int_0^{\infty} K v dz \rightarrow F = \frac{2K}{\beta} \rightarrow C = \frac{F\beta}{2K}$

La soluzione sarà:

$v(z) = \frac{F\beta}{2K} e^{-\beta z} (\cos \beta z + \sin \beta z) = \frac{F\beta}{2K} A\beta z$

$\phi(z) = -\frac{dv}{dz} = \frac{F\beta^2}{K} e^{-\beta z} \sin \beta z = \frac{F\beta^2}{K} B\beta z$

$M(z) = -EI \frac{d^2v}{dz^2} = \frac{F}{4\beta} e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z) = \frac{F}{4\beta} C\beta z$

$T(z) = -EI \frac{d^3v}{dz^3} = -\frac{F}{2} e^{-\beta z} (\cos \beta z) = -\frac{F}{2} D\beta z$

Per tracciare i diagrammi, per $v(z)$ e $M(z)$ vedo e ribolto le equazioni mentre

per $\phi(z)$ e $T(z)$ cambio anche di segno.

LASTRE PIANE

Le lastre sono elementi tridimensionali in cui una dimensione è trascurabile rispetto alle altre due, tale dimensione è detta SPESORE.

Le lastre piane sono solidi cilindrici le cui generatrici sono di almeno un ordine di grandezza inferiori alle dimensioni delle basi (vedi l'opposto di ciò che accade nel solido di Saint-Venant)

Considerando una lastra piana di spessore h sollecitata da forze distribuite ortogonali alle basi e vincolata sul contorno.

IPOTESI KIRCHHOFF: assume che i segmenti ortogonali al piano medio, a deformazione avvenuta, restano ortogonali al piano medio deformato.



Lo spostamento di un generico punto P di

coordinate x, y, z sarà descritto dalle componenti:

$$\begin{cases} u = \phi_x \cdot z = -\frac{\partial w}{\partial x} \cdot z \\ v = \phi_y \cdot z = -\frac{\partial w}{\partial y} \cdot z \end{cases}$$

IPOTESI CINEMATICA

indica che tutti i punti appartenenti allo stesso segmento $\Rightarrow w = w(x, y)$

ortogonale al piano medio si spostano della stessa quantità.

In derivazione si ottiene il CAMPO DEFORMATIVO:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right) \cdot z = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \cdot z & \gamma_{xy} &= z \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y}\right) = z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right) \cdot z = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \cdot z & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

L'ipotesi di Kirchhoff genera quindi uno stato

deformativo piano le tre componenti significative

della deformazione sono:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \chi_x \cdot z \\ \epsilon_y = \chi_y \cdot z \\ \gamma_{xy} = \chi_{xy} \cdot z \end{cases}$$

In un n.o si ha: $M'_x = M_x + \frac{dM_x}{dx} dx$ $M'_y = M_y + \frac{dM_y}{dy} dy$ $T'_x = T_x + \frac{\delta T_x}{\delta x} dx$ $T'_y = T_y + \frac{\delta T_y}{\delta y} dy$

$M'_{xy} = M_{xy} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} dx$ $M'_{yx} = M_{yx} + \frac{\delta M_{yx}}{\delta y} dy$

Stipando equilibrio a rotazione e traslazione reticolare si ha:

+ \downarrow $-T_x dy + (T_x + \frac{\delta T_x}{\delta x} dx) dy + (T_y + \frac{\delta T_y}{\delta y} dy) dx - T_y dx + q dx dy = 0$
 $\frac{\delta T_x}{\delta x} dx dy + \frac{\delta T_y}{\delta y} dx dy + q dx dy = 0 \longrightarrow \frac{\delta T_x}{\delta x} + \frac{\delta T_y}{\delta y} + q = 0$

x \curvearrowright $M_{xy} dy - (M_{xy} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} dx) dy + M_y dx - (M_y + \frac{\delta M_y}{\delta y} dy) dx + T_y dx \frac{dy}{2} + (T_y + \frac{\delta T_y}{\delta y} dy) dx \frac{dy}{2} = 0$
 $-\frac{\delta M_{xy}}{\delta x} dx dy - \frac{\delta M_y}{\delta y} dx dy + \frac{\delta T_y}{\delta y} dx \frac{dy^2}{2} + T_y dx dy = 0 \longrightarrow \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta M_y}{\delta y} - T_y = 0$
infinitesimo sup.

y \curvearrowright $\longrightarrow \frac{\delta M_{yx}}{\delta y} + \frac{\delta M_x}{\delta x} - T_x = 0$

$\frac{\delta M_x}{\delta x} + \frac{\delta M_y}{\delta y} - T_x = 0$

$\frac{\delta M_y}{\delta y} + \frac{\delta M_{xy}}{\delta x} - T_y = 0$

$\frac{\delta T_x}{\delta x} + \frac{\delta T_y}{\delta y} + q = 0$

EQUAZIONI INDEFINITE
DI EQUILIBRIO

Si indicano con δx e δy gli accrementi dati agli sposti toglienti T_x e T_y :

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta x_x \\ \delta x_y \\ \delta x_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 1 & 0 \\ \partial/\partial y & 0 & 1 \\ 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{bmatrix}$$

Forma MATRICIALE

$\{q\} = [\delta] \{m\}$

EQUAZIONI CINEMATICHE

Si eliminano in modo analogo:

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & -1 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Forma MATRICIALE

$[\delta^*] \{Q\} + \{F\} = \{0\}$

EQUAZIONI STATICHE

EQUAZIONE DI SOPHIE GERMAIN

Considero le equazioni indefinite di equilibrio di una lamina

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial y} - T_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_{xy}}{\partial x} - T_y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0 \quad (3)$$

Derivo la (1) rispetto a x e la (2) rispetto a y e sostituisco entrambe nella (3)

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial T_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\rightarrow (3) \rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x \partial y} + q = 0 \quad (4)$$

Dalle equazioni costitutive si ha:

$$H_x = D(X_x + \nu X_y) \Rightarrow D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$H_y = D(X_y + \nu X_x) \Rightarrow D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = H_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D X_{xy} \Rightarrow -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Da Kirchhoff (teoria del piano)

$$E_x = X_x z = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z$$

$$E_y = X_y z = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z$$

$$\gamma_{xy} = X_{xy} z = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot z$$

Sostituisco equazioni costitutive nella (4) eq. della Trasmissione lungo z:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

EQUAZIONE DI SOPHIE GERMAIN

Viene anche detta equazione differenziale del quarto ordine relativa al PIANO ELASTICO

Considerando l'operatore Laplaciano $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ quindi, in modo sintetico

possiamo scrivere $\nabla^4 w = \frac{q}{D}$

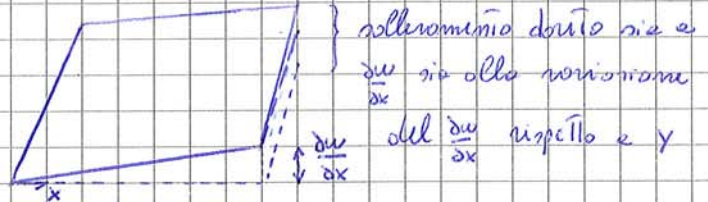
Relativamente ad un punto della lamina inflessa, si dicono:

- a) Dirizioni principali dei momenti, le dirizioni \perp secondo cui $M_{xy} = 0$ e quindi annullano le tensioni tangenziali $T_{xy} = 0$. Coincidono con dirizioni principali delle tensioni.
- b) Dirizioni principali delle usature, quelle in cui si annulla l'angolo unitario di torsione $\chi_{xy}/2$. Se materia isotropa le due dirizioni coincidono.

RUOLO DEL MOMENTO TORCENTE NELLE LASTRE

La costruzione delle travi piane sulle direzioni x e y per piastre in fibre composite che si siano 2 ordini di strisce (11_x e 11_y) che hanno comportamento simile a quello delle Travi.

Abbiamo praticamente una rotazione delle fibre di normale x di un angolo α .



d'effetto di questo Twist è che un punto non si trova più sullo stesso piano rispetto agli altri 3.

I diagrammi e sforzi σ_x e σ_y si annullano in corrispondenza del piano neutro. d'equazione di Sophie Germain è tanto più solida quanto più il rapporto tra i lati a e b è pari a 1 (lastre quadrate).

Il momento torcente è importante vicino ai bordi. Quando una striscia si inflette la sua ortogonale è soggetta a Tensione.

d'effetto Torsionale è forte sui bordi mentre scompare in maniera.

Se una lastre ha dimensioni molto diverse da a e b , le strisce più corte hanno rigidità maggiore e quindi subiranno maggiori sollecitazioni: lavorare di più. Si possono sempre più uno un sistema Trave.

In ordine al problema basterà disporre la armatura in diagonale in modo da ripristinare il doppio ordine di strisce.

Nelle lastre sottili il TABUO è Trasversabile.

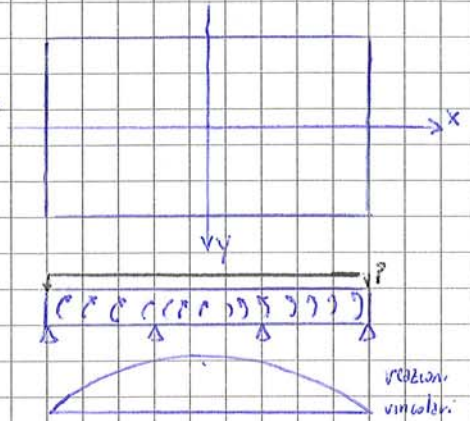
LASTRE RETTANGOLARI

M_x e M_y sono momenti principali solo sulle direttrici di inerzia.

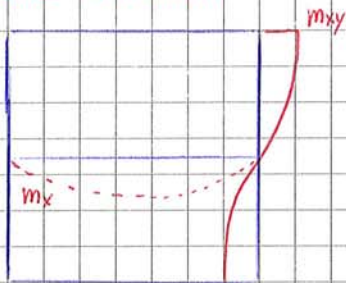
Il momento Torsione è nullo in inerzia.

Per impedire sollevamento degli spigoli dovuto al momento Torsione è necessario che i vincoli siano bilateri.

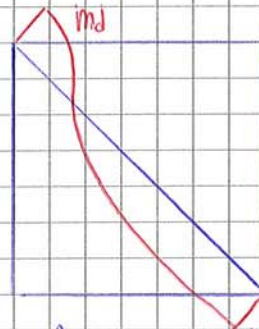
Da bilateralità del vincolo può nascere momenti negativi sugli spigoli.



LASTRE QUADRATE



Il momento Torsione sullo spigolo è più grande del momento flettente massimo.



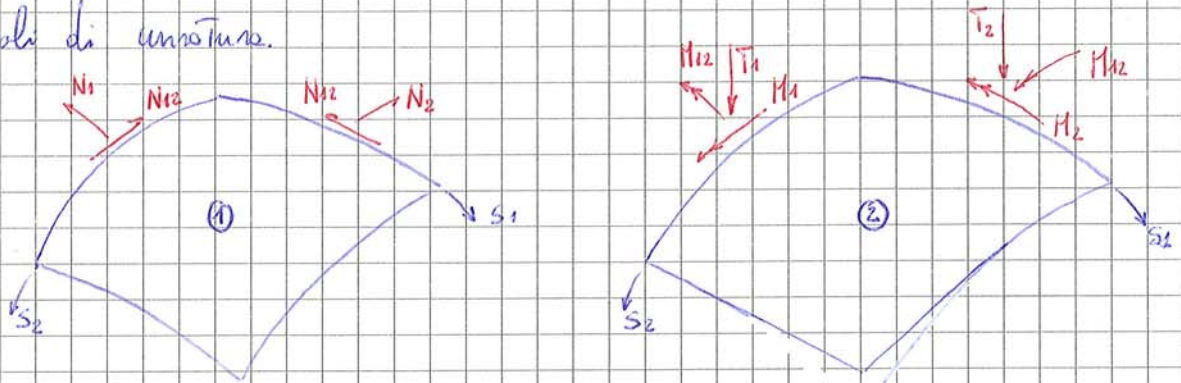
Se la piastra si allunga e il rapporto dei lati supera 2 l'effetto torsione è trascurabile.

LASTRE A DOPPIA CURVATURA

Considero lastre di spessore h (role Kirchhoff), la cui superficie media sia a doppia curvatura. Ho sistema di coordinate unilineari principali s_1, s_2 sulle quali la superficie media presenta la maxime e minime curvatura.

Si pongono due problemi statici:

① REGIME MEMBRANALE: costituito dai sforzi normali N_1, N_2 e dal Taglio N_{12} contenuto nel piano Tangente e deformazioni ϵ_1, ϵ_2 e dello scorrimento ϵ_{12} Tra le direzioni principali di curvatura.



② REGIME FLESSIONALE: è costituito da sforzi Taglienti T_1, T_2 ortogonali al piano tangente, dai momenti flettenti M_1, M_2 e dal momento Torcente M_{t12} così come dagli scorrimenti γ_1, γ_2 Tra ciascuna direzione principale di curvatura e la direzione normale al piano Tangente, dalle curvatures flessionali $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$.

N.B. In questo caso i due regimi saranno combinati.

Le equazioni cinematiche sono: $\{q\} = [D] \{r\}^*$

Le equazioni indefinite di equilibrio: $[D]^* \{Q\} + \{F\}^* = \{0\}$

Le equazioni costitutive sono:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ T_1 \\ T_2 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{t12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12D}{h^3} & \nu \frac{12D}{h^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu \frac{12D}{h^3} & \frac{12D}{h^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \frac{12D}{h^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\nu) \frac{5D}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-\nu) \frac{5D}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12} \end{bmatrix} \rightarrow \{Q\} = [L] \{q\}$$

REGIME MEMBRANALE
REGIME FLESSIONALE

CAPITOLO 12: LA SIMMETRIA STRUTTURALE

LASTRE DI RIVOLUZIONE

È una lastra, generalmente a doppia curvatura, generata dalle rotazioni complete di una curva piana $r(z)$ attorno all'asse z .

Si dicono **MERIDIANI** l'insieme delle infinite configurazioni che assume la curva generatrice $r(z)$ nella sua rotazione. Si dicono **PARALLELI**

l'insieme delle infinite traiettorie circolari piane dai singoli punti della curva generatrice.

I meridiani e paralleli sono le cosiddette linee di curvatura, sulle quali può definirsi un sistema di coordinate unilineari principali s_1, s_2

s_1 = coordinate lungo meridiani $ds_1 = ds = \frac{dz}{\cos \alpha}$
 s_2 = coordinate lungo paralleli $ds_2 = r d\theta$

Per il Teorema di Meusnier il raggio r e il raggio principale di curvatura R_2 sono così legati: $r = R_2 \cos \alpha$

α = angolo Tra Tangente al meridiano e asse di simmetria

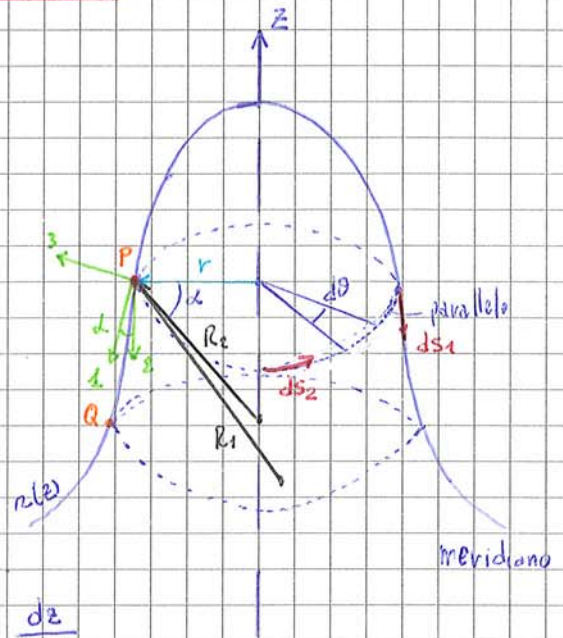
Le curvatures del raggio di curvatura R_1 sono nulle rispetto alla coordinata s_2 e

le curvatures del raggio di curvatura R_2 sono nulle rispetto alla coordinata s_1 :

$$\frac{\partial R_2}{\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{r}{\cos \alpha} \right) = \frac{\partial r}{\partial s} \left(\frac{1}{\cos \alpha} \right) + r \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s}$$

per definizione di curvatura si ha $\partial \alpha / \partial s = -1/R_1$

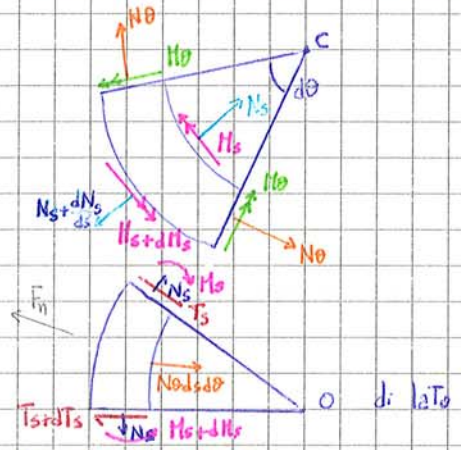
$$\frac{\partial R_2}{\partial s_1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{R_2}{R_1} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \left(1 - \frac{R_2}{R_1} \right)$$



LASTRE DI RIVOLUZIONE CARICATE SIMMETRICAMENTE

Nel caso di lastre di rivoluzione caricate simmetricamente rispetto all'asse z, le relazioni si semplificano in quanto interviene solo la coordinata unidimensionale s e si annulla lo spostamento v lungo i paralleli, le deformazioni $\gamma_{s\theta}, \gamma_{\theta s}, \chi_{s\theta}$ e le sollecitazioni interne $N_{s\theta}, T_{\theta}, M_{s\theta}$.

$$\begin{bmatrix} E_s \\ E_{\theta} \\ \chi_s \\ \chi_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d/ds & 1/R_1 & 0 \\ \frac{\sin\theta}{r} & 1/R_2 & 0 \\ -1/R_1 & d/ds & 1 \\ 0 & 0 & d/ds \\ 0 & 0 & \frac{\sin\theta}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \psi_s \\ \psi_{\theta} \end{bmatrix}$$



Si ottengono 3 equazioni di equilibrio nelle 5 incognite $N_s, N_{\theta}, T_s, M_s, M_{\theta}$

Imponendo le tre condizioni di equilibrio ad un elemento infinitesimo della lastra, delimitato da due meridiani posti a distanza infinitesima $ds_2 = r d\theta$ e da due paralleli posti a distanza infinitesima $ds_1 = ds$.

Condizione equilibrio lungo meridiani:

$$dN_s r d\theta + N_s dr d\theta - N_{\theta} \sin\theta ds d\theta + T_s \frac{ds}{R_1} r d\theta + F_s r ds d\theta = 0 \quad (1)$$

divido per $r ds d\theta$ e ottengo la 1ª equazione statica.

Condizione di equilibrio alla Traslazione lungo la normale n

$$-N_s \frac{ds}{R_1} r d\theta - N_{\theta} ds d\theta \cos\theta + dT_s r d\theta + T_s dr d\theta + F_n r ds d\theta = 0 \quad (2)$$

divido per $r ds d\theta$ e ottengo la 2ª equazione statica.

Condizione di equilibrio alle rotazioni attorno ai paralleli fornisce:

$$-T_s r d\theta ds + dM_s r d\theta + M_s dr d\theta - M_{\theta} \sin\theta ds d\theta = 0$$

divido per $r ds d\theta$ coincide con 3ª equazione statica. (3)

In forme matriciale otteniamo:

BM STUDIO MOD. 20110

MEMBRANE E GUSCI SOTTILI

MEMBRANE = elementi strutturali bidimensionali privi di rigidità flessionale; possono sostenere unicamente sforzi di trazione contenuti nel piano tangente.

GUSCI (o VOLTE) SOTTILI = lastre a doppia curvatura di spessore talmente sottile da presentare una rigidità flessionale del tutto trascurabile; possono sostenere solo sforzi di compressione contenuti nel piano tangente.

Nel caso delle membrane si presuppone una rigidità e compressione nulla e nel caso dei gusci si suppone rigidità e trazione nulla.

Saranno presenti solo gli sforzi lungo i meridiani e i paralleli N_s e N_θ , nonché gli spostamenti u e w lungo i meridiani e quelli \perp alla superficie media.

Equazioni cinematiche:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_s \\ \epsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{du}{ds} & \frac{1}{R_1} \\ \frac{w}{r} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

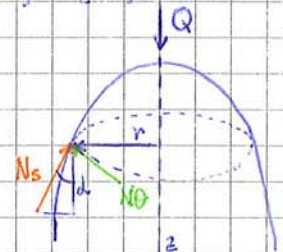
Equazioni statiche:

$$\begin{bmatrix} \frac{dN_s}{ds} & -\frac{r \sin \alpha}{r} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Relazione algebrica fondamentale lega N_s e N_θ : $\frac{N_s}{R_1} + \frac{N_\theta}{R_2} = F_n$

Dalla prima eq. statica si ottiene:

$$\frac{dN_s}{ds} + \frac{r \sin \alpha}{r} N_\theta = 0$$



$$\begin{cases} N_\theta = \left(F_n - \frac{N_s}{R_1} \right) R_2 & \textcircled{3} \\ \frac{dN_s}{ds} + \frac{\tan \alpha}{R_1} N_s = F_n \tan \alpha \end{cases}$$

$r = R_2 \cos \alpha$ $R_2 = \frac{r}{\cos \alpha}$ Teorema di Meusnier

Anche risolvendo l'equazione differenziale per la trazione N_s si può considerare l'equilibrio alle trazioni lungo z della porzione di volta sottile che rimane al di sopra da un generatore parallelo $Q = N_s \cos \alpha (2\pi r) \rightarrow N_s = \frac{Q}{2\pi r \cos \alpha}$

Moto N_s sostituito in $\textcircled{3}$ e ottenuto sforzo lungo il parallelo. Se con G_s e G_θ si indicano le forze interne trasmesse per unità di area delle sezioni, (N_s e N_θ sono forze per unità di lunghezza) si ha:

$$\frac{G_s}{R_1} + \frac{G_\theta}{R_2} = \frac{p}{h}$$

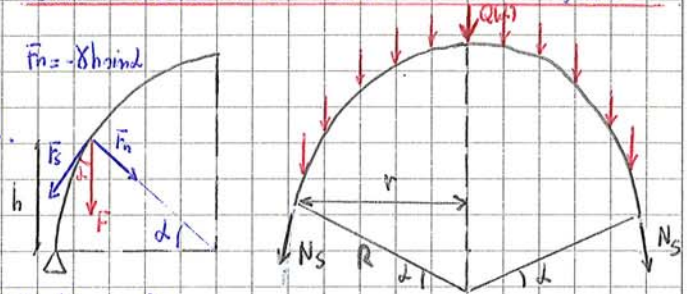
p = pressione \perp alla sup. media

CUPOLA IN MURATURA

È una lastre di rivoluzione in cui i carichi accidentali sono trascurabili, ciò che conta è il peso proprio. $F_s = \gamma h \cos \alpha$ $F_n = -\gamma h \sin \alpha$

Considero una calotta tagliata alla quota d .

$Q(d) = \int_A \gamma \cdot h \cdot dA$ $r = R \cos \alpha$ $F_s = \gamma \cdot h$



$Q(d) = 2\pi R \gamma h \int_0^{\pi/2} r \, d\alpha = 2\pi R \gamma h R \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = 2\pi \gamma R^2 h (1 - \sin \alpha)$

$Q(d) = \max$ se $\sin \alpha = 0 \rightarrow$ vicino al piede della cupola

Calcolo N_s e N_θ :

$N_s \cos \alpha (2\pi r) + Q(d) = 0$

$N_s = - \frac{Q(d)}{\cos \alpha (2\pi r)} = - \frac{2\pi \gamma R^2 h (1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha 2\pi R \cos \alpha} = - \frac{\gamma R h (1 - \sin \alpha)}{\cos^2 \alpha} = - \frac{\gamma R h (1 - \sin \alpha)}{1 - \sin^2 \alpha} = - \frac{\gamma R h (1 - \sin \alpha)}{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} = - \frac{\gamma R h}{1 + \sin \alpha}$

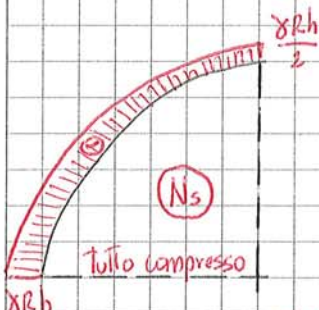
N_s è massimo al piede ($\sin \alpha = 0$) $N_s = -\gamma R h$

Dall'equazione: $\frac{N_s}{R} + \frac{N_\theta}{R} = F_n$ $F_n = -\gamma h \sin \alpha$

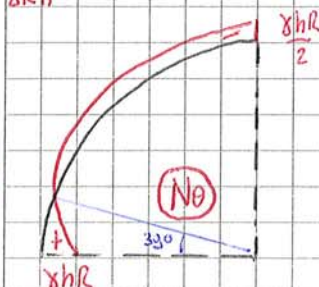
costituendo si ha: $N_\theta = -N_s + F_n R = + \frac{\gamma h R}{1 + \sin \alpha} - \gamma h R \sin \alpha = \frac{1 - \sin \alpha - \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} \gamma h R$

N_θ cambia di segno $N_\theta \rightarrow d=0 \rightarrow \sin \alpha = 0 \quad N_\theta = \gamma h R$

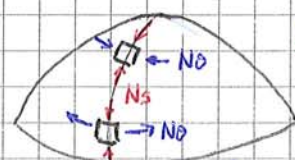
$N_\theta \rightarrow d = \frac{\pi}{2} \rightarrow \sin \alpha = 1 \quad N_\theta = -\frac{\gamma h R}{2}$



NB Se si hanno sezioni non assial simmetriche come zimm., N_s e N_θ non si comportano così. I carichi concentrati come le piastre cambiano di polinomio la una delle sezioni rispetto ai phi propri.



Quando Mohr si nota come momento Σ elevato, per causa delle trazioni



Le cupole in muratura si

finiscono, per intesa si

applicano carichi: all' imposta



$$= \int_A N_s \left(\frac{d u_s}{ds} + u_s \frac{\sin \alpha}{r} \right) r d\theta ds - \int_C N_s u_s r d\theta$$

Analogamente si avrà:

$$- \int_A \frac{\partial \bar{I}_s}{\partial s} u_n r d\theta ds = \int_A \bar{I}_s \left(\frac{d u_n}{ds} + u_n \frac{\sin \alpha}{r} \right) r d\theta ds - \int_C \bar{I}_s u_n r d\theta$$

$$- \int_A \frac{\partial \bar{I}_s}{\partial s} \varphi_s r d\theta ds = \int_A \bar{I}_s \left(\frac{d \varphi_s}{ds} + \varphi_s \frac{\sin \alpha}{r} \right) r d\theta ds - \int_C \bar{I}_s \varphi_s r d\theta$$

Sostituendo i valori in Lve si ha:

$$\begin{aligned} Lve = & \int_A N_s \left(\frac{d u_s}{ds} + \frac{\sin \alpha}{r} u_s \right) r d\theta ds - \int_C N_s u_s r d\theta - \int_A N_s \frac{\sin \alpha}{r} u_s r d\theta ds + \int_A \frac{\sin \alpha}{r} N_\theta u_s r d\theta ds + \\ & - \int_A \frac{\bar{I}_s}{R_1} u_s r d\theta ds + \int_A \frac{N_s}{R_1} u_n r d\theta ds + \int_A \frac{N_\theta}{R_2} u_n r d\theta ds + \int_A \bar{I}_s \left(\frac{d u_n}{ds} + \frac{\sin \alpha}{r} u_n \right) r d\theta ds - \int_C \bar{I}_s u_n r d\theta + \\ & - \int_A \bar{I}_s \frac{\sin \alpha}{r} u_n r d\theta ds + \int_A \bar{I}_s \varphi_s r d\theta ds + \int_A \bar{I}_s \left(\frac{d \varphi_s}{ds} + \frac{\sin \alpha}{r} \varphi_s \right) r d\theta ds - \int_C \bar{I}_s \varphi_s r d\theta - \int_A \frac{\sin \alpha}{r} \bar{I}_s \varphi_s r d\theta ds + \\ & + \int_A M_\theta \frac{\sin \alpha}{r} \varphi_s r d\theta ds + \int_C (N_s u_s + \bar{I}_s u_n + \bar{I}_s \varphi_s) r d\theta = \int_A \frac{\sin \alpha}{r} N_\theta u_s r d\theta ds - \int_A \frac{\bar{I}_s}{R_1} u_s r d\theta ds + \\ & + \int_A \frac{N_s}{R_1} u_n r d\theta ds + \int_A \frac{N_\theta}{R_2} u_n r d\theta ds + \int_A N_s \frac{d u_s}{ds} r d\theta ds + \int_A \bar{I}_s \frac{d u_n}{ds} r d\theta ds + \int_A \bar{I}_s \varphi_s r d\theta ds + \\ & + \int_A \bar{I}_s \frac{d \varphi_s}{ds} r d\theta ds + \int_A M_\theta \frac{\sin \alpha}{r} \varphi_s r d\theta ds \end{aligned}$$

Moltiplicando Lve e Lvi si ricavano le EQUAZIONI CINEMATICHE

$$E_s = \frac{d u_s}{ds} + \frac{u_n}{R_1} \quad X_s = \frac{d \varphi_s}{ds} \quad Y_s = -\frac{u_s}{R_1} + \frac{d u_n}{ds} + \varphi_s$$

$$E_\theta = \frac{\sin \alpha}{r} u_s + \frac{u_n}{R_2} \quad X_\theta = \frac{\sin \alpha}{r} \varphi_s$$

Le equazioni costitutive sono quelle relative alle lamine a doppia curvatura sotto i termini relativi a E_{12} e X_{12}

N_s	$\frac{12D}{h^2}$	$\frac{\nu 12D}{h^2}$	0	0	0	E_s
N_θ	$\frac{\nu 12D}{h^2}$	$\frac{12D}{h^2}$	0	0	0	E_θ
\bar{I}_s	0	0	$\frac{(1-\nu^2)D}{h^2}$	0	0	X_s
M_s	0	0	0	D	νD	X_θ
M_θ	0	0	0	νD	D	X_s

Nel caso in cui $N_x = 0$ dalle equazioni costitutive abbiamo

$$\begin{cases} N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta) = 0 \rightarrow \epsilon_x = -\nu\epsilon_\theta \\ N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x) = 0 \rightarrow N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta - \nu^2\epsilon_\theta) = \frac{Eh}{1-\nu^2} (1-\nu^2)\epsilon_\theta = Eh\epsilon_\theta \end{cases}$$

si da eq. cinematiche

$$\epsilon_\theta = \frac{w}{R} \rightarrow N_\theta = Eh \frac{w}{R}$$

il momento M_x è proporzionale alla curvatura χ_x , $M_x = D\chi_x$ ma $\chi_x = \frac{d^2x}{dx^2}$

$$M_x = D \frac{d^2x}{dx^2} \quad \chi_x = -\frac{dw}{dx} \quad \frac{d^2x}{dx^2} = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad \text{stituendo } M_x \text{ e } N_\theta \text{ in } \frac{d^2M_x}{dx^2} - \frac{N_\theta}{R} + q_x = 0$$

si ottiene $-D \frac{d^4w}{dx^4} - Eh \frac{w}{R^2} + q_x = 0 \rightarrow D \frac{d^4w}{dx^4} + Eh \frac{w}{R^2} = q_x$

questa equazione differenziale è formalmente identica a quella della Trave su suolo

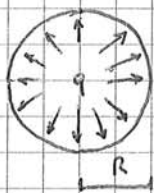
elastico $\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = 0$. Possiamo quindi scrivere l'equazione della linea elastica

nell'espressione $\frac{d^4w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{q}{D}$ ponendo $\beta = \sqrt[4]{\frac{Eh}{4DR^2}}$

Il membrino si comporta come Trave su suolo elastico avente rigidità dell'anello

poiché $\frac{Eh}{R^2}$

$D = \frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)}$ rigidezza l'anello



$\epsilon_\theta = \frac{w}{R}$

Introduciamo $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ (lunghezza d'onda)

se $\lambda < l$ le sollecitazioni alla base si smorzano prima di raggiungere la sommità. In analogia alla Trave su suolo elastico possiamo trovare una soluzione

nella forma: $w(x) = e^{-\beta(l-x)} [C_1 \cos \beta(l-x) + C_2 \sin \beta(l-x)] + \frac{\gamma R^2}{Eh} x$

(l-x) s.r. allo sommità minima sollecitazioni maximo alla base del cilindro

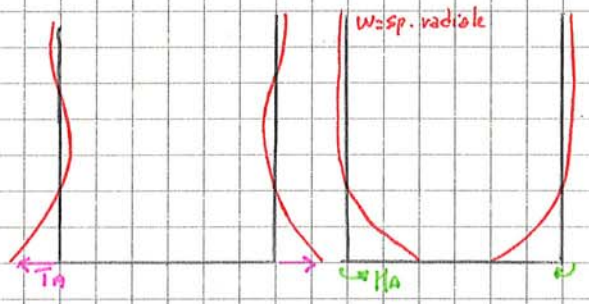
Condizioni al contorno: $w(x=l) = 0$
 $\frac{dw}{dx}(x=l) = 0$

Si oss: $C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + \frac{\gamma R^2}{Eh} l = 0$ $C_1 = -\frac{\gamma R^2}{Eh} l$

$-\beta(l-x)e^{-\beta(l-x)} [C_1 \sin \beta(l-x) - C_2 \cos \beta(l-x)] + \frac{\gamma R^2}{Eh} = 0$ $C_2 = \frac{\gamma R^2}{Eh} \left(\frac{1-\beta l}{\beta} \right)$

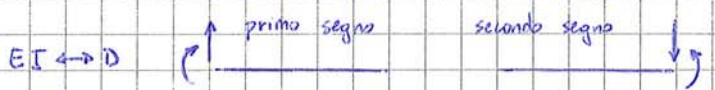
Alle base del cilindro maximo sollecitazioni. Tali che $w(z=l)$ e $\varphi(z=l)$ siano nulli, $\Pi(0) = \bar{\Pi}(0) = 0$ risultano soddisfatte in quanto le sollecitazioni si smorzano rapidamente.

$w_A = \bar{w}_A + \Lambda_{FE} T_A + \Lambda_{EM} M_A = 0$
 $\varphi_A = \bar{\varphi}_A + \Lambda_{MF} T_A + \Lambda_{MM} M_A = 0$



Dove Λ sono le adimensionalità trovate nella Trave su suolo elastico.

$\Lambda_{FE} = \frac{1}{2EI\beta^3}$
 $\Lambda_{EM} = \frac{1}{EI\beta}$ $\Lambda_{MF} = \Lambda_{FM} = \frac{1}{2EI\beta^2}$



Abanda 2° schema: $\begin{cases} \frac{\gamma R^2}{Eh} l + \frac{1}{2D\beta^3} T_A - \frac{1}{2D\beta^2} M_A = 0 \\ -\frac{\gamma R^2}{Eh} - \frac{1}{2D\beta^2} T_A + \frac{1}{D\beta} M_A = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} T_A = -\frac{\gamma}{2\beta^2} (2\beta l - 1) < 0 \\ M_A = -\frac{\gamma}{2\beta^2} (\beta l - 1) < 0 \end{cases}$

da soluzione generale ossi

$w(x) = \frac{\gamma R^2}{Eh} x - \frac{1}{2D\beta^3} T_A D_{\beta}(l-x) - \frac{1}{2D\beta^2} M_A C_{\beta}(l-x) =$
 $= \frac{\gamma R^2}{Eh} x + \frac{T_A}{2D\beta^3} e^{-\beta(l-x)} \cos \beta(l-x) - \frac{M_A}{2D\beta^2} e^{-\beta(l-x)} [\cos \beta(l-x) - \sin \beta(l-x)]$

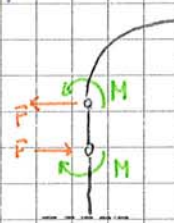
SOLUZIONE COMPLETA

Inoltre in B agiscono anche momento M, Taglio F il cui compito è quello di ripristinare la congruenza interna: la rotazione relativa e lo spostamento relativo devono essere nulli in B.

Equazioni di congruenza

$(w_B)_{SF} = (w_B)_{cl}$

$(\theta_B)_{SF} = (\theta_B)_{cl}$



Esplichiamo le due equazioni di congruenza (soluzione membranale + $(w_B)F + (w_B)M$)

$\frac{1-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q + (\lambda_{FF})_{SF} \cdot F + (\lambda_{FM})_{SF} \cdot M = \frac{2-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q + (\lambda_{FF})_{cl} \cdot F + (\lambda_{FM})_{cl} \cdot M$

$\frac{1-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q + (\lambda_{MF})_{SF} \cdot F + (\lambda_{MM})_{SF} \cdot M = \frac{2-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q + (\lambda_{MF})_{cl} \cdot F + (\lambda_{MM})_{cl} \cdot M$

Le soluzioni per il cilindro e il cilindro coimbandato:

$\lambda_{FF} = \mp \frac{1}{2D\beta^3}$

$\lambda_{FM} = \mp \frac{1}{2D\beta^2}$

$\lambda_{MM} = \mp \frac{1}{D\beta}$

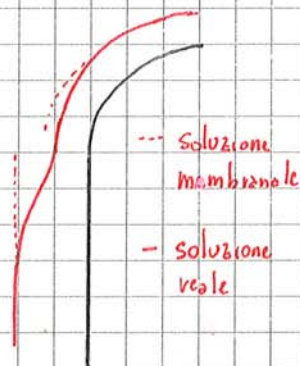
primo segno cilindro
secondo segno cilindro

Sostituendo si ha:

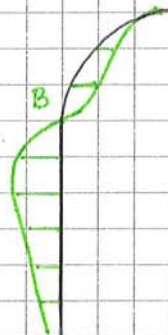
$\frac{1-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q + \frac{1}{2D\beta^3} F - \frac{1}{2D\beta^2} M = \frac{2-\nu}{2} \frac{R^2}{Eh} q - \frac{1}{2D\beta^3} F - \frac{1}{2D\beta^2} M$
 $-\frac{1}{2D\beta^2} F + \frac{1}{D\beta} M = -\frac{1}{2D\beta^2} F - \frac{1}{D\beta} M$

$F = \frac{D\beta^3 R^2}{2Eh} q = \frac{q}{8\beta}$
 $M = 0$

(B)



Deformata



Momento Ms



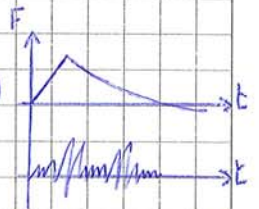
Taglio Ts

DINAMICA DELLE STRUTTURE

CAPITOLO 1: DINAMICA DEI SISTEMI DISCRETI

I carichi dinamici agenti su una struttura possono essere:

- Periodici
- Non periodici → di breve durata o impulsivi (esplosioni, urti) di lunga durata o generali (terremoti sismici)



Sistemi ad un grado di libertà: Tutte le masse e la rigidità sono concentrate in singoli elementi rappresentativi.

OSCILLAZIONI LIBERE

L'equazione del moto di una massa elementare soggetta ad una forza di richiamo elastico e ad una forza di smorzamento viscoso è:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + Kx(t) = 0$$

ove x è l'elongazione della molla elastica lineare

m è la massa

c è la costante di smorzamento viscoso

K è la rigidità della molla

non vi è nessuna forza esterna

Le forze attive: $-Kx$, sono negative in caso di elongazioni

$-c\dot{x}$, sono negative in caso di velocità positive

NB Quando tra le forze applicate alla massa non figurano forze esterne $F(t)$, ma solo forze interne (elastiche e viscoso) e pesanti (inerti), i movimenti del sistema vengono detti OSCILLAZIONI LIBERE.

La soluzione dell'equazione è:

$$x(t) = C e^{st}$$

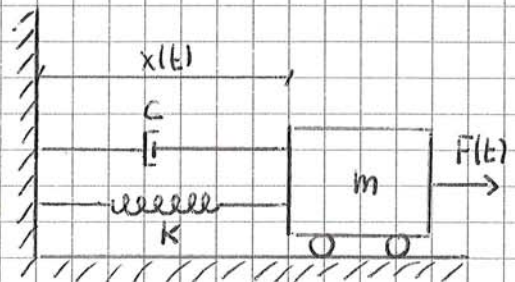
Sostituendo la soluzione nell'equazione del moto:

$$(ms^2 + cs + K)C e^{st} = 0$$

Dividendo per $mC e^{st}$ e ponendo $\frac{K}{m} = \omega^2$ ottengo:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0$$

$$\ddot{x}(t) \Rightarrow \dot{x}(\dot{x}(t)) = s \cdot s \cdot C e^{st} = s^2 C e^{st} \quad \dot{x}(t) = s C e^{st}$$



OSCILLAZIONI LIBERE CON SMORZAMENTO ($c > 0$)

da equazione del moto così quindi

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0$$

le soluzioni sono

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2}$$

Si verificano 3 tipi di moto, a seconda che la quantità sotto radice quadrata sia positiva, negativa o nulla.

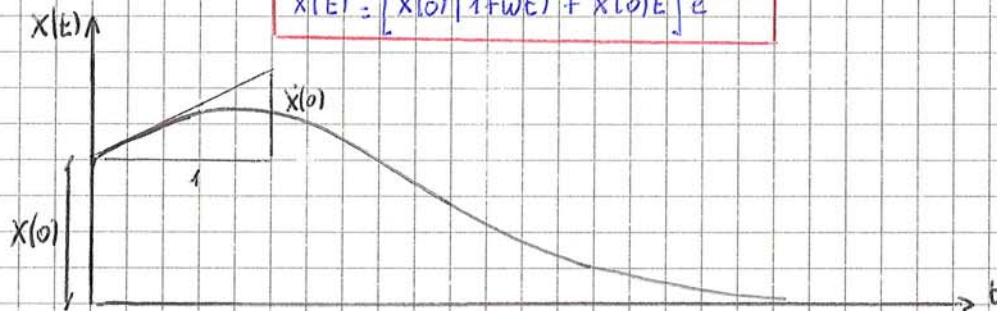
► 1° CASO → $\omega = \frac{c}{2m}$ CONDIZIONE DI SMORZAMENTO CRITICO

$$c_c = 2m\omega = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km}$$

da soluzione sono $s = -\frac{c}{2m} = -\omega \rightarrow x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega t}$

Introduco le condizioni iniziali e ottengo la forma finale delle risposte dinamiche:

$$x(t) = [x(0)(1 + \omega t) + \dot{x}(0)t]e^{-\omega t}$$



Questa risposta non presenta oscillazioni e ritorna alla posizione di equilibrio ma solo un decadimento esponenziale.

NB la condizione di smorzamento critico è quella di minima risposta per cui non si verificano oscillazioni libere.

► 2° CASO → $c < c_c = 2m\omega$ SISTEMA SOTTO SMORZATO

Si esprime lo smorzamento come rapporto tra la costante c e il valore critico

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega}$$

RAPPORTO DI SMORZAMENTO

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \rightarrow s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \rightarrow s = -\frac{\xi 2m\omega}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\xi 2m\omega}{2m}\right)^2 - \omega^2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{(\xi\omega)^2 - \omega^2}$$

STUDIO MOD. 30010

SOLLECITAZIONE ARMONICA (prima di smorzamento)

Un oscillatore armonico è soggetto a una forzante armonica $F \sin \omega t$ dove $\omega F =$ pulsazione della forzante, di equazione differenziale non omogenea:

$$m \ddot{x}(t) + K x(t) = F \sin \omega t$$

Non vi è smorzamento viscoso quindi: $\zeta = 0$

- Ho due soluzioni:
- soluzione particolare $x_p(t) \Rightarrow$ risposta generata direttamente dalla sollecitazione esterna. $x_p(t) = C \sin \omega t$
 - soluzione complementare $x_c(t) \Rightarrow$ risposte alle vibrazioni libere del sistema. $x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

Otengo l'ampiezza C sostituendo x_p nell'equazione del moto: uso soluzione particolare

$$-m C \omega^2 \sin \omega t + K C \sin \omega t = F \sin \omega t$$

$$-m C \omega^2 + K C = F$$

$$C(K - m \omega^2) = F \quad \rightarrow \quad C = \frac{F}{K - m \omega^2} \quad \text{ma } \frac{K}{m} = \omega^2 \quad \text{quindi}$$

$$C \left(\frac{K}{K} - m \frac{\omega^2}{K} \right) = \frac{F}{K} \quad \rightarrow$$

$$C \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) = \frac{F}{K} \quad \rightarrow \quad C = \frac{F}{K} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2}$$

posto $\beta^2 = \frac{\omega^2}{\omega_c^2}$ RAPPORTO DI FREQUENZA

Tra pulsazione applicata e pulsazione propria.

Soluzione del sistema è data dalla somma delle due soluzioni:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{F}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \omega t$$

A e B dipendono dalle condizioni iniziali del sistema nel caso in cui sistema è a riposo:

$$\begin{cases} x(0) = 0 & B = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 & A = -\frac{F\beta}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{F}{K} \frac{1}{1 - \beta^2} (\sin \omega t - \beta \cos \omega t)$$

NB Lo smorzamento viscoso tende ad annullare il secondo termine detto risposta TRANSITORIA, il primo termine persiste e amplificato dal FATTORE DI RISONANZA $1/(1 - \beta^2)$.

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + \frac{F}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \left[(1-\beta^2) \sin \omega t - 2\xi\beta \cos \omega t \right]$$

Il primo termine è la risposta TRANSITORIA, il secondo termine è la risposta STAZIONARIA che stima l'ampiezza della forzante ma è fuori fase rispetto ad essa.

La risposta stazionaria può anche essere scritta come

$$x_p(t) = \bar{X} \sin(\omega t - \varphi)$$

dove $\bar{X} = \frac{F}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$

$$\varphi = \arctan \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$D = \frac{\bar{X}}{F/K} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

FATTORE AMPLIFICAZIONE DINAMICA

Se $\omega = \omega_0$ siamo in RISONANZA

Se $\beta = 1$ siamo in condizioni di RISONANZA

$$x(t) = e^{-\xi \omega t} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) + \frac{F}{K} \frac{\cos \omega t}{2\xi}$$

Assumendo che allo stato iniziale il sistema si trovi nella posizione di quiete

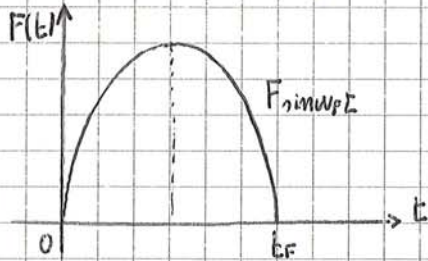
$x(0) = \dot{x}(0) = 0$ e per bassi valori di smorzamento ξ si ha $\omega \approx \omega_0$, per

smorzamento nullo applico regola di L'Hopital

$$x(t) = -\frac{1}{2} \frac{F}{K} \omega t \cos \omega t$$

SOLLECITAZIONE IMPULSIVA

È di breve durata quindi lo smorzamento viscoso non ha molta importanza, l'oscillazione



Comunque impulso sinusoidale

$$F(t) = F \sin \omega t$$

Per $t < t_F$ ho sollecitazione armonica non smorzata,

$$x(t) = \frac{F}{K} \frac{1}{1-\beta^2} (\cos \omega t - \beta \sin \omega t)$$

Per $t > t_F$ ho oscillazioni libere ed il moto dipende dallo spostamento e dalla velocità che si hanno al termine della prima fase: $x(t_F)$ e $\dot{x}(t_F)$

Equazioni delle oscillazioni libere $x(t) = \frac{x(t_F)}{\omega} \sin \omega t + x(t_F) \cos \omega t$

Quindi si avrà:

$$x(t-t_F) = \frac{\dot{x}(t_F)}{\omega} \sin \omega(t-t_F) + x(t_F) \cos \omega(t-t_F)$$

per $\beta < 1$ l'ampiezza della risposta dinamica dipende da $\frac{t_F}{T}$
 massa piccola $x(t)/F/K$ dipende da t_F/T

per $\beta > 1$ (massa pesante) la risposta dinamica massima avviene nella seconda fase quella di oscillazione libera. Ponendo $\omega t_F = \pi$ si ha

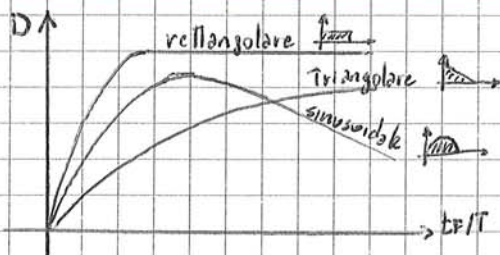
$$x(t_F) = \frac{F}{K} \frac{1}{1-\beta^2} (1 - \beta \sin \frac{\pi}{\beta}) \quad \dot{x}(t_F) = \frac{F}{K} \frac{\omega t_F}{1-\beta^2} (-1 - \cos \frac{\pi}{\beta})$$

Ampiezza delle oscillazioni è

$$\bar{X} = \frac{F/K}{1-\beta^2} \beta \left(2 + 2 \cos \frac{\pi}{\beta} \right)^{1/2}$$

$$D = \frac{\bar{X}}{F/K} \quad \text{FAATORE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICA}$$

La scelta di risposta delle sollecitazioni impulsive sarà:



Se la durata dell'impulso è breve, D è piccolo poiché la maggior parte della sollecitazione viene contrastata dall'inertza dell'oscillazione.

Se la durata dell'impulso è lunga ($t_F/T > 1$), D

dipende dalla rapidità con cui l'impulso raggiunge il massimo valore.

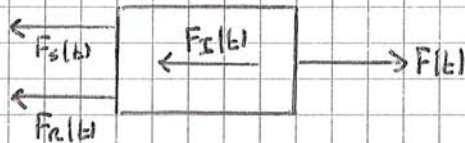
OSCILLATORE ELASTICO NON - LINEARE

Equazioni del moto a coefficienti costanti : $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$

Se il sistema non è lineare si ha: $m = m(t)$, $c = c(t)$, $k = k(t)$

Si utilizza un processo chiamato STEP BY STEP INTEGRATION, consiste nell'integrazione passo-passo da condizione di equilibrio dinamico e stabilità all'inizio e alla fine di ciascun passo, mentre la risposta completa è ottenuta avendo lo spostamento e la velocità calcolati a fine intervallo come condizioni iniziali per intervallo seguente.

Forze agenti sulla massa dell'oscillatore sono: $F_I(t) + F_S(t) + F_R(t) = F(t)$



F_I = forze inerziali F_S = forze smorzamento
 F_R = forze richiamo elastiche F = forze esterne

Inserendo un breve intervallo di tempo Δt si ha: $F_I(t + \Delta t) + F_R(t + \Delta t) + F_S(t + \Delta t) = F(t + \Delta t)$

In forma incrementale sono: $\Delta F_I(t) + \Delta F_S(t) + \Delta F_R(t) = \Delta F(t)$

Le forze incrementali saranno: $\Delta F_I(t) = F_I(t + \Delta t) - F_I(t) = m(t) \Delta \ddot{x}(t)$

$\Delta F_S(t) = F_S(t + \Delta t) - F_S(t) = c(t) \Delta \dot{x}(t)$

$\Delta F_R(t) = F_R(t + \Delta t) - F_R(t) = k(t) \Delta x(t)$

$\Delta F(t) = F(t + \Delta t) - F(t)$

$c(t) = k(t)$ sono costanti tangenti, quindi $c(t) = \frac{dF_S}{dx}$ $k(t) = \frac{dF_R}{dx}$

Sostituendo e ottengo

$m(t) \Delta \ddot{x}(t) + c(t) \Delta \dot{x}(t) + k(t) \Delta x(t) = \Delta F(t)$ EQ. INCREMENTALE MOTO

Il fondamentale è che accelerazione non linearmente dipende ciascun incremento di tempo. Ad una variazione lineare dell'accelerazione corrispondono una variazione quadratica della velocità e cubica dello spostamento.

Sviluppo in serie di Taylor nell'incubo dell'istante t si ha:

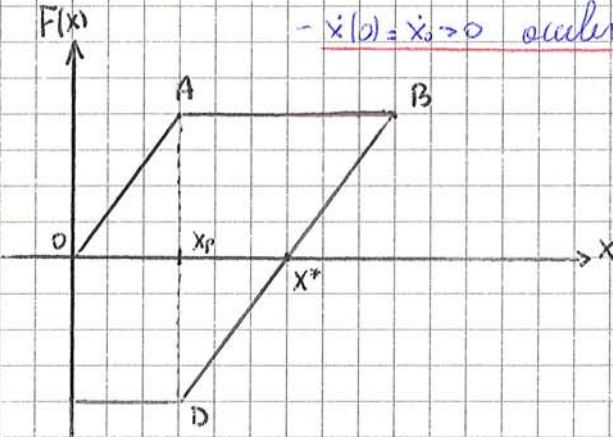
$\Delta \dot{x}(t) = \dot{x}(t) \Delta t + \frac{\Delta \ddot{x}(t)}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t^2}{2}$ a

$\Delta x(t) = \dot{x}(t) \Delta t + \ddot{x}(t) \frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta \ddot{x}(t)}{\Delta t} \frac{\Delta t^3}{6}$ b

OSCILLATORE ELASTOPLASTICO

Non lineari a partire dal materiale

- Ipotesi di base:
- comportamento del sistema perfettamente plastico
 - $c=0$ senza di smorzamento
 - $\ddot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0$ accelerazione iniziale positiva.



$F(x)$ = forze che agiscono sul sistema
 x_p = sistema comincia a plasticizzare
 x^* = deformazione permanente

Ma i tratti a comportamento elastico
l'equazione del moto è:

$$m\ddot{x}(t) + K(x(t)) = m\ddot{x}^*$$

FASE OA: $x^* = 0 \rightarrow m\ddot{x}(t) + Kx(t) = 0$

Condizioni iniziali sono $x(0) = 0$ $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 > 0 \rightarrow x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t$ oscillatore elastico lineare

FASE AB: se $\dot{x}_0 > \omega x_p$ ($\frac{\dot{x}_0}{\omega} > x_p$) risposta elastica raggiunge e supera valore plastico x_p

inizio fase plastica al tempo $t = t_1$ Tale che: $x_p = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t_1$

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega x_p}{\dot{x}_0}$$

per $t > t_1$ equazione del moto sarà:

$$m\ddot{x}(t) + Kx_p = 0$$

integrando si ottiene

$$x(t) = -\omega^2 x_p \frac{t^2}{2} + At + B$$
 soluzione parabolica

A e B sono imponendo condizioni iniziali $x(t_1) = x_p$ $\dot{x}(t_1) = \dot{x}_0 \cos \omega t_1$

sostituendo nell'equazione moto parabolica e ricavo $A = \dot{x}_0 \cos \omega t_1 + \omega^2 x_p t_1$

$$B = x_p \left(1 - \frac{\omega^2}{2} t_1^2\right) - \dot{x}_0 t_1 \cos \omega t_1$$

d'equazione assume quindi la forma:

$$x(t) = x_p \left[1 - \frac{\omega^2}{2} (t - t_1)^2\right] + \dot{x}_0 (t - t_1) \cos \omega t_1$$

$$\dot{x}(t) = -\omega^2 x_p (t - t_1) + \dot{x}_0 \cos \omega t_1$$

STUDIO MOD. 30010

Sostituzione nella forma compatta: $-w^2[M]\{A\} \sin(\omega t - \alpha) + [K]\{A\} \sin(\omega t - \alpha) = \{0\}$

ovvero: $\boxed{([K] - w^2[M])\{A\} = \{0\}}$ queste rappresenta un

problema agli autovalori in quanto il sistema di equazioni è omogeneo e la sua soluzione non è priva di significato. Dobbiamo annullare il determinante della matrice:

$$\text{Det}([K] - w^2[M]) = 0$$

l'equazione polinomiale di ordine n in w^2 costituisce l'EQUAZIONE CARATTERISTICA DEL SISTEMA ELASTICO

Per ciascun autovalore w_i si può ottenere l'autovettore $\{A_i\}$ corrispondente.

Un sistema oscillante elastico ad n gradi di libertà possiede n pulsazioni proprie così come n modi propri di vibrazione.

PULSAZIONE FONDAMENTALE = pulsazione minima tra le n pulsazioni proprie

MODO FONDAMENTALE = modo di vibrazione corrispondente alla pulsazione fondamentale

Analisi modale \rightarrow cenni \rightarrow nel caso di lastre e travi infinite, la condizione necessaria per l'analisi

è $\det([K] - w^2[M]) = 0$ dove $[K]$ e $[M]$ non sono più disponibili ma più complesse.

RAPPORTO DI RAYLEIGH

Considerando equazione di un sistema a più gradi di libertà $([K] - w^2[M])\{A\} = \{0\}$ e premoltiplicando per $\{A\}^T$ in modo da rendere una equazione scalare:

$$\{A\}^T [K] \{A\} = w^2 \{A\}^T [M] \{A\} \rightarrow w^2 = \frac{\{A\}^T [K] \{A\}}{\{A\}^T [M] \{A\}} \quad \text{RAPPORTO RAYLEIGH} \quad \text{che per un}$$

sistema ad un grado di libertà è $w^2 = k/m$

Il rapporto è minimo solo se $\{A\}$ coincide con un autovettore. Il minimo del rapporto di

Rayleigh rispetto a tutte le possibili scelte $\{A\}$ coincide con l'autovettore minimo, si verifica

questo caso quando $\{A\}$ coincide con il primo autovettore.

Da queste proprietà discende un metodo per ridurre in prima approssimazione la

frequenza fondamentale enunciando a priori la forma del primo autovettore.

Un modo alternativo per ottenere il rapporto di Rayleigh è considerare energia potenziale max

ed energia cinetica max e eguagliando tra loro le quantità: $W_{\text{max}} = \frac{1}{2} \{A\}^T [K] \{A\}$

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} w^2 \{A\}^T [M] \{A\}$$

DINAMICA DELLE STRUTTURE

CAPITOLO 2: DINAMICA DEI SISTEMI CONTINUI

ANALISI MODALE DELLE TRAVI INFLESSE

Allo scopo di analizzare le oscillazioni libere delle travi inflesse considero eq. linea elastica:

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q(z)}{EI}$$

costituisco il carico distribuito Transversale $q(z)$ con forze di inerzia:

$$q_w(z) = -\mu \frac{d^2 v}{dz^2}$$

μ = densità relativa della Trave

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = -\frac{\mu}{EI} \frac{d^2 v}{dz^2}$$

EQUAZIONE VARIABILI SEPARABILI

$$\frac{d^4 \eta}{dz^4} + \frac{\mu}{EI} \eta \frac{d^2 \eta}{dz^2} = 0$$

$$v(z, t) = \eta(z) f(t)$$

SOLUZIONE

Divido per ηf : $-\frac{d^2 \eta / dz^2}{\eta} = \frac{EI}{\mu} \frac{d^2 f / dt^2}{f} = \omega^2$ ho due equazioni differenziali:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = 0$$

equazione oscillazione armonica

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\frac{d^4 \eta}{dz^4} - \lambda^4 \eta = 0$$

$$\text{con } \lambda = \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EI}}$$

→ omette int. generale

$$\eta(z) = C \cos \lambda z + D \sin \lambda z + E \cosh \lambda z + F \sinh \lambda z$$

AB determinabili tramite condizioni iniziali e C, D, E, F tramite condizioni al contorno. ω e λ sono indeterminati (ω = pulsazione temporale, λ = pulsazione spaziale)

In il principio di sovrapposizione $v(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(z) f_i(t)$ con

$$f_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t$$

$$\eta_i(z) = C_i \cos \lambda_i z + D_i \sin \lambda_i z + E_i \cosh \lambda_i z + F_i \sinh \lambda_i z$$

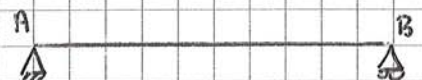
$$v(z, t) = \sum \eta_i(z) \cos \omega_i t = v_0(z) \cos \omega t$$

η_i godono di ortogonalità

da Trave oscilla proporzionalmente alle deformate iniziali e con la pulsazione corrispondente alle stesse autofrequenze. Tali oscillazioni sono i MODI NATURALI DI VIBRARE

DIFFERENTI CONDIZIONI AL CONTOURNO PER LA SINGOLA TRAVE

TRAVE SU DUE APPOGGI



Condizioni al contorno imposte all'estremo A sono:

$$\textcircled{A} \left\{ \begin{aligned} \eta(0) = C + E &= 0 \\ \eta''(0) = -\lambda^2(C - E) &= 0 \end{aligned} \right. \rightarrow C = E = 0$$

$$\textcircled{B} \left\{ \begin{aligned} \eta(L) = D \sin \lambda L + F \sinh \lambda L &= 0 & D \sin \lambda L &= 0 \\ \eta''(L) = -\lambda^2(D \cos \lambda L - F \sinh \lambda L) &= 0 & F \sinh \lambda L &= 0 \end{aligned} \right.$$

ANALISI DINAMICA DEI SISTEMI A PIU' GRADI DI LIBERTA'

Ipotisi di sistema, siamo in senza di smorzamento ($C=0$)

eq. moto $\rightarrow [M]\{\ddot{S}\} + [K]\{S\} = \{0\}$ me $\{\dot{S}\} = \{\dot{S}(t)\}$ $\{S\} = \{S(t)\}$

Si cerca una soluzione del tipo $\{S(t)\} = \{S\} \cdot f(t)$ dove si è separata la variabile spaziale da quella temporale $f(t)$. Sostituendo nell'equazione del moto:

$[M]\{S\} \ddot{f}(t) + [K]\{S\} f(t) = \{0\}$ se moltiplichiamo per $\{S\}^T$

$\{S\}^T [M] \{S\} \ddot{f}(t) + \{S\}^T [K] \{S\} f(t) = \{0\}$

$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \frac{\{S\}^T [K] \{S\}}{\{S\}^T [M] \{S\}}$ $\leftarrow \omega^2$ RAPPORTO DI RAYLEIGH

Il problema temporale da considerare è quindi $\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = \omega^2 \rightarrow \ddot{f}(t) + f(t)\omega^2 = 0$

Tale equazione è di moto armonico e presenta

soluzioni del tipo: $f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t - \varphi)$

$\{S(t)\} = \{S\} \cdot f(t) = \{S\} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

$\{\dot{S}(t)\} = \{S\} \dot{f}(t) = \{S\} (-A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t)$

elimino parti trigonometriche e sostituisco nell'equazione del moto

$-\omega^2 [M] \{S\} + [K] \{S\} = \{0\} \rightarrow ([K] - \omega^2 [M]) \{S\} = \{0\}$

EQ. FONDA. DINAMICA SIST. a piu' gradi liberta'

$\omega^2 =$ autovlori

$\{S\} =$ autovettori definiti a meno di una costante moltiplicativa.

Imponiamo

- $\text{Det} | [K] - \omega^2 [M] | = 0$ ottengo equazione di grado $n =$ gradi di liberta'
- Dagli autovlori calcolati dal polinomio caratteristico, ottengo gli autovettori che godono delle seguenti proprietà:
 - sono linearmente indipendenti
 - sono ortogonali rispetto alle due matrici $[K]$ e $[M]$

Per scegliere gli autovettori in maniera univoca si procede alla normalizzazione

m-normalizzazione:

Generalmente $m_j \neq 1$, unichiamo $\{\bar{S}_j\}$ tali che $m_j = 1$

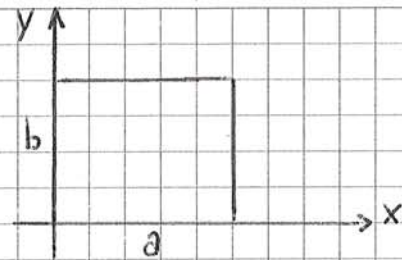
STUDIO MOD. 30010

LASTRE VIBRANTI

Siamo in regime flessionale

Si ricercano le equazioni del moto

ci sono energie meccanica (potenziale + cinetica)



$$W = \frac{1}{2} \int_A (M_x X_x + M_y X_y + M_{xy} X_{xy}) dx dy \quad \text{EN. POTENZIALE}$$

$$M_x = D(X_x + \nu X_y) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = D(X_y + \nu X_x) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = \frac{1-\nu}{2} D X_{xy} = -\frac{(1-\nu)}{2} D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$X_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$X_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$X_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$W = \frac{D}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \int_A (\dot{w})^2 dx dy \quad \text{EN. CINETICA}$$

Caso di lastra appoggiata sul contorno

Sviluppo in serie di w :
$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \sin\left(n\pi \frac{y}{b}\right) \quad \text{spostamento}$$

Risultano automaticamente soddisfatte le condizioni al contorno

$$w=0 \quad \text{per } x=0, a$$

$$w=0 \quad \text{per } x=0, b$$

$$\text{Isolm ph } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Le nuove incognite sono m e n che dipendono dal tempo.

Sostituendo w nell'energia cinetica e potenziale

$$W = \frac{\pi^4}{8} ab D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 A_{mn}^2$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_{mn}^2$$

Composizione dell'energia meccanica

$$W+T = \text{cost} \rightarrow \frac{d}{dt}(W+T) = 0 \quad \text{metodo ph ricerca equazioni del moto}$$

$$\frac{1}{2} \rho h \left(\frac{ab}{4} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_{mn} \ddot{A}_{mn} + \frac{\pi^4}{8} ab D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 A_{mn} \dot{A}_{mn} = 0$$

STUDIO MOD. 3010

CENNI SULLA PLASTICITÀ: ANALISI INCREMENTI. SISTEMI DI TRAVI

Se considero un nodo (e) incastato e un'estremità è sollecitata da una forza F all'estremità. All'aumentare della forza, il collasso plastico si raggiunge quando il momento d'incastro raggiunge il momento plastico $F_p \cdot l = M_p \rightarrow F_p = M_p / l$ e quel punto ha una rotazione relativa localizzata nella sezione di incastro, il momento non può essere oltre M_p . Il sistema può quindi essere stabile in equilibrio per la particolare condizione di carico. $F_p = \frac{3}{2} F_e$

$F_e = \text{max}$ forza applicabile nell'ambito del criterio delle tensioni ammissibili.

$\frac{3}{2}$ rapporto che rappresenta un coefficiente di sicurezza nell'ambito tensioni ammissibili nei confronti dello stato ultimo plastico.



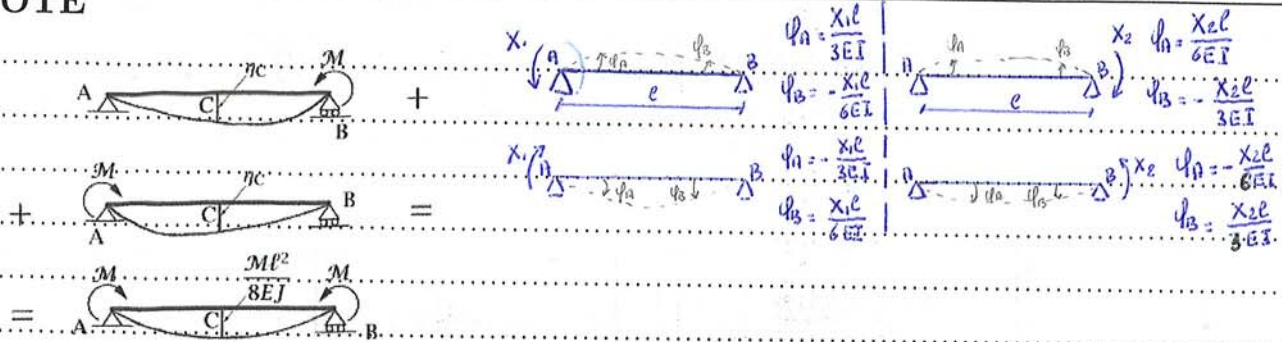
Il fattore di sicurezza $\frac{3}{2}$ vale per tutti i sistemi ipostatici di travi iperstatiche e sistemi rettangolari, una volta che si conoscano i contributi delle forze normali e taglio.

Nel caso invece dei sistemi ipostatici di travi iperstatiche, il fattore di sicurezza è maggiore di $\frac{3}{2}$. La formazione della cerniera plastica non produce infatti collasso della struttura.

Si può affermare che in un telaio n volte iperstatico, il numero delle cerniere plastiche che si attivano per il collasso è minore o uguale a $(n+1)$.

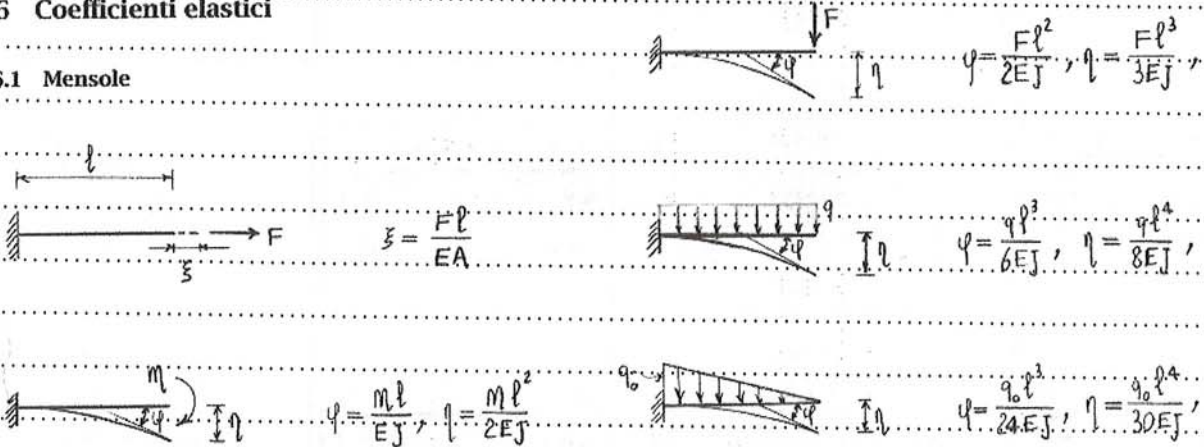
In funzione dei nodi e di come è costituita la struttura, sono possibili i cosiddetti collassi per nodi (in cui sono sufficienti - di 3 cerniere plastiche affinché si verifichi il collasso).

NOTE

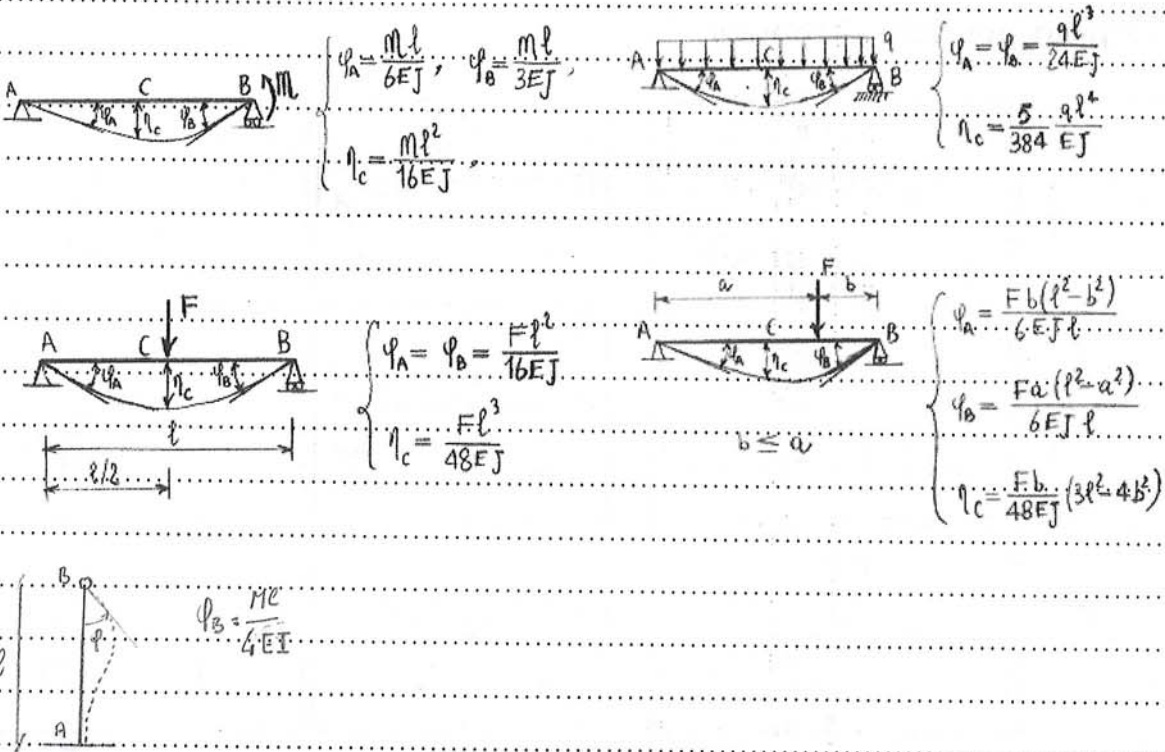


1.6 Coefficienti elastici

1.6.1 Mensole



1.6.2 Travi appoggiate



NB Quando F è ad una delle due estremità non produce rotazioni quindi non avrà il suo contributo

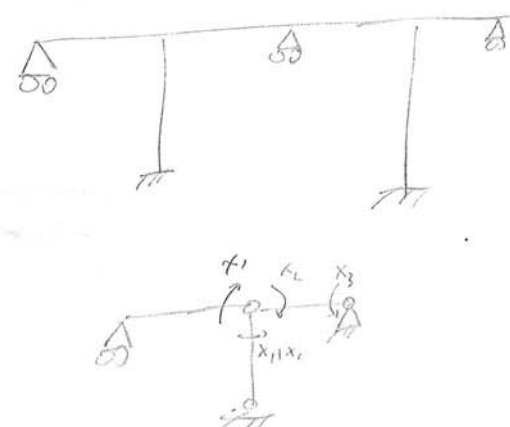
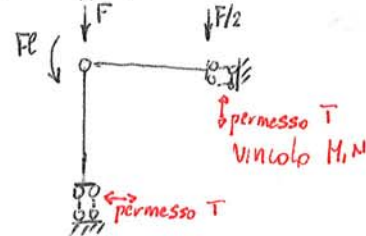
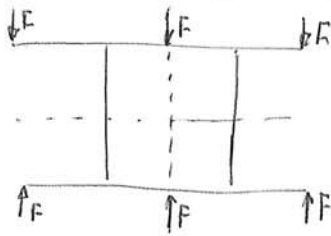
TELAI SIMMETRICI CARICATI SIMMETRICAMENTE

- Momento e Normale Simmetrici
- Taglio Antisimmetrico

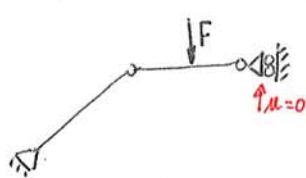
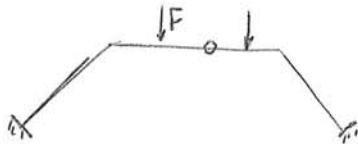
Dove ho asse di simmetria $u=0, v=0, T=0$

Tipo di vincolo nel punto di simmetria

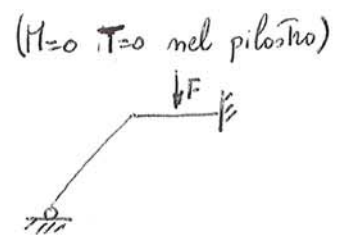
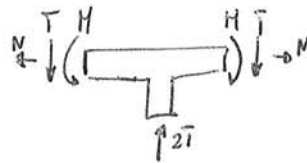
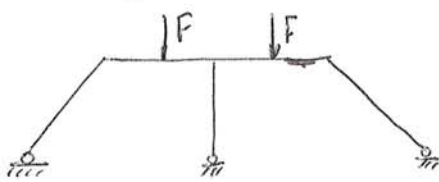
- Se ho incastro allora sostituisco con doppio pendolo



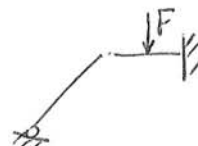
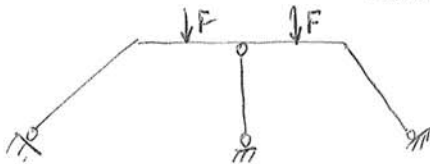
- Se ho cerniera sull'asse di simmetria allora metto conello



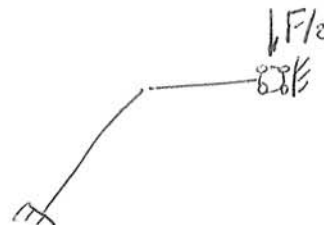
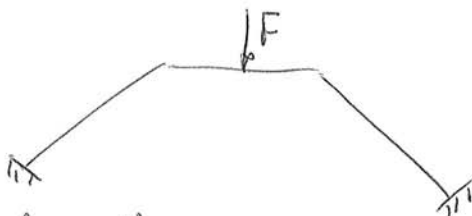
- Se ho pilastri sull'asse di simmetria



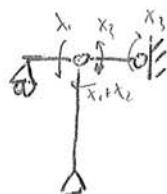
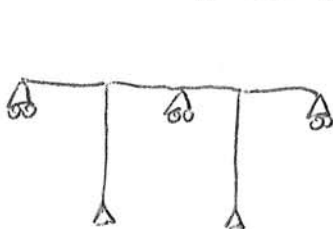
- Se biella sull'asse di simmetria (Trasmette solo forze verticali)



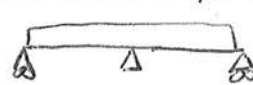
- Se ho force concentrata allora la si divide



- Se ho conello, metto cerniera



Se ho cerniera metto incastro



METODO MISTO-TELAIO

Una volta identificati il grado di vincolo e i gradi di libertà (quindi il grado di iperstaticità interno) resta a definire la RETICOLARE ASSOCIATA.

Struttura ottenuta dal telaio di partenza muovendo delle cerniere in tutti i nodi in modo (riducendo gradi di libertà e gradi di vincolo).

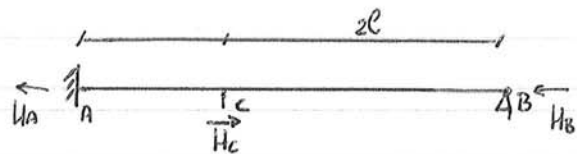
La reticolare associata è equivalente al telaio originario una volta che abbiamo applicato i carichi esterni e i momenti iperstatici.

Resta a definire le equazioni di congruenza angolare (nelle tre incognite iperstatiche)

- Se reticolare associata è iperstatica allora ora un problema di iperstaticità

ordinale (problemi a determinate sono normale N), dobbiamo tenere conto della

deformabilità ordinale del telaio



ai due estremi hanno spostamenti impediti A e B, quindi reazione nel vincolo è

inversamente proporzionale alla distanza tra vincolo stesso e punto di applicazione

della forza ordinale $H_A = \frac{2}{3} H_C$ $H_B = \frac{1}{3} H_C$

- Risoluzione Tramite applicazione del PLV, prendendo un sistema di forze reali e un sistema di spostamenti fittizio.

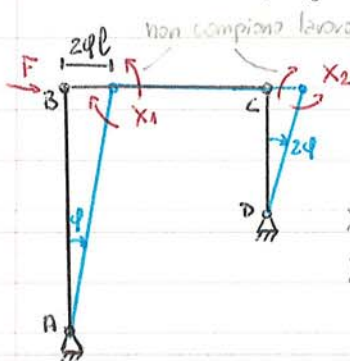
Sistema di forze (a) reale (r); e sistema di spostamenti (b) fittizio (f) costituito

dal cinematisimo delle reticolare onciaie \rightarrow loro virtuale interno è rigido quindi

deformazioni nulle $L_v = 0 \rightarrow L_v = L_{ve}$ ma $L_v = 0$ allora $L_{ve} = 0$.

Ne segue che nelle equazioni di equilibrio compaiono solo le X_i ed i cosichi

- cinematisimo (impongo rotazione φ di AB)



PLV
 $+ X_1 \varphi - X_2 2\varphi + F_2 \varphi = 0$

$\rightarrow (X_1 - 2X_2 + 2F\ell) \varphi = 0$

X_1 è orario e φ è orario - concordi

X_2 è antiorario e φ è orario - discordi

Equazione solida $\forall \varphi$ (φ è virtuale)

affinché sia nulla questa equazione

equazione di equilibrio

$X_1 - 2X_2 + 2F\ell = 0$

affinché struttura non si muova

(Potevo scriverla anche con eq. cardinali della statica con vec. vincol.)

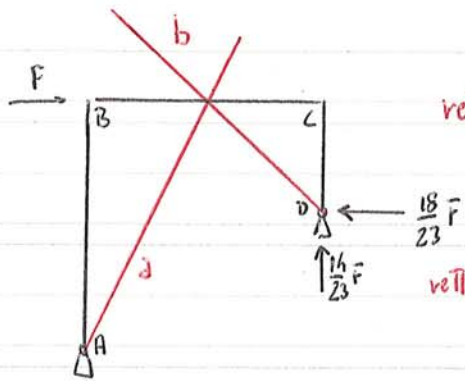
- eq. congruenza angolare \rightarrow nei Tetri a nodi mobili ho due contributi delle rotazioni

$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{BA} &= \varphi_{BC} \\ \varphi_{CB} &= \varphi_{CD} \end{aligned} \right.$

1) contributo delle deformabilità delle Tron (letto su reticolare e nodi bloccati).

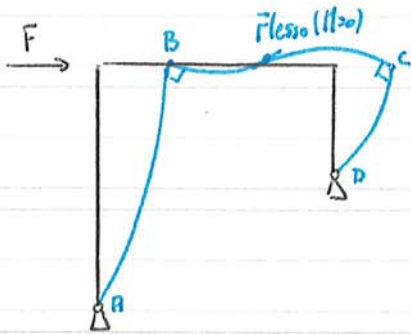
2) contributo dello spostamento rigido delle reticolare onciaie (letto sul cinematisimo).

Ⓢ



retta b: passa per il punto in cui momento si annulla in BCD

retta a: Tangente AB



Deformata dopo l'esperienza e:

- vincoli
- Traslazione nodi
- diagramma momento

nei nodi B e C Trovare e determinare queste quantità

⊛ BC Trovare quindi non ha rotazione φ_{BC} e $\varphi_{CB} = 0$

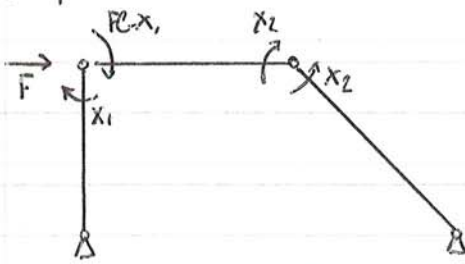
AB ruota in senso orario quindi la compressione è negativo

DC anche. \rightarrow allora $\varphi_{BA} = -\varphi$ $\varphi_{CD} = -2\varphi$

- Conguame angolare: rotazione elastica + rotazione rigida

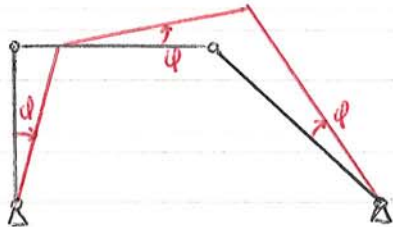
$$\begin{cases} \psi_{BA} = \psi_{BC} \\ \psi_{CB} = \psi_{CD} \end{cases} \begin{cases} -\frac{X_1 l}{3EI} - \psi = -\frac{(Fl - X_1)l}{3EI} + \frac{X_2 l}{6EI} + \psi \\ +\frac{(Fl - X_1)l}{6EI} - \frac{X_2 l}{3EI} + \psi = \frac{X_2(\sqrt{2}l)}{3EI} - \psi \end{cases}$$

Componenti rotazione elastica (Telolo fimo)



$$\psi_{BA} = -\frac{X_1 l}{3EI} \quad \psi_{CB} = \frac{(Fl - X_1)l}{6EI} - \frac{X_2 l}{3EI}$$

$$\psi_{BC} = -\frac{(Fl - X_1)l}{3EI} + \frac{X_2 l}{6EI} \quad \psi_{CD} = \frac{X_2(\sqrt{2}l)}{3EI}$$



$$\begin{aligned} \psi_{BA} &= -\psi & \psi_{BC} &= \psi \\ \psi_{CB} &= \psi & \psi_{CD} &= -\psi \end{aligned} \quad \psi \text{ e' reale.}$$

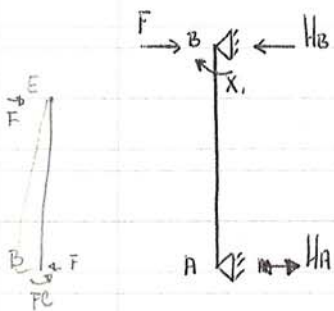
- Equazioni risolventi:

conguame angolare

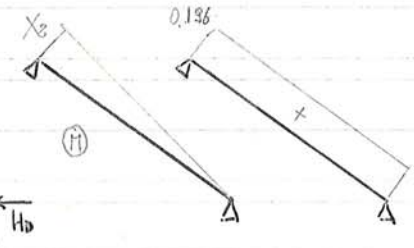
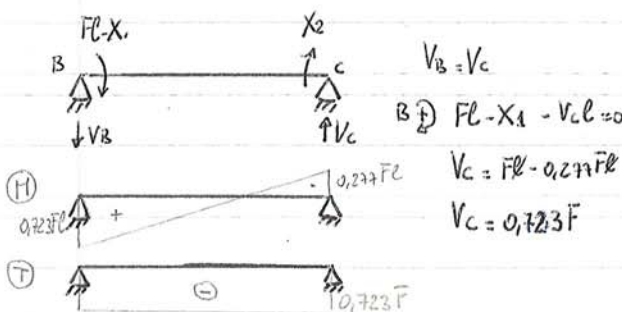
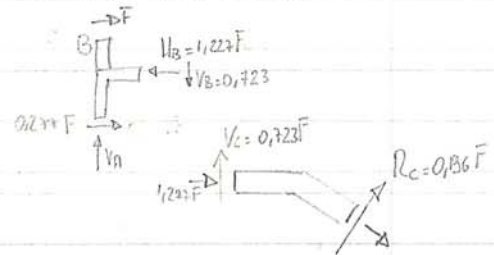
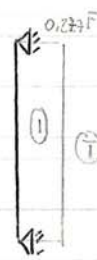
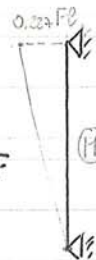
Equilibrio

$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ X_1 = X_2 \end{cases}$$

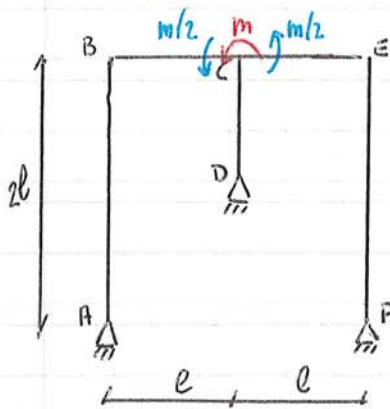
$$\begin{aligned} X_1 &\cong \frac{3}{28} (4 - \sqrt{2}) Fl \cong 0,277 Fl \\ X_2 &\cong 0,277 Fl \\ \psi &\cong + \frac{15\sqrt{2} - 4}{336} \frac{Fl^2}{EI} \cong 0,0512 \frac{Fl^2}{EI} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} H_A + H_B &= F \\ B \curvearrowright \quad X_1 + H_A l &= 0 \\ H_A &= -0,277 F \\ H_B &= F + 0,277 F = 1,277 F \end{aligned}$$

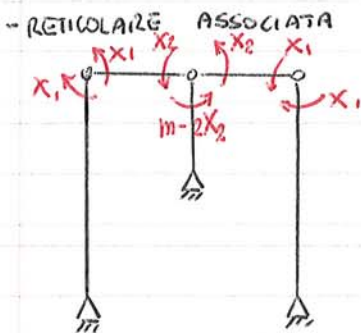


ESERCIZIO TELAIO A NODI MOBILI - STRUTTURA SIMMETRICA



$g=3$
3 volte ipostatica
 $v=6$

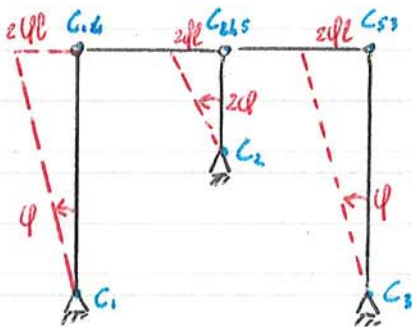
Struttura simmetrica caricata antisimmetricamente
Momento non antisimmetrico poniamo quindi scegliere coppie antisimmetriche



$g=15$ 1 volta labile
 $v=14$

I momenti sono opposti per antisimmetria in B ed E

- CINETISMO



Cinematismo antisimmetrico, quindi compatibile con carichi (antisimmetrici)

NB Se carico fosse stato simmetrico allora il cinematismo non si semplifica e quindi la struttura si sarebbe potuta risolvere come un telaio a nodi fissi

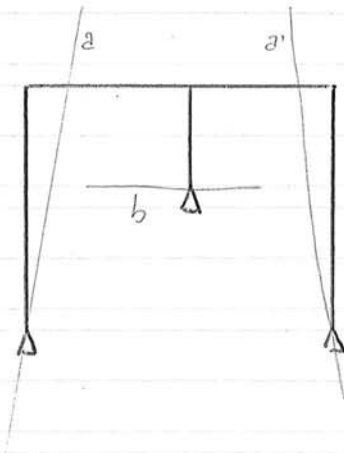
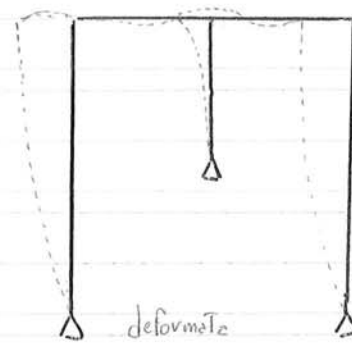
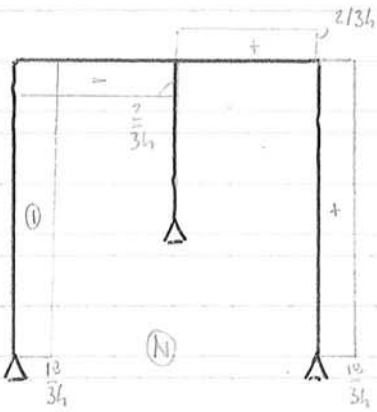
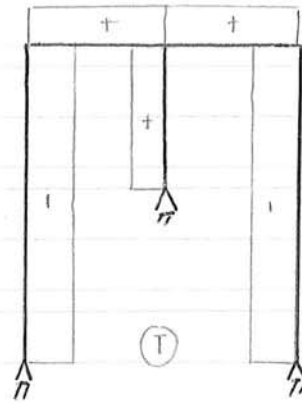
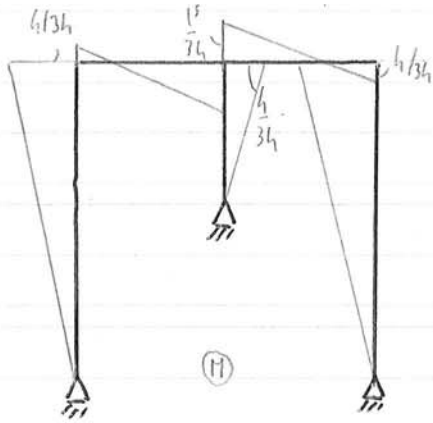
- EQUILIBRIO TRAMITE PLV

I momenti che agiscono sul Tronco non compiono lavoro in quanto non ruota ma Tronca

$$-X_1 \varphi + (m - 2X_2) 2\varphi - X_1 \varphi = 0$$

$$(m - X_1 - 2X_2) 2\varphi = 0$$

$$\boxed{X_1 + 2X_2 = m} \quad \text{Eq. EQUILIBRIO}$$

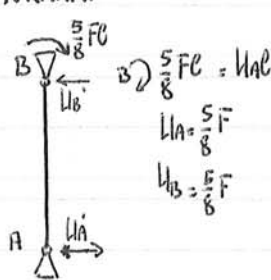


EQUAZIONI RISOLVENTI

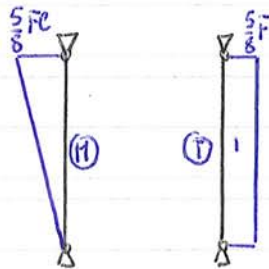
$$\begin{cases} \bar{F}l = X_1 + X_2 \\ -\frac{X_1 l}{3EI} = \frac{2X_1 l}{3EI} - \frac{Fl^2}{4EI} - \varphi \\ -\frac{X_2 l}{3EI} = \frac{2X_2 l}{3EI} - \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = X_2 + \bar{F}l \\ +\frac{X_2 l}{3EI} - \frac{Fl^2}{3EI} = -\frac{2X_2 l}{3EI} + \frac{2Fl^2}{3EI} - \frac{Fl^2}{4EI} - \varphi \\ +\frac{X_2 l}{3EI} + \frac{2X_2 l}{3EI} = +\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{Fl^2}{3EI} + \frac{2Fl^2}{3EI} + \frac{Fl^2}{4EI} = \frac{X_2 l}{3EI} + \frac{2X_2 l}{3EI} = \frac{X_2 l}{3EI} - \frac{2X_2 l}{3EI} < \frac{X_2 l}{EI} - \frac{Fl^2}{EI} + \frac{Fl^2}{4EI} = 0 \\ \frac{X_2 l}{EI} = \frac{Fl^2}{EI} - \frac{Fl^2}{4EI} = \frac{3Fl^2}{4EI} \\ X_2 = \frac{3}{4} Fl \\ \varphi = X_2 = \frac{3}{4} \frac{Fl^2}{EI} \\ X_1 = -\frac{3}{4} Fl + Fl = \frac{1}{4} Fl \end{cases}$$

- DIAGRAMMI



B) $\frac{5}{8} Fl = H_A l$
 $H_A = \frac{5}{8} F$
 $H_B = \frac{5}{8} F$

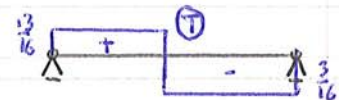


$$M(z) = -\frac{5}{8} Fl + \frac{3}{16} \cdot 2Fl - Fl = -\frac{10+16-16}{16} = 0$$

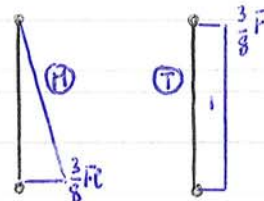
$$M(z) = -\frac{5}{8} Fl + \frac{13}{16} Fl = M(\frac{l}{2}) = -\frac{5}{8} Fl + \frac{13}{16} Fl = \frac{3}{16} Fl$$



B) $\frac{5}{8} Fl - Fl - VC l = 0 \Rightarrow VC = \frac{5}{8} F - F = -\frac{3}{8} F$
 $VB = F + VC = F - \frac{3}{16} F = \frac{13}{16} F$



B) $\frac{3}{8} Fl = H_C l$
 $H_C = \frac{3}{8} F$
 $H_D = \frac{3}{8} F$

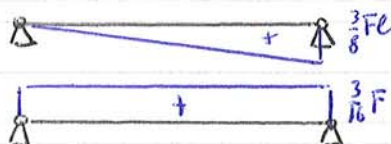


B) $H_B = \frac{5}{8} F$
 $\frac{5}{8} F = H_B \Rightarrow \frac{1}{4} V_B = \frac{13}{16} F$
 $\downarrow V_B = \frac{13}{16} F$

$V_C = \frac{3}{8} F$
 $\downarrow H_D = \frac{3}{8} F$



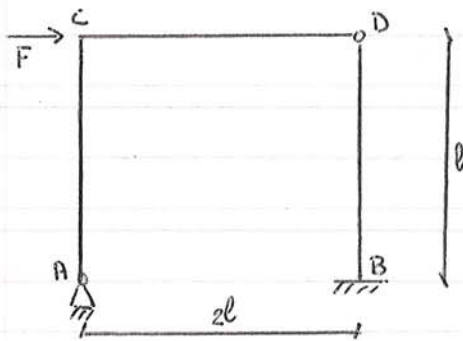
B) $\frac{3}{8} Fl = H_A l$
 $H_A = \frac{3}{8} F$
 $V_D = \frac{3}{16} F$



$H_C = \frac{5}{8} F$
 $\leftarrow H_C = F$
 $\leftarrow H_C = \frac{3}{8} F$

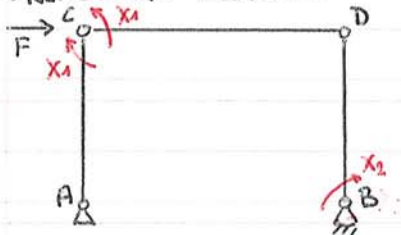
$\uparrow V_A = \frac{13}{16} F$
 $H_A = \frac{5}{8} F$
 \rightarrow
 $\rightarrow H_A = F$
 $\uparrow H_A = \frac{3}{8} F$
 $\uparrow V_A = \frac{3}{16} F$

ESERCIZIO 2.2



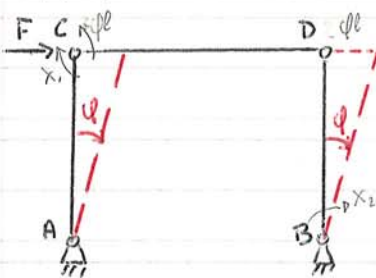
$g = 6$ 1 volta iperstatica
 $v = 7$

- RETICOLARE ASSOCIATA



$g = 3$ Congiata
 $v = 8$

- CINEMATISMO



PLV: $2Fl\phi + X_1\phi + X_2\phi = 0$

$(2Fl + X_1 + X_2)\phi = 0 \quad \forall \phi$

$Fl = -X_1 - X_2$ EQ. EQUILIBRIO

- CONGRUENZA ANGOLARE

$$\begin{cases} \phi_{CA} = \phi_D \\ \phi_{BD} = 0 \end{cases}$$

Componenti di rotazione elastica

$$\phi_{BD} = -\frac{X_2 l}{3EI}$$

$$\phi_{CA} = -\frac{2X_1 l}{3EI} \quad \phi_{CD} = \frac{X_1 l}{3EI}$$

Componenti rotazione rigida

$$\phi_{AC} = \phi \quad \phi_{CD} = 0 \quad \phi_{DB} = \phi$$

- EQ. RISOLVENTI

$$\begin{cases} \phi - \frac{X_2 l}{3EI} = 0 \\ \phi - \frac{2X_1 l}{3EI} = \frac{X_1 l}{3EI} \\ Fl = X_1 - X_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi = \frac{X_2 l}{3EI} \\ \frac{X_2 l}{3EI} - \frac{2X_1 l}{3EI} = \frac{X_1 l}{3EI} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_2 = 3X_1 \rightarrow X_2 = -\frac{3}{4}Fl \\ Fl = -4X_1 \rightarrow X_1 = -\frac{Fl}{4} \\ \phi = \frac{X_2 l}{3EI} \rightarrow \phi = -\frac{4Fl}{3EI} \end{cases}$$