NUMERO: 1667A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Biomeccanica dei solidi. Prof.Audenino

Biomeccanica dei solidi

CARICHI DI PROGETTO

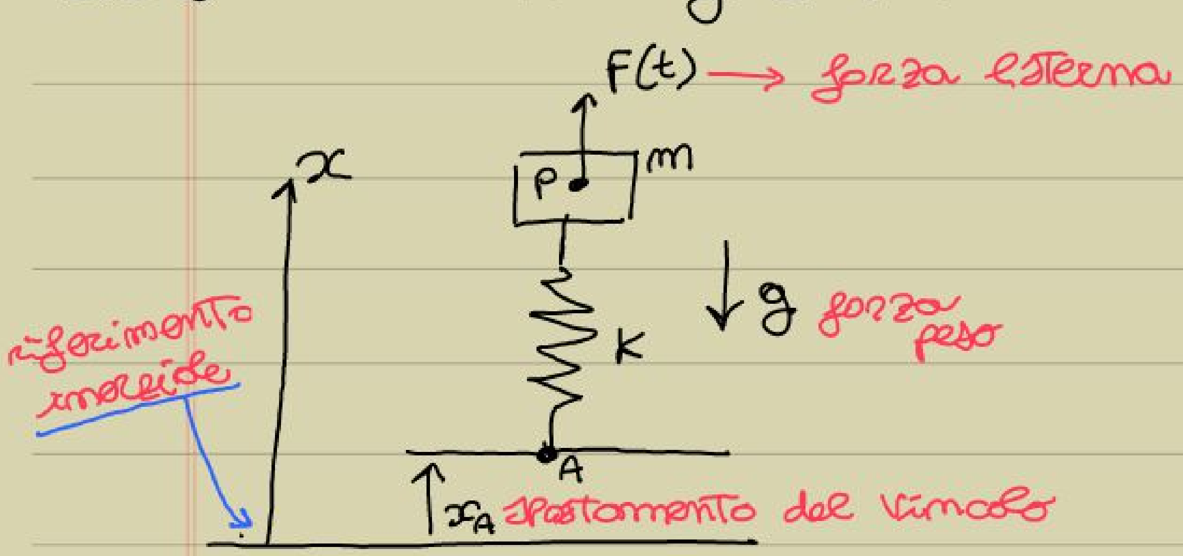
Vi sono 3 tipi di carichi da considerare in fase di progetto:

STATICI → non si considera il tempo poiché trascurabile, il carico varia in maniera lenta, tale da essere considerabile costante, o ripetuto.
Ad esempio, il carico a FATICA è matematicamente considerato statico, perché si ripete sempre uguale tra due valori estremi (anche se dipende dal tempo, non è dinamico).
Nell'ambito della progettazione statica si devono considerare sovraccarichi statici, carichi a fatica, fenomeno dell'usura. Il succo è che il carico deve essere prevedibile, un valore medio della sollecitazione più probabile.

confrontabile con la frequenza pro-
-pria del sistema. In questo caso
l'effetto dinamico è di avere una
forza con effetti superiori o inferiori
sulla struttura rispetto al caso statico.
Ad esempio sull'anca, oltre al peso
proprio, in regime dinamico (corsa)
l'energia cinetica dà un sovraccarico
rispetto all'appoggio semplice statico.
Anche in questo caso dovremo tenere
conto della fatica, oltre ai sovraccari-
- -chi dinamici. Per studiare il
comportamento dinamico, bisogna
fare un'analisi del sistema NON
forzato, poi considerando la forzante,
e ottenendo quindi una risposta in
frequenza del sistema.

- Come si risolve lo studio? In passato
si usava un SOVRADIMENSIONAMENTO,
con un certo coefficiente di ignoranza,
di solito molto elevato. Oggi non si

sistema è la seguente.



Il primo passo nell'analisi è schematizzare il sistema con il modello; bisogna stabilire i parametri noti e le incognite, che in questo caso è x, cioè la posizione istantanea della massa. L'equazione di equilibrio dinamico in direzione x, sulla massa, sarà:

$m\ddot{x} = -k(x - x_A - l_0) + F(t) - mg$

Le due forze che determinano l'equilibrio sono quella elastica, e la forzante.

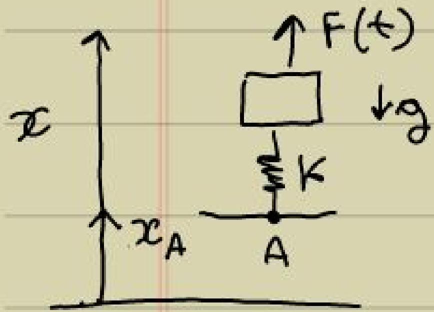
- forza elastica, $k(x - x_A - l_0)$. È importante scrivere la posizione x_A del vincolo, altrimenti se entrambi i capi della molla si muovessero, non ci

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 116

od applicare una forza ($F(t)$), o spostare il vincolo, si ha sempre una equazione lineare, mancante del termine di 1° grado.

• COORDINATE NON INERZIALI

Dobbiamo riscrivere l'equazione, ma per calcolare la forza di inerzia bisogna prendere un riferimento inerziale (fisso), quindi, ridisegnando il sistema:



Qui per ottenere l'accelerazione totale, dobbiamo sommare a quella della massa, quella dello spostamento del vincolo! Quindi si ottiene $m(\ddot{x}+\ddot{x}_A)$ come accelerazione totale.

La forza della molla è quindi Kx, non dobbiamo tenere conto di x_A come prima perché x è già la lunghezza della molla, al massimo si può considerare l_0.

Si ottiene dall'equazione:

Derivando:

$$\dot{x} = -\lambda x_{01} \operatorname{sen}(\lambda t) + \lambda x_{02} \cos(\lambda t)$$

$$\ddot{x} = -\lambda^2 x_{01} \cos(\lambda t) - \lambda^2 x_{02} \operatorname{sen}(\lambda t) =$$

$$= -\lambda^2 \left(x_{01} \cos(\lambda t) + x_{02} \operatorname{sen}(\lambda t) \right) = -\lambda^2 x(t)$$

Riprendendo l'equazione:

$$-\lambda^2 m x + K x = 0$$

$$x(-\lambda^2 m + K) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda_m = \sqrt{\dfrac{K}{m}} \end{cases}$$

Pulsazione propria, è uguale a quella di risonanza per un sistema non smorzato.

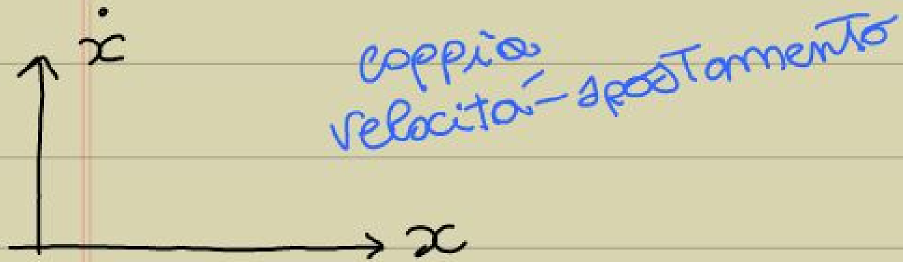
Il massimo della risposta in frequenza è la frequenza di risonanza, nel caso non smorzato coincide con quella naturale.

Questa forma della soluzione è

1. comoda per applicare le condizioni iniziali (seno e coseno, facile)
2. Per calcolare il massimo della funzione

c'è anche una terza versione, usando le formule di eulero, quindi si trova un esponenziale:

l'andamento delle variabili di stato; nel nostro caso sono due, quindi è un PIANO degli stati.



In generale la traiettoria sarà un'ellisse (sono due sinusoidi con ampiezza diversa!). Per ogni punto passa una e una sola traiettoria, a parità di c. iniziali.
Possiamo identificare un vettore che contiene le variabili di stato:

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} v \\ x \end{Bmatrix} \quad , \quad \{\dot{z}\} = [A]\{z\} + [B]\{u\}$$

sistema di 2 equazioni

input

$[A]$ → matrice dinamica

$[B]$ → mat. guadagni dell'input

$$m\ddot{x} + kx = F(t) - m\ddot{x}_A$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} - \ddot{x}_A$$

Si può quindi scrivere un'equazione lineare del secondo ordine, o 2 eq. del primo ordine. La seconda equazione vale:

questa va sommata all'omogenea, la soluzione può essere:

IN FASE, $\lambda < \sqrt{K/m}$

IN CONTROFASE, $\lambda > \sqrt{K/m}$

- Se l'eccitazione è sul vincolo, quindi su x_A, l'equazione è:

$$m\ddot{x} + Kx = Kx_A'(t) + F(t)$$

ecc. sul vincolo, $x_A'(t) = x_{A0}' \cos(\lambda t)$

forzante

La soluzione è:

$$x_0 = x_{A,0}' \frac{K}{(K - m\lambda^2)}$$

- La funzione di RISPOSTA IN FREQUENZA si può scrivere in funzione dei parametri geometrici o dei parametri intrinseci (autovalori, frequenze naturali)

$$\frac{K}{K - m\lambda^2} \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{m}{K}\lambda^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_m}\right)^2}$$

La funzione è un rapporto tra input e output!

$$H(\lambda) = \frac{x_0}{x_{A,0}'}$$

non per forza adimensionale

13

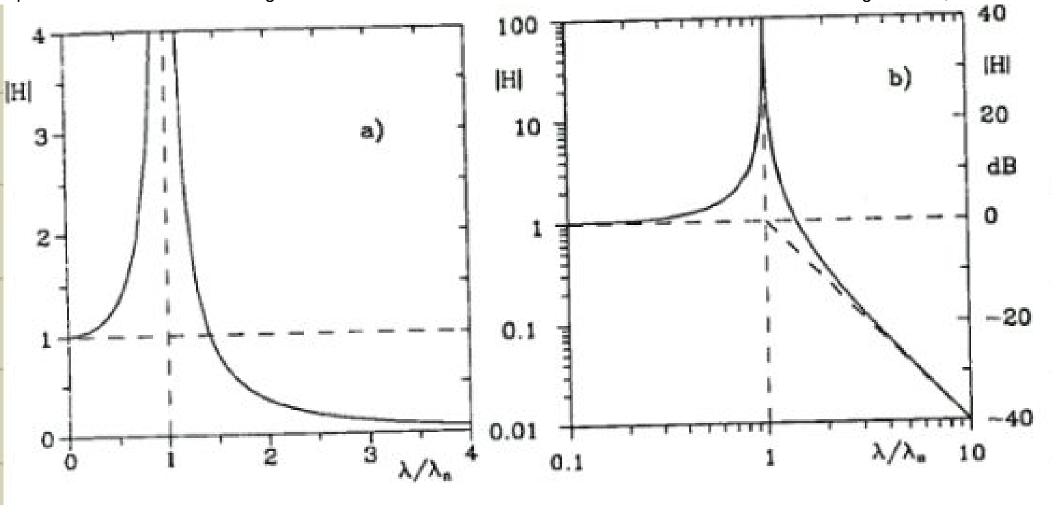


Figura 3-5. Risposta in frequenza per il sistema di figura 3-1. a) Scale lineari. b) Scale logaritmiche ed espresse in dB.

A frequenza elevata, la struttura NON viene sollecitata, la massa non sente nemmeno la forzante (il fattore di amplificazione $\to 0$). Per $\lambda \to \lambda_n$ si è in risonanza, la sollecitazione virtualmente fa tendere lo spostamento a infinito (in realtà in dB si vede ~ 100), invece a basse frequenze ($\to 0$) non c'è amplificazione (il fattore è uguale a 1), la massa segue lo spostamento del vincolo senza effetti dinamici.

Si possono notare 3 zone principali nel grafico:

- $\lambda/\lambda_n < 1$, sistema dominato dalla

non esiste nella realtà, ma dobbiamo conoscere l'energia dissipata dallo smorzamento, altrimenti non abbiamo dati.
Tende a $\rightarrow \infty$ perché a questa frequenza il sistema oscillerebbe all'infinito, ma c'è la DISSIPAZIONE dello smorzamento (non esistono sistemi non smorzati).

- Caso con notazione esponenziale, la forzante è $F = f_0 e^{-st}$, con s complesso, o $F = f_0 e^{i\lambda t}$.
- Come detto, la risposta in frequenza è la parte di integrale PARTICOLARE, la soluzione completa è:

$$x(t) = C_1 \cos(\lambda_n t) + C_2 \operatorname{sen}(\lambda_n t) + \underbrace{\mathrm{Re}\left(H(\lambda) \frac{f_0}{K} e^{-\lambda t}\right) \text{ o } \left[H(\lambda) \frac{f_0}{K} \operatorname{sen}(\lambda t)\right]}_{\text{RISP. FORZATA}}$$

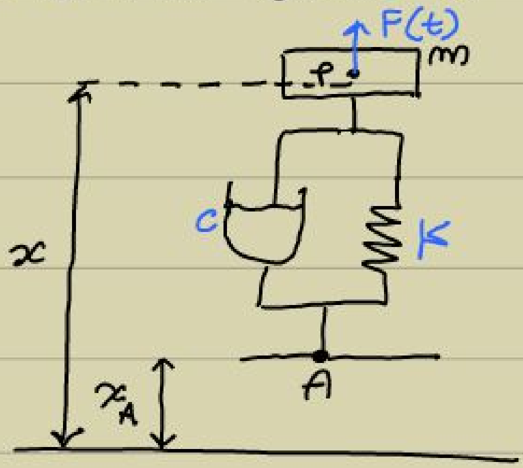
La soluzione è BI-ARMONICA, fra λ

Si ha la somma quindi delle sinusoidi in figura; quando ci si avvicina alla risonanza, i massimi di una sinusoide coincido-no con quelli dell'altra, dove sembrerebbe che l'eccitazione vada a ∞, ma si ha il fenomeno dei BATTIMENTI, cioè cresce molto e poi diminuisce, ciclicamente; esattamente sulla risonanza invece abbiamo un'eccitazione ∞, ma per arrivare a ciò ci vuole tempo ∞! Per rompere una struttura dal punto di vista pratico, bisognerebbe applicare una forzante del genere per tempo ∞. Invece in termini pratici si può capire quanti cicli di applicazione servono per arrivare a rottura, in condizioni di risonanza.

È possibile quindi lavorare a risonanza

Sistema con smorz. viscoso

Aggiungiamo ora lo smorzamento, il sistema ora é cosí:



Le forze da considerare sono quindi il peso, la forzante, la forza elastica e lo smorzamento

L'equazione é quindi (no peso):

$$m\ddot{x} = -k(x - x_A - l_0) - c(\dot{x} - \dot{x}_A) + F(t)$$

Nel caso non smorzato avevamo visto che era equivalente considerare una forzante $F(t)$ o uno spostamento del vincolo $x_A(t)$, a meno della costante k di rigidezza. Qui invece con lo smorzamento, le risposte in frequenza sono differenti, sono due casi separati (nel sistema inerziale). Nel sistema non inerziale

$c^2 - 4mk < 0$). Per distinguere le soluzioni si usano dei parametri:

$C_{cr} = c = 2\sqrt{km}$ Smorzamento critico

$\zeta = \frac{c}{C_{cr}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ Smorzamento relativo

Si hanno quindi soluzioni dette SOTTOSMORZATE ($\zeta < 1$) o SOVRASMORZATE ($\zeta > 1$), rispettivamente complesse o puramente reali.

L'equazione si può quindi risolvere in funzione di ζ e λ_n:

$$s^2 + 2\zeta\lambda_n s + \lambda_n^2 = 0$$

- Se il sistema è SOVRASMORZATO le soluzioni reali sono:

$$s = -\lambda_n\left(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

NON CI SONO OSCILLAZIONI

- Se il sistema è SOTTOSMORZATO le soluzioni complesse sono date da:

$$s = -\zeta\lambda_n \pm i\lambda_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

parte immaginaria, responsabile delle oscillazioni libere del sistema smorz.

velocità (in modulo) con cui l'ampiezza si riduce nel tempo.

$$\begin{cases} x(0) = x_{01} \\ \dot{x}(0) = -\sigma x_{01} + \lambda_p x_{02} \end{cases}$$

C. iniziali su velocità e posizione

che valgono solo per questo sistema non forzato, cioè libero.

Quindi sostituendo nella soluzione:

$$x = e^{-\sigma t}\left\{ x(0)\cos(\lambda_p t) + \frac{1}{\lambda_p}\left[\dot{x}(0) + \sigma x(0)\right]\sin(\lambda_p t)\right\}$$

Si vede sul diagramma l'andamento temporale:

nell'origine si ha sempre 1 (se $x(0)=0$) e 0 nel caso $\dot{x}(0)\neq 0$ (forze impulsive ad esempio), cioè una è un seno e una un coseno.

Al diminuire di ζ si hanno oscillazioni sempre più marcate, per $\zeta = 1$ l'ampiezza decresce monotonicamente (NON OSCILLANTE, così come $\zeta > 1$).

- Decremento logaritmico, serve sperimentalmente per calcolare alcuni parametri, in particolare

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 116

SISTEMA SMORZATO FORZATO

L'omogenea è già calcolata nel caso non forzato, ora bisogna calcolare l'integrale particolare; anche qui usiamo la notazione esponenziale complessa:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f_0 e^{i\lambda t}$$

λ → vel. angolare

$e^{i\lambda t}$ → vettore rotante

questo è il caso della forzante sulla MASSA e non sul vincolo (vedi lo schema iniziale). Se invece volessimo la forzante sul vincolo l'equazione sarebbe:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = x_A'(i\lambda c + k)e^{i\lambda t}$$

- Studiamo il caso con forzante $F(t)$ sulla massa, l'equazione la possiamo scrivere in funzione dei parametri caratteristici:

$$\ddot{x} + 2\zeta\lambda_n\dot{x} + \lambda_n^2 x = \lambda_n^2 \frac{f_0}{K} e^{i\lambda t}$$

ricordando che λ_n sarebbe la puls. naturale del sistema SE non fosse

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 116

$$x_0 = \frac{f_0}{K}\left\{ \underbrace{\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}}_{\text{Parte reale}} - i\underbrace{\frac{2\zeta\frac{\lambda}{\lambda_n}}{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\lambda}{\lambda_n}\right)^2}}_{\text{parte immaginaria}} \right\}$$

Ora è possibile calcolare fase e modulo del numero complesso. Anche qui si può definire la risposta in freq come spostamento del sistema e quello che avrebbe nel caso statico.

$$H(\lambda) = \frac{x_0}{f_0/K}$$

Rapporto tra spost. statico e dinamico

La risposta è quindi un num. complesso ed è un'ARMONICA non smorzata, la parte smorzata è solo quella del sistema LIBERO! Per l'integrale particolare, la forzante è un'armonica e l'uscita anche, non viene smorzata!

SISTEMA LIBERO → armonica smorz. è quindi un TRANSITORIO

SISTEMA FORZATO → armonica non smorzata, non decade, forzante e risposta NON sono in fase tra loro

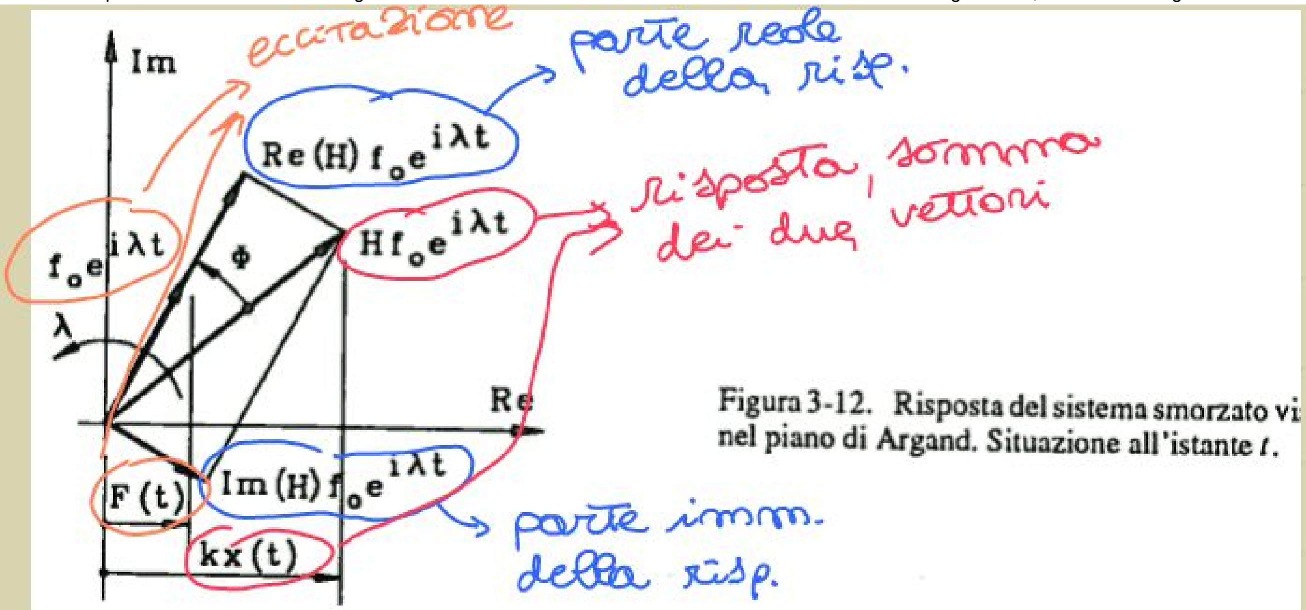


Figura 3-12. Risposta del sistema smorzato vi nel piano di Argand. Situazione all'istante t.

La risposta é $f_0 e^{i\lambda t} \cdot H(\lambda)$, cosa fa la funzione di trasferimento? Cambia il modulo (amplifica o riduce) e gli aggiunge un ritardo di fase, anche se essi ruotano SINCRONI. La risposta é anche la proiezione sull'asse reale ovviamente del vettore rotante prodotto $H f_0 e^{i\lambda t}$.

Al calcolatore, data la forzante ad esempio $f = 5\,\text{sen}(3t)$, la risposta sarà la stessa funzione, ma con la modifica dovuta alla f.d.t:

$x = 5 \cdot \frac{1}{k} \cdot |H| \cdot \text{sen}(3t + \varphi)$

Dove le uniche incognite $|H|$ e φ si

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 116

cambia fase non in modo repentino, ma gradualmente (all'aumentare di ζ) passando nelle 3 zone caratteristiche.

Si nota quindi che all'aumentare di ζ, il picco di risonanza diventa sempre più basso, per alti ζ (~ 1) il massimo valore della risposta si ottiene per BASSE FREQUENZE (caso statico per il miglior risultato).

- Quanto vale questo picco? Ci interessano ascissa e ordinata; l'ascissa è $\lambda(|H|_{MAX}) = \lambda_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ che quindi è la FREQUENZA DI RISONANZA, non coincide con la frequenza naturale né del sistema non smorzato, né con quella del sistema smorz (λ_p)! Tale massimo vale:

$$|H(\lambda)|_{MAX} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 116

smorzato fino a piccoli valori di ζ ($0{,}3 \div 0{,}4$ massimo), tagliando la curva con il suo massimo:

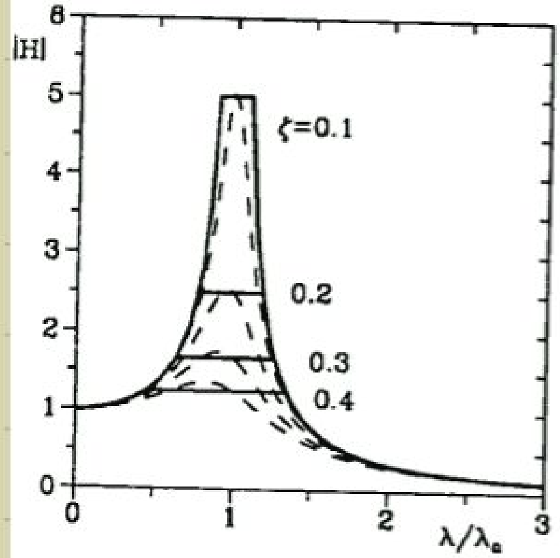
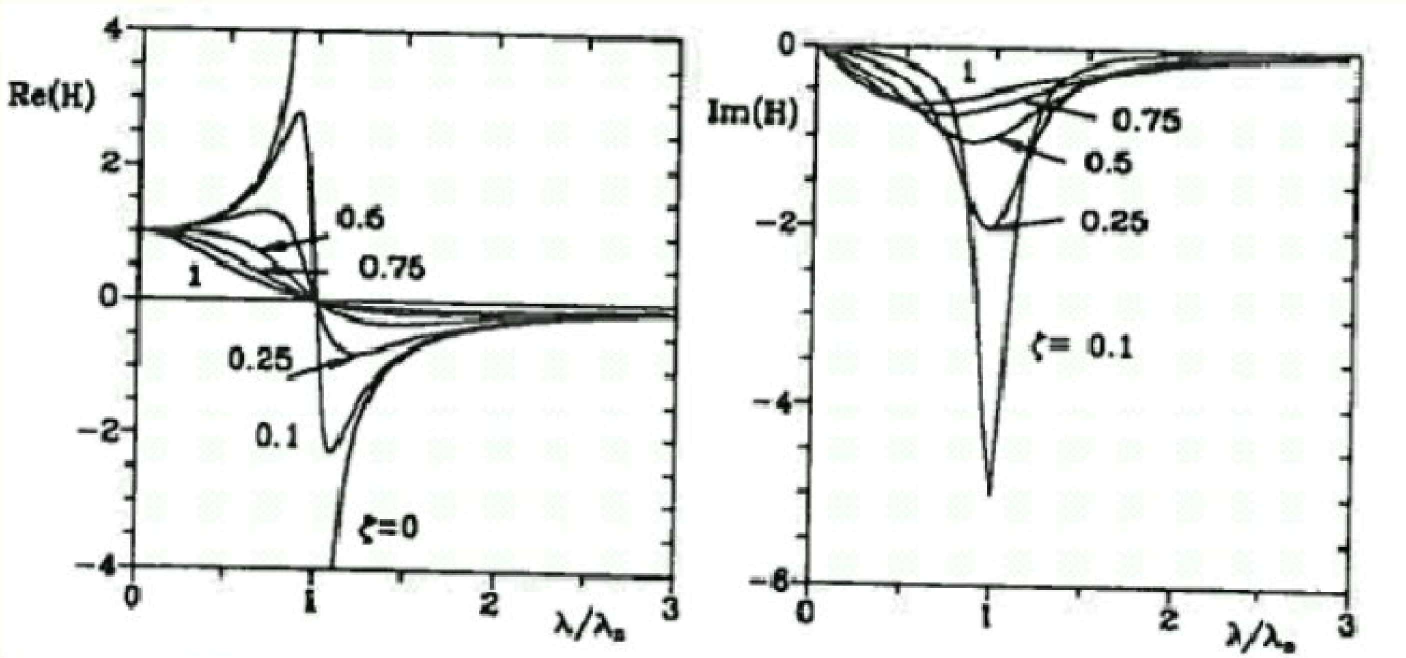


Figura 3-14. Risposta in frequenza di sistemi con smorzamento viscoso approssimata utilizzando la risposta del sistema non smorzato e "tagliando" il picco di risonanza. Confronto con la soluzione esatta.

- Caso dell'eccitazione sul vincolo, guardiamo il grafico di parte reale e immaginaria di H:



si comporta come un vincolo rigido.
Quindi il problema di smorzamento ottimale non è che maggiore è meglio è (ad esempio su una vettura).
ma va valutato come problema di trasmissibilità: $c_{ott} = \sqrt{\frac{K}{2m}} \sim 30\% \, c_{crit}$
si ha il minimo della trasmissibilità per questo valore (minore accelerazione del vincolo).

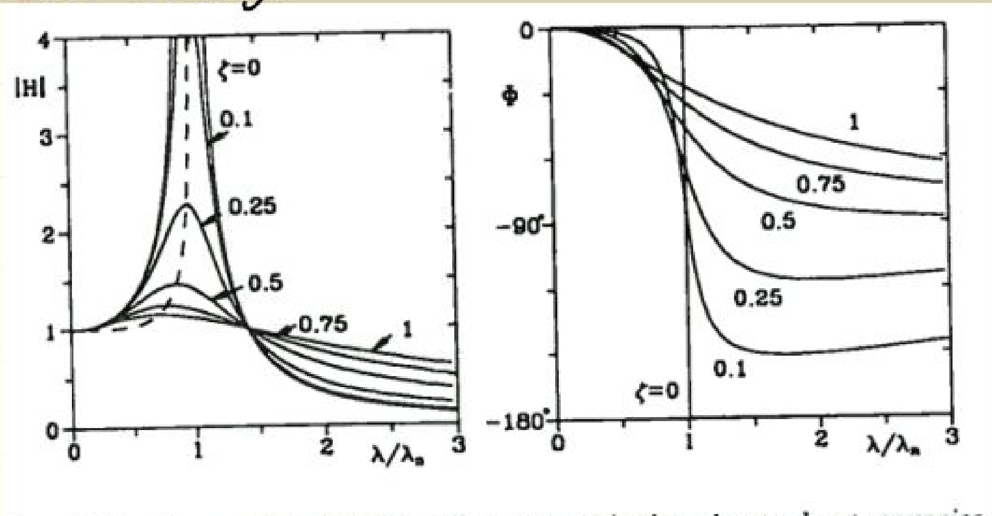


Figura 3-18. Stesso grafico di figura 3-13, ma con eccitazione dovuta al moto armonico del punto di vincolo.

- RIFERIMENTO NON INERZIALE, come noto è la distanza di P da A:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = -m\ddot{x}_A(t) + F(t)$ Ha la stessa risp. in freq.

per tornare nelle coordinate normali (assolute) si impone $x(t) = x_A(t) + x_{OA}$

Il modello è sempre quello dello smorzatore in parallelo alla molla; poiché l'ampiezza è funzione di λ, l'energia dissipata dovrebbe aumentare all'aumentare della freq., invece sperimentalmente si nota che per molti valori di frequenza NON cambia l'energia dissipata!

mat. $\sigma = \sigma_0 e^{i\lambda t}$

comp. $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-i\phi} e^{i\lambda t}$ (ritardo, si perde en.)

Definiamo il modulo elastico complesso come:

parte imm., dà misura della dissipazione.

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi) = E' + iE''$$

parte reale, mod di Young (PARTE IN FASE)

quindi la parte reale (in fase) la conosciamo, è il modulo di Young del materiale, la parte immaginaria è invece lo smorzamento del materiale! Poiché ϕ è molto piccolo, possiamo semplificare l'espressione:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 116

armonica (l'ampiezza rimane COSTANTE, la forza è in fase con la velocità).

La soluzione è:

$m s^2 + k(1 + i\eta) = 0$ OMOGENEA

$s = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 + i\eta} = \pm i \lambda_n \sqrt{1 + i\eta}$

separando p. reale e imm:

$$s = \underbrace{- \lambda_n \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \eta^2}}{2}}}_{\text{parte reale, DECADIMENTO}} \pm \underbrace{i \lambda_n \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \eta^2}}{2}}}_{\text{parte imm. respons. delle OSCILLAZIONI}}$$

(la f. propria è $\lambda_n \cdot$ qualcosa > 1, quindi è superiore a quella naturale!)

Con varie semplificazioni, si ha:

$$s \simeq - \frac{\lambda_n \eta}{2} \pm i \lambda_n$$ (η piccolo)

Quello che era ζ, qui è $\sigma = \frac{\lambda_n \eta}{2}$, cioè la parte smorzante strutturale che è responsabile del decadimento!

Si vede anche che se η è piccolo, la freq. delle oscillazioni tende a λ_n.

Si nota che in questo modello abbiamo considerato solo cosa succede nel materiale, non abbiamo messo la MASSA (assenza di inerzia), e per λ elevate infatti la fase diventa costante (zona dominata dall'inerzia), invece per $\lambda \to 0$ abbiamo fasi diverse e $\neq 0$ (ci deve essere diff. di fase).
Inoltre per il modulo si vede che il picco non si sposta! La f. di risonanza coincide con quella naturale, mentre la frequenza delle oscillazioni libere (propria) è un po' più alta).

Un ultima cosa, la simulazione numerica (del transitorio) non è fattibile su Simulink (metà dom. tempo, metà freq); possiamo però usare $c_{eq} = \eta k / \lambda_m$, $\zeta = \eta / 2$, cioè usiamo λ_m per metterci nella zona centrale (dominata dallo un periodo (i picchi sono migliori, minor errore). É molto immediato!

- Forma del picco ⇒ DOMINIO DELLA FREQUENZA, nel grafico della risposta in freq., ogni punto (ogni frequenza) ha una forza diversa (argomento della forzante), Tramite la trasforma-ta di Fourier dello spostamento si trova il punto che vale $X_{max}/\sqrt{2}$, se ne prendono le ascisse (simmetriche rispetto al picco) e si calcola $\Delta\lambda/\lambda = 2\zeta$.

DUE CANALI DI MISURA (1 GdL)

- Ciclo di isteresi ⇒ DOMINIO DEL TEMPO, se facciamo l'integrale dell'area, otteniamo l'energia dissipata, il ciclo si ha tra forza e spostamento (com'era per lo smorz. strutturale), bisognerà calcolare ad esempio η. Per capire se questo modello é utilizzabile, non basta il ciclo di isteresi, bisogna capire se il sistema

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 116

- Rapporto forza Trasmessa - spostamento

⇒ DOM. FREQUENZA

come poco fa si considera la somma di parte viscosa e elastica, ma in frequenza.

$F_t(t) = F(t) - m\ddot{x}(t) = kx(t) + c\dot{x}(t)$

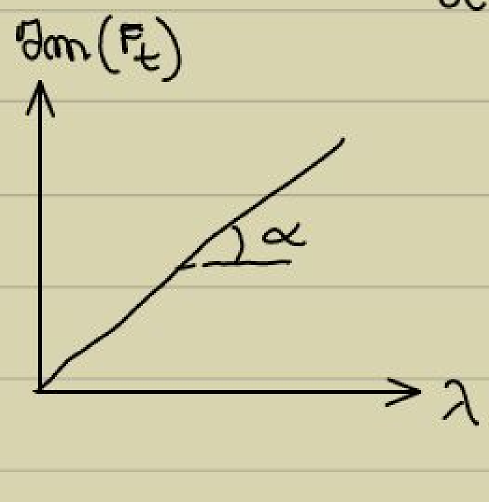
si fa quindi il rapporto tra $F_t(t)$ e $x(t)$, a frequenze diverse! otteniamo quindi una funzione di trasferimento che ci dice se il sistema è viscoso o strutturale → $\frac{F_{0t}}{x_0} = k + i\lambda c$

VISCOSO ⇒ $Re(F_t)$ è costante

$Im(F_t)$ se viscoso è una RETTA

se strutturale è COSTANTE

Se viscoso si può calcolare $c = tg\,\alpha$



- Nello smorzamento viscoso, si può capire che il sistema è lineare se $e^{-\sigma t} \Rightarrow \sigma = \zeta\lambda_m$ COSTANTE!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 116

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi c \lambda_d X_0^2}{\frac{1}{2} m \lambda_d^2 X_0^2} = 2\left(\frac{2\pi}{\lambda_d}\right)\left(\frac{c}{2m}\right) \doteq 2\delta \simeq 4\pi\zeta$$

deve quindi essere COSTANTE (infatti il sistema è lineare, e non dipende dalla frequenza

- Smorzamento strutturale, posso calcolare l'area? Come noto, fissato il materiale, l'area non cambia con la frequenza, il ciclo DIPENDE dal materiale (ad esempio gli elastomeri dissipano molto).

c'è una relazione empirica per l'energia dissipata in un ciclo:

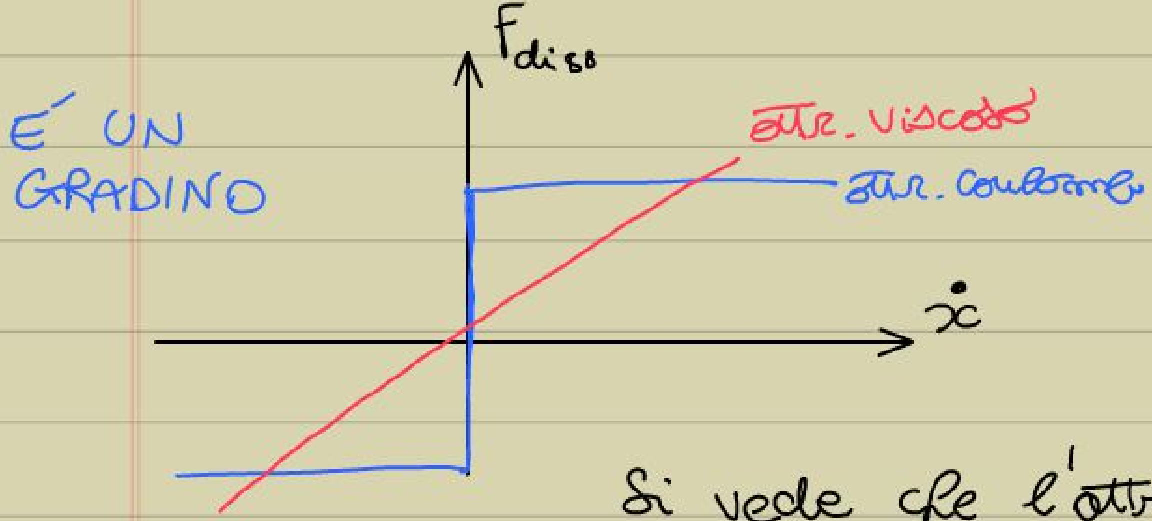
$$\Delta W = \pi K \eta X_0^2$$

→ per la linearità

→ contributi del materiale.

K non dipende solo dal materiale, ma anche dalla geometria. La perdita ΔW è un indice di linearità, magari abbiamo MEZZO ciclo ⇒ dissipa $\frac{\Delta W}{2}$ (mezza armonica).

al posto di "$c\dot{x}$" nell'equazione. Il comportamento è il seguente:

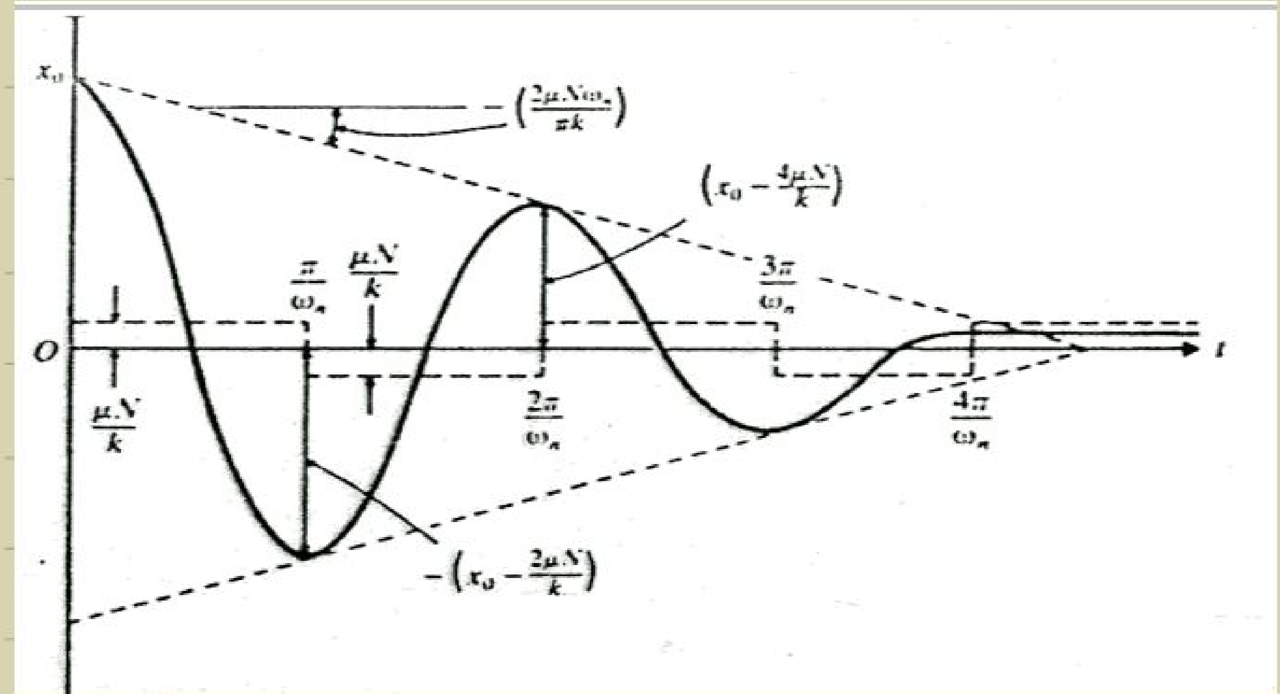


Si vede che l'attrito coulomb. rimane costante ma CAMBIA SEGNO, è opposta alla velocità del sistema! L'equazione sarà:

$$m\ddot{x}(t) + \mu N \,\mathrm{sgn}\left[\dot{x}(t)\right] + kx(t) = 0$$

la funzione segno descrive proprio tale comportamento! Sostanzialmente la soluzione è $m\ddot{x} + Kx = cost = D$ perché come detto è costante a meno del tempo. Quindi la soluzione è sempre quella dell'omogenea NON smorzata, con il problema del segno della costante.

Avremo quindi una soluzione



Sono pezzi di armoniche a valore medio diverso. Come calcolo le ampiezze? Nel primo pezzo metto le condizioni iniziali, dopo devo sommare "$x_0 - \frac{2\mu N}{K}$", l'inviluppo non è esponenziale ma RETTILINEO! Dopo ogni mezzo periodo (π/ω_n) si impongono nuove condizioni iniziali. Il fatto che l'inviluppo non sia exp è dovuto alla non linearità; l'area del ciclo dipende dall'ampiezza che varia ogni semiperiodo, e anche C_{eq} che vogliamo trovare (simulink od ⊕)

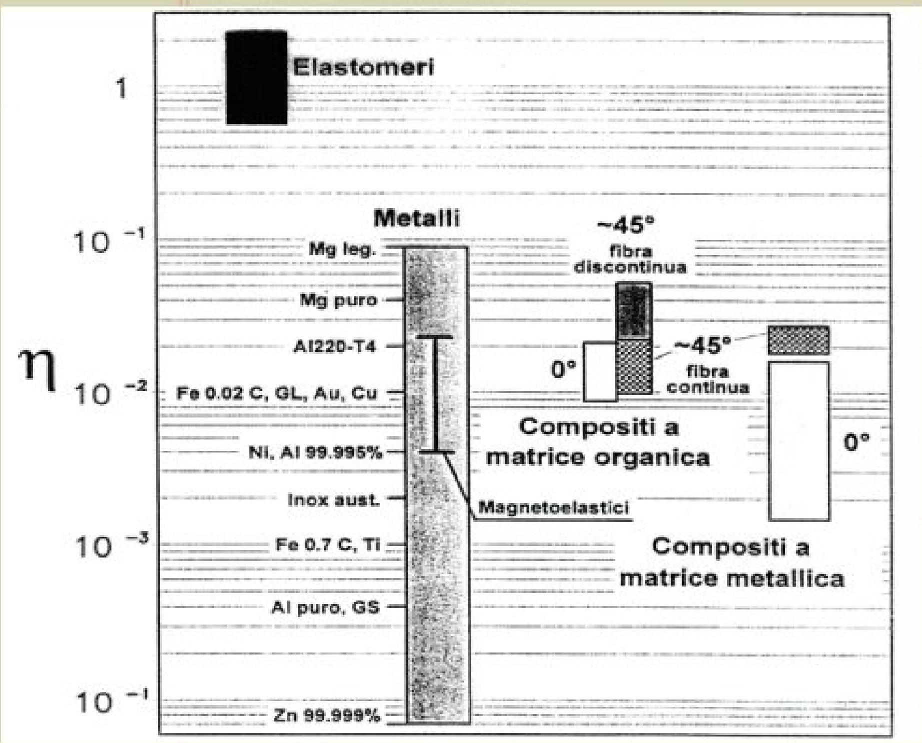
esponenziale ($\delta \cong 2\pi\zeta$), cioè uguale per lo smorzamento strutturale o viscoso (bisognerebbe cambiare la frequenza e vedere come noto, se l'esponente del decadimento $e^{-\sigma t}$ rimane costante è strutturale, altrimenti viscoso); per capire se lo smorzamento è strutturale o viscoso e cambiare la frequenza possiamo variare la massa ($\uparrow m$, $\downarrow \zeta$, $\downarrow$ frequenza). Quindi è comodo poter esprimere l'esponente in funz. di $\delta \Rightarrow e^{-\sigma t} \Rightarrow e^{-\lambda_m \frac{\delta}{2\pi} t}$ perché δ è misurato! Il decremento logaritmico non va bene per il coulombiano, perché la ampiezza variabile ed è non lineare.

- Esaminiamo il grafico, ACCIAIO DOLCE
  1° zona, tensioni basse, δ è costante,
  2° zona, tensioni medie, δ aumenta linearmente (il materiale ancora non si danneggia)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 116

ma qualcosa di maggiore. Analogo ragionamento nell'ultima zona.

- Ragioniamo ora su η, ci dà idea della DISSIPAZIONE del materiale (costante solo a tensioni basse)



Maggiore η

$\Downarrow$

maggiore dissipazione (e produzione acustica)

Eccitazioni impulsive

La forzante è una forza impulsiva (per cui deve esistere l'integrale particolare), cioè fenomeni d'URTO, piccoli istanti, "piccoli" tempi caratteristici (con riferimento al periodo $\frac{2\pi}{\lambda_n}$). L'intensità della forza sarà chiaramente

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 116

$$mV_2 - mV_1 = \int_{t_1}^{t_2} F_i(t)\,dt$$ tutte le forze agenti

a cosa ci serve la conservazione? Non ci sono contributi della f. elastica e di smorzamento (valido per ogni eccitazione impulsiva). Possiamo quindi dire che l'impulso è SOLO quello dell'eccitazione esterna!

Di solito si parte dalla quiete, quindi ipotizziamo $V_1 = 0$. Si avrebbe:

$$mV_2 = \int_{t_1}^{t_2} F_i(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} I_0\,\delta(t)\,dt = I_0$$

a valle della forza impulsiva, il sistema è libero (non c'è più forzante), quindi l'incognita è sempre solo una CONDIZIONE INIZIALE di velocità:

$$mV_2 = m\dot{x} = I_0 \Rightarrow \dot{x} = \frac{I_0}{m}$$ (da qua si ricava la c.I.)

$$x(0) = 0 \Rightarrow, \ \dot{x}(0) = \frac{I_0}{m}$$

oppure, se $x(0) = x_0 \Rightarrow$, $\dot{x}(0) = \dot{v}_0 + \frac{I_0}{m}$

dopo l'impulso, la soluzione è quella delle OSCILLAZIONI LIBERE, con

- Scriviamo ora la soluzione:

$$x(t) = e^{-\sigma t}\left[\underbrace{x(0)}_{x_{01}}\cos(\lambda_p t) + \underbrace{\frac{1}{\lambda_p}(\dot{x}(0) + \sigma x(0))}_{x_{02}}\right.$$
$$\left.\operatorname{sen}(\lambda_p t)\right]$$

(caso sottosmorzato)

in forma più compatta, $x(t) = \frac{I_0}{m\lambda_m} h(t)$
con ovvie modificazioni nel
caso in cui $x(0)=0$.

$h(t)$ è la RISPOSTA ALL'IMPULSO, che ha espressioni diverse in base allo smorzamento, come nel caso della forzante periodica:

SOTTOSMORZATO

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\lambda_m t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\lambda_m t\right)$$

SOVRASMORZATO

$$h(t) = A e^{-\lambda_m(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})t} + B e^{-\lambda_m(\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})t}$$

con A e B calcolate dalle condizioni iniziali.

SMORZAMENTO CRITICO

$$h(t) = (A+Bt)e^{-\lambda_m t}$$

sempre con A e B da calcolare.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 116

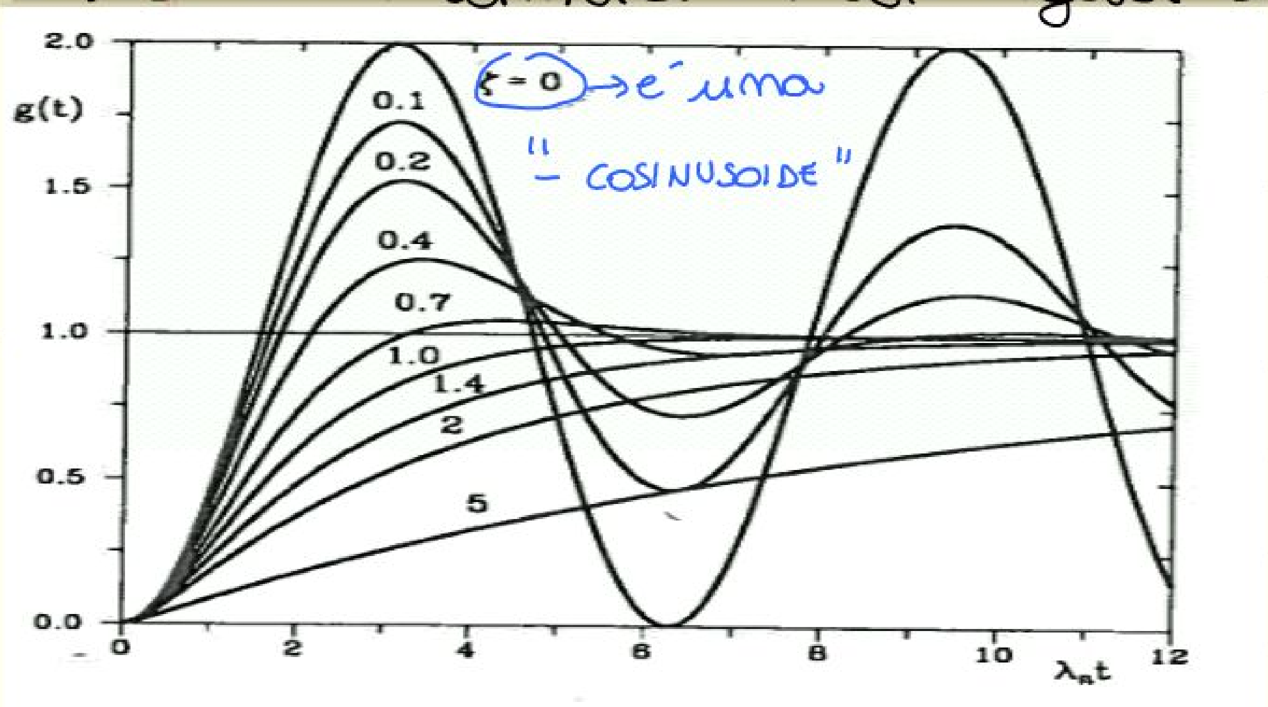
Come al solito si ipotizza che se la forza è costante, l'integrale particolare sarà costante! Sarà perciò uguale allo spostamento STATICO $\Rightarrow x_{Part} = f_0/K$

e la soluzione completa sarà la somma della parte libera (come prima) e quella particolare:

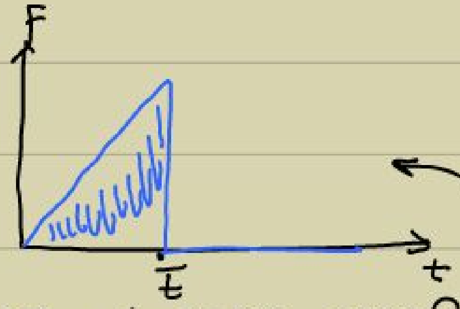
$$x(t) = \underbrace{e^{-\sigma t}\left[x_{01}\cos(\lambda_p t) + x_{02}\operatorname{sen}(\lambda_p t)\right]}_{\text{OMOG.}} + \underbrace{\frac{f_0}{K}}_{\text{PART.}}$$

naturalmente nel caso sottosmorzato, altrimenti cambia di conseguenza.

RISPOSTA AL GRADINO



Si nota che se $g(t) = 1$, lo spostamento vale $\frac{F_0}{K}$ cioè di equilibrio, ma $g(t)$ esiste solo da $t = 0$, quindi c'è una perturbazione che porta le oscillazioni, esaurito il transitorio si torna all'equilibrio; quindi nel momento in cui si applica la forza, la sollecitazione è DOPPIA rispetto all'equilibrio ($\zeta = 0$) cioè se fosse stata sempre applicata.
È la stessa cosa di una bilancia, se non ci fosse smorzamento, continuerebbe a oscillare intorno all'equilibrio (non arriva a F_0/K costante), serve uno $\zeta \cong 1$ (tempo più breve per raggiungere l'equilibrio) anche se nella realtà è sempre $\zeta = 0{,}7$, perché il tempo è simile e si riduce il problema COULOMBIANO.



nota l'espressione di un impulso REALE, con Duhamel possiamo sapere anche cosa succede durante la forza, non solo dopo (come nella forza impulsiva ideale).
Vale solo per sistemi lineari perché deve valere la sovrapposizione degli effetti.
Bisogna anche mettere naturalmente $h(t-\tau)$, ottenendo (sist. sottosmorzato)

$$x(t) = \frac{\sin(\lambda_p t)}{m\lambda_p e^{\zeta\lambda_n t}} \int_0^t F(\tau) e^{\zeta\lambda_n \tau} \cos(\lambda_p \tau)\, d\tau - \frac{\cos(\lambda_p t)}{m\lambda_p e^{\zeta\lambda_n t}} \int_0^t F(\tau) e^{\zeta\lambda_n \tau} \sin(\lambda_p \tau)\, d\tau$$

Si vede che quindi otteniamo un forma sintetica:
$x(t) = A(t)\,\mathrm{sen}(\lambda_p t) - B(t)\cos(\lambda_p t)$
Dopo l'applicazione della forza, da $\bar{t}$ in poi, A e B sono COSTANTI, e abbiamo una risposta armonica a coefficienti costanti; prima invece ci dicono cosa succede a causa della

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 116

poi si deve ANTI-TRASFORMARE.

Vibrazioni casuali (random)

Esistono casi pratici in cui non conosco l'eccitazione (ad esempio sismi), ovvero non é DETERMINISTICA, ma possiamo usare dei parametri STATISTICI:

intervallo scelto

VALOR MEDIO $\bar{F} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt$

VALORE R.M.S $F_{RMS} = \sqrt{\bar{F}^2} = \sqrt{\frac{1}{T}\int F^2(t)\,dt}$

La funzione che dobbiamo conoscere per avere questi parametri (F) é la DENSITÁ DI PROBABILITÁ, con riferimento ad un valore possibile dell'ampiezza di F, dice la probabilità che avvenga.

VARIANZA $\sigma^2 = \overline{(F-\bar{F}^2)} = \frac{1}{T}\int_0^T [F(t)-\bar{F}(t)^2]\,dt$

Se il campione é scelto bene, in genere si trovano sempre gli stessi altrove. Come definiamo la densità spettrale di potenza? È la trasformata di Fourier di $\psi(\tau)$; la sua funzione si può capire prendendo $f(t)$ e filtrarla con un passa-banda di banda passante $\Delta\lambda$ (centrato su λ), ottenendo una funzione $\xi(t)$, di cui possiamo calcolare il valore RMS:

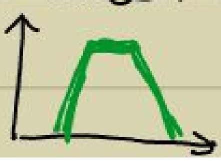
$$\overline{\xi}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [\xi^2(t)]\,dt$$

dividendo per l'ampiezza della banda si ottiene la densità spett. di potenza:

$$S(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\overline{\xi}^2}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)\,dt}{\Delta\lambda}$$

Non esiste l'antitrasformata, perché è solo un numero REALE che ci dà una probabilità.

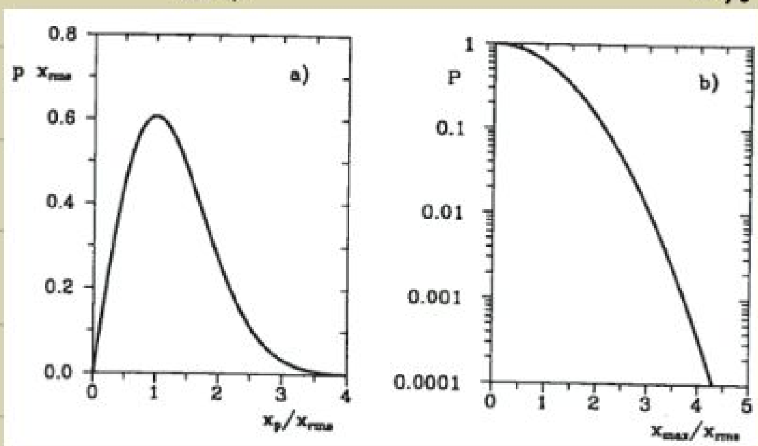
Quali sono le densità spettrali di potenza usate? Il RUMORE BIANCO ad esempio (forma trapezoidale nel piano bilogaritmico), cioè una COSTANTE



come un filtro passa banda, con banda più stretta al diminuire dello smorzamento e centrata sulla frequenza naturale. Se $\zeta \to 0$, $x_{RMS} \to \infty$!
Per esempio, vedere libro.

- Può essere utile calcolare quale probabilità di un picco massimo relativamente al valore RMS, valido per la Gaussiana:

$$p\left(\frac{x_{MAX}}{x_{RMS}}\right) = \frac{x_{MAX}}{x_{RMS}^2} e^{-\left(\frac{x_{MAX}^2}{2x_{RMS}^2}\right)} = \frac{t\lambda_m}{2\pi} e^{-\left(\frac{x_{MAX}^2}{2x_{RMS}^2}\right)}$$



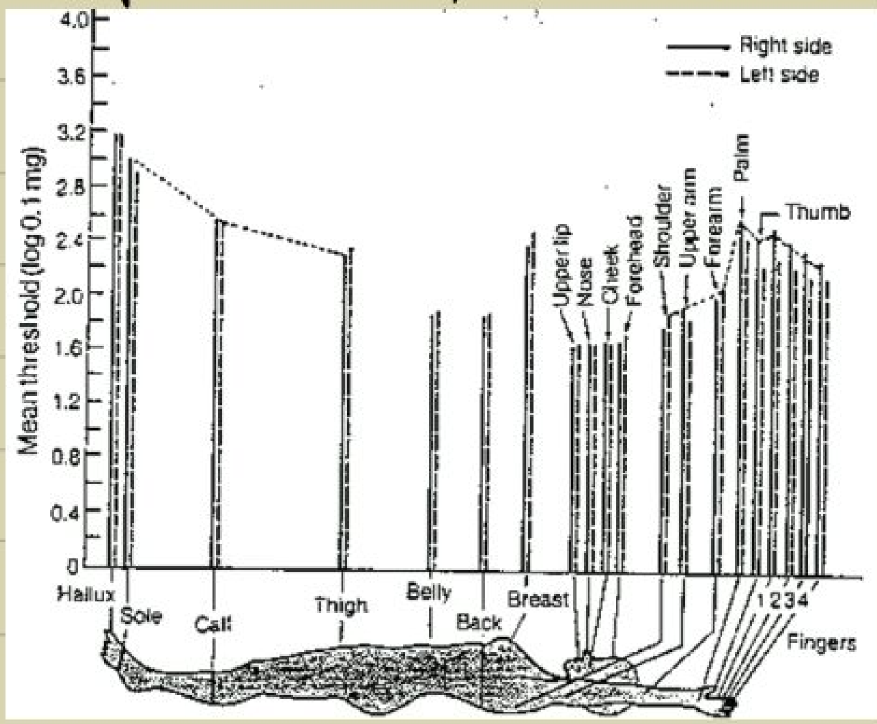
Importante per capire, in fase di progetto, quale può essere il valore più grande che la struttura può affrontare.

Sensibilità dell'uomo alle vibraz.

Si vuole capire quando le vibrazioni diventano dannose.
Collegare lo STIMOLO alla SENSAZIONE (soglie di percezione).

Il sistema nervoso è basato sui NEURONI, strutture monocellulari caratterizzati da dendriti (INPUT) e assoni (OUTPUT).
I RECETTORI sono trasduttori biologici, ve ne sono diversi tipi, ad esempio per quelli tattili sono diversi per vibrazioni statiche, a bassa ed alta frequenza.
I TIPO ⇒ l'energia incidente viene trasformata in grandezza elettrica (l'input può essere luce ma anche una pressione); ad esempio i corpuscoli del Pacini o i fusi neuromuscolari.

generatore di ampiezza proporzionale alla deformazione meccanica, e poi viene modificato in una serie di IMPULSI (spike) per essere inviati al sistema nervoso centrale.
Dobbiamo come detto quantificare il DANNO, legandolo alla sensazione. Questo grafico sperimentale descrive la soglia minima di percezione, calcolata come media:



ottenuto variando la stimolazione in ampiezza. Analogamente si definisce un grafico in base alla variazione in frequenza:

quantità di energia per dare luogo ad un potenziale (ON/OFF).

LEGGE DI FECHNER

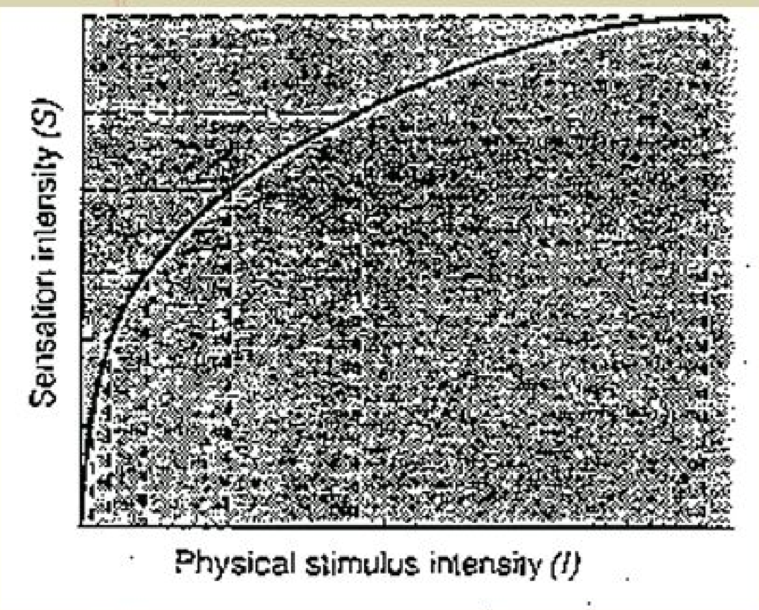
$$S = \frac{1}{K} \ln \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

S → sensazione soggettiva

I → intensità istantanea

I_0 → intensità soglia

K → costante, frazione di Weber (caratteristica della via sensoriale) determina la RISOLUZIONE



- CARATTERISTICHE VIBRAZIONALI DEL CORPO

Si misura il valore RMS di un segnale calcolato alla testa e ai piedi (sono ACCELERAZIONI) ⟹ si nota che, se sulla testa calcoliamo un certo valore,

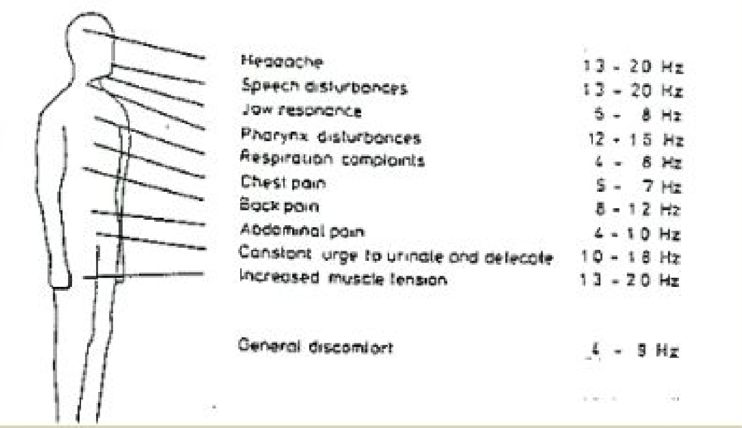
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 116

Trasmissione dell'onda meccanica, in piedi abbiamo dei filtri (gambe ad esempio).

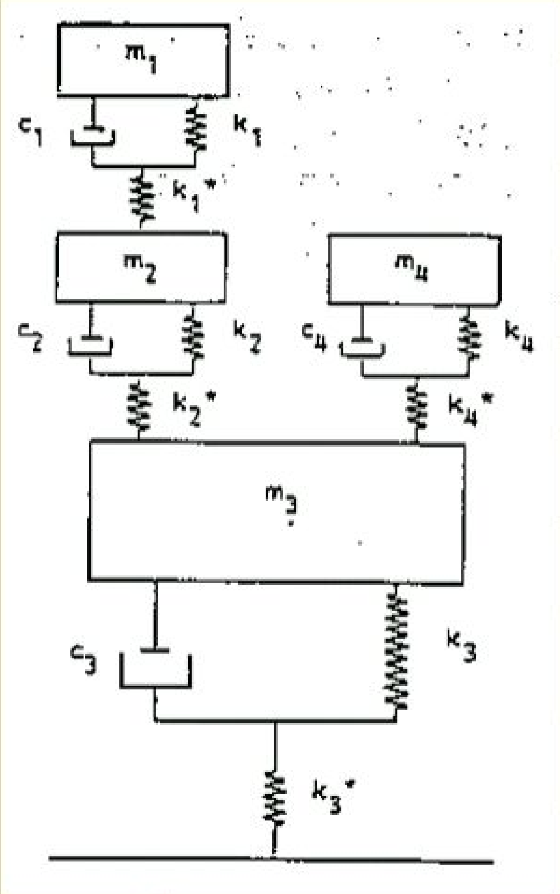
- In termini di frequenze, ci sono delle situazioni di RISONANZA degli organi interni:

Body posture	Body part	Vibration direction (see Fig. 1)	Range of resonance frequency
Reclining	Foot	x	16 –31 Hz
	Knee	x	4 – 8 Hz
	Abdomen	x	4 – 8 Hz
	Chest	x	6 –12 Hz
	Skull	x	50 –70 Hz
	Foot	y	0.8– 3 Hz
	Abdomen	y	0.8– 4 Hz
	Head	y	0.6– 4 Hz
	Foot	z	1 – 3 Hz
	Abdomen	z	1.5– 6 Hz
	Head	z	1 – 4 Hz
Standing	Knee	x	1 – 3 Hz
	Shoulder	x	1 – 2 Hz
	Head	x	1 – 2 Hz
	Whole body	z	4 – 7 Hz

quindi la zona peggiore per le norme è tra 4 e 10 Hz, è il campo che genera maggiori problemi.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 116



che soffre però di grandi limitazioni sulla frequenza (fino 32 Hz) e di identifica-zione dei parametri.

Sistemi a molti GdL

Individuiamo 1 grado di libertà per ogni massa del sistema; per ognuna scriviamo l'equazione di equilibrio (dipende anche da su quali direzioni si muovono).
Consideriamo il sistema in figura a 2 gradi di libertà:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} & -c_{12} \\ -c_{12} & c_2 + c_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} k_1 + k_{12} & -k_{12} \\ -k_{12} & k_2 + k_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \dot{x}_A + k_1 x_A + F_1(t) \\ c_2 \dot{x}_A + k_2 x_A + F_2(t) \end{Bmatrix}$$

o, riordinando $\Rightarrow [M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F(t)\}$

matrice delle masse
(se è tutto riferito all'origine è diagonale)

Sono sempre SIMMETRICHE, raramente diagonali.

Possiamo anche definire un vettore di stato contenente sia la derivata prima, sia lo spostamento: $\{z\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{x}\} \\ \{x\} \end{Bmatrix}$

e si ottiene la matrice dinamica:

$$[A] = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[k] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 116

determinante della matrice sia zero!
Si vuole trovare il valore di λ
per cui si annulla il determinante,
cioè è una ricerca di AUTOVALORI.
Rimaneggiamo l'equazione moltiplicando
per $[K]^{-1}$:

matrice identica

$$\left(\underbrace{[M][K^{-1}]}_{\text{matrice dinamica}} - \frac{1}{\lambda^2}[I]\right)\{x_0\} = 0$$

Quindi si vuole calcolare:

$$\det\left([K]^{-1}[M] - \frac{1}{\lambda^2}[I]\right) = 0$$

oppure:

$$\det\left([K][M]^{-1} - \lambda^2[I]\right) = 0$$

RICERCA DI AUTOVALORI IN FORMA CANONICA

Sono forme analoghe, dipende dall'invertibilità:
Le varie masse si muovono SOLO
alle frequenze "λ" qui calcolate!
otterremo quindi "n" pulsazioni proprie
del sistema, a cui il sistema si
muove.
Tutti gli autovalori hanno un corrispettivo

usare la forma trigonometrica come al solito:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{m} \{q_i\} \left[C_{ic} \cos(\lambda_i t) + C_{is} \operatorname{sen}(\lambda_i t) \right]$$

Cosa sono gli autovalori? Sono numeri (reali se il sistema è non smorzato, complessi se smorzato) e sono frequenze naturali; spesso si cercano nella forma e^{st}.

Per ogni autovalore esistono infiniti autovettori (tutti simili a meno di una costante), che dobbiamo determinare in base alle condizioni iniziali.

Inoltre fissato il moto di un punto, gli altri dipendono da lui! Se abbiamo 2 gradi di libertà, ci sarà la sovrapposizione di 2n armoniche, ognuna con la sua costante!

Fissate le condizioni iniziali e calcolate

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 116

- DISACCOPPIAMENTO EQ. DEL MOTO

Abbiamo visto che per n gdl avremo n equazioni differenziali accoppiate, vogliamo disaccoppiarle per avere n equazioni differenziali del primo ordine, e risolverle una ad una. A cosa serve? Se disaccoppiamo le equazioni, disaccoppiamo anche le soluzioni (se abbiamo 10.000 gdl, una volta disaccoppiati possiamo considerare ad esempio solo i primi 10-20 sistemi.

Gli autovettori sono ORTOGONALI in riferimento alla matrice delle masse e delle rigidezze (vedere dimostrazione sul libro).

Si ottiene quindi una matrice delle masse modali, DIAGONALE, grazie alle proprietà degli autovettori.

Si nota che gli autovettori come noto sono in modulo definiti a meno di una costante, quindi si usa NORMALIZZARLI ponendone uno uguale a 1, o dividerli per la norma (renderli versori); oppure si usa la ORTONORMALIZZAZIONE, cioé si divide ogni equazione per la massa modale corrispondente a quell'autovettore. A quel punto si avrà che $\frac{[\bar{K}]}{[\bar{M}]} = \lambda_i^2$:

$$[I][\ddot{\eta}] + [\lambda^2]\{\eta\} = \{0\} \quad , \text{con } [\lambda^2] = \text{diag}\{\lambda_i^2\}$$

matrice degli autovalori

- OSCILLAZIONI FORZATE SISTEMA NON SMORZATO (forzante armonica)

Se nel caso 1 gdl avevamo una soluzione bi-armonica (quella del sistema + quella della forzante), a n gdl ci aspettiamo n+1 armoniche.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 116

Qual'è il percorso per risolvere il sistema?

I) calcolo autovalori e autovettori del sistema

II) calcolo delle storie temporali e delle forze modali

III) soluzione delle n equazioni, ottenendo le risposte degli n sistemi a 1 gdl in coordinate modali

IV) Tornare nelle coordinate $\{x\}$.

- Le "n" equazioni da risolvere sono poche, ne prendiamo normalmente una decina. Se prendiamo i primi "m" modi, la risposta sarà:

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(t)\{q_i\} \qquad (\{x\} = [\phi]\{\eta\})$$

$\hookrightarrow [\phi]^*$

la matrice ϕ non è quadrata, ha n righe e m colonne! Viene detta matrice ridotta, come possiamo però assegnare le condizioni iniziali

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 116