NUMERO: 1672A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Tecniche di modellazione numerica. Prof.Gugliotta

Tecniche di modellazione numerica

$\boxed{\text{MONDO REALE}}$ ⟹ STUDIARE IL PROBLEMA (protesi, impianto)

(femore, protesi)

⇓

OBIETTIVO

⇓

FUNZIONALITÀ ⟸ ? RISULTATI (del modello)

STUDIARE IL PROBLEMA (protesi, impianto) $\xRightarrow{\text{ipotesi}}$ $\boxed{\text{MODELLO MATEMATICO}}$

MODELLO MATEMATICO → analitici / numerici ⇒ RISULTATI (del modello)

La parte fondamentale è il modello matematico, che si evolve con le conoscenze (ad esempio negli anni 60' si modellizzava il femore come una trave, analizzata con le ipotesi di De Saint-Venant). I metodi matematici possono essere analitici o numerici, ma richiedono 4 parametri entrambe:

(A) - GEOMETRIA

(B) - MATERIALE (modulo di Young, Poisson...)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 136

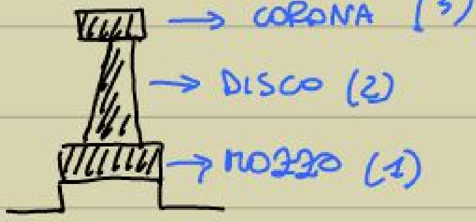
I carichi sono l'aspetto più critico, perché sono parzialmente sconosciuti (si può fare un'analisi statistica al massimo, ci basiamo su parametri statistici)! Fino a quando non si usa l'oggetto strutturale progettato, non si ha certezza sul carico.

I vincoli sono approssimati, ma abbiamo sempre le 3 scelte della meccanica strut-turale.

Il materiale si valuta con le prove speri-mentali, la geometria si modella facilmente con sistemi CAD.

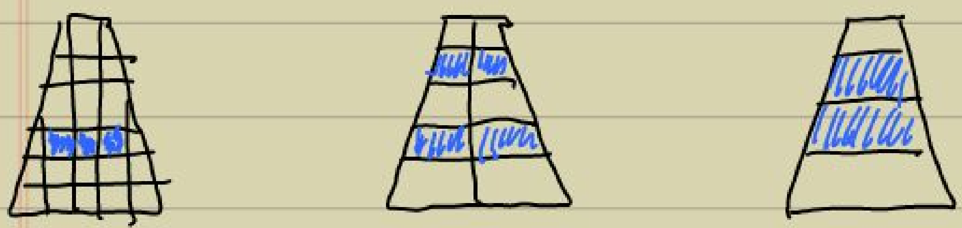
- L'aspetto critico del carico sarà quindi una delle ipotesi di progetto da fare!

- calcolare lo spostamento, questo vale per strutture SEMPLICI, composte da elementi trave, ma per una struttura più complessa come:



CONTINUO

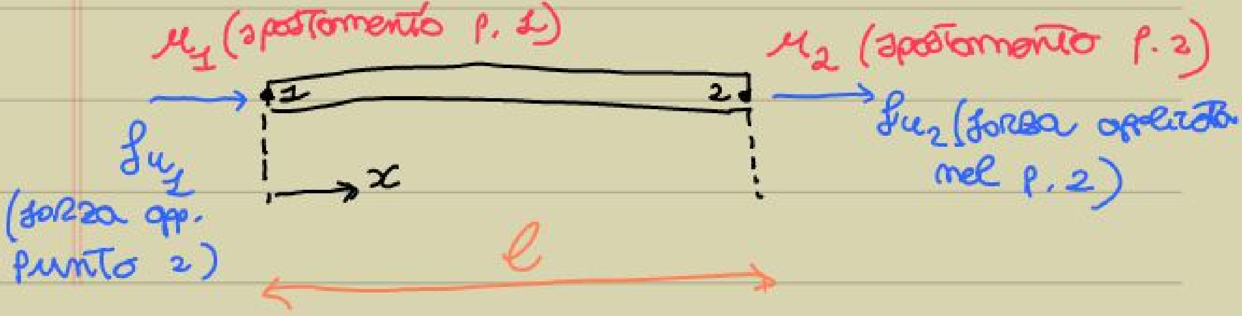
il primo e terzo sono facili, ma per un elemento come il disco (continuo), possiamo usare più suddivisioni in elementi semplici, ognuna dà un risultato diverso! La tecnica è sempre sommare le rigidezze, la differenza è solo come fare le suddivisioni:



ci sono molte possibilità, si tratta di avere un'approssimazione accettabile; troveremo sempre una rigidezza maggiore della realtà, cosa buona perché poiché siamo in campo lineare, vale la sovrapposizione degli effetti, cioè possiamo combinare questi 3 elementi per modellizzare elementi come questi (nel piano), anche se sono sollecitati nello spazio (in 3 dimensioni); ipotesi di LINEARITÀ!

- ASTA, elemento 1D con due estremità (si nota che il sistema di riferimento della trave deve essere unico, come quello della struttura, l'importante è l'orientamento dell'asse x, che va dal nodo 1 al nodo 2), ci interessa solo l'asse x chiaramente perché i carichi sono assiali! Il punto 1 potrà traslare lungo l'asse x (trazione o compressione), con notazione;

FORZE → VARIABILI STATICHE
SPOSTAMENTI → VARIABILI CINEMATICHE



$$\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 \end{array}\right]}_{[a]} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 0 & \frac{\ell}{EA} \end{array}\right]}_{[b]} \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix}$$

in modo compatto:

vettore forze

(1) $[a]\{s\} = [b]\{f\} \Longrightarrow \underbrace{[b]^{-1}[a]}_{[K]}\{s\} = \{f\}$

↳ vettore spostamenti

possiamo scrivere:

$[K]\{s\} = \{f\}$ detta forma di rigidezza.

(2) premoltiplichiamo per $[a]^{-1}$, ottenendo:

$[a][a]^{-1}\{s\} = [b][a]^{-1}\{f\}$

ottenendo $\{s\} = [d]\{f\}$ forma di deformabilità

Tuttavia $[b]$ è invertibile, $[a]$ no (riga di zeri), dal punto di vista matematico; dal punto di vista fisico il sistema non è vincolato, quindi la matrice non è invertibile (1 sola eq. di equilibrio quindi è semidefinita positiva (elem. sulla diagonale positivi, e non invertibile, e simmetrica), infatti gli elementi sulla diagonale sono i COEFFICIENTI DI INFLUENZA, e devono essere positivi:

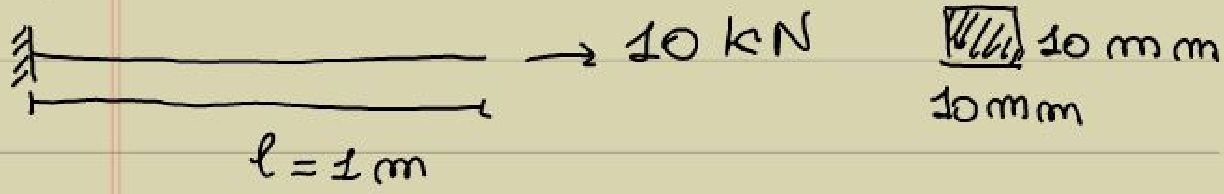
ipotizziamo $u_2 = 0$, si ottiene

$$\frac{EA}{l} u_1 - \cancel{\frac{EA}{l}} \overset{0}{u_2} = f_{u1}$$

il "+1" determina il segno dello spostamento, se fosse negativo avrebbe segno opposto alla forza e il loro prodotto darebbe lavoro negativo (impossibile, impongo una forza e ottengo lavoro).

Inoltre deve essere simmetrica, infatti se applico il carico su un estremo ottengo uno spostamento, e deve essere uguale se lo faccio all'altro estremo.

- Effettuiamo ora il calcolo:

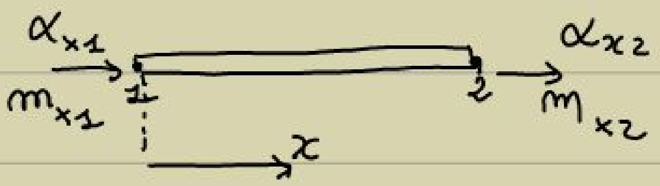


$E = 200$ GPa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 136

• ELEMENTO DI TORSIONE

uguale all'asta, ma il gdl è la rotazione, con momento applicato agli estremi.



qui le matrici saranno:

$$\frac{G \cdot J_x}{\ell}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_{x1} \\ \alpha_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{x1} \\ m_{x2} \end{Bmatrix}$$

$m_{1x} + m_{2x} = 0$ eq. equilibrio

$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{m_x}{GJ_x} \rightarrow \alpha_{x2} - \alpha_{x1} = \frac{\ell}{GJ_x} m_{x2}$ eq. congruenza

facciamo le matrici delle equazioni:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \alpha_{x1} \\ \alpha_{x2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{\ell}{GJ_x} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} m_{x1} \\ m_{x2} \end{Bmatrix}$$

1 riga di zeri → 1 solo gdl, come prima non sarà invertibile senza vincolo!

$$v_2 - v_1 - \alpha_{z1}\ell = -\frac{\ell^2}{2EJ_z} m_{z1} + \frac{\ell^3}{6EJ_z} f_{v1}$$

dall'eq della linea elastica, $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{m(x)}{EJ} = \frac{d\alpha}{dx}$

avendo trascurato l'effetto del taglio sulla rotazione della sezione (per travi tozze).

Scriviamo le equazioni in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ & & & \end{bmatrix}}_{[a]} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ \alpha_{z1} \\ v_2 \\ \alpha_{z2} \end{Bmatrix}}_{\{s\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\ell & 1 & 0 & 1 \\ \frac{\ell^2}{2EJ} & -\frac{\ell}{EJ} & 0 & 0 \\ \frac{\ell^3}{6EJ} & -\frac{\ell^2}{2EJ} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[b]} \underbrace{\begin{Bmatrix} f_{v1} \\ m_{z1} \\ f_{v2} \\ m_{z2} \end{Bmatrix}}_{\{f\}}$$

la matrice di rigidezza sarà calcolata come prima:

è sempre simmetrica, con diagonale positiva.

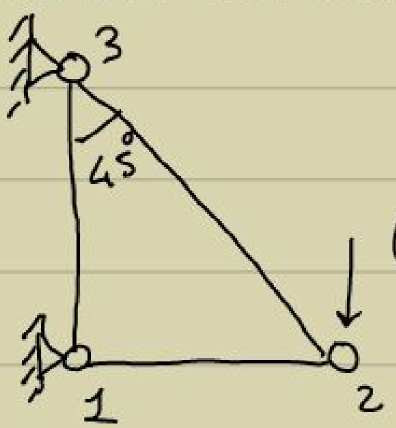
Se avessimo voluto tenere conto del taglio, cambiavano solo alcuni

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell_2} & -\frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} & -\frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ -\frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} & \frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} \\ \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & -\frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix}$$

infatti per calcolare i parametri di [K] si applica uno spostamento unitario sulla struttura, e con una cella di carico misuro le forze, che sono gli elementi della matrice (le due forze e due momenti).

- STRUTTURA COMPLETA, TRASPOSIZIONE

guardiamo la struttura:

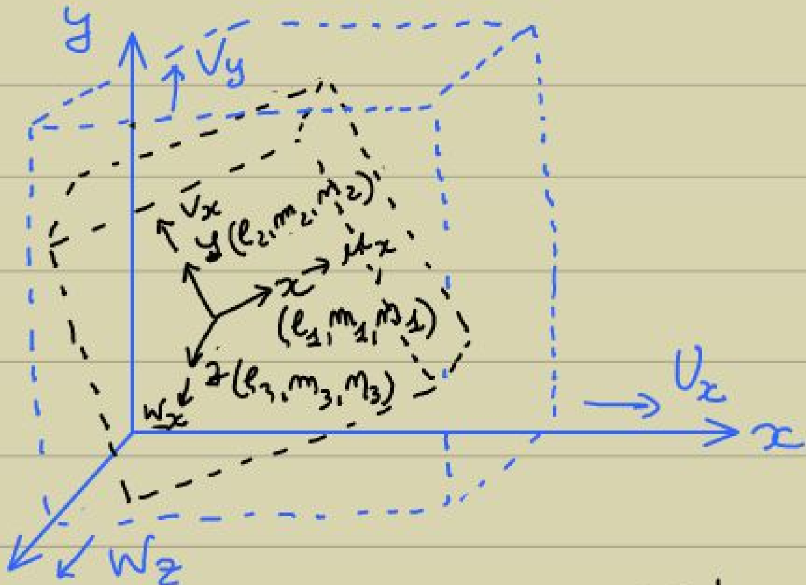


(ortogonale a 1-2 ma obliqua a 2-3)

possiamo usare solo elementi asta, ma avremmo dei problemi nel valutare le interazioni tra le aste, nascono reazioni non solo assiali. Possiamo mettere in relazione i sistemi di riferimento locale (singola asta) con quello globale, tramite

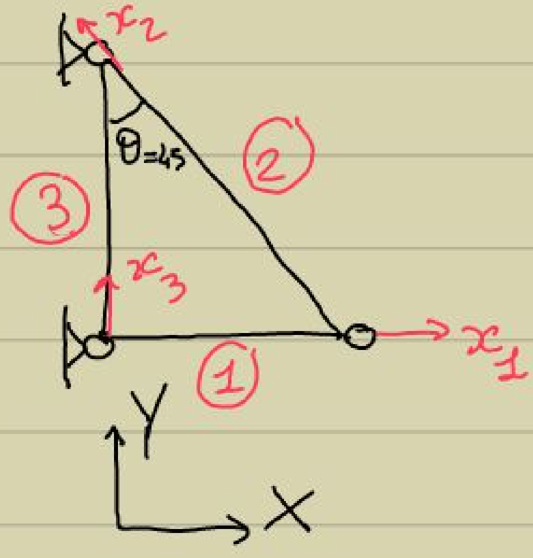
--- config. locale

--- proiezione sugli assi globali



Stessa trasposizione si farà per [K]!

Come facciamo tale trasposizione?



$\theta_1 = 0$
$\theta_2 = 135$
$\theta_3 = 90$
angoli dei coseni direttori per i 3 S.R.

Noti gli angoli dei vari assi x rispetto al S.R. globale, possiamo calcolare lo spostamento nel S.R. con le matrici di rotazione!

Esse valgono: coseni direttori

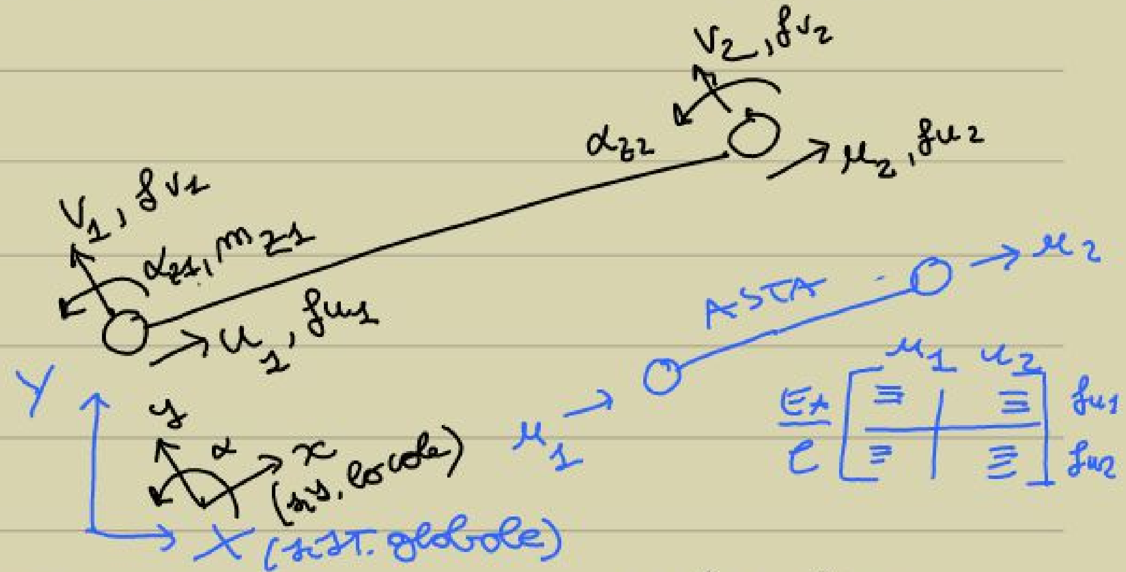
$$\begin{cases} u_x = l_1 u_X + m_1 v_X + n_1 w_X \\ v_x = l_2 u_X + m_2 v_X + n_2 w_X \end{cases}$$

calcolare l'inversa basta la trasposta.

$$[R]^T[R] = [R][R]^T = [I]$$

• ESEMPIO

trave nel piano, si calcola unendo l'asta all'elemento trave inflessa

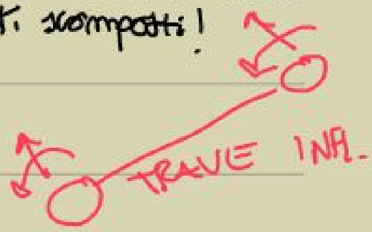


$$\frac{EA}{\ell}\begin{array}{c c} u_1 & u_2 \end{array}$$

	u_1	u_2
f_{u1}	≡	≡
f_{u2}	≡	≡

la matrice sarà una 6×6 (3 gdl per ogni nodo), ottenibile con le informazioni dei due elementi scomposti!

	u_1	v_1	α_1	u_2	v_2	α_2
f_{u1}	≡	0	0	≡	0	0
f_{v1}	0	a	b	0	c	d
m_{z1}	0	e	f	0	g	h
f_{u2}	≡	0	0	≡	0	0
f_{v2}	0	i	l	0	m	n
m_{z2}	0	o	p	0	q	r



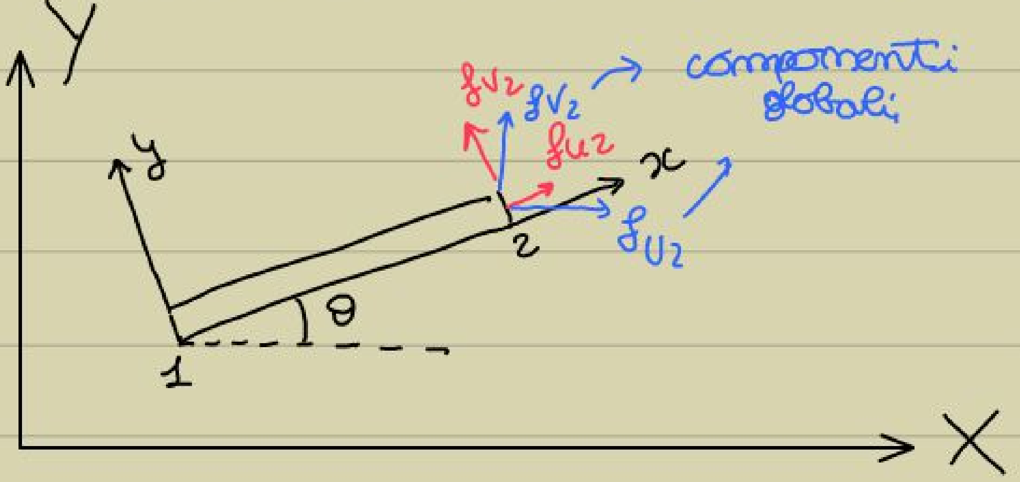
$$\begin{array}{c} \\ f_{v1} \\ m_{z1} \\ f_{v2} \\ m_{z2} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & \alpha_1 & v_2 & \alpha_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & l \\ i & l & m & n \\ o & p & q & r \end{bmatrix} \end{array}$$

(dove ci sono zeri, la forza non influisce sullo spost.!)

che è la matrice di rigidezza locale.

• ESEMPIO, elemento asta nel piano

Possiamo scrivere già la rigidezza locale, scrivendo però due variabili di spostam. fittizie che poi saranno nulle (in blu):



$$[R_1] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = [R_2]$$

è una 2x2, infatti non si hanno componenti lungo z

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

→ ne consegue che $[R] = \begin{bmatrix} [R_1] , [0] \\ [0] , [R_2] \end{bmatrix}$ è una 4x4 e non 6x6

nota $[k]_x$, si ricava:

$$\underset{4\times4}{[k]_X} = \underset{4\times4}{[R]^T}\,\underset{4\times4}{[k]_x}\,\underset{4\times4}{[R]}$$

• ELEMENTO TRAVE NELLO SPAZIO

E' l'elemento più completo, si compone di asta (trazione e compressione) → cioè 2 x 2 gradi di libertà; elem. di torsione → 2x2 gdl. e della trave → 8 x 8 gdl (due spost. verticali, flessione attorno a due possibili assi, tutto per due nodi).
Ne consegue che la rigidezza complessiva ha 12 x 12 elementi!

La differenza principale è nel momento flettente sui vari assi che hanno J diversi (in base al piano di flessione).
Sarà una matrice positiva e simmetrica (come lo sono quelle di partenza) → andrà ancora trasposta nel S.R. globale con la matrice di rotazione!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 136

ai nodi, uguali a quelli che darebbero i carichi reali! Sarebbero diversi gli spostamenti sulla lunghezza della trave.
Per modellizzare il carico distri-buito si userà l'elemento trave

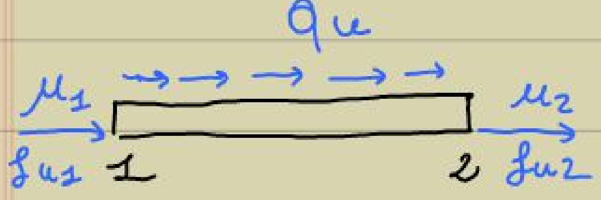
2) DILATAZIONE TERMICA

il carico termico reale darebbe

$\varepsilon = \alpha^* \Delta T \quad , \quad \varepsilon l = \Delta u$

dovremo avere un carico nodale equivalente che dia ai NODI lo stesso Δu!

CASO (1) $\rightarrow$ elemento asta (perché il carico è orizzontale)



come scriviamo la legge che lega forze e spost? $[K]\{S\} = \{f\} + \{f_e\}$

$$\begin{bmatrix} EA/l & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & EA/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_e \end{Bmatrix}_{qu}$$

$$[b]^{-1}[a]\{s\} = [b]^{-1}[b]\{f\} + [b]^{-1}[\,..\,]q_u$$

ottenendo:

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{u2} \end{Bmatrix} + \frac{q_u l}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{f_e\} = \left\{ \frac{q_u l}{2}, \frac{q_u l}{2} \right\}$$

ovvero dovremmo mettere agli estremi carichi di tale valore:

$$\frac{q_u l}{2} \rightarrow \underset{1}{o}\text{———}\underset{2}{o} \rightarrow \frac{q_u l}{2}$$

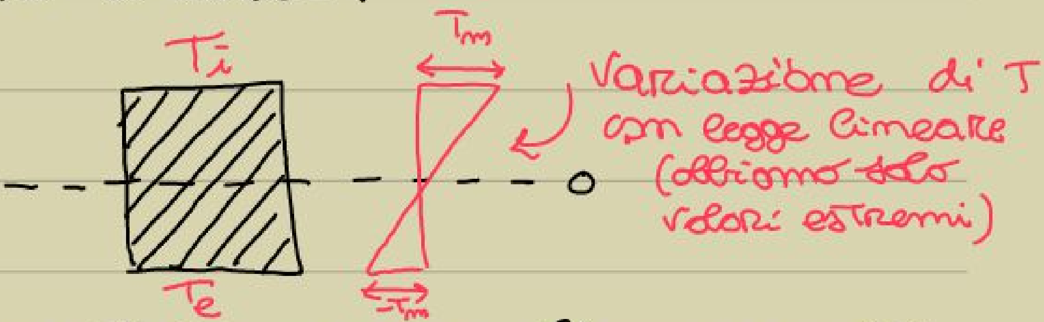
infatti i carichi ai nodi sono uguali a quelli che darebbe un carico distribuito reale, lo spostamento al centro sarebbe diverso!

2) CASO → CARICO TERMICO $(T_f - T_0) = T_m$

$\varepsilon = \alpha^*(T_f - T_0)$, $u_2 - u_1 = \alpha^* \cdot l \cdot T_m$

questa è la situazione senza carichi ai nodi; quale carico equivalente sarebbe idoneo?

- Carico distribuito verticale, vedi libro
- Effetto termico sulla TRAVE (sull'asta avevamo solo traz. e compr.), provoca un effetto diverso!

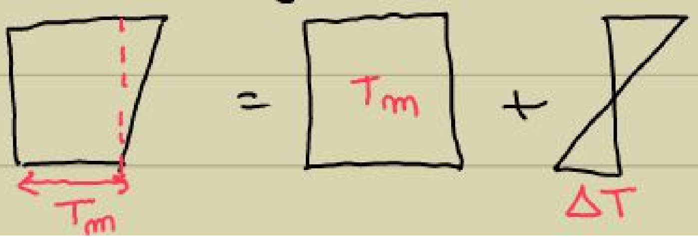


la temperatura varia linearmente, quindi la faccia superiore vede $\Delta T = T_m$, l'asse neutro non varia in temperatura, e la faccia inferiore con $\Delta T = -T_m$; si avrà FLESSIONE PURA, quindi il vettore del carico avrà 0 per le forze verticali (c'è solo curvatura), e due momenti flettenti uguali e opposti.

poiché abbiamo integrato tra $+\frac{h}{2}$ e $-\frac{h}{2}$

$$\{L\} = \left\{ 0 \quad \frac{2\alpha^* \Delta T E J_z}{h} \quad 0 \quad -\frac{2\alpha^* \Delta T E J_z}{h} \right\}$$

come si modifica la sezione?



Sovrapp. degli effetti

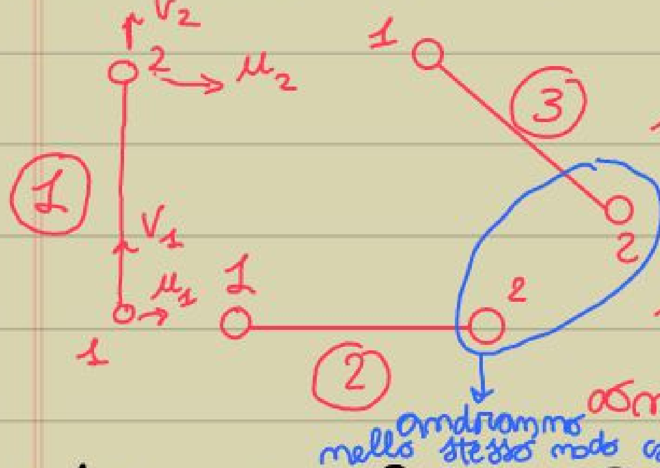
vogliamo arrivare, per la struttura completa:

$[K]\{S\} = \{F\} + \{F_e\}$ equazione per la struttura complessiva

Come si esegue l'assemblaggio?

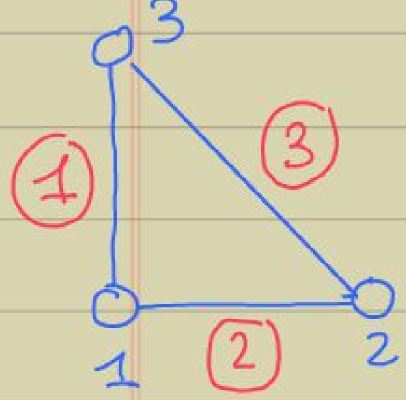
Fisicamente aggiungo pezzi, matematicamente considero per ognuno:

$[K_1]\{S_1\} = \{f_1\}$, $[K_2]\{S_2\} = \{f_2\}$, $[K_3]\{S_3\} = \{f_3\}$



ogni elemento singolo "concorre" all'equilibrio della struttura complessiva con un contributo

prendo un elemento e lo metto in posizione, poi un altro e così via:



matematicamente ho aggiunto "pezzi" alla rigidezza complessiva $[K]$, sommando ogni volta la $[K_i]$. Ciò che si ottiene è una rigidezza complessiva:

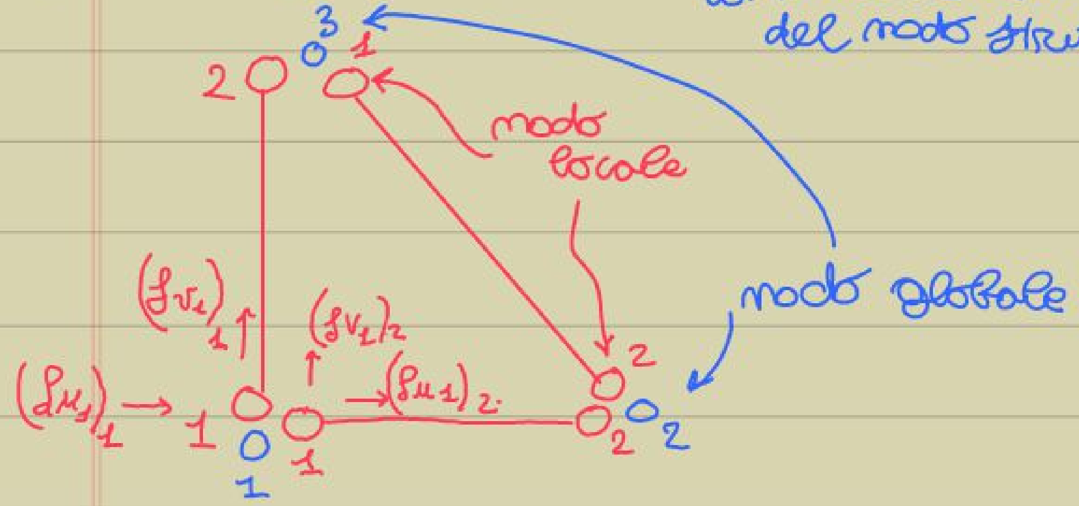
analogamente le forze:

$$F_{U_1} = (f_{u1})_1 + (f_{u1})_2$$

equazioni di equilibrio

$$F_{V_1} = (f_{v1})_1 + (f_{v1})_2$$

le forze dell'elemento concorrono all'equilibrio del nodo struttura!



Genericamente, per ogni elemento:

$$\begin{array}{c} \\ f_{u1} \\ f_{v1} \\ f_{u2} \\ f_{v2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} - - - & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \end{array}\right] \end{array} \quad i = 1,3$$

[b]

$$f_{u2} = b_{31} \cdot u_1 + b_{32} \cdot v_1 + b_{33}\, \overset{U_2}{u_2} + b_{34}\, \overset{V_2}{v_2}$$

trovata f_{u2}, la sostituisco nelle equazioni di congruenza.

- Come si esegue questo algoritmo?

Si scrive ogni equazione per l'k-esimo

2 per avere le forze globali:

elem. 1, matrice di rigidezza

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{u1} \\ f_{v1} \\ f_{u2} \\ f_{v2} \end{Bmatrix}$$

→ si ricavano le f da sostituire

avendo questo per ogni elemento, si ottiene infine un sistema di equazioni da cui si ricava la matrice di rigidezza (vedi libro + esempio).

- Questo metodo va bene con pochi nodi, se ne abbiamo tanti dobbiamo usare un modo per far capire al calcolatore:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

possiamo NUMERARE le variabili secondo i gdl!

La rigidezza si assembla con la mappa che è del tipo:

El. 1

gdl el.	1 2 3 4
gdl strutt.	1 2 5 6

possiamo scrivere formalmente:

$$(f_i)_k = \sum_{j=1}^{m_k} (K_{ij})_k (s_j)_k - \{f_{e_i}\}_k$$

k è il numero dell'elemento (fino a 3)
i e j sono riga e colonna della matrice, m_k sono i gdl dell'elemento (qui sono 4)

ovvero in tabella:

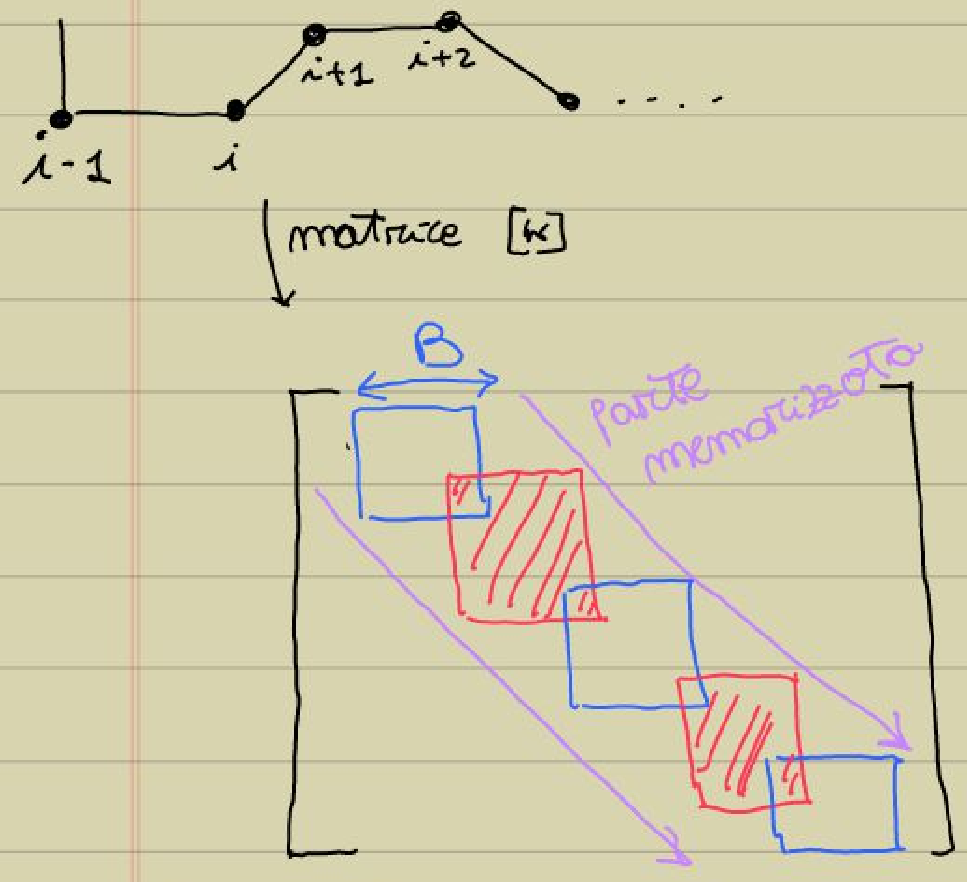
El k.

g.d.l elem.	... j ... , ... i
g.d.l strutt.	... G_{kj} ... - G_{ki}

$(s_j)_k = S_{G_{kj}}$ → congruenza in termini formali

$\Delta F_{G_{ki}} = (f_i)_k$ → equilibrio " "

diventa un ΔF perché è una somma di contributi, il secondo termine è da elementi serie, essa sarebbe DIAGONALE, cioè i contributi delle matrici dei singoli elementi si sovrap-pongono solo sulla diagonale, cioè è a BANDA :



gli elementi fuori banda sono zeri, inutili per la risoluzione, quindi non vengono memorizzati (risparmio memoria), assemblando dagli elementi non nulli, una MATRICE RETTANGOLARE.
Un altro metodo è non memorizzare

per le forze uguale:

$$\{F\} \begin{cases} \{F_i\} < \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} \text{ INCOGNITE} \\ \{F_m\} < \begin{Bmatrix} F_3 = 0 \\ F_4 = -F \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Possiamo rimettere tutto in forma matriciale, organizzando tutto in modo da avere ordinate le incognite e i dati noti (scambio 3-4 con 5-6).

$$\left[\begin{array}{c:c} [K_{11}] & [K_{12}] \\ \hdashline [K_{21}] & [K_{22}] \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \{S_1\} \\ \{S_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F_{e1}\} \\ \{F_{e2}\} \end{Bmatrix}$$

incognite

Il sistema è:

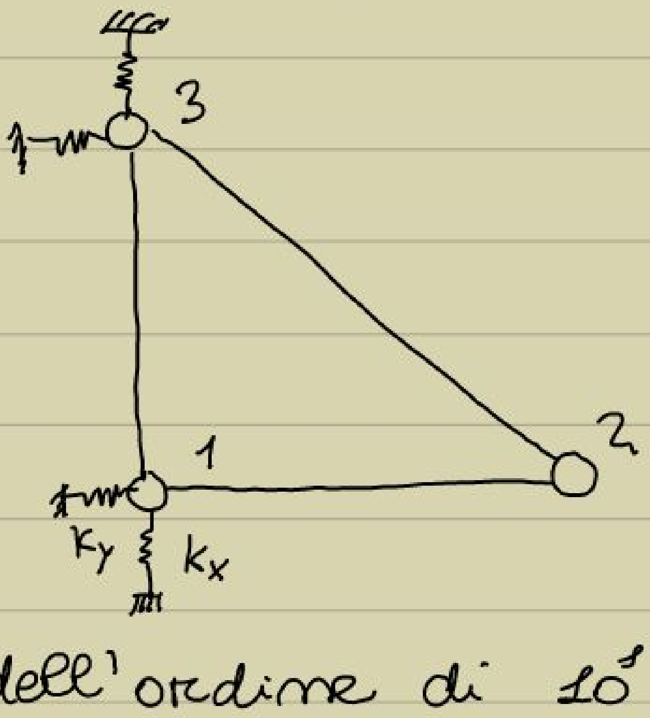
$$[K_{11}]\{S_1\} + [K_{12}]\{S_2\} = \{F_1\} + \{F_{e1}\}$$

$$[K_{21}]\{S_1\} + [K_{22}]\{S_2\} = \{F_2\} + \{F_{e2}\}$$

reazioni vincolari, scambiando le colonne 3-4 con 5-6.
Se vincolassimo ancora un gdl (il nodo 2 con un carrello verticale), ci togliamo uno spostamento e quindi un equazione in meno (più la struttura è iperstatica, più facile).

- VINCOLI CINEMATICI

I vincoli nella solita struttura sono considerati rigidi, si possono approssimare però con MOLLE!



K è dell'ordine di $10^{10} \div 10^{12}$ (due ordini di grandezza in più dei singoli elementi), non può essere infinita (spostamento nullo) perché

- va bene però con materiali semplici, con rigidezze di 2 ordini inferiore a k^*. Per materiali più particolari come si può fare? Scriviamo la mappa:

GDL EL	1	2	3	4
GDL STR	1	2	5	6

$\xrightarrow[\text{gli altri non servono!}]{\text{si rinumerano i gdl vincolati,}}$

1	2	3	4
0	0	0	0

(per el. 1)

Si considera quindi solo la $[K_{22}]$! L'elemento 1 non si considera neanche, non ne calcoliamo neanche la rigidezza. Dall'unica equazione che ne deriva calcoliamo gli spost-amenti. → non possiamo però calco-lare le reazioni vincolari, perchè abbiamo ridotto la matrice di rigidezza alla sola $[K_{22}]$!

Per ovviare al problema, si crea una mappa dove numeriamo POSITIVI gli spostamenti liberi del

- RISOLUZIONE DEL SISTEMA DI EQUAZIONI

Viene risolto col metodo di Gauss, si triangolarizza la matrice di rigidezza e, a partire dall'ultima riga, si calcola ogni spostamento.

$$[K]\{S\} = \{F\}$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_{11}] & [K_{12}] \\ \hline [K_{21}] & [K_{22}] \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \{S_1\} \\ \{S_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}$$

Si procede togliendo le sottomatrici fino ad avere K_{22}, cioè triangolarizzando. → Equivale a TOGLIERE gradi di libertà!

$$\left[\begin{array}{c|c} [K_{11}] & [K_{12}] \\ \hline [0] & [K_1]^* \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \{S_1\} \\ \{S_2\} \end{Bmatrix} = \ldots$$

Vedere libro per esempio.

e la rotazione in 2 (il momento M_2 è zero, e $V_2 = \delta$).

È come se avessimo provocato un carico tale per provocare uno spost. δ.

La matrice di rigidezza sarà 4x3 (la colonna relativa allo spostamento δ la portiamo a secondo membro), di cui elimino le prime due colonne ($V_1 = A_1 = 0$) → Ricavo $A_2 = \frac{3}{2}\frac{\delta}{\ell}$

Da qui ricavo ancora le 3 reazioni vincolari incognite!

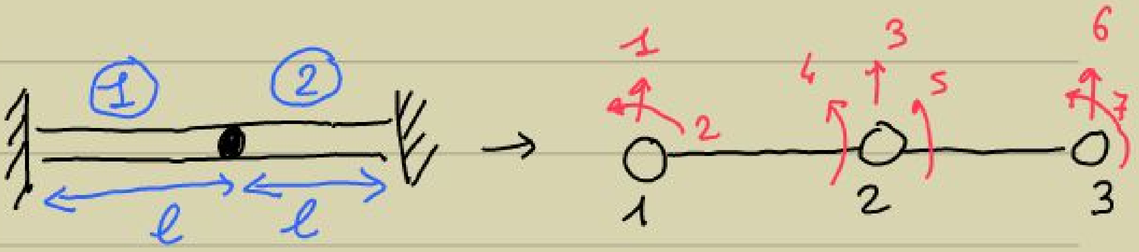
$F_1 = -\frac{3EJ_z}{\ell^3}\delta$, $F_2 = -\frac{3EJ_z}{\ell^3}\delta$, $M_1 = \frac{3EJ_z}{\ell^2}\delta$

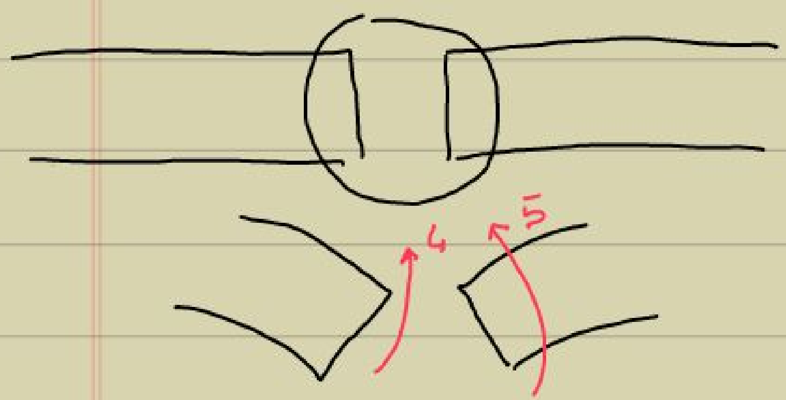
Questi risultati hanno un errore di segno! Infatti F_1 e F_2 devono essere opposti. controlla segno!

per (b) è uguale, ma è una molla di torsione, quindi andrà a sommare il gdl A_1 (rotazione)!

Quindi i vincoli elastici implicano sommare alla rigidezza complessiva, quella dell'elem. elastico nel gdl su cui agisce.

STRUTTURA CON CERNIERE INTERNE





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 136

andiamo a scriverli negli elementi:

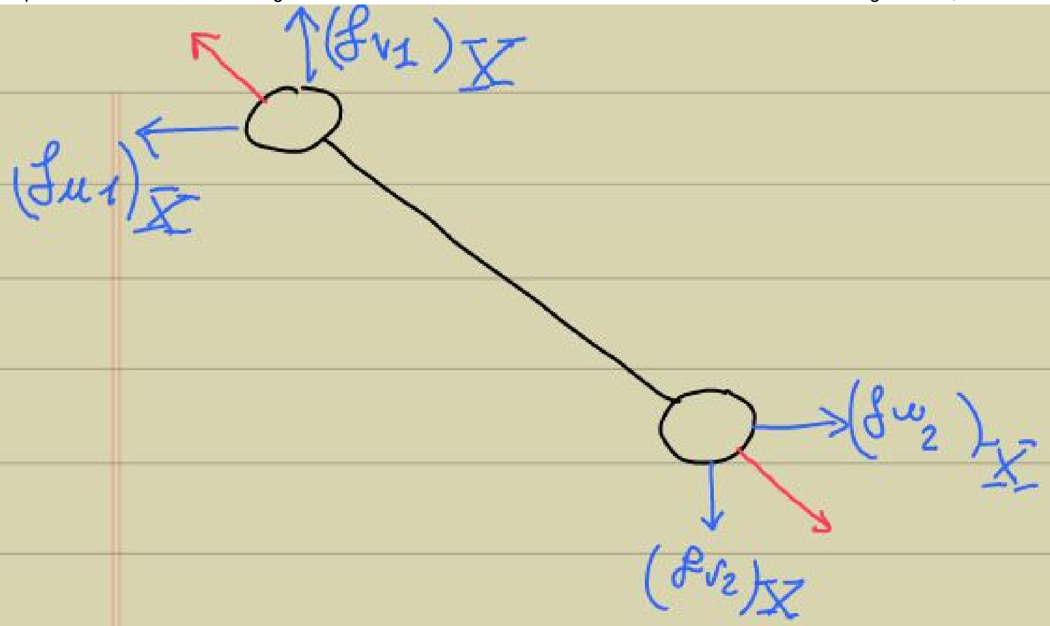
$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{1x} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3{,}82 \end{Bmatrix}_{2x} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -3{,}82 \end{Bmatrix}_{3x}$$

sempre nel sistema GLOBALE, ma per ogni elemento (dalla mappa). Torniamo ora al sistema di riferimento locale con le matrici di rotazione, oppure calcolo il vettore dei carichi nel sistema globale, e poi passo ai carichi locali con la matrice di rotazione, è uguale.

$$\{f\}_{R\,X} = [K]_{R,X}\{s\}_{R\,X}$$

$$\{f\}_{R.X} = [R]_R \cdot \{f\}_{R,x}$$

Nel nostro esempio consideriamo gli elementi (2) e (3), perché (1) non



otteniamo $\{f_3\} = \{-1, 1, 1, -1\}$ nel globale, ruotando con la matrice di rotazione $\rightarrow$ $\{f_3\} = \{-1 \dots, 0, 1 \dots, 0\}$

Schema di risoluzione

a) suddivisione della struttura in elementi e numerazione nodi;

b) costruzione della "mappa" (equazioni elemento e struttura);

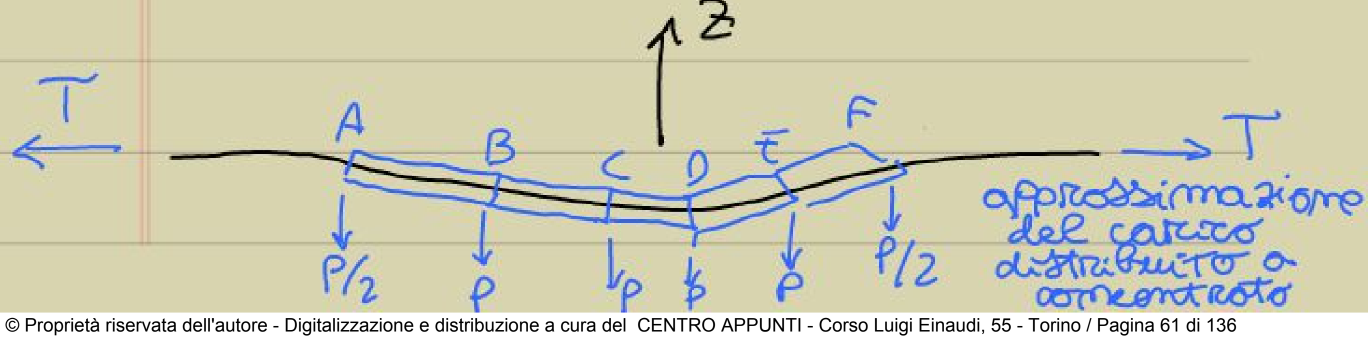
c) Per ciascun elemento, calcolo di matrice di rigidezza e dei carichi nodali eq.

d) Assemblaggio della matrice di rigidezza struttura e dei carichi nodali equivalenti

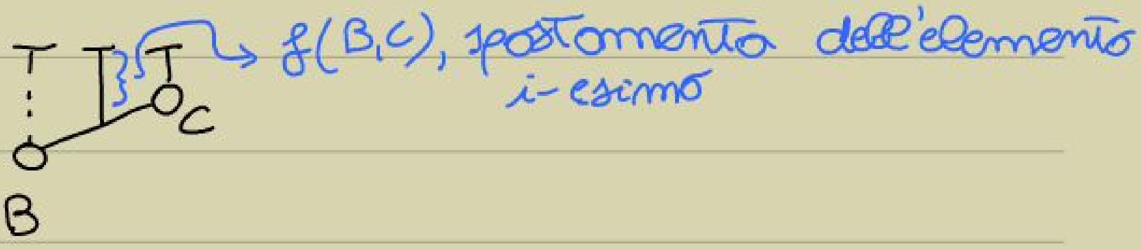
e) Imposizione dei vincoli

Elementi finiti

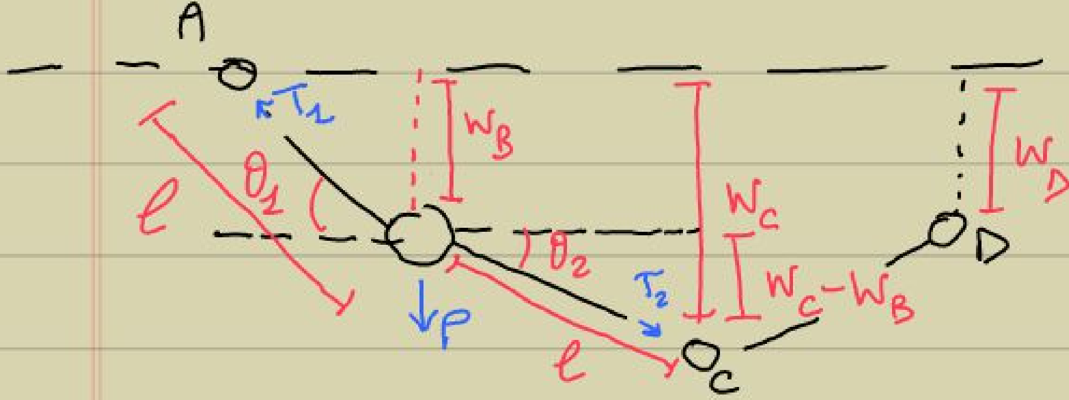
Servono quando abbiamo un CONTINUO non possiamo più usare elementi semplici con ipotesi di DsV.
Dobbiamo trovare sempre matrici di rigidezza per avere una legge del tipo $S = kx$ → ricavo k con celle di carico imponendo un solo spostamento unitario, e gli altri nulli!
Si DISCRETIZZA il continuo come se ci fossero tanti NODI ai quali risolvo le equazioni → approssima- -zione. Passo da equazioni differenziali a equazioni algebriche. Più nodi → → più precisione.
Ad esempio, un cavo può essere schematizzato con elementi asta:



All'aumentare delle strutture che impongo (con la stessa funzione di forma), aumenta la precisione:



Analizziamo il sistema:



Possiamo scrivere due eq. di equilibrio, con ipotesi di piccoli angoli:

$$T_1 \cos\theta_1 = T_2 \cos\theta_2 \rightarrow \theta_1 \approx \theta_2 \rightarrow T_1 = T_2 = T$$

eq. verticale:

$$T_1 \operatorname{sen}\theta_1 = T_2 \operatorname{sen}\theta_2 + P$$

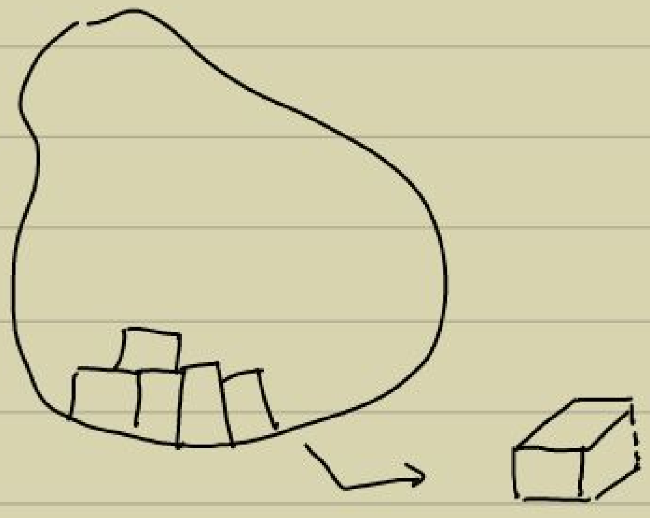
confondendo seno e tangente, $\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tg}\theta = \frac{W_B}{\ell}$, $\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{W_C}{\ell} \rightarrow T\frac{W_B}{\ell} - T\frac{W_C - W_B}{\ell} = P$

le incognite sono W_B e W_C!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 136

Lavori Virtuali

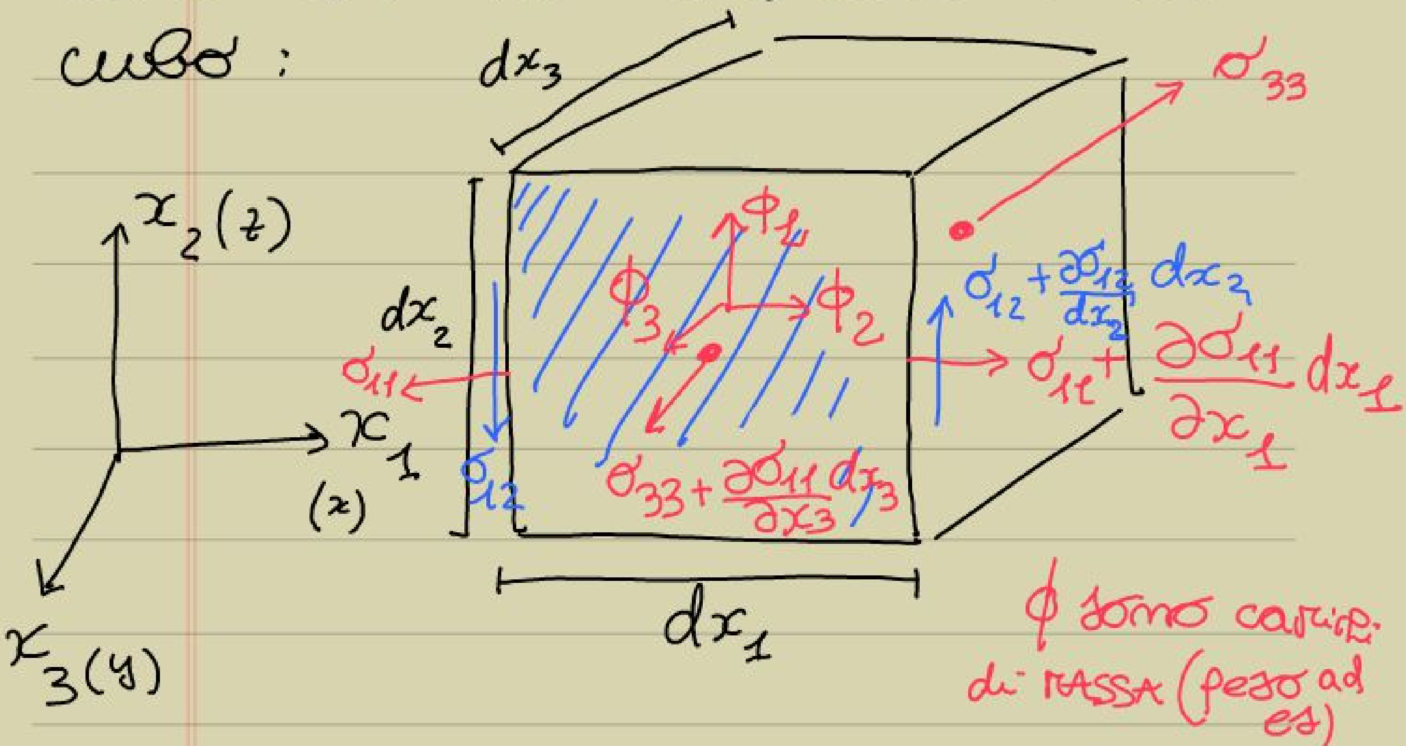
Per strutture continue, la divisione in strutture è a scelta dell'utente. Un volume viene suddiviso:



$$V = \Sigma V_i$$

la somma dei mattoncini (1D, 2D o 3D) dà il volume totale; per ognuno di essi vogliamo una relazione del tipo $[K]\{S\} = \{f\} + \{fe\}$; non possiamo più usare l'analisi semplice con le eq. di congruenza, ma usare elementi approssimati. Ad esempio il cubo visto sopra (brick) si collega agli altri solo tramite i nodi.

Consideriamo la faccia di un cubo:



Affinché sia in equilibrio, le forze normali e tangenziali devono essere uguali e opposte. Ad esempio σ_{11} (normale all'asse x_1), deve essere equilibrata sulla faccia opposta da una forza con verso opposto; analogamente gli sforzi di taglio! A partire da queste condizioni, si può calcolare lo spostamento virtuale da applicare, dovuto ad ogni forza; tale spostamento deve essere compatibile con le analogamente per la terza direzione, cioè 3 equazioni di eq. della traslazione. Dall'equilibrio della rotazione otteniamo che:

$\boxed{\sigma_{ik} = \sigma_{ki}}$ → cioè uguali componenti tangenziali!

da queste condizioni si ottiene il tensore delle tensioni.

Calcoliamo ora il lavoro dovuto ad ogni forza!

La tensione σ_{11} è diretta lungo x_1, quindi $\underbrace{\sigma_{11}\, dx_2\, dx_3}$ → dF_1, moltiplicando per lo spostamento virtuale δu_1 otteniamo un LAVORO! Estendendo all'asse i-esimo di area dA_i si ottiene un'espressione, che semplificando gli infinitesimi superiori dà!

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} \delta u_k + \sigma_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_k \right) dV$$

k → direzione

i → faccia

è funzione degli spostamenti dei nodi! cioè è funzione del vettore degli spostamenti:

$$u_p = f(\{s\})$$

ovvero lo spostamento di un punto generico è:

$$\{u\} = [n]\{s\} \rightarrow \text{spostamenti nodali}$$

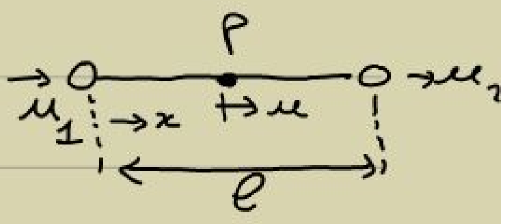
↳ funzione di forma

dove la matrice n è la FUNZIONE DI FORMA. Possiamo quindi dire che:

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} = [\partial][n]\{s\} = [b]\{s\}$$

↳ matrice di derivazione

Ad esempio per l'asta



$$\{s\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$u = [n]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [n_1 \ n_2]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

in $x = 0$, $u = u_1 \rightarrow n_2 = 0, n_1 = 1$

in $x = L$, $u = u_2 \rightarrow n_2 = 1, n_1 = 0$

come dovranno essere le funzioni

abbiamo imposto gli spostamenti, non può deformarsi come vuole! Per risolvere scriviamo che ogni contributo ha una tensione RESIDUA, che è zero sul volume totale, ma NON sul discreto, sul singolo volume!

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \phi_j = \rho_j$$

↳ componente lungo j della forza Residua per unità di volume.

Questo termine va AGGIUNTO nella formulazione del principio dei lavori virtuali:

del vettore di forze $\{t\}$ non conosciamo tutto! Lo scomponiamo in $\{t\} = \{t_0\} + \{t^*\}$, dove t_0 sono le forze superficiali note, t^* sono quelle superficiali incognite! Si arriva ad una formulazione dei lavori virtuali che dipende terzo è un vettore di carichi di volume, il quarto è la matrice di rigidezza, il quinto è un vettore di carichi generalizzati equivalenti ad una deformazione senza tensione, il sesto è un vettore di carichi equivalenti ad uno stato di tensione iniziale σ_0.

- Notiamo che la matrice di rigidezza è data dall'integrale di volume → $[K] = \int_V [b]^T [E][b]\, dV$ dove $[b]$, matrice di deformazione, si ricava dalla matrice delle funzioni di forma, infatti $[b] = [\partial][n]$

FUNZIONI DI FORMA

Sono generalmente funzioni polinomiali, derivabili fino al grado necessario (solitamente 1 volta basta), e di conseguenza CONTINUE. (1)

(2) Inoltre poiché vanno a definire la matrice K, devono essere in grado

Se non si rispetta una condizione (ad esempio la continuità tra elementi adiacenti) si oscilla intorno alla soluzione esatta.

- Esempi di serie polinomiali:

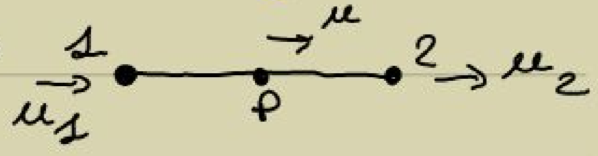
$$\left.\begin{array}{l} u = a_1 + a_2 x \\ u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \end{array}\right\} 1D$$

$$v = b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 xy \quad \} 2D$$

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 z \quad \} 3D$$

a_i, b_i, c_i sono dette coordinate generalizzate

Vediamo l'asta →



è monodimensionale, quindi:

$$u = a_1 + a_2 x$$

ricaviamo i coefficienti:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow u = u_1 \\ x = l \rightarrow u = u_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} u_1 = a_1 \\ u_2 = a_1 + a_2 l \end{array}$$

↳ coefficienti da calc.

quindi si trova $\{u\} = [N]\{s\}$ → u_1 e u_2 noti

↳ spostamenti

se A é invertibile, posso calcolare il vettore dei coefficienti partendo dalle condizioni al contorno.

$$\{u\} = [P]\{a\} \rightarrow \{u\} = [P][A]^{-1}\{s\}$$

$\rightarrow [n]$, matrice completa della funzione di forma

Il punto é trovare l'inversa della matrice A! Nel caso dell'asta poniamo $x_1 = 0$, $x_2 = x_1 + l = l$, quindi la funzione di forma sarà:

$$[P][A^{-1}] = [1 \;\; x] \cdot \begin{bmatrix} l & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{l} = [l - x, x]\frac{1}{l} =$$

$$= \underbrace{\left[\underbrace{1 - \frac{x}{l}}_{n_1}, \underbrace{\frac{x}{l}}_{n_2}\right]}_{[n]}$$

quindi ora possiamo scrivere la forma finale: $\{u\} = \left[1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

per verificare basta porre $x = 0$, $x = l$ e vedere che si ottenga $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$, qui verificato.

$i = 1 \rightarrow j = 2$. Otteniamo:

$$n_1 = \frac{x - x_2}{-x_2} = 1 - \frac{x}{l}$$ ($j = 2$ nella produttoria)

$$n_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{l}$$ ($j = 1$ nella produttoria)

POLINOMIO DI HERMITE

Serve per continuità superiore al primo grado, vedi libro.

- CALCOLO DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA

Abbiamo detto che $[K] = \int_V [b]^T [E] [b] \, dV$

con $[b] = [\partial][n]$

$$\varepsilon_x \doteq \frac{\partial u}{\partial x} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right]\{u\} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right][n]\{s\}$$

avendo $[n] = \left[1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l}\right]$, si ha che:

$$[b] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right] \underbrace{\left[1 - \frac{x}{l}, \frac{x}{l}\right]}_{} = \left[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}\right]$$ → è una costante nel caso 1D

la matrice $[E]$ nel caso monodimensionale è $[E] = E$, modulo elastico.

controlliamo i polinomi; sono continui, rappresentano il moto rigido? Abbiamo 3 gdl di moto rigido nel piano, due traslazioni e la rotazione nel piano; per la traslazione su x deve essere $a_1 \neq 0$ e gli altri nulli, per la traslazione su y $a_4 \neq 0$ e gli altri nulli, per la rotazione deve essere $\frac{dx}{dy} = 1$, dx e dy di segno opposto.

il vettore degli spostamenti ai nodi è meglio ordinarlo così per comodità, $\{s\} = \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$

$$\{s\} = \{ \underbrace{\{u_1, u_2, u_3\}}_{\{u\}} \ \underbrace{\{v_1, v_2, v_3\}}_{\{v\}} \}$$

Prendendo in esame $\{u\}$, scriviamo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [A_1] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \rightarrow [A_1] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$\{s\} = [A] \{a\}$$

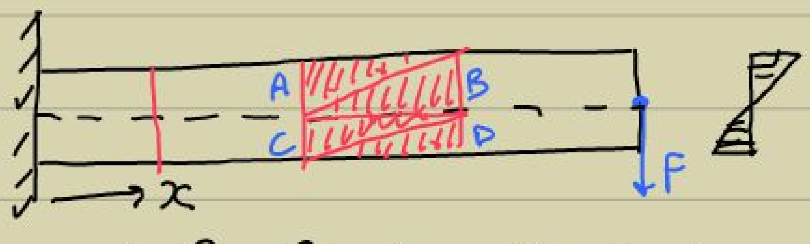
$u_{BD} = f(u_B, u_D)$
$v_{BD} = f(v_B, v_D)$
cioè lo spostamento "BD" deve avere una legge tipo equazione della RETTA passante per B e D, e contemporaneamente non deve dipendere dal nodo A (cioè la funzione di forma n_1 deve essere uguale a 0, in u = lungo la retta BD).
Come riferimento, ricavata l'espressione di [n], si verifica che l'equazione della retta passante per 2 dei 3 punti del triangolo (ad es 1 e 2), dia ZERO se sostituita nella matrice [n] nella posizione di n_3.
Se si conferma la condizione, si ha la COMPATIBILITÀ! Cioè l'elemento si muove con la legge della retta.
Trovata l'espressione di [n], si va a ricavare $[K] = \int [b]^T [E] [b] dV$

deformazione piana $\varepsilon_z = 0, \sigma_z \neq 0$
tensione piana, $\varepsilon_z \neq 0, \sigma_z = 0$.
Lungo tutto l'elemento però c'è una costante (matrice ma indipendente dalla coordinata).

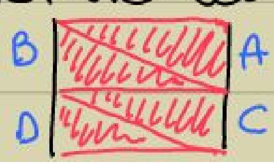
$$[K] = [b]^T [E] [b] \underbrace{Ah}_{V} \quad , \text{con } h = n_1 h_1 + n_2 h_2 + n_3 h_3 \to h = \frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}$$

scrivendola opportunamente con le funzioni di forma.

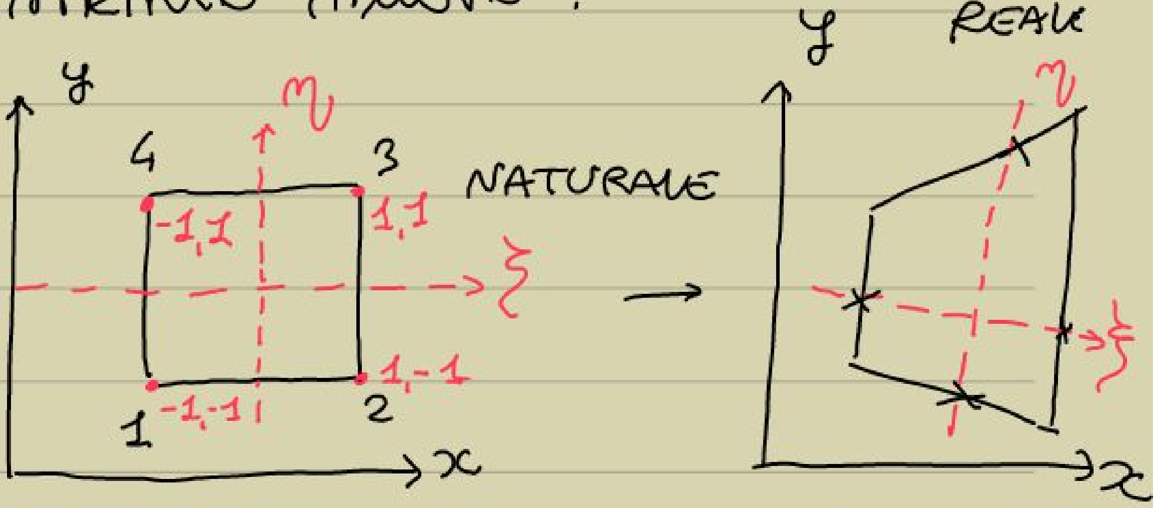
- Immaginiamo di dividere una TRAVE con carico in elementi triangolari:



sappiamo che le tensioni sono diverse negli elementi (l'andamento è tipo mom. flettente). $(\sigma_x)_A \neq (\sigma_x)_B$ maggiore in A (estradosso); pensiamo ora di suddividere diversamente la trave, in modo speculare



quadrato o rettangolo, ma questi sono molto raramente buoni per la suddivisione! Bisogna trovare il modo di collegare la parte REALE (primo quadrilatero) con la parte NATURALE (il quadrato comodo per l'integrazione), cioè fare una tras-formazione SPAZIALE.
Per fare ciò definiamo sistema di riferimento nuovo:

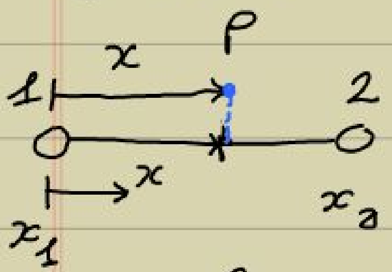


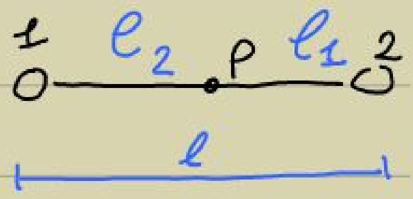
si troverà [K] nello spazio naturale (facile integrale), e si torna nello spazio reale per avere la soluzione, ad esempio con la formulazione ISOPARAMETRICA; si tratta di trovare la trasposizione da naturale a reale!

Elementi isoparametrici

Continuando lo schema precedente:

(x, y, z) $\qquad\qquad\qquad$ (ξ, η, ζ)





$x_2 - x_1 = \ell$

deve valere che

$\ell_1/\ell + \ell_2/\ell = 1$

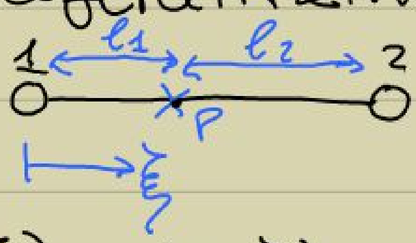
f. di forma $\qquad$ coordinata reale

$$x = \sum_{i=1}^{2} n_i(\xi)\, x_i \rightarrow x = n_1(\xi)\, x_1 + n_2(\xi)\, x_2$$

$$x = \frac{\ell_1}{\ell} x_1 + \frac{\ell_2}{\ell} x_2$$

Se il punto considerato è nel nodo 1, si ha in $x = x_1$ $(P \equiv 1) \rightarrow \frac{\ell_1}{\ell} = 1$, $\frac{\ell_2}{\ell} = 0$, se è nel nodo 2, $x = x_2$ $(P \equiv 2)$, si ha $\frac{\ell_1}{\ell} = 0$, $\frac{\ell_2}{\ell} = 1$.

Quindi possiamo usare un sistema di riferimento:



$$x = \sum_{i=1}^{2} n_i(\xi)\, x_i$$

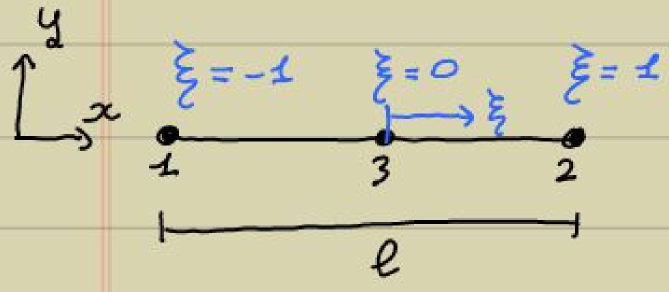
$$n_1(\xi) = (1 - \xi) \quad , \quad n_2(\xi) = \xi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 136

Inoltre si nota che in $\xi = 0$, $x = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2$, e se $x_1 = 0$, $x_2 = \ell$ si ha esattamente $x = \frac{\ell}{2}$! Inoltre le funzioni di forma hanno sempre andamento lineare, con $n_1 = 1$, $n_2 = 0$ nel nodo 1, e viceversa.

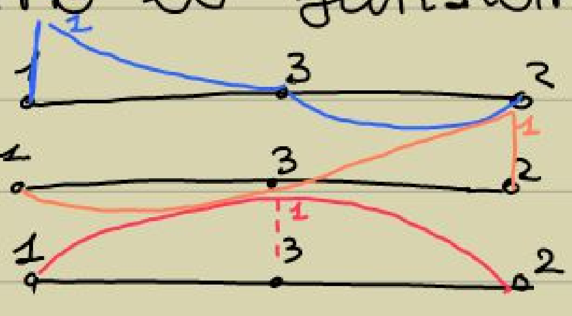
Con più di 2 nodi, ad esempio 3, possiamo rappresentare elementi CURVI!

• ELEMENTO A 3 NODI MONODIMENSIONALE



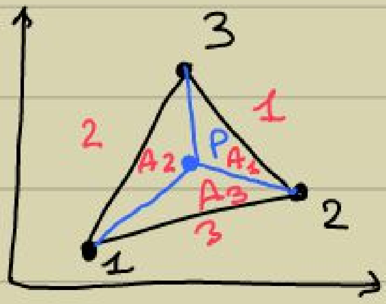
$$x = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3$$

Come saranno le funzioni di forma?



a 1 o 2) NON c'è corrispondenza biunivoca, quindi non si può calcolare la rigidezza. C'è un fattore detto PARAMETRO DI DISTORSIONE che rende imprecisa la simulazione.

- ELEMENTO A 3 NODI BIDIMENSIONALE



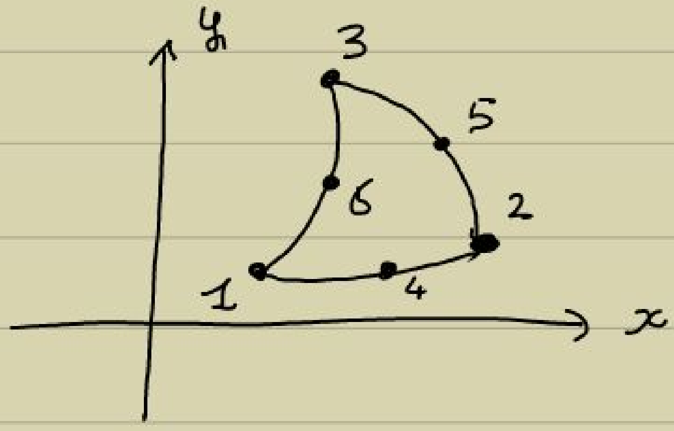
un punto P divide il triangolo in 3 aree! Le coordinate naturali sono riferite alle aree!

$$L_1 = \frac{A_1}{A}, \quad L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A}, \quad L_1 + L_2 + L_3 = 1$$

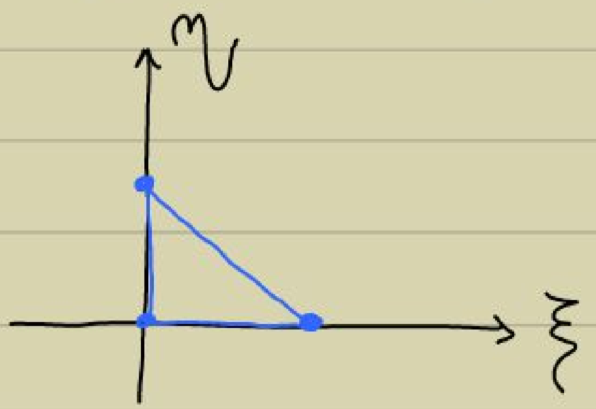
quindi la trasformazione sarà:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \qquad \begin{cases} x = \sum_{i=1}^{m} n_i(\xi_i \eta) x_i \\ y = \sum_{i=1}^{m} n_i(\xi_i \eta) y_i \end{cases}$$
$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3$$

Nello spazio naturale, qualsiasi triangolo sarà descritto da:

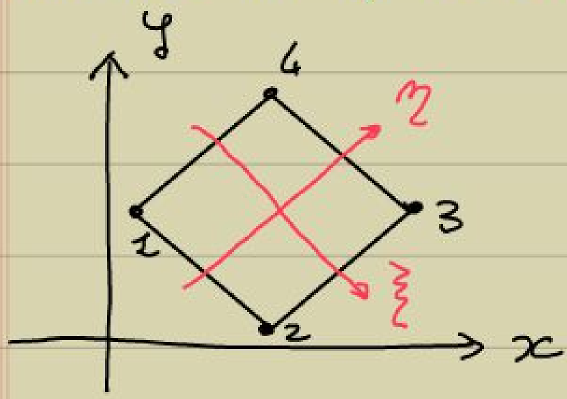


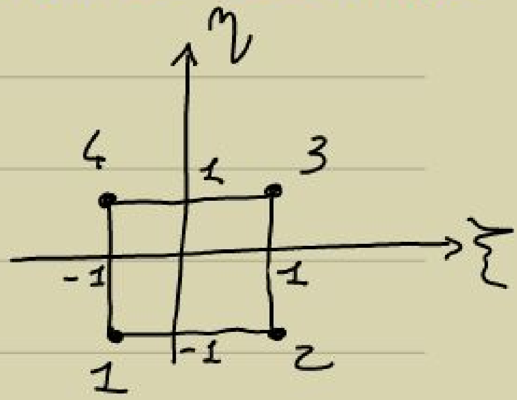
nel sistema naturale è sempre il triangolo rettangolo isoscele!



Vedere la deformata sul libro, con le relative funzioni di forma.

- ELEMENTO A 4 NODI BIDIMENSIONALE





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 136