



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1668A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Elaborazione di Segnali Biomedici. Prof.Molinari

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Elaborazione segnali Biomedici

Cose da ripassare per il corso:

- 1) TRASFORMATA DI FOURIER (e tutte le proprietà)
- 2) FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE
- 3) TEORIA DEI SISTEMI LTI

Chi non le fa muore!

- Rumore, affligge ogni segnale biologico, quindi va pulito. Il rumore è tutto ciò che è diverso dal segnale:

$$x(t) = s(t) + m(t)$$

↑ ↑ ↑

segnale segnale rumore

acquisito biologico

MODELLO RUMORE ADDITIVO
(può anche essere moltiplicativo)

il rumore è generalmente un processo casuale gaussiano bianco.
 $m(t)$ quindi contiene la parte corretta del segnale acquisito (o non interessante,

La trasformata di Fourier del rumore Gaussiano bianco è una costante, cioè lo spettro in frequenza è PIATTO (ogni frequenza porta la stessa potenza).

- Il rapporto segnale-rumore è un rapporto tra potenze, si esprime in dB e se è basso, si avranno problemi di elaborazione (scarsa qualità del segnale); in linea di massima si devono avere almeno $10 \div 12$ dB! Può avere rappresentazioni diverse o seconda che si parli di processo casuale o deterministico:

1) Segnale e rumore processi casuali, è qui un rapporto di potenze

$$SNR = \frac{P_s}{P_N} \rightarrow SNR_{dB} = 10 \log(SNR)$$

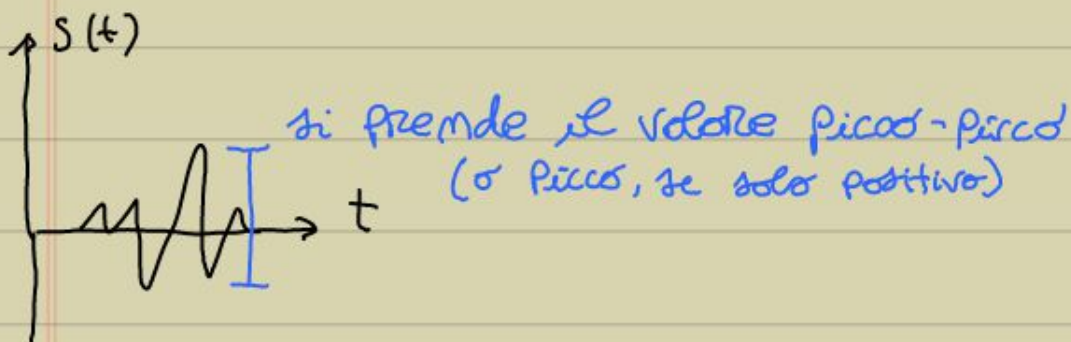
come si calcola la potenza del processo casuale? È proporzionale alla VARIANZA (cioè alla variabilità dell'ampiezza),

il problema è che si deve avere intermit-
tenza.

2) Segnale deterministico e rumore casuale. Ad esempio ECG e tremore muscolare! Qui conviene il rapporto di ampiezze:

$$SNR = \frac{A_s}{A_N} = \frac{A_{pp}}{\sigma_N}$$

A_s è ampiezza di segnale:




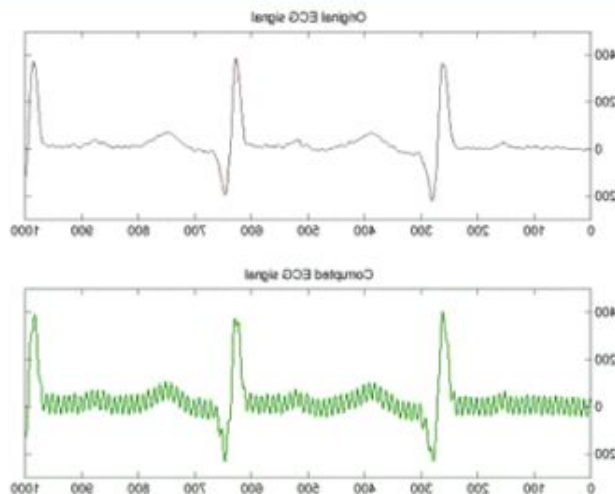
A_N è ampiezza del rumore, ma è più difficile rispetto al calcolo della potenza!
Si usa la deviazione standard, anche se dal punto di vista statistico non è corretto! Si usa infatti anche considerare la variabile casuale z (normale), che ha ddp gaussiana (il cui integrale fa 1)

chiaramente per calcolare la deviazione standard del rumore bisogna usare un brano di segnale senza la parte biologica utile!

3) Segnale e rumore deterministici (ECG e interferenza di rete), si usa il rapporto di ampiezze onde qua

$$SNR = \frac{A_{pp}}{N_{pp}}$$

ESEMPIO: 

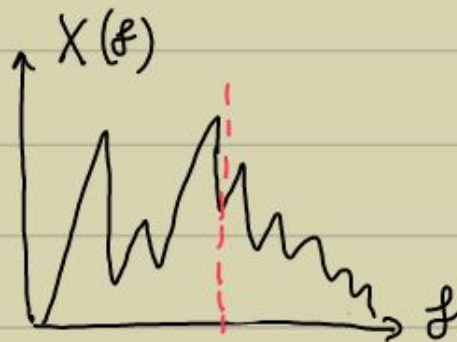


In questo caso $A_{pp} = 630$ u.a., $N_{pp} = 80$ u.a. e quindi $SNR = 7,9$ oppure $SNR_{dB} = 17,95$ dB

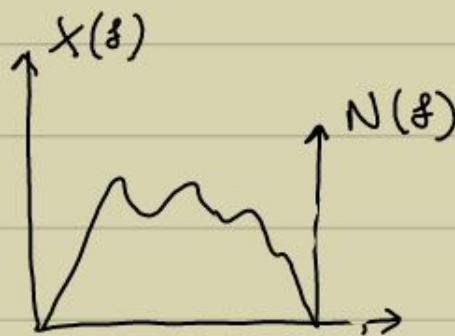
4) Segnale casuale, rumore deterministico, difficile che si verifichi (rumore deterministico e' quasi solo l'interferenza di rete),

si usa $SNR = \frac{\sigma_s}{N_{pp}}$

- In casi particolari, come l'artefatto da movimento, non c'è un segnale sovrapposto ma è un errore di acquisizione, qui si hanno otto ampiezze di artefatto ma a bassa frequenza, quindi basta un passabasso per eliminare l'artefatto!



- Segnale EEG con interferenza di rete (50 Hz), il rumore è una sola frequenza 50 Hz, quindi basta un passabasso (EEG ha bassa freq).



ipotesi:

- $S(t)$ deve essere deterministico (prevedibile), ad esempio la risposta ad uno stimolo esterno (ad esempio l'ECG non è prevedibile temporalmente) come i potenziali evocati! Dobbiamo sapere che c'è e quando si verifica.
- Il segnale deterministico deve ripetersi uguale a se stesso un numero sufficientemente elevato di volte; c'è il problema di fatica e adattamento del sistema fisiologico (dopo magari 100-150 stimolazioni).
- Il rumore deve essere casuale, scorrelato dal segnale, stazionario (almeno in senso lato) e ergodico.

almeno WSS \rightarrow processo con media e funzione di autocorrelazione che non dipendono dal tempo; la $R_x(\tau)$ dipende solo dalla differenza tra i due istanti di cui misuro la correlazione (non importa a quale tempo la misuro, ma solo la differenza $t_2 - t_1$).

Come funziona la tecnica? L'operazione di media è un filtro passa basso, quindi se calcoliamo la media del segnale riduciamo la variabilità del rumore. Dal grafico iniziale, a $t=0$ acquisisco lo stimolo, e continuo per un tempo di 100 s, acquisisco più campioni di quanto dura il segnale buono (che si ottiene dopo circa 30 ÷ 40 s), perché come visto, per calcolare SNR serve una parte di registrazione con solo rumore.

Questa operazione di stimolo-acquisizione va fatta N volte (magari 500)!

Ogni registrazione (di 100 s come nel grafico), sarà fatta:

$$x_i(t) = s(t) + m_i(t) \quad i\text{-esima Reg.}$$

↳ segnale uguale per ogni epoca!

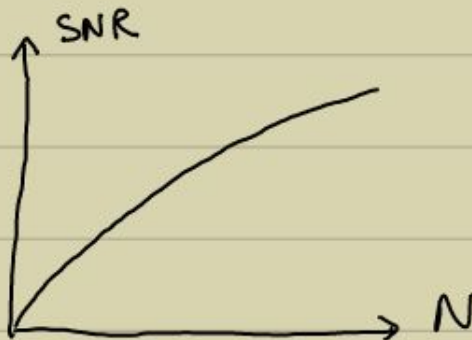
calcoliamo il rapporto SN per questa epoca, usando il rapporto tra ampiezze.

$$SNR_i = \frac{A_{pp}}{4\sigma_N} \rightarrow \text{calcolata dove non c'è } s(t)$$

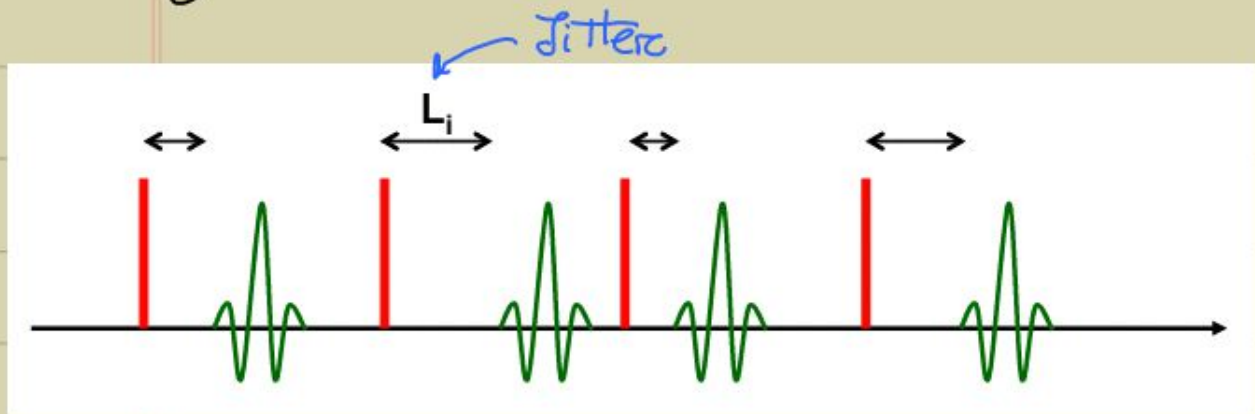
indefinitamente per fottica e adotta-
-to, il massimo possiamo avere $N = 120 \div 130$
Il fattore importante è che sappiamo
a PRIORI quanto migliora il rapporto
segnale - rumore, possiamo calcolare
il numero di stimolazioni neces-
-sarie per avere un voluto SNR.

Perché la media equivale ad un
FPB, il crescere di N è come se
diminuiamo la frequenza di
taglio (si taglia più rumore); sul
segnale buono è come un filtro
passa tutto, non viene toccato!

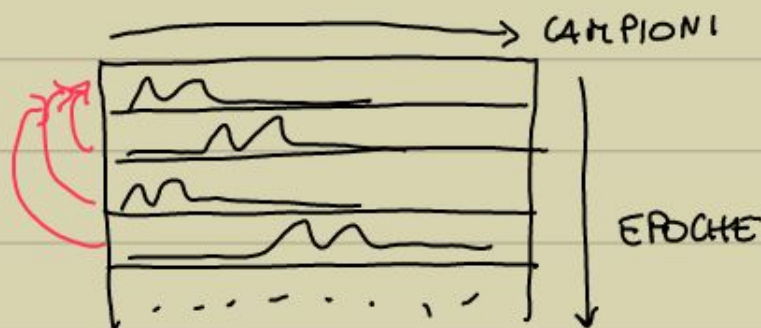
La curva di miglioramento sarà
quella di una radice :



sia soggetto al FPB con freq. di taglio che dipende dal numero di epoche (nel caso del non Jitter), nel caso di Jitter la freq. di taglio del filtro equivalente è INVERSAMENTE proporzionale alla varianza del Jitter, e colpisce anche il segnale biologico buono!



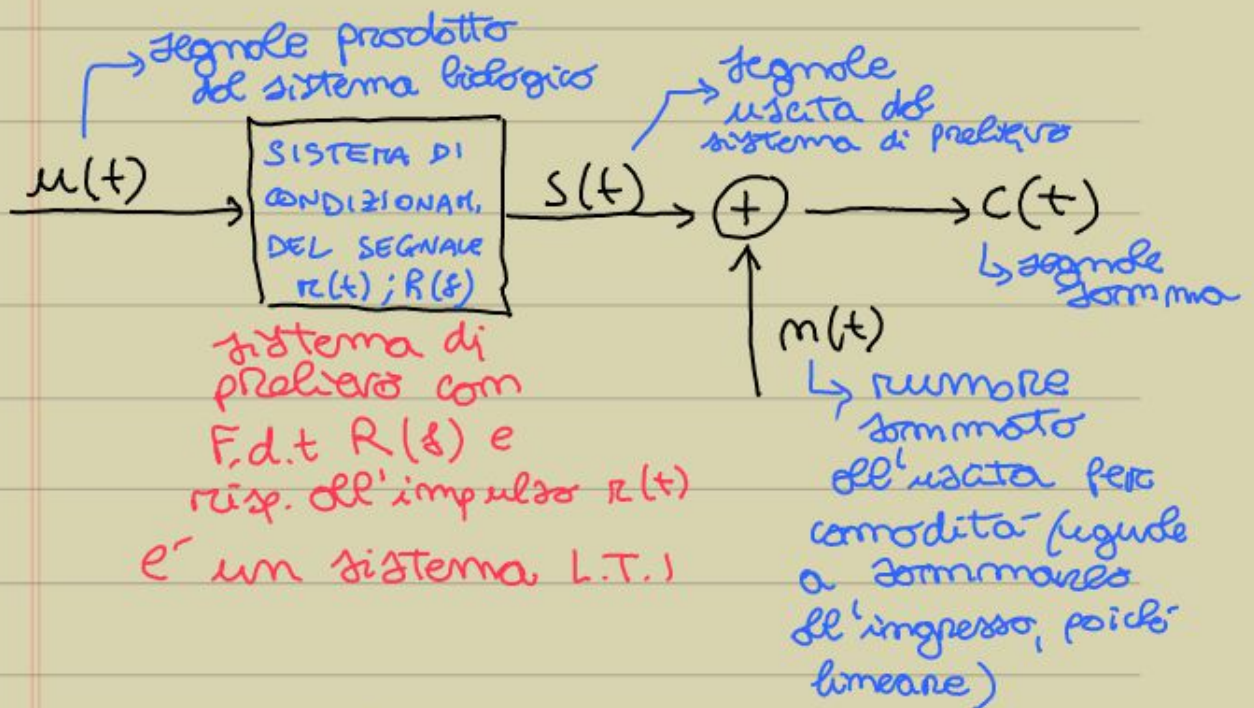
Invece memorizzando il segnale in una matrice alternando:



quindi il segnale è DISALLINEATO, e facciamo la media in MATLAB

Per spostare poi il segnale del delay calcolato, si può usare la funzione "shift", oppure spostare i campioni e riempire i campioni lasciati vuoti con degli zeri (buono se il segnale in quei punti è approssimativamente nullo).

FILTRO OTTIMO, o DI WIENER



Lo scopo del filtro ottimo è quello di dimensionare un filtro con risposta all'imp. $\psi(t)$, che applicato a $c(t)$ e eventualmente deconvoluto a $r(t)$,

sono delle combinazioni in mezzo, quindi invece di garbo nel tempo si fa in frequenza! quindi se sostituiamo l'espressione di U' :

$$e = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{[S(f) + N(f)] \phi(f)}{R(f)} - \frac{S(f)}{R(f)} \right]^2 df$$

$$= \int |R(f)|^{-2} \{ |S(f)|^2 \cdot |1 - \phi(f)|^2 + |N(f)|^2 |\phi(f)|^2 \} df$$

derivando otteniamo solo la funzione integranda, e ponendo uguale a zero ricaviamo ϕ :

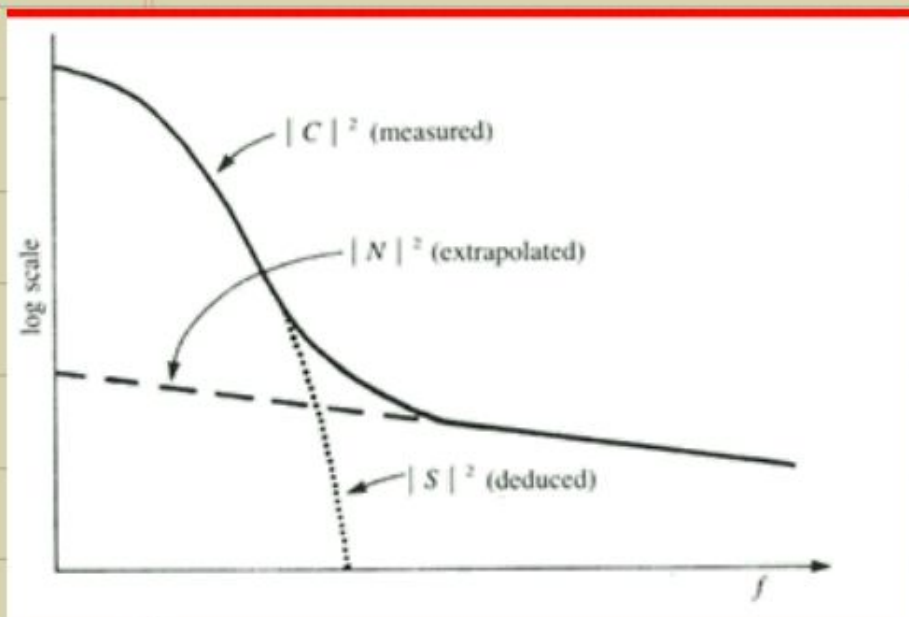
$$\phi(f) = \frac{|S(f)|^2}{|S(f)|^2 + |N(f)|^2}$$

quindi non ci serve conoscere $m(t)$! Tuttavia noi abbiamo solo $c(t)$, somma di $s(t)$ e $m(t)$, non le componenti e basta! come risolviamo?

$|S(f)|^2 + |N(f)|^2 \rightarrow C(f) = S(f) + N(f) \rightarrow$
 $\rightarrow |C(f)|^2 = |S(f)|^2 + |N(f)|^2 + \int_{S,N} \dots$

\rightarrow ~~stocastico~~ tutto
 \hookrightarrow coefficiente di cross-correlazione

tutti banda limitata (massimo 1 kHz),
 e per acquisirlo è stato usato il teorema
 di Nyquist, quindi nello spettro di $C(f)$
 in alta freq. possiamo essere quasi
 certi che ci sia solo rumore; quindi
 interpolando da frequenza bassa ad
 alta frequenza, estraiamo per
 differenza $S(f)$:



la frequenza più alta che vediamo
 nello spettro è la frequenza di Nyquist,
 uguale a $f_c/2$.

N.B. In Matlab il numero di elementi
 nel vettore della trasformata di Fourier

l'uscita si ottiene con la convolu-
- zione :

$$y[m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[m-k] h[k] = \sum_k z^{m-k} h[k] = z^m \sum_k z^{-k} h[k] =$$

$$= z^m H(z)$$

→ è una forma più generica della trasformata di Fourier!

ne consegue che

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k} h[k]$$

PROPRIETÀ:

La trasformata z è sempre una funzione CONTINUA in z ! Questo significa che in frequenza possiamo usare quanti campioni vogliamo (tra 0 e $\frac{f_c}{2}$ per Nyquist, e il valore limite superiore per la continuità).

• RITARDATORE DISCRETO DI K PASSI (CAMPIONI)

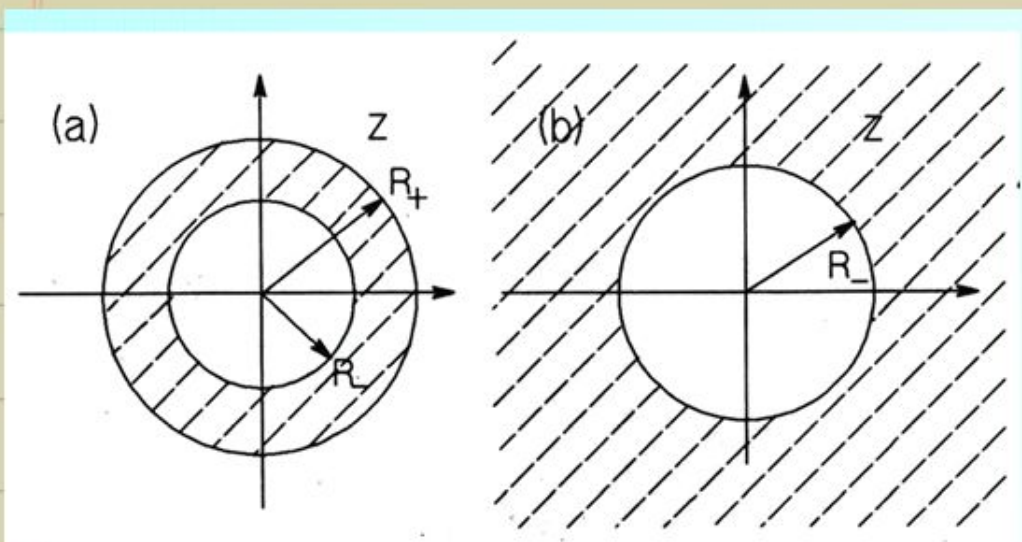
è un blocco fondamentale dei filtri digitali, ha modulo 1 in funz. di trasferimento, poiché in uscita dà il segnale semplicemente posteso nel tempo:



• ZONA DI CONVERGENZA

La trasformata Z esiste solo per valori di z per cui essa converge, cioè in una regione compresa tra due circonferenze di raggi R^+ e R^- ;

nel caso particolare della trasformata di Fourier, $z = e^{-j2\pi ft}$, cioè un numero complesso di modulo unitario, quindi il raggio di convergenza è 1:



- Cos'è un filtro digitale? un sistema LTI con funzione di transf. $H(z)$, che può essere scritta come rapporto

filtro lo crea in automatico.

- Per passare dalla z al discreto, il calcolo è immediato:

$$H(z) = \frac{2 + 3z^{-1} - 4z^{-2}}{1 - z^{-2} + 2z^{-3}} \quad \begin{matrix} m_b = 2 \\ m_a = 3 \end{matrix}$$

Scriviamo i vettori:

$$\begin{matrix} b = [2, 3, -4] \\ a = [1, 0, -1, +2] \end{matrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{sono sempre} \\ m_b + 1 / m_a + 1 \text{ posizioni} \end{array} \right\}$$

quanto vale la risposta all'impulso?

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \rightarrow Y(z) \underbrace{[1 - z^{-2} + 2z^{-3}]}_{\text{il DENOMINATORE}} = X(z) \underbrace{[2 + 3z^{-1} - 4z^{-2}]}_{\text{il NUMERATORE}}$$

moltiplica l'uscita moltiplica l'ingresso

svolgendo i calcoli:

$$Y(z) - Y(z)z^{-2} + 2Y(z)z^{-3} = 2X(z) + 3X(z)z^{-1} - 4X(z)z^{-2}$$

Antitrazformando:

$$y[m] - y[m-2] + 2y[m-3] = 2x[m] + 3x[m-1] - 4x[m-2] \rightarrow \text{sono solo RITARDAZIONI!}$$

La risposta all'impulso ha lunghezza finita.

3) Se $m_a, m_b \neq 0 \rightarrow$ filtro IIR "pole-zero", ricorsivo, autoregressivo a media mobile; basta che ci sia un polo per rendere il filtro autoregressivo e IIR (detto ARMA)

- Supponiamo di avere il tipo di filtro che serve, e i vettori a e b , come si esegue il filtraggio?
 - si prende il primo campione di $x[n]$ ($x[1]$), si manda nel filtro e esce $y[1]$, poi si manda il secondo campione e via così, campione per campione.
 - se il filtro è autoreg., non funziona subito, perché dipende da campioni precedenti che ancora non abbiamo fornito! Si dice TRANSITORIO, durante il quale il filtro non funziona correttamente. Conviene quindi

superiore e responsabile di elaborare l'uscita, quella inferiore, della parte autoregressiva. L'uscita sarà del tipo:

$$y(m) = b(1)x(m) + z_1(m-1);$$

$$z_1(m) = b(2)x(m) + z_2(m-1) - a(2)y(m);$$

.

.

.

$$z_{n-2}(m) = b(n-1)x(m) + z_{n-1}(m-1) - a(n-1)y(m);$$

$$z_{n-1}(m) = b(n)x(m) - a(n)y(m);$$

→ PESI, ottenuti da $b(i) \cdot x(\dots)$

$- a(i) \cdot y(\dots)$

+ un altro peso ritardato

Il transitorio si fa poiché all'inizio i valori z sono nulli (al secondo campione il primo z diventa $\neq 0$), per evitare il transitorio si possono imporre delle CONDIZIONI INIZIALI, ma dobbiamo sapere che valori mettere, solitamente non è così (noi consideriamo cond. iniziali nulle).

- Realizzazione del filtro in notazione,

- Come si ricavano a e b da mettere nella funzione filter? Esistono delle funzioni che lo fanno, dato il tipo di filtro, e la frequenza di taglio desiderata:

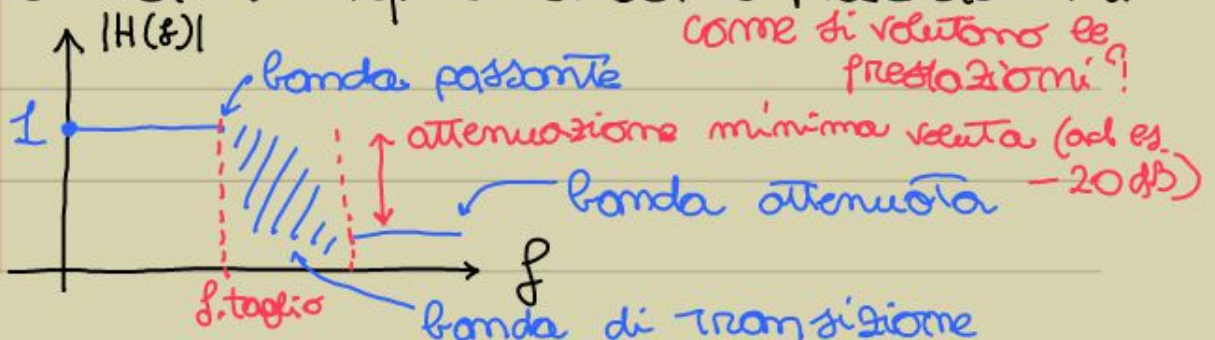
$[b,a] = \text{butter}(9, 400/1000);$

Annotations:
 - butter : per un filtro Butterworth
 - 9 : ordine del filtro
 - $400/1000$: freq. di taglio voluta (normalizzazione per avere la f. di taglio tra 0 e 1)

La frequenza va normalizzata dividendo per il valore della banda del segnale (meta della frequenza di Nyquist, in questo caso = 1KHz); l'ordine è il numero massimo di poli/zeri, quindi i coefficienti sono sempre 1 in più dell'ordine (in questo caso sono 10).

- Differenze tra le tipologie di filtri:

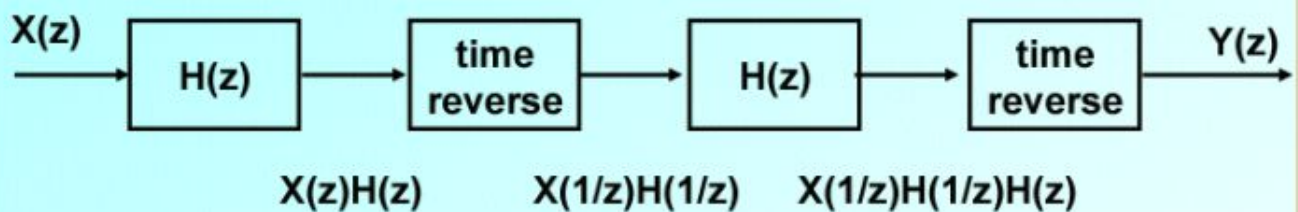
IR → minore ordine necessario per avere comunque buone prestazioni.



per segnali con morfologia impor-
-tante, con i FILTRI ANTICAUSALI; dato
un segnale discreto $x[n]$ con
trasformata $X(z)$;

FILTRO A DOPPIA PASSATA

Se $X(z) = Z[x[n]]$ allora $X(1/z) = Z[x[n] \text{ time reversed}]$



$$Y(z) = X(z)H(1/z)H(z)$$

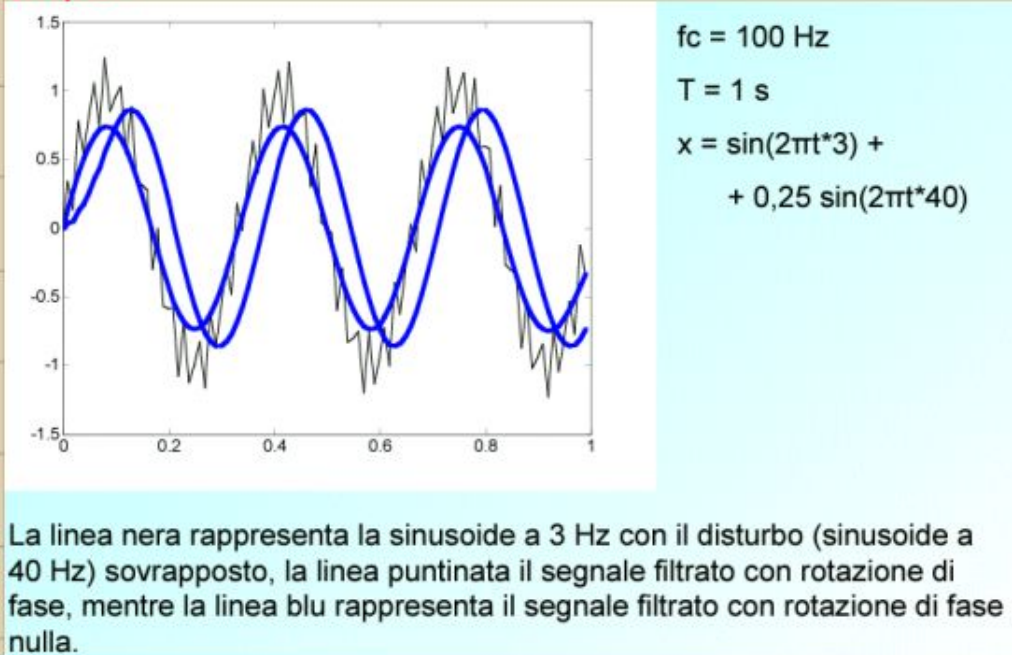
All'uscita del primo blocco, il
segnale filtrato è distorto, applichiamo
l'operazione di time-reverse (l'ultimo
compimento diventa il primo), che
equivale a mettere "-1" a esponente
della variabile z . A questo punto
ri-filtriamo con la stessa funzione
di trasferimento (stesso filtro
iniziale), e riappliciamo la time
reverse, ottenendo $Y(z)$.

Fare $H(z) \cdot H(1/z)$ equivale a

3 volte l'ordine del filtro ricorsivo.

2) La sequenza di ingresso deve andare a zero all'inizio e alla fine (transitorio).

ESEMPIO



Su Matlab, il doppio filtraggio si fa con la funzione "filtfilt" con stessi argomenti.

Per stabilire l'ordine del filtro da dare alle funzioni che calcolano [a] e [b], si fanno delle prove! Chiacchierando se la regione di transizione è stretta in un piccolo campo di frequenze, servirà un ordine più alto, più radici → maggiore

è uno in modulo:

$$f = [\phi, f_T, f_A, f_N] / f_N \rightarrow \text{normalizzazione}$$

$$M = [1, 1, \phi, \phi]$$

↳ modulo in continua

Sono i vettori da fornire alla routine di yulewolkere!

$$[b, a] = \text{yulewolk}(N, f, M)$$

↳ ordine

FILTRI FIR

Sono sempre stabili, fanno parte lineare (SE il vettore b dei coefficienti è fatto da numeri simmetrici o antisimmetrici) → tuttavia necessitano di un ordine più alto.

Tecniche di progetto:

simile a Yulewolkere

Method	Description	Design Function
Windowing	Single Band	$b = \text{fir1}(n, Wn, options)$
	Multiband	$b = \text{fir2}(n, f, m, options)$
Multiband with Transition Bands	Least Squares	$b = \text{firls}(n, f, m, options)$
	Minimax	$b = \text{remez}(n, f, m, options)$

aggiungere un campo alla funzione.

• FILTRAGGIO A BLOCCHI

Si divide il segnale a blocchi di tot elementi per filtrarlo, avendo tanti transitori quanti sono i blocchi; tuttavia, la funzione filter può fornire in uscita anche le corrette condizioni iniziali (dell'inizio ipotizzate nulle) → le usiamo per il secondo blocco di segnale, evitando così il transitorio.

• RIMOZIONE DELL'INTERFERENZA DI RETE

È un problema importante per molti segnali di interesse biomedico, la sua rimozione dipende dal segnale, poiché solo alcuni di essi hanno importanza importante nel dominio del tempo → prevalentemente ECG.

Ci sono vari filtri adeguati:

1) NOTCH

ipotesi di interferenza di ampiezza

del segnale s campionati prima (rumore additivo e sempre uguale in ampiezza) in forma generica:

$$y[m] = x[m] - x[m-k], \quad k = \frac{f_c}{f_b}$$

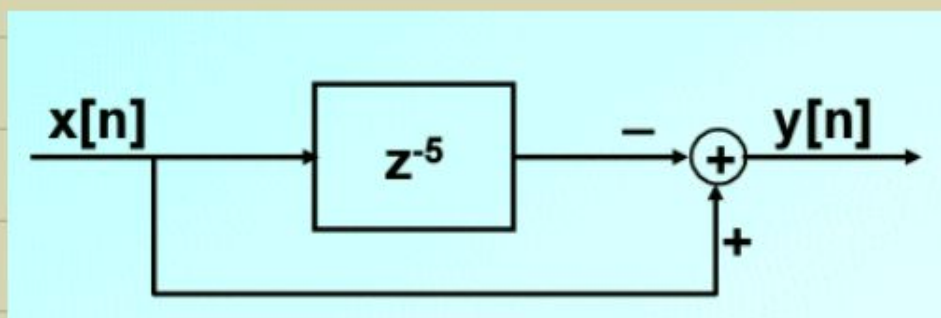
f_c ← f. comp. del segnale
 f_b ← f. dell'int.

$$Y(z) = X(z) \underbrace{(1 - z^{-k})}_{H(z)}, \quad a = 1$$

$$b = [1, 0, 0, 0, 0, -1]$$

gli zeri sono $k-1$

e la funzione di trasferimento di un filtro FIR con vettore $[b]$ anti-simmetrico, quindi sempre stabile e a rotazione di fase lineare! Dimensionare il notch dipende solo da k , quindi dalla frequenza di campionamento del segnale! I vettori $[a]$ e $[b]$ sono già definiti a meno dell'ordine.

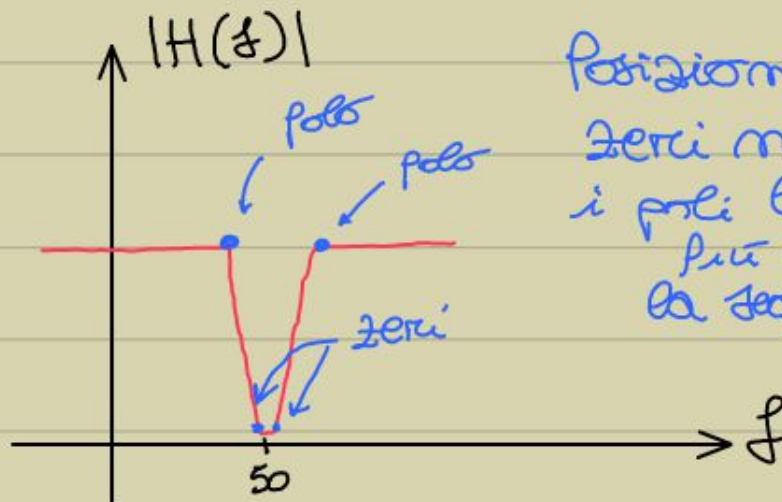


La fase è lineare e va bene, ma il modulo non vale 1 in banda passante (OVERSHOOT), servirebbero più radici, ma esse sono FISSE determinate da $K!$ ci sono attenuazioni in OGNI multiplo di 50 Hz (noi vogliamo solo ω), cioè ogni componente armonica del segnale moltiplica di 50 (nell'ECG ci interessa solo il fatto che rimuoviamo 100 Hz, i successivi sono fuori banda); ciò dipende dal fatto che la differenza che fa il denoising si applica tanto a 50 Hz quanto a 100.

Altra cosa positiva → viene rimosso anche il VALOR MEDIO! cioè la continua, poiché se consideriamo la trasformata di Fourier → $H(f) = 1 - e^{-j2\pi f K} \rightarrow f=0 \rightarrow H=0$ per qualsiasi valore di $K!$
 Il segnale filtrato è:

distorsione (servirà anche il doppio passata), quindi non applicabile in rea time.

È un filtro di tipo ARMA, con 4 radici (2 poli e 2 zeri complessi coniugati) → l'unico problema è il posizionamento delle radici!



Posizioniamo gli zeri molto vicini, i poli leggermente più lontani, ma la sequenza è questa

Quindi l'equazione dell'uscita sarà:

$$y[m] = x[m] + c_1 x[m-1] + c_2 x[m-2] + c_3 y[m-1] + c_4 y[m-2]$$

con funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - c_3 z^{-1} - c_4 z^{-2}}$$

} coefficienti a media mobile (MA)
} coefficienti autoregressivi (AR)

per calcolare correttamente c_1, c_2, c_3, c_4

2) Cosa succede se l'interferenza di rete non ha ampiezza costante?

Una soluzione è il **FILTRO ADATTIVO**, che tenta di "adattarsi" al rumore e rimuoverlo per sottrazione; è un filtro

totalmente digitale, non esiste analogico.

L'ipotesi è che il segnale abbia intervalli sufficientemente lunghi in cui l'ampiezza è costante (segnale biologico).

Un esempio è l'ECG, tra un battito e l'altro l'ampiezza è sostanzialmente zero, c'è solo $N(t)$!



Quell'intervallo è quello di adattamento del filtro, durante il quale il filtro "insegue" il disturbo.

Indichiamo con x_m il rumore di rete (nel tratto isoelettrico), e e_m sono i componenti che creiamo noi

per il passo attuale e futuro:

$$d_{m+1} = (x_{m+1} - e_{m+1}) - (x_m - e_m), \quad e_{m+1} = x_{m+1}$$

se la prediz. è corretta

Se d è positivo sto sovrastimando il valore, o contrario sto sottostimando, e si applicano le correzioni:

$$\left. \begin{aligned} e'_{m+1} &= e_{m+1} + C \\ e'_{m+1} &= e_{m+1} - C \end{aligned} \right\} C \text{ è sempre costante!}$$

Si continua fino ad annullare l'errore! Si oscilla attorno alla sinusoidale reale, aggiungendo o togliendo C ad ogni passo. Quanto vale C ? Deve essere sufficientemente piccola (ma non troppo), né grande, altrimenti non si ha una approssimazione sufficientemente precisa; dipende dalla durata del tratto isolettrico, quindi dalla frequenza cardiaca (si ha meno tempo per adattarsi se la f_c cardiaca è alta, perché

qualsiasi segnale, purche' a ENERGIA FINITA, stessa limitazione vale per la trasformata di Fourier.

La limitazione dello spettro come modulo quadro e' causata da fluttuazioni casuali dell'ampiezza (cioe' vedremmo ampiezze che potrebbero essere folte) → per risolvere

questo problema si calcola lo spettro

• con analisi statistiche → TEOREMA DI

WIENER - KHINTCHINE :

Lo spettro del segnale e' la trasformata di Fourier discreta della funzione di autocorrelazione.

$$P_{xx}(f) = T \sum_{-\infty}^{+\infty} r_{xx}[m] e^{-j2\pi f m T}$$

spettro f. di autocorrel. "m" e -j2πfmT SE x[m] e^{-j2πfmT} WSS
m ritardo

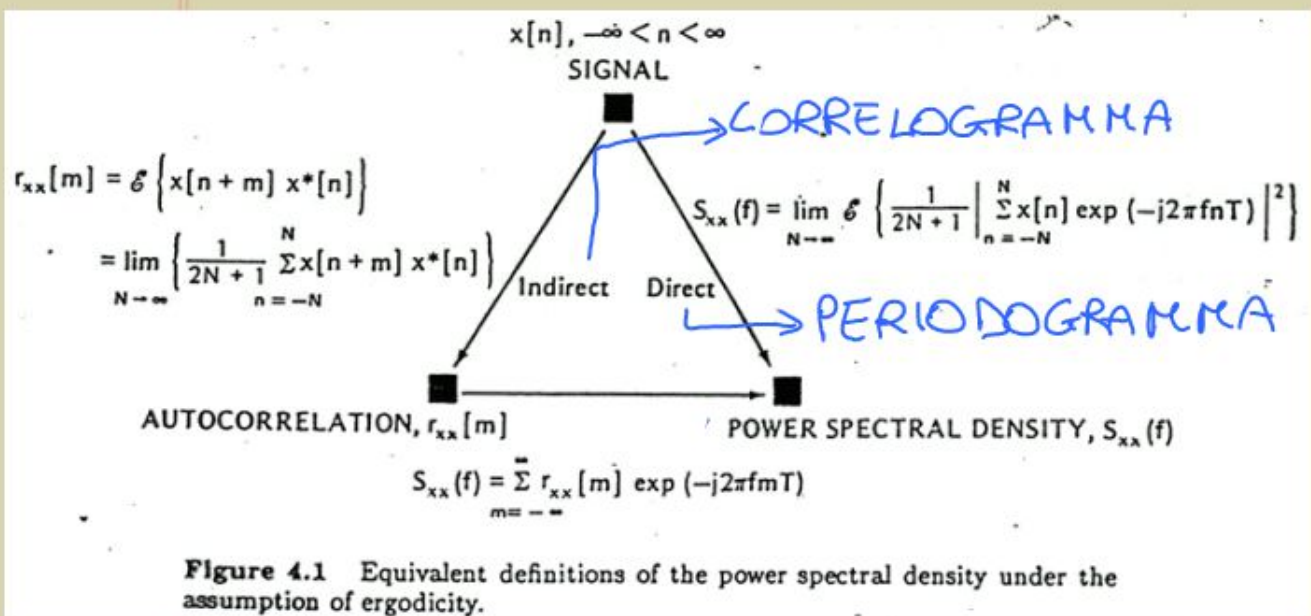
ipotesi di STAZIONARIETA' in senso lato (WSS) almeno → media e funzione di autocorrelazione sono indipendenti dal tempo. Se l'ipotesi non e' soddisfatta, non si ottiene lo spettro

Reale perché la trasformata di Fourier è reale se la funzione da trasformare è PARI \rightarrow la f. di autocorrelazione è sempre pari ($R_{xx}(x) = R_{xx}(-x)$), perché misura la correlazione tra gli istanti "t" e "t+T", che è la stessa chiaramente tra "t+T" e "t". Giusto perché la potenza deve essere reale!

Positiva perché la trasformata di Fourier è la scomposizione rispetto alle sinusoidi complesse ($e^{j2\pi ft}$), che rappresentano una base ORTONORMALE \rightarrow si ottiene una matrice con autovettori positivi.

chiaramente se il segnale non è WSS, l'autocorrelazione non è come deve essere, si ottiene una correlazione errata. Come capiremo se il segnale è WSS? Dalla conoscenza teorica del segnale o del sistema fisiologico, e analizzando piccole finestre temporali.

il limite e la media, otteniamo una STIMA dello spettro, e non è lo spettro vero e proprio (perché noi consideriamo un brano); questa definizione è equivalente a quella data prima sulla funzione di autocorrelazione!



Un metodo è DIRETTO (quello appena visto), uno è INDIRECTO (come l'autocorrelazione), e richiede due passaggi invece di uno. La differenza è quindi nel considerare il segnale di lunghezza infinita (si possono usare equivalentemente

Cosa otterremmo in conclusione?

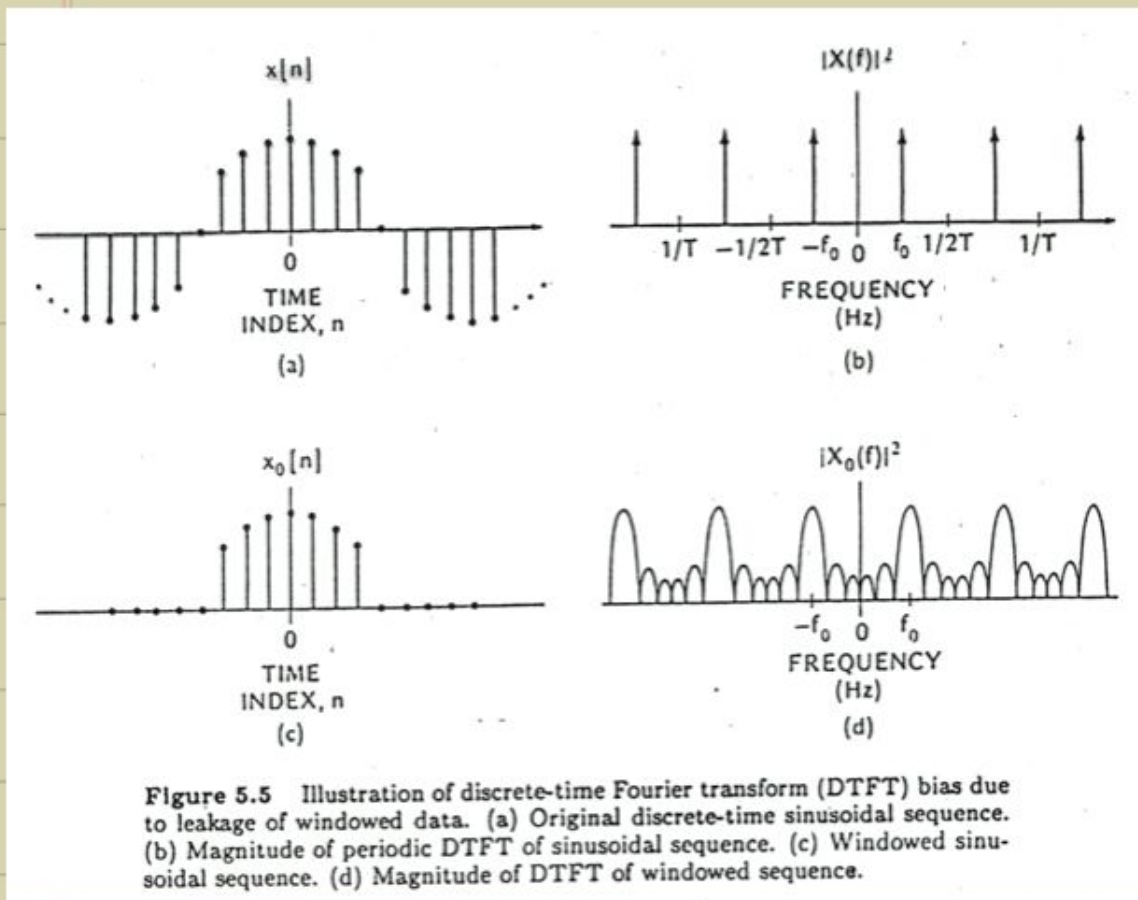


Figure 5.5 Illustration of discrete-time Fourier transform (DTFT) bias due to leakage of windowed data. (a) Original discrete-time sinusoidal sequence. (b) Magnitude of periodic DTFT of sinusoidal sequence. (c) Windowed sinusoidal sequence. (d) Magnitude of DTFT of windowed sequence.

abbiamo la sovrapposizione di tanti LOBI nello spettro, che risulta confuso, peggiora o cresce delle frequenze nel segnale (per ogni frequenza c'è una f !)

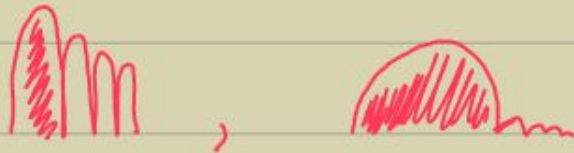
Quindi questo spettro è INUTILE, vogliamo una STIMA dello spettro, migliore possibile, perché quello reale è illeggibile.

segnale fimestrato! Ne consegue che la potenza del segnale di lunghezza infinita è UGUALE a quella del segnale fimestrato, ma essa è distribuita (sparpagliata) sotto le oscillazioni del segnale sinc (leakage di potenza), il totale vale 1 ma sparto sulle frequenze attorno a f_0 . Con più sinusoidi, lo sparpagliamento è ancora più evidente, perché lo sparpagliamento avviene su più frequenze centrali!

- Dato che la fimestruttura può essere di qualsiasi tipo (importa solo che "tronchi" il segnale, la sua forma può essere scelta). Quindi la fimestra può essere definita genericamente da altre notazioni:

Se i lobi spariscono, possiamo cosud-
-mente anche comparire! Questo ef-
-fetto deve essere RIDOTTO; come

- riduco il leakage? USO una finestra COMODA abbastanza → cioè che dia lobi SECONDARI sufficientemente bassi!
ci sono finestre di vario tipo:



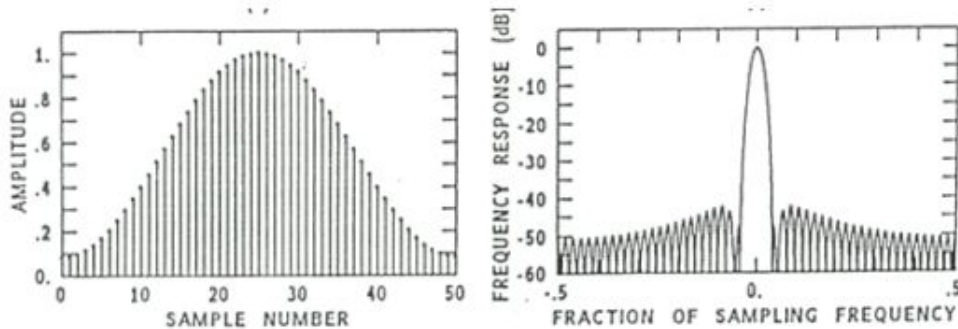
Se tolgo potenza dai lobi secondari
va in un quello principale, che non
può essere troppo largo (deve essere
simile a una δ !) Vogliamo quindi:
LOBO PRINCIPALE STRETTO

BASSA AMPIEZZA DEI LOBI SECONDARI

ALTA VELOCITÀ DI DECADIMENTO.

Per la finestra rettangolare, questi
parametri non sono buoni! Le
segnale triangolare è molto
meglio!

FINESTRA DI HAMMING (coseno rialzato)



$$w[n] = 0,54 + 0,46 \cos(\pi n)$$

$$W(f) = 0,54D_N(f) + 0,23[D_N(f - 1/NT) + D_N(f + 1/NT)]$$

questa è la più usata, non è detto che sia la migliore!

I parametri delle finestre vengono dati come:

WINDOW NAME	HIGHEST SIDELobe LEVEL	ASYMPTOTIC SIDELobe DECAY RATE	EQUIV. BW (DTFS bins)	1/2-POWER BW (DTFS bins)
Rectangle	-13.3 dB	-6 dB/octave	1.00	0.89
Triangle	-26.5 dB	-12 dB/octave	1.33	1.28
Hann	-31.5 dB	-18 dB/octave	1.50	1.44
Hamming	-43 dB	-6 dB/octave	1.36	1.30
Nuttall ($r = 3$)	-98 dB	-6 dB/octave	1.80	1.70
Gaussian	-42 dB	-6 dB/octave	1.39	1.33
Equiripple	-50 dB	0 dB/octave	1.39	1.33

differenza tra lobo principale e lobo secondario più alto.

Il trend è l'ANDAMENTO, cioè fa cambiare l'orientazione, ad esempio l'ECG sarebbe così:



noi lo RADDRIZZIAMO lungo la linea isoelettrica col detrending, basta un filtro passa-basso, il trend è sempre in bassa frequenza rispetto al segnale, oppure se il trend segue una certa funzione (retta, parabola...) si può creare il fitting di tale funzione (polyfit) e SOTTRARLA al segnale; esiste anche la funzione "detrending".

È fondamentale la rimozione del valore medio, perché la stima spettrale coinvolge il modulo quadro \rightarrow il valore

negativi (e' la trasf. della funzione di autocorrelazione), che vanno RIMOSI mettendoli a zero, o riboltondoli sull'asse positivo (non hanno senso fisico \rightarrow potenza negativa)

① Per il correlogramma bisogna calcolare la sequenza di autocorrelazione:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) x^*(t) dt$$

e' una convoluzione

in 0 e' massima, e coincide con l'energia del segnale. Il problema per noi e' il $\pm\infty$, perché abbiamo sempre sequenze finite! Nella pratica, supponiamo di avere una sequenza ergodica di N campioni, separando il calcolo di R_{xx} sui semiasse positivi

e negativi:

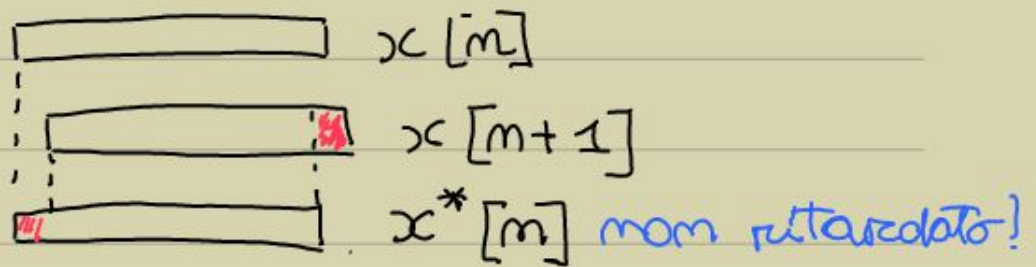
$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N-m} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] x^*[n]$$

\rightarrow ritardi positivi

71

uno scalare che va diviso per $1/N$, ottenendo uno scalare normalizzato. \square

- $m = 1$, e' uguale ma abbiamo un compimento di ritardo!



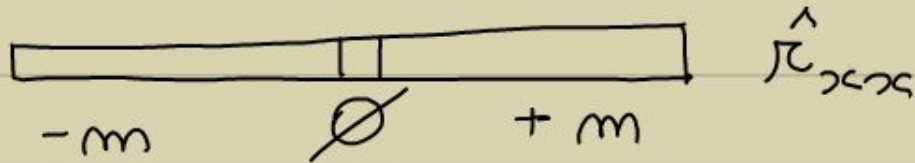
Le parti rosse non vengono usate nel prodotto, non fanno supporto comune! Dal prodotto si ottiene un vettore più corto di quelli di partenza:

$$\rightarrow \Sigma \square \xrightarrow[\frac{1}{N-1}]{} \square \hat{r}_{xx} [1]$$

il valore ottenuto sarà il secondo valore del vettore di autocorrelazione.

Ne consegue che il massimo ritardo che possiamo calcolare e' "N-1", dopo sono tutti zero!

i ritardi:



Tuttavia, questa è una STIMA della funzione di autocorrelazione (basata su numero finito), ci sono anche altri stimatori! Ad esempio c'è uno stimatore alternativo:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m]x^*[n] & 0 \leq m \leq N-1 \\ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x^*[n+|m|]x[n] & -(N-1) \leq m < 0 \end{cases}$$

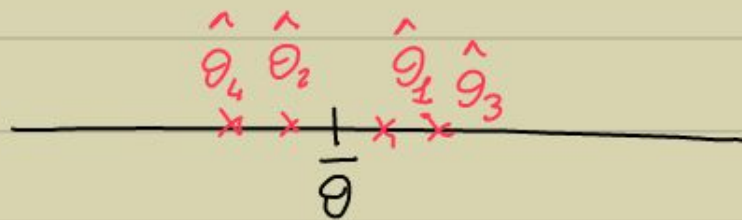
I due stimatori sono legati dalla seguente relazione:

$$r_{xx}[m] = \frac{N-|m|}{N} \hat{r}_{xx}[m]$$

Sono uguali in zero, e dopo differiscono SOLO per la normalizza-

CAMPIONE, il risultato dipende fortemente dal campione scelto!
 $\hat{\theta}$ si dice STIMATORE, ed è polarizzato se la sua media coincide col valore reale! $E\{\hat{\theta}\} = \bar{\theta}$, cioè il caso ideale. La polarizzazione è quindi una misura di quanto lo stimatore si avvicina al caso reale (errore di stima).

Un altro parametro è la CONSISTENZA dello stimatore:



supponiamo di avere 4 valori ottenuti da diversi campioni: $\hat{\theta}_i$, la loro media darà $\bar{\theta} \rightarrow$ uno stimatore perfettamente consistentemente restituisce sempre $\bar{\theta}$, uno non polarizzato si avvicina a tale comportamento:

all'aumentare di N !

$$\text{var}\{\hat{r}_{x,x}[m]\} \approx \frac{N}{(N-m)^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (r_{x,x}^2[k] + r_{x,x}[k+m]r_{x,x}[k-m])$$

inverso lo stimatore non è consistente. Lo stimatore alternativo invece è polarizzato, solo all'∞ diventa non polarizzato. Per la varianza, essa va a 0 all'aumentare dei campioni, quindi è asintoticamente consistente!

$$\begin{aligned} \text{var}\left\{\begin{matrix} \sqrt{N-|m|} \\ \hat{r}_{x,x}[m] \end{matrix}\right\} &= \frac{N-|m|}{N} \text{var}\{\hat{r}_{xx}[m]\} = \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (r_{x,x}^2[k] + r_{x,x}[k+m]r_{x,x}[k-m]) \end{aligned}$$

Bisogna scegliere lo stimatore che dà risultati migliori in base al caso.

Ad esempio lo stimatore non polarizzato per alcune sequenze corte da

• CALCOLO DEL CORRELOGRAMMA

A questo punto si applica il teorema di Wiener-Kintchine, modificandolo per una sequenza non infinita:

$$P_{x,x}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{+\infty} r_{x,x}[m] e^{-j2\pi f m T}$$

si ottiene il correlogramma sostituendo alla sequenza teorica di autocorrelazione la sua stima ottenuta su ritardi variabili $\pm L$

$$\hat{P}_{x,x}(f) = T \sum_{m=-L}^{+L} \hat{r}_{x,x}[m] e^{-j2\pi f m T}$$

definita per $-1/2T \leq f \leq 1/2T$

L_{MAX} generalmente è minore o uguale ad un decimo del numero di campioni N (per ridurre la varianza dello stimatore dell'ACS).

La lunghezza massima del braccio è minore o uguale a un decimo del numero di campioni N , e serve a ridurre la varianza dello stimatore (criterio operativo). Si ottiene uno stimatore della densità spettrale di potenza, quindi sarà caratterizzato da polarizzazione e consistenza:

POLARIZZAZIONE → risulta polarizzato perché si fa l'istituzione dovuta

è stimatore polarizzato! Se uso L_{max} uguale a $N-1$, si ottiene esattamente il periodogramma (caso MIGLIORE)

- Correlogramma di Blackman e Tuckey: per migliorare la finestatura, si può usare una finestra opportuna di lunghezza DISPARI, con la condizione che $w[0] = 1 \rightarrow$ per non alterare l'energia del segnale!

→ Blackman e Tuckey
→ può essere tapering od esempio

$$\hat{P}_{BT}(f) = T \sum_{m=-L}^{+L} w[m] \hat{r}_{xx}[m] e^{-j2\pi f m T}$$

quindi $E \{ \hat{P}_{BT}(f) \} = P_{xx}(f) * \Omega(f)$
 DEVE ESSERE L'ACS POLARIZZATO! ↳ DFT di $w[m]$

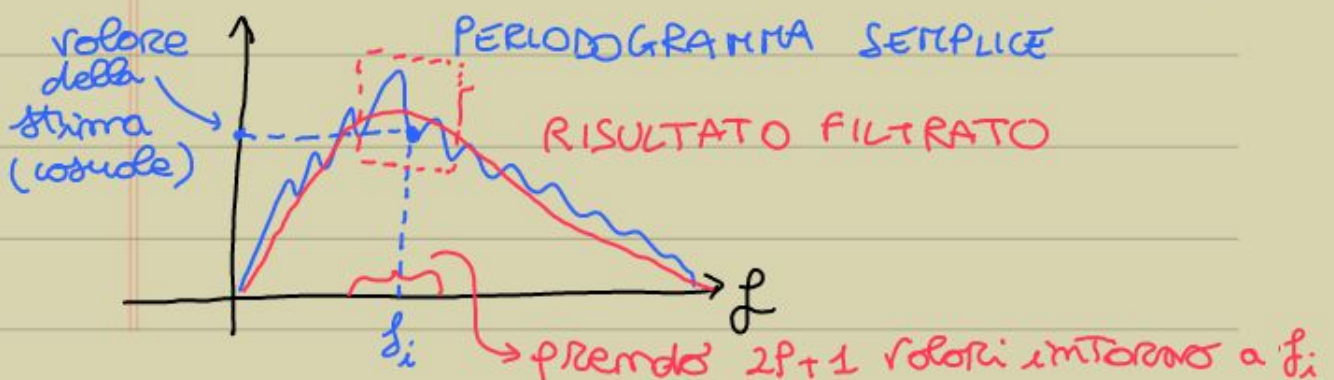
questo valore atteso in generale è ASINTOTICAMENTE non polarizzato!
 Dal punto di vista della consistenza, come già visto la variabilità aumenta col numero di campioni, se è troppo elevata diminuiamo e via.

nonché osintoticamente! Questo è dovuto sempre alla finestrastruttura:

$$\text{var}\{\hat{P}_{xx}(f)\} = P_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin(2\pi fTN)}{N \sin(2\pi fT)} \right)^2 \right]$$

Come possiamo ridurre la variabilità, non avendo l'autocorrelazione? Quello semplice di Skuster non può fare nulla, ci sono altri stimatori che cambiano la finestrastruttura, tutto riguarda alla consistenza principalmente, la polarizzazione disturba poco!

- Metodo di Daniell. Utilizza la media (diminuisce la casualità), partendo dal periodogramma semplice.



una media, applicando il criterio dell'averaging!

$$\tilde{P}_{x,x}^{(p)}(f) = \frac{1}{DT} \left| T \sum_{m=0}^{D-1} x^{(p)}[m] e^{-j2\pi f m T} \right|^2$$

$$-1/2T \leq f \leq 1/2T$$

segmentando N si riduce la risoluzione ottenibile.

Si ottiene il periodogramma di Bartlett mediante i calcolati:

$$\tilde{P}_B(f) = \frac{1}{P} \sum_p \tilde{P}_{x,x}^{(p)}(f)$$

Essendosi una media, c'è un FFB equivalente, con frequenza di taglio dipendente dal numero di segmenti P; supponiamo di avere un segnale campionato a f_c , due campioni successivi distano un tempo $t = \frac{1}{f_c}$ s, e supponiamo di avere acquisito fino a un tempo T, ne facciamo la trasformata ottenendo come massima frequenza rappresentabile, quella di Nyquist. Quanto distano i campioni frequenziali (equidistanti)!

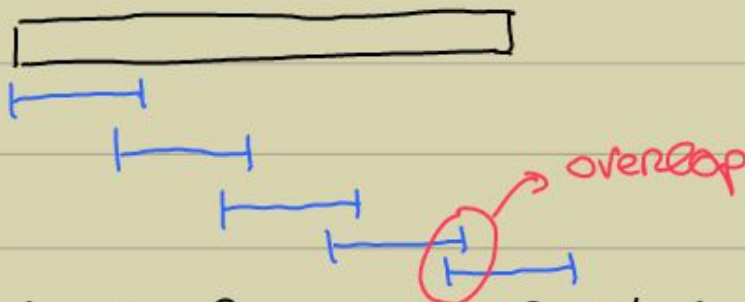
el periodogramma semplice, la varianza è ridotta di un fattore P :

VARIANZA: se i segmenti sono statisticamente indipendenti, la varianza è quella relativa alla media di P osservazioni indipendenti (se i segmenti non sono indipendenti la varianza decresce meno del previsto)

$$\text{var}\{\tilde{P}_B(f)\} \propto \frac{P^2(f)}{P}$$

→ aumenta $P \rightarrow$ var minore, ma riduzione peggiore!

- Metodo di Welch. Per risolvere il problema del ridotto numero di segmenti (3-4 per non perdere troppa risoluzione), permettendo una sovrapposizione di segmenti consecutivi \rightarrow posso avere P maggiore! Il numero di campioni comuni alle finestre è detto OVERLAP, può essere MASSIMO del 50%!



Si riduce la variabilità aumentando P , ma non solo! Si migliora anche la polarizzazione con una **FINESTRA** - **TUES** dei segmenti! Dobbiamo quindi scegliere il numero di segmenti, la

Semi-asse negativo è già stato rimosso!

$[P, f] = \text{psd}(x, \text{NFFT}, f_c, w, 0)$



→ finestra da utilizzare
 ↳ overlap
 ↳ numero di punti su cui rappresentare la trasformata di Fourier, e quindi lo spettro del segnale → deve essere

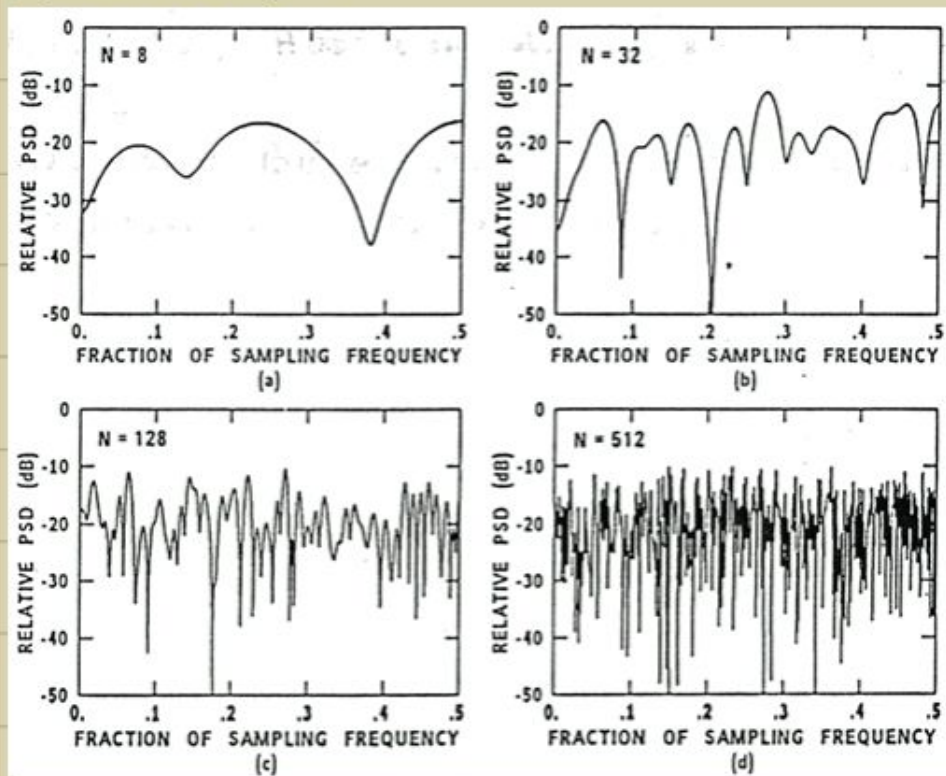
una potenza di 2 per l'algoritmo che calcola la FFT (per noi da 256 a 2048)

Di default, la finestra è quella di Hanning → di default non calcola il periodogramma semplice.

Se voglio segmentare il periodogramma con la media complessiva di tutti i segmenti, scrivo nel campo di finestraatura $w = \text{Hanning}(256)$, per avere finestre da 256 campioni, e poi fa automaticamente la media.

Per overlap scrivo semplicemente $0 = 128$, numero di campioni che si sovrapposcono (in questo caso 50%); la risoluzione

non diminuiamo NFFT. Il numero di campioni ha un effetto che dipende da cosa vogliamo vedere (ad esempio vogliamo il valore medio \rightarrow conviene usare molti punti, anche alta variabilità):



- **ZERO PADDING**, serve se abbiamo bisogno di PIÙ punti per rappresentare su più punti la FFT (dato il valore desiderato NFFT di punti).

Dato un segnale $x[0] \dots x[N-1]$, si aggiungiamo N zeri alla fine del

ma servono solo a migliorare la rappresentazione.

- Nel CORRELOGRAMMA, la risoluzione spettrale teorica è l'inverso della lunghezza della sequenza di autocorrelazione (dipende dal numero di ritardi); quella APPARENTE si definisce sempre con NFFT, quando si trasforma l'autocorrelazione.

- Prodotto tempo - larghezza di banda. La regola del $\Delta f = \frac{1}{T}$ è empirica! Per segnali deterministici si può definire un SUPPORTO EQUIVALENTE T_e , o BANDA EQUIVALENTE:

Per segnali deterministici ad energia finita, dato $x[n]$, siano T_e e B_e rispettivamente l'intervallo temporale e la banda in cui il [grosso] dell'energia del segnale è limitata.

$$T_e = \frac{T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]}{x[0]} \qquad B_e = \frac{\int_{-1/2T}^{+1/2T} X(f) df}{X(0)}$$

Rappresentano la durata/banda di un segnale rettangolare con altezza pari a $x[0]/X(0)$

$$x[0] = \int_{-1/2T}^{+1/2T} X(f) df \qquad \Rightarrow \qquad T_e B_e = 1$$

$$X(0) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$$