NUMERO: 1666A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Russo

MATERIA: Biomeccanica dei Fluidi. Prof.Gallo

Biomeccanica dei fluidi

IDROSTATICA

I fluidi come noto sono sia liquidi che gas, i liquidi non hanno forma propria ma quella del recipiente.
I solidi non si deformano in seguito ad una sollecitazione meccanica, mentre i fluidi sono mezzi continui (non scala molecolare) che all'equilibrio è soggetto a forzi normali alle rispettive superfici, ovvero non può sopportare sforzi di taglio senza deformarsi per SCORRIMENTO.

- Grandezze fondamentali :

DENSITÀ $\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$

Per i liquidi è praticamente costante al variare di temperatura e pressione, per i gas la densità varia secondo l'equazione di stato dei gas ideali:

liquidi aumenta il volume aumentando T (tranne che per l'acqua).

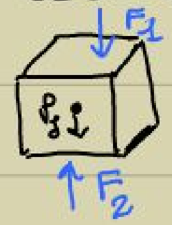
NB [Per i gas, si ha $pV = \text{cost}$ (eq. Boyle), da cui, differenziando:

$$d(pV) = 0 \Rightarrow p\,dV + V\,dp = 0$$

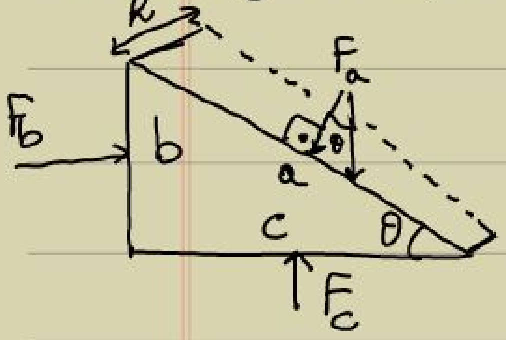
$$p\,dV = -V\,dp \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \Rightarrow p = -\frac{dp}{dV/V} = E$$

ne discende che i gas sono facilmente comprimibili, il modulo di comprimibilità è uguale alla pressione stessa.]

- Le differenze nell'arrangiamento molecolare ci sono anche tra liquidi e gas, come legami idrogeno nell'acqua, e le forze di VdW nei gas.
- Per le proprietà dei fluidi non si può quindi applicare una forza puntuale, ma si parla di forze di VOLUME o di SUPERFICIE. Isoliamo un volume di fluido:



DIMOSTRAZIONE, non direzionalità della pressione, considerando un prisma triangolare, in equilibrio sotto le forze di pressione indicate.



Scriviamo l'equilibrio lungo le due direzioni

$$\xrightarrow{+} \quad F_b = F_a \operatorname{sen}\theta$$

$$\uparrow^{+} \quad F_c = F_a \cos\theta$$

$$\text{con } F_a = P_a \cdot a \cdot l \qquad F_b = P_b \cdot b \cdot l \qquad F_c = P_c \cdot c \cdot l$$

per proprietà geometriche, $c = a\cos\theta$
$b = a\sin\theta$

Ne consegue $\Rightarrow F_c = P_c \cdot a \cdot \cos\theta \cdot l = P_a \cdot a \cdot l \cdot \cos\theta$

$\Rightarrow P_c = P_a$

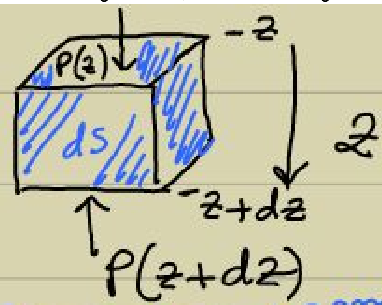
Inoltre $F_b = P_b \cdot a \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot l = P_a \cdot a \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot l$

$\Rightarrow P_b = P_a$

Quindi $P_b = P_a = P_c$

In conclusione si ha che la pressione non dipende dall'orientazione delle superfici, quindi né dalle aree, né dall'angolo di inclinazione.

consideriamo la forza di volume:



$$\downarrow^{+} \quad p(z)\,dS - p(z+dz)\,dS + f_z \rho\, dV = 0$$

generica f. di volume

$$dS\left[p(z) - \left(p(z) + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right] + f_z \rho\, dV = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z}\underbrace{dz\,dS}_{dV} + f_z \rho\, dV = 0 \Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z}dV + f_z \rho\, dV = 0$$

Ne consegue $\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial z} = f_z \cdot \rho$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_x \cdot \rho \,, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \cdot \rho$$

cioè all'equilibrio, una variazione di pressione lungo uno degli assi, deve essere bilanciata da una forza di volume lungo tale asse, vettorialmente:

$$\boxed{\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}}$$

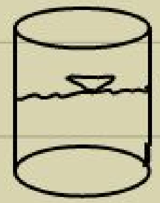
- energia potenziale

Se al posto della generica forza di volume mettiamo la forza peso, si ha:

$$f_x = f_y = 0 \,, \quad f_z = -g$$

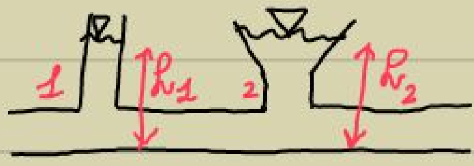
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 112

si ha all'interfaccia liquido-aria, e viene detto PELO LIBERO, dove si ha $p = p_{atm}$. Questo vale anche se il liquido si trova in recipienti diversi, purché collegati uno con l'altro, detto PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI.



• DIMOSTRAZIONE

Si consideri la situazione in figura:



$h_d = h_2 - h_1 \rightarrow h_2 = h_1 + h_d$ (per assurdo, ipotizziamo una Δh)

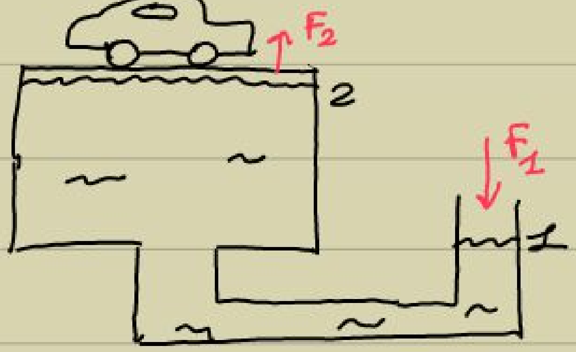
$p_{F_1} = p_0 + \rho g h_1$, $p_{F_2} = p_0 + \rho g h_2 = p_0 + \rho g h_1 + \rho g h_d$

$p_{F_1} - p_{F_2} = \rho g h_d$

Ma poiché hanno la stessa quota, $h_d = 0$, quindi $p_{F_1} = p_{F_2}$

Consideriamo ora 3 vasi, riempiti di liquido fino ad altezza h e di uguale base; per la legge di Stevino, sul fondo dei recipienti c'è la stessa pressione, e la forza è anch'essa uguale (stessa

Si consideri l'applicazione dell'elevatore idraulico:

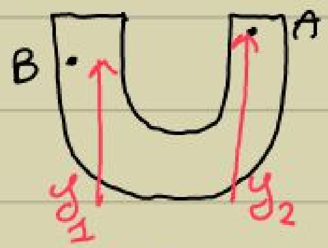


$$p_1 = p_2 \Rightarrow \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \quad , \quad F_2 \gg F_1$$

poiché il volume rimane costante, la variazione si perde in spostamento.

Un'altra applicazione è il MANOMETRO A U.



Se le pressioni sulle superfici libere sono le stesse, allora esse sono alla stessa quota; se però i due rami comunica-no con ambienti a diversa pressione, con $P_1 > P_2$, si produce un dislivello in accordo con la legge di Stevino:

$$P_B + \rho g y_1 = P_A + \rho g y_2 \Rightarrow P_A - P_B = \rho g (y_1 - y_2)$$

si nota come detto, che se $P_A = P_B \Rightarrow y_1 = y_2$, se invece le pressioni sono diverse si può ottenere la differenza misurando

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 112

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^z -g\frac{\rho_0}{p_0}\,dz \Rightarrow \ln(p/p_0) = -g\frac{\rho_0}{p_0}z$$

$$\ln(p/p_0) = -g\frac{\rho_0}{p_0}z \Rightarrow p = p_0 e^{-g\frac{\rho_0}{p_0}z}$$

Quindi nell'atmosfera isoterma la pressione decresce esponenzialmente con l'altezza.

• PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso di fluido spostato.

S è la spinta ricevuta, si scrive l'eq di equilibrio:

$P = S \Rightarrow mg = \rho g V = S$

Se sostituiamo la porzione di fluido con un corpo di volume e forma uguale ma densità diversa e quindi massa diversa, la forza peso sarà diversa:

$S' = S$ (forma e vol. uguale)

$S = P' \Rightarrow mg = m'g \Rightarrow m = m'$

$\rho V = \rho' V' \Rightarrow \rho = \rho'$

condizione necessaria per l'equilibrio

EQUAZIONI DI BILANCIO

Esprimono la costanza di un certo parametro fisico, ad esempio un generico parametro A:

$$\sum_i A_i = \text{costante}$$

le nostre grandezze sono la massa e l'energia e la quantità di moto.
Considereremo i fluidi CONTINUI!
I bilanci possono avvenire per sistemi APERTI o CHIUSI (scambio di massa e energia o solo energia) e le equazioni cambiano di conseguenza.

SIST. APERTO → si definisce volume di controllo entro cui avvengono scambi di massa

- BILANCIO DI MASSA

Per un sistema chiuso è banale, la massa rimane uguale, per un sistema aperto invece:

$$\left[\frac{dm}{dt}\right]_{V_c} = \sum_i \dot{m}_{i,IN} - \sum_j \dot{m}_{j,OUT}$$

Il principio di conservazione dell'energia stabilisce che il contenuto energetico del sistema varia nel tempo in funzione dell'energia in transito attraverso la sua superficie (potenza scambiata). Vediamo la trattazione per SISTEMI APERTI:

$$\left[\frac{dU}{dt}\right]_{V_c} = \sum \dot{m}_{in} U_{in} - \sum \dot{m}_{OUT} U_{OUT} + \underbrace{\dot{Q} + \dot{L}}_{\text{scambi di calore/lavoro}}$$

$\dot{L}$ è la POTENZA MECCANICA, $\dot{Q}$ la POTENZA TERMICA [J/s]. U è il termine generale che esprime il contenuto energetico dell'unità di massa:

$$U_{in} = \underbrace{u_{in}}_{\text{en. interna}} + \underbrace{g z_{in}}_{\text{termine potenziale (gravitazionale)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \overline{w}_{in}^{2}}_{\text{energia cinetica}}$$

ci possono essere altre energie potenziali, ma noi le trascuriamo (elettromagn., chimica...).

Le potenze diventano lavori:

$$\left(u_1 + gz_1 + \frac{1}{2}w_1^2\right) - \left(u_2 + gz_2 + \frac{1}{2}w_2^2\right) + Q_{12} + L_{12} = 0$$

Esplicitiamo i due termini di lavoro e calore:

$L = L_p + L_m \rightarrow$ lavoro di eventuali organi meccanici

L_p → lavoro delle forze di pressione (LAVORO DI PULSIONE)

Definiamo L_p in potenza: $\dot{L}_p = p \cdot A \cdot w$ → portata volumica

avendo definito la potenza come forza · velocità.

$\dot{L}_p = p\dot{V} = \dot{m}pv$ → volume specifico, $1/\rho$

$L_p = pv$

Quindi il lavoro totale scambiato lo scriviamo come:

$$L_{12} = L_{p_{12}} + L_{m_{12}} = p_1v_1 - p_2v_2 + L_{m12}$$

Andiamo a sostituire:

$$\left(u_1 + p_1v_1 + gz_1 + \frac{1}{2}w_1^2\right) - \left(u_2 + p_2v_2 + gz_2 + \frac{1}{2}w_2^2\right) + Q_{12} + L_{m12} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 112

Possiamo semplificare i termini di energia interna, e ipotizziamo $L_m = 0$ (no organi meccanici):

$$\left(P_1 v + g z_1 + \frac{1}{2} w_1^2\right) - \left(P_2 v + g z_2 + \frac{1}{2} w_2^2\right) +$$

↑ volume è specifico! $\left(\frac{m^3}{kg}\right)$

$$- L_{w_{12}} = 0$$

Moltiplichiamo tutto per ρ:

$$P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho w_1^2 - P_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho w_2$$

$$- \Delta P_R = 0$$

↳ caduta di pressione per la dissipazione

$$(P_2 - P_1) + \frac{1}{2} \rho (w_2^2 - w_1^2) + \rho g (z_2 - z_1) = 0$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI

(Assumiamo di essere in assenza di dissipazioni).

oppure $\Rightarrow$ $P + \frac{1}{2} \rho w^2 + \rho g z = \text{costante}$

termini di pressione

o ancora, diviso ρg:

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{1}{2} \frac{w^2}{g} + z = \text{costante}$$

termini di quota

Si assume trascurabile la differenza di quota ($\Delta z = 0$), inoltre si assume la velocità nei capillari trascurabile rispetto a quella nelle arterie.
Ne risulta che:

$$\Delta p = -\frac{1}{2}\rho w_1^2 \qquad \rho = 1060 \text{ kg/m}^3$$

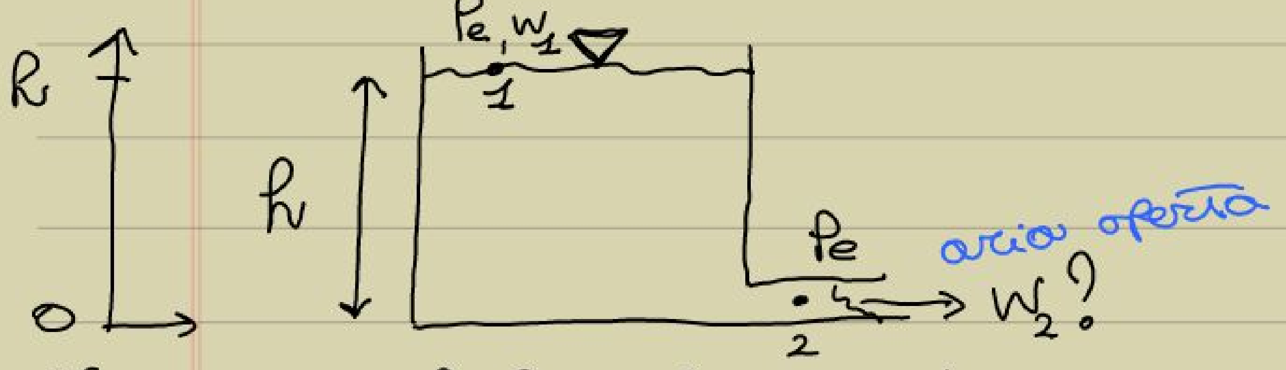
$$\Downarrow$$

$$\Delta p = -\frac{530}{133} w_1^2 \simeq 4 w_1^2$$

→ conversione da Pa a mmHg

Permette quindi il calcolo di Δp tra arteria e capillari

2. SERBATOIO CON FORO SUL FONDO



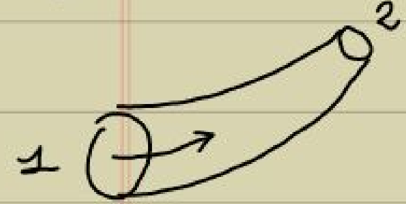
Vogliamo calcolare la velocità in uscita con Bernoulli. Come punti scegliamo l'uscita e il pelo libero (variabili note).

$$\cancel{P_2 - P_1}^{\,0} + \frac{1}{2}\rho(w_2^2 - w_1^2) + \rho g \underbrace{(z_2 - z_1)}_{-h} = 0$$

CIRCUITI IDRAULICI

Ripartiamo dall'equazione di bilancio con le prime due ipotesi:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 - z_2) + \frac{1}{2}(w_1^2 - w_2^2) + L_m - L_W = 0$$



Qual è il lavoro necessario a passare dalla sezione 1 alla 2? Immaginando di avere una pompa che fornisce lavoro, è il termine L_m:

$$L_m = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(w_2^2 - w_1^2)$$

gH, PREVALENZA, cioè il lavoro ideale ($L_W = 0$) scambiato tra fluido e macchina

Si può anche esplicitare H, per avere tutto in metri:

$$H = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(w_2^2 - w_1^2)$$

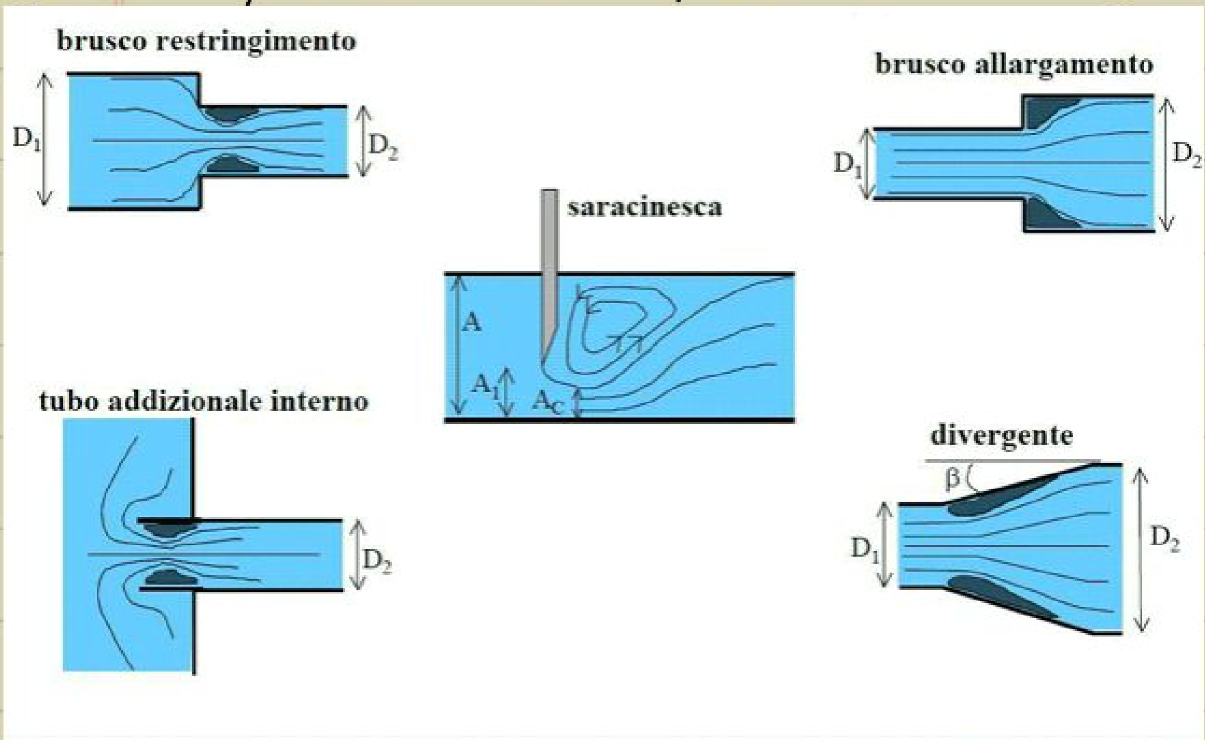
SALTO

uguali (pelo libero) e le velocità di abbassamento e innalzamento uguali (serbatoi uguali). Cosa possiamo dire del termine di perdita di carico?

Avvengono per variazioni geometriche, possono essere perdite CONCENTRATE o DISTRIBUITE, valutabili dalla relazione:

$$\Delta P_{f,conc} = \sum \xi \frac{w^2}{2g}$$ perdite CONCENTRATE

ξ è il coefficiente di resistenza LOCALIZZATA, serve in caso di curve, gomiti, strozzature, bruschi allargamenti.



Per valori più alti del numero di Re si usa questo grafico, l'ABACO DI MOODY:

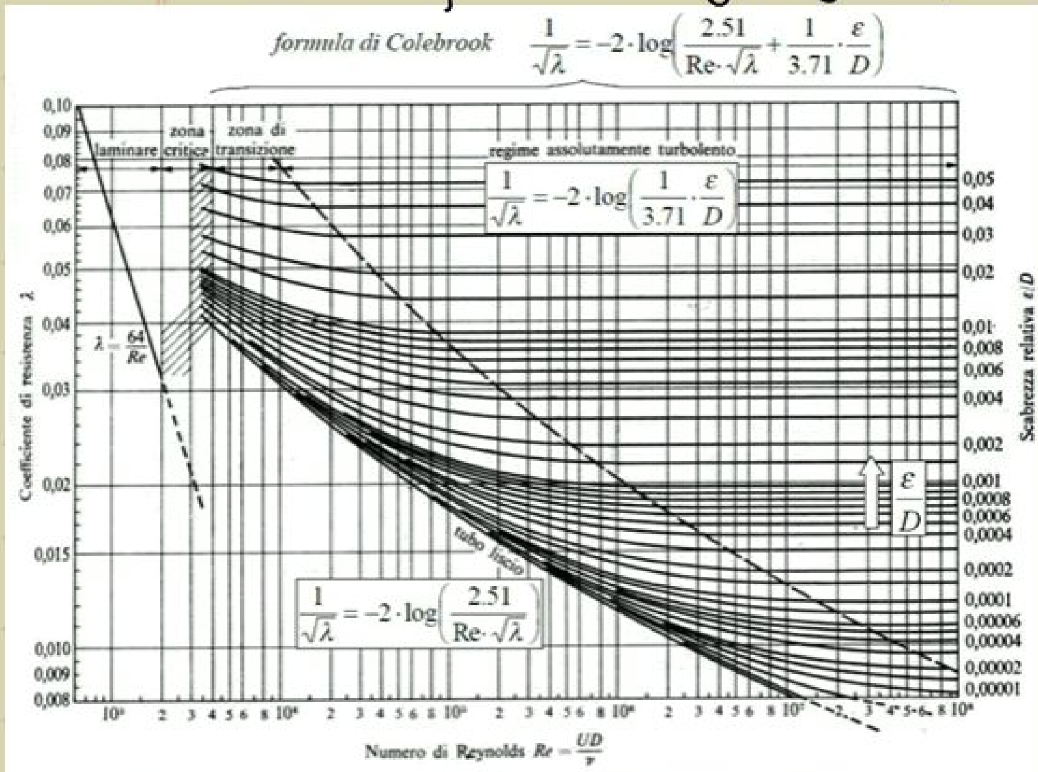


Diagramma di Moody: curve $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon/D)$ ottenute dalla formula di Colebrook con diversi valori costanti della scabrezza relativa ε/D.

ci serve sapere Re (calcolato come prima) e la scabrezza relativa.

- Quindi possiamo calcolare il salto della pompa nel circuito precedente:

$$H = (z_2 - z_1) + \left(\sum \xi + \lambda \frac{L}{D}\right) \frac{w^2}{2g} \rightarrow w = \frac{Q}{A}$$

(Q portata)

H è un valore noto dalla curva di FUNZIONAMENTO della pompa.

Noto Re, calcoliamo la scabrezza come $\frac{\varepsilon}{D} = 0{,}003$, e dall'abaco si ottiene $\lambda = 0{,}028$

$H = \ldots = 30{,}8\ m$ (Avendo assunto $L = 5m$)

- ESEMPIO 2, si consideri un impianto di riscaldamento con circolazione di acqua.

$V_{MAX} = 0{,}75\ m/s$

$\varepsilon = 10\ \mu m$

$Q = 0{,}06\ Kg/s \rightarrow Q_v = \frac{Q}{\rho}$

$T = 66\ °C$ ($\rho = 979\ kg/m^3$, $\mu = 0{,}000434\ Pa \cdot s$)

$\zeta_{valv} = 2$, $\zeta_{gomiti} = 0{,}5$, $\zeta_{Term} = 6$

Calcolare il diametro della tubazione, la prevalenza della pompa e la potenza resa al fluido.

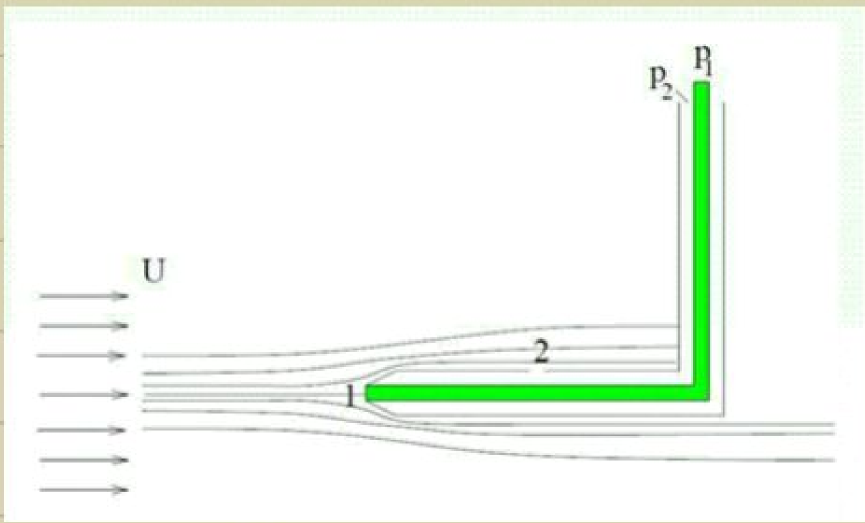
$Q_v = V \cdot A = V \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{4 Q_v}{\pi V}} = 10\ mm$

Applichiamo Bernoulli tra due punti, uno a monte e uno a valle della pompa (ad esempio):

$H = (z_2 - z_1) + \Delta p_f$ cioè l'energia necessaria a vincere le perdite

• APPLICAZIONI DI BERNOULLI

TUBO DI PITOT, misura di velocità a partire da una misura differenziale di pressione. Un punto è colpito da una corrente, uno invece è indisturbato.



Applichiamo Bernoulli tra 1 e 2

$$P_1 + \rho g \cancel{z_1} + \frac{1}{2}\rho \cancel{v_1^2} = P_2 + \rho g \cancel{z_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$$

è una misura rozza, deve essere // al flusso d'aria, ma basta conoscere la differenza di pressione tra due punti, ad esempio con un manometro come in figura:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 112

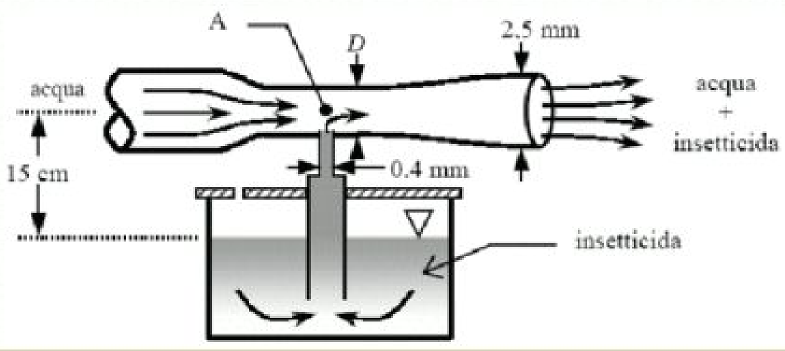
Trascurando la Δz e sostituendo $V = \frac{Q}{A}$ si ha:

$$\frac{Q^2}{2A_2^2} + \frac{p_2}{\rho} = \frac{Q^2}{2A_1^2} + \frac{p_1}{\rho} \Longrightarrow Q = A_2 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[1 - (A_2/A_1)^2\right]}}$$

Possiamo quindi misurare la portata nota la geometria della sezione e la differenza di pressione; ad esempio con un manometro differenziale, si può conoscere $\Delta p = \rho_m g h$.
Le applicazioni si basano tutte sulla variazione di sezione quindi, che però non può essere eccessiva per non andare incontro a perdite di carico.

ESERCIZIO

Il dispositivo rappresentato in figura deve disperdere una miscela d'acqua e di insetticida. La portata di insetticida deve essere pari a Qi = 75 ml/min mentre la portata d'acqua è Qa = 4 l/min.
Calcolare, in tali condizioni, il valore della pressione nel punto A e il diametro D del dispositivo.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 112

Fenomeni di Trasporto

Bernoulli è utile ma poco utilizzabile nei sistemi fisiologici, useremo invece i fenomeni di trasporto, cioè fenomeni di trasporto di quantità fisiche (massa o energia); esiste un motore di questo fenomeno, come il GRADIENTE DI CONCENTRAZIONE o altre meccaniche per mantenere l'OMEOSTASI. I meccanismi sono principalmente 2, CONVEZIONE (trasmissione di massa in un mezzo mediante movimento del mezzo stesso, come un fluido), DIFFUSIONE (trasmissione in un mezzo lungo gradiente di concentrazione).
Spesso un certo elemento viene trasportato in entrambi i modi! Il limite tra le due modalità è l'efficienza di trasporto, quindi considerazioni energetiche.
Quando è più efficiente un meccanismo rispetto all'altro? È riportato nella tabella seguente:

Quali sono i principali approcci nello studio dei fenomeni biologici?

approccio	vantaggi	svantaggi
* sperimentale	• può essere molto realistico	• richiede dispositivi e strumentazione • presenta difficoltà di misura • presenta elevati costi • non sempre è praticabile
* teorico	• fornisce informazioni di tipo generale, usualmente nei termini di una formula matematica	• è limitato a fenomeni fisici semplici
* numerico	• non è limitato a problemi lineari • può trattare fenomeni fisici complicati • produce risultati che descrivono fenomeni transitori	• ha errori di troncamento • presenta problemi nelle condizioni al contorno • può presentare alti costi computazionali

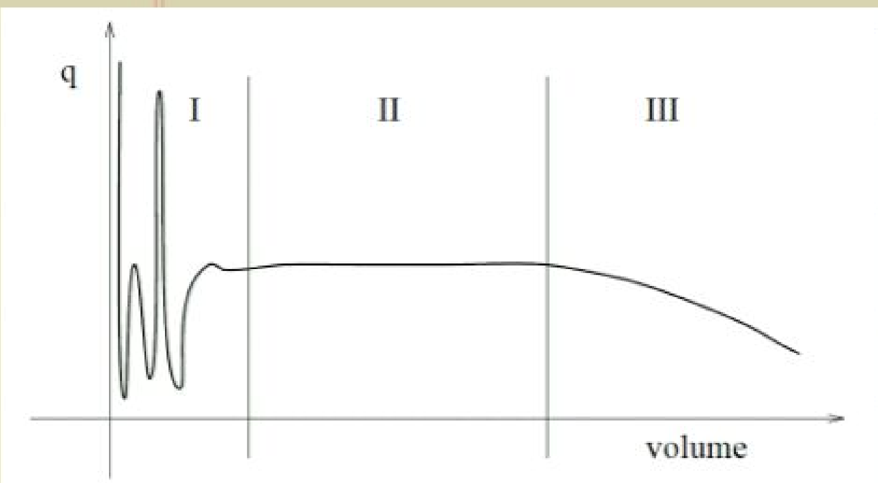
* Riprodurre sperimentalmente un moto fluidico che si vuole studiare (meno usato)
* Il principale utilizzato, si basa sulle formulazioni
* Fluidodinamica computazionale, usa simulazioni al calcolatore.

Noi useremo principalmente la meccanica classica (bilanci massa, q. di moto, energia).

• INTRODUZIONE AI BILANCI

Sono equazioni della meccanica dedotte da proprietà di invarianza della materia, possono essere di massa, q. di moto, momento angolare, energia.

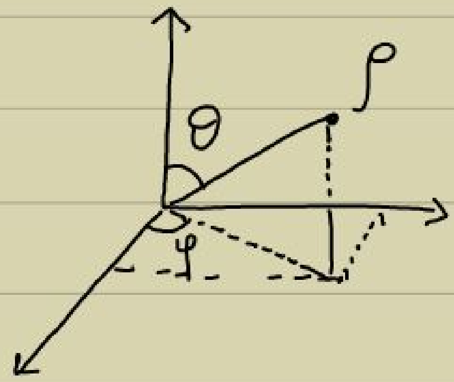
la PERMEABILITÀ (descrive la probabilità che una certa molecola migri). Si descrive un fenomeno microscopico ad una scala più grande.
Quando non è sufficiente la scala più grande si deve scendere a quella inferiore (atomistico) con leggi quantistiche/statistiche (compot. medio).
Per descrivere l'importanza della scala,



si consideri il grafico in cui si vede la variazione di una certa quantità "q", in funzione del volume di osservazione (q può essere pressione di gas ad esempio); nella regione I il volume è abbastanza piccolo da esplorare le molecole, la

SFERICHE

Variabili $\varphi\ [0, 2\pi]$
$\theta\ [0, \pi]$
$\rho\ [0, +\infty]$



Anche queste non sono olonomiche.

Noi useremo equazioni vettoriali, che potremo scrivere come scalari grazie a questi sistemi di riferimento (sistema di 3 equaz. scalari che rappresentano le 3 COMPONENTI del vettore, le proiezioni sugli assi).
Aggiungiamo ora la variabile tempo:
APPROCCIO LAGRANGIANO → si fissa la massa e se ne segue l'evoluzione nel tempo.
APP. EULERIANO → si fissa un volume e si guarda l'evoluzione nel tempo di quella porzione di spazio.

Consideriamo una grandezza $c(x, y, z, t)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 112

$$\frac{d\vec{x}}{ds} \times \vec{V}(x) = 0$$ DEFINIZIONE RIGOROSA STREAMLINE

→ Tg. alla linea di corrente

ovvero ci dice che la linea di corrente è PARALLELA alla velocità:

$$\frac{d\vec{x}_p}{dt} = \vec{V}_p(x_p, t)$$ DEFINIZIONE RIGOROSA PATHLINE

Se siamo in CONDIZIONI STAZIONARIE $\left(\frac{\partial V}{\partial t} = 0\right)$, le pathlines e streamlines coincidono.

Si può ancora parlare di STREAKLINE, sono come le pathline ma che sono passate dalla stessa posizione iniziale.

- VISCOSITÁ → facilità con cui viene modificato lo stato di quiete di un fluido (TRASMISSIONE DEL MOTO tra gli strati del fluido).

Scoperto da Newton, un secchio posto in rotazione.

$\frac{F}{A} \rightarrow \tau$ (detti sforzi viscosi)

In termini differenziali, facciamo il limite per $y \rightarrow 0$, abbiamo un gradiente di velocità lungo la direzione di scorrimento del fluido;

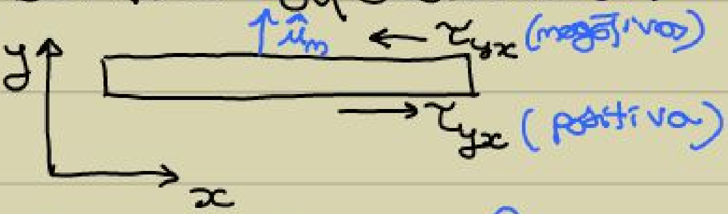
$$\frac{dv_x}{dy} = \lim_{[(y \in A'')-(y \in A')] \rightarrow 0} \left\langle \frac{v_x(y \in A'') - v_x(y \in A')}{(y \in A'')-(y \in A')} = \frac{0 - v_x}{\Delta y} = \frac{-v_x}{\Delta y} \right\rangle$$

dalla definizione di derivata.

$$\tau_{xy} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

LEGGE DI NEWTON DELLA VISCOSITÀ

i pedici di τ indicano la normale alla superficie su cui agisce lo sforzo, e la direzione dello sforzo.
Per convenzione la τ è positiva sulla faccia opposta alla normale sopracitata.



$$\left.\begin{array}{l} S.I. \rightarrow \mu \left[\frac{N}{m^2} \cdot s\right] \text{ o } \left[\frac{kg}{m \cdot s}\right] \\ c.g.s \rightarrow \mu \left[\frac{g}{cm \cdot s}\right] = \text{Poise } [P] \end{array}\right\} \text{VISCOSITÀ}$$

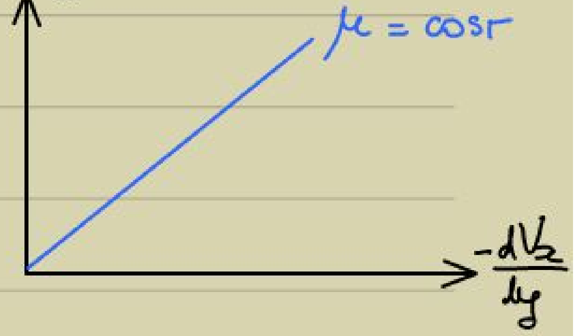
attraverso i vari strati. Quindi in maniera più compatta possiamo dire che: "la τ_{xy} è il flusso viscoso della componente x della quantità di moto, nella direzione y, ed è dovuto al trasporto molecolare."

Come già detto, la viscosità μ si misura in Pa·s, oppure si può definire $\nu = \mu/\rho$ $[m^2/s]$ la VISCOSITÀ CINEMATICA (è una velocità areolare).

- EQUAZIONE COSTITUTIVA DEL FLUIDO, è il legame tra gli sforzi e le deformazioni (legame tra i due tensori), ovvero il gradiente di velocità:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dV_x}{dy}$$

SFORZO DEFORMAZIONE

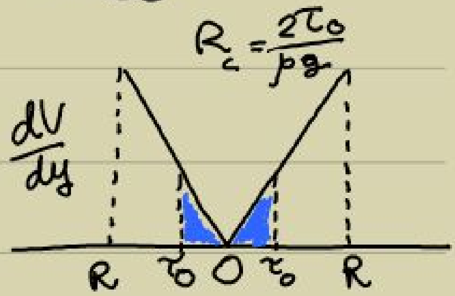


è come un diagramma σ-ε, per fluidi Newtoniani è LINEARE, con coeff. angolare μ.

le τ sono proporzionali al raggio R!

Il profilo delle τ sarà:

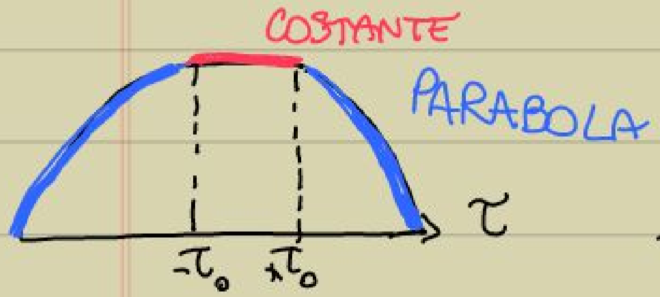
non c'è moto finché $\tau < \tau_0$. Prima di tale valore non c'è



GRADIENTE di velocità (quindi velocità costante ovunque), per $\tau > \tau_0$ ci sarà una velocità che otteniamo per integrazione:

$$\tau = -\mu \frac{dV_x}{dy} \Rightarrow \frac{\rho g}{2} R = -\mu \frac{dV_x}{dy} \dots$$

il profilo è PARABOLICO! Non basta la sola forza peso per far scorrere il fluido sulle pareti.



- FLUIDO PSEUDOPLASTICO

la relazione costitutiva è:

$$\tau_{yx} = -\mu \left(\frac{dV_x}{dy}\right)^{n-1} \cdot \frac{dV_x}{dy} \qquad (n < 1 \text{ per pseudoplast.})$$

se aumenta il gradiente di velocità, diminuisce la viscosità!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 112

Bilancio di quantità di moto

$\vec{q} = m \cdot \vec{v}$

Se $m = cost$, possiamo scrivere:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Quindi una forza provoca una variazione della quantità di moto, è un FLUSSO di quantità di moto.
Scriviamo una prima forma di bilancio:

SISTEMA APERTO

$$\left\{ \begin{matrix} \text{V di accumulo} \\ \text{della qdm} \end{matrix} \right\}^{\text{(è una derivata)}} = \left\{ \begin{matrix} \text{V ingresso} \\ \text{qdm} \end{matrix} \right\}_{\text{PORTATA INGRESSO QDM}} - \left\{ \begin{matrix} \text{V. uscita} \\ \text{qdm} \end{matrix} \right\}_{\text{PORTATA USCITA QDM}}$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} \Sigma \text{ forze} \\ \text{esterne agenti} \end{matrix} \right\}$$

di superficie

di volume

Ipotizziamo regime STAZIONARIO (non ci sono variazioni della qdm nel volume di controllo).

$$\left\{\begin{matrix} \text{V. ingresso} \\ \text{qdm} \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} \text{V. uscita} \\ \text{qdm} \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} \Sigma \text{ forze} \\ \text{agenti} \end{matrix}\right\} = 0$$

(portata) (portata)

Scriviamo ora i 3 elementi del bilancio.

- flusso di quantità di moto nella direzione z, entrante in $z=0$;

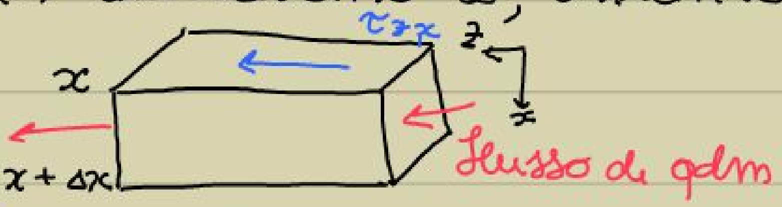
$$(\rho V_{z=0}) \cdot (W \cdot \Delta x) \cdot V_{z=0} = \dot{V} \rho V_z = \dot{M} V_z$$ → portata massica

area su cui agisce — portata volumica

- flusso di qdm nella direzione z, uscente in $z=L$;

$$(\rho V_{z=L}) \cdot W \cdot \Delta x \cdot V_{z=L}$$

- Dobbiamo anche considerare il flusso di quantità di moto dovuto alla τ, sempre in direzione z, entrante dalla sup in x →



$$\tau_{xz}\Big|_x \cdot (LW)$$

superficie in x su cui agisce

(Positiva, perché l'asse x è entrante nella sup. considerata)

$$\frac{\tau_{xz}|_x - \tau_{xz}|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + \rho g \cos\beta = 0$$

$$\underbrace{\frac{\tau_{xz}|_{x+\Delta x} - \tau_{xz}|_x}{\Delta x}}_{} = \rho g \cos\beta$$

ricorda la definizione di derivata, possiamo passare al limite!

$$\lim_{\Delta x \to 0} (\rho g \cos\beta) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\tau_{xz}(x+\Delta x) - \tau_{xz}(x)}{\Delta x} \right]$$

esprimiamo tutto in termini dif-
-ferenziali:

$$\rho g \cos\beta = \frac{d(\tau_{xz})}{dx}$$ eq. differenziale per il flusso di qdm

$$\int \rho g \cos\beta \, dx = \int d\tau_{xz} \Longrightarrow \tau_{xz} = \rho g x \cos\beta + c_1$$

abbiamo bisogno di condizioni al contorno per calcolare c_1! Ad esempio in $x = 0$, $\tau_{xz} = 0$ (interfaccia tra fluido e aria, superficie superiore della sezione di fluido):

$$\Longrightarrow \tau = c_1 = 0 \,!$$

$V_z(x=\delta)=0$!

$$0=-\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2\cos\beta+C_2 \Rightarrow C_2=\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2\cos\beta$$

$$V_z(x)=-\frac{\rho g}{2\mu}x^2\cos\beta+\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2\cos\beta=\frac{\rho g}{2\mu}\cos\beta(\delta^2-x^2)=$$

$$=\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2\cos\beta\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right]$$

Dal bilancio si ricava quindi il PROFILO DI VELOCITÀ, fondamentale perché possiamo ricavare molte informazioni. Ha un andamento PARABOLICO, ha un massimo per $x=0$ (interfaccia fluido-aria), facilmente calcolabile. Possiamo anche calcolare la velocità media:

$$\overline{V_z}=\frac{\int_0^W\int_0^\delta V_z\,dx\,dy}{\int_0^W\int_0^\delta dx\,dy}=\frac{W\int_0^\delta V_z\,dx}{W\int_0^\delta dx}=\frac{1}{\delta}\int_0^\delta V_z\,dx=$$

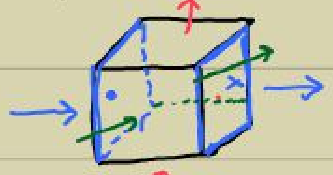
V_z dipende solo da x

$$=\frac{1}{\delta}\frac{\rho g}{2\mu}\delta^2\cos\beta\left[x-\frac{1}{3\delta^2}x^3\right]_0^\delta=\frac{\rho g}{3\mu}\delta^2\cos\beta$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 112

abbiamo anche detto che è uguale, per il bilancio della massa, al bilancio delle portate in massa che transitano attraverso le superfici di contorno.

Consideriamo ad esempio la sup. $\perp$ ad x:



$\rho V_x|_x \, dy\,dz$ PORTATA IN MASSA ENTRANTE NEL VOLUME DI INTERESSE (attraverso la prima faccia)

$-\rho V_x|_{x+dx} \, dy\,dz$ " " USCENTE " "

Scriviamo la stessa cosa per tutte le componenti:

$$y \begin{cases} \rho V_y|_y \, dx\,dz \\ -\rho V_y|_{y+dy} \, dx\,dz \end{cases} \qquad z \begin{cases} \rho V_z|_z \, dx\,dy \\ -\rho V_z|_{z+dz} \, dx\,dy \end{cases}$$

Scrivendo tutto nel bilancio:

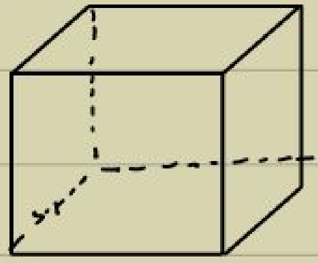
$$dx\,dy\,dz \frac{\partial \rho}{\partial t} = dy\,dz\left(\rho V_x|_x - \rho V_x|_{x+dx}\right) + dx\,dz\left(\rho V_y|_y - \rho V_y|_{y+dy}\right) + dx\,dy\left(\rho V_z|_z - \rho V_z|_{z+dz}\right)$$

dividiamo per dV:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho V_x|_x - \rho V_x|_{x+dx}}{dx} + \frac{\rho V_y|_y - \rho V_y|_{y+dy}}{dy} + \frac{\rho V_z|_z - \rho V_z|_{z+dz}}{dz}$$

Bilancio q. di moto - approccio fluidodinamico

Consideriamo sempre un volumetto di fluido, e come già fatto scriviamo:



$$\left\{\begin{matrix}\text{v. accumulo}\\ \text{q. di moto}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{portata di ingr.}\\ \text{q. di moto}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{portata in uscita}\\ \text{q. di moto}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\Sigma \text{ forze}\\ \text{agenti}\end{matrix}\right\}$$

$dq/dt = \frac{d(mv)}{dt}$

↳ la qdm è modificata da portate di fluido a velocità diverse

e da forze esterne

esprimibile come:

$$\left\{\begin{matrix}\text{rate di}\\ \text{accumulo}\\ \text{della q. di moto}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{bilancio}\\ \text{convettivo}\\ \text{della qdm}\\ \text{(macroscopico)}\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\text{bilancio}\\ \text{diffusivo}\\ \text{(molecolare)}\\ \text{della qdm}\end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix}\text{forze}\\ \text{agenti}\end{matrix}\right\}$$

cioè la qdm esce e entra in due modi, uno convettivo (moto di insieme della massa) e uno diffusivo (trasporto molecolare dovuto alle τ, flusso di qdm per unità di superficie).

- ACCUMULO DI Q. DI MOTO NEL TEMPO:

$dx\,dy\,dz \left(\frac{\partial \rho V}{\partial t}\right)$ variazione nel tempo della q. di moto

- CONVEZIONE, consideriamo solo la compo-
-nente x: Vel. ingresso qdm $\Longrightarrow \dot{m} V_x = \dot{V} \rho V_x = dy\,dz\,\rho V_x^2 =$

$$+ \, dx\,dz \left(\rho V_x V_y \big|_y - \rho V_x V_y \big|_{y+dy} \right)$$

Dividiamo tutto per dV di nuovo, e facciamo il limite per $dV \to 0$ $(dx, dy, dz \to 0)$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho V_x V_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho V_x V_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_x V_z)$$

aggiungiamo l'ipotesi di $\rho = cost$ e sviluppiamo le derivate:

$$-\rho\left[V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial z} \right]$$

riordinando:

$\vec{\nabla} V = 0$, dal bilancio di massa

$$-\rho\left[V_x \cancel{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right]$$

Andiamo ora a unire il trasporto convettivo qua calcolato con l'accumulo del tempo:

$$\rho \frac{\partial V_x}{\partial t} + \rho\left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right)$$

Possiamo unire questi termini nella derivata SOSTANZIALE o MATERIALE:

$$\rho \frac{D V_x}{D t}$$

$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x}$ Apporto alla qdm nella direzione delle forze di pressione

FORZE DI VOLUME (PESO)

$dx\,dy\,dz\,\rho g \Rightarrow \rho g_x$

se x è orizzontale, $g_x = 0$, se è verticale $g_x = g$

- accorpiamo ora tutti i contributi:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + \rho g_x$$

o in forma vettoriale:

$$\underset{A}{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}} = \underset{B}{-\vec{\nabla} p} - \underset{C}{\vec{\nabla}\,\overline{\overline{\tau}}} + \underset{D}{\rho \vec{g}}$$

gradiente della pressione; tensore degli sforzi (simmetrico)

APPORTO DI QUANTITÀ DI MOTO IN DIREZIONE X

questo bilancio ricorda la 2° legge di Newton, ρ è una massa/volume per la derivata di una velocità (accelerazione) e forze dall'altro lato.

A $\Rightarrow$ è quindi una massa per accelerazione

B $\Rightarrow$ rappresenta le forze di PRESSIONE per unità di volume

Inseriamola nel bilancio semplificandolo, tenendo a mente l'equazione di continuità ($\vec{\nabla} V = 0$):

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$\Downarrow$ sostituiamo le τ

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-2\mu \frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\mu \frac{\partial V_x}{\partial y} - \mu \frac{\partial V_y}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\mu \frac{\partial V_x}{\partial z} - \mu \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right] - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z}\right)$$

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

Riordinando:

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \overbrace{\underbrace{\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial x \partial z}}_{\text{Raccolto } \partial x}}^{=0 \text{, cons. massa}}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$\boxed{\text{Solo fluido Newt.}}$

$$\rho \frac{DV_x}{Dt} = \mu \nabla^2 V_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

EQUAZIONE DI NAVIER-STOKES (comp. x)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 112

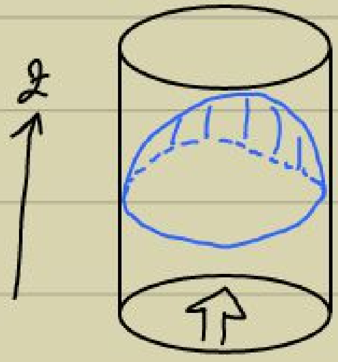
• ESEMPIO, MOTO DI UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE

1° MODO, partire dall'equazione generale e cancellare i termini semplificabili e ricavare il profilo di velocità

2° MODO, fare il bilancio su un volume infinitesimo.

1 MODO ⟹ dobbiamo capire che sistema di rif. usare e in che direzione.

conviene coordinate cilindriche, e componente z.



Consideriamo un moto sviluppato, cioè V_z è indipendente da z (quota), e nemmeno da θ per ragioni di geometria. Quindi dipende solo dal raggio r! Inoltre il moto è solo lungo z, quindi $V_\theta = 0$, $V_r = 0$

$$\vec{V}_z = V_z(r)\,\hat{u}_z$$

Scriviamo quindi tale componente in coordinate cilindriche:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 112

dividiamo tutto per r :

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{P(0)-P(L)}{2\mu L} r + \frac{C_1}{r} = 0$$

serve una condizione al contorno!
per $r=0$ si avrebbe $\frac{C_1}{r} \to \infty$, ma non ha senso quindi deve essere $C_1 = 0$.
Integriamo di nuovo in ∂r :

$$V_z + \frac{P(0)-P(L)}{4\mu L} r^2 + C_2 = 0$$

Imponiamo $V_z(r=R)=0$:

$$\frac{P(0)-P(L)}{4\mu L} \cdot R^2 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{P(0)-P(L)}{4\mu L} \cdot R^2$$

$$V_z(r) = -\frac{1}{4\mu L}\left(P(0)-P(L)\right) r^2 + \frac{1}{4\mu L}\left(P(0)-P(L)\right) R^2$$

$$V_z(r) = -\frac{1}{4\mu L}\left(P(0)-P(L)\right) \cdot \left(r^2 - R^2\right)$$

2° MODO, approccio meccanico.
consideriamo una sezione del cilindro e uno strato infinitesimo "dr", perché $V_z = V_z(r)$

facciamo $\lim_{dr \to 0}$:

$$\lim_{dr \to 0} [\dots] + r \frac{P_0 - P_L}{L} = 0$$

↓ def. di derivata

$$-\frac{d}{dr}(r \tau_{rz}) + r \frac{P_0 - P_L}{L} = 0$$

Integrando in dr :

$$r \tau_{rz} + r^2 \frac{P_0 - P_L}{2L} + C_1 = 0$$

$$\tau_{rz} + r \frac{P_0 - P_L}{2L} + \frac{C_1}{r} = 0$$

condizione al contorno, il flusso di qdm deve essere finito per $R = 0$. quindi deve essere $C_1 = 0$

$$\tau_{rz} = \frac{P_0 - P_L}{2L} r$$

valida per qualsiasi fluido in un condotto, poi si mette l'equazione costitutiva! Ipotizziamolo Newtoniano:

$$-\mu \frac{dV_z}{dr} = \frac{P_0 - P_L}{L} r$$

2° condizione al contorno $V_z(r=R)=0$

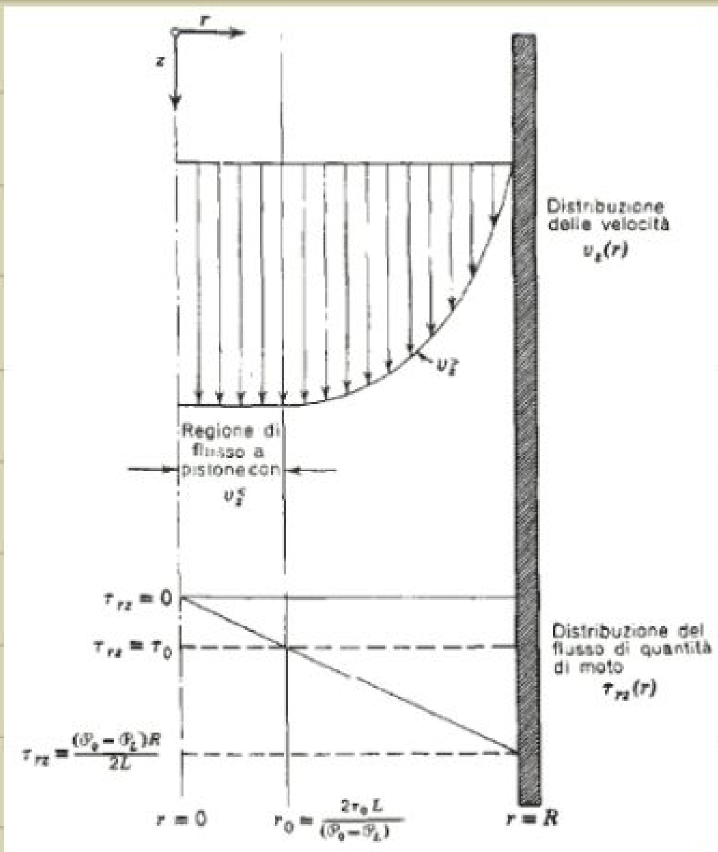
$$C_2 = \frac{P_0-P_L}{4\mu L}R^2 - \frac{\tau_0}{\mu}R$$

$$V_z(r) = \frac{P_0-P_L}{4\mu L}R^2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] - \frac{\tau_0}{\mu}R\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

Legge di Buckingham-Reiner, valida per fluidi Bingham e $r > r_0$

Per $r < r_0$, V = costante, quindi nella legge sopra si pone $r = r_0$:

$$V_z(r) = \frac{P_0-P_L}{4\mu L}R^2\left[1-\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\right] - \frac{\tau_0}{\mu}R\left[1-\left(\frac{r_0}{R}\right)\right]$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 112

Non possiamo usare la solita condizione di contorno perché $r \neq 0$ sempre! Quindi proseguiamo inserendo l'eq. di fluido Newtoniano:

$$\frac{dV_z}{dr} = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} r - \frac{C_1}{\mu r}$$

$$V_z(r) = -\frac{P_0 - P_L}{4\mu L} r^2 - \frac{C_1}{\mu} \ln(r) + C_2$$

Servono 2 c. di contorno, imponiamo

$$V_z(r = kR) = V_z(r = R) = 0$$

Si ottengono le costanti e si risolve:

$$V_z(r) = \frac{P_0 - P_L}{4\mu L} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1-k^2}{\ln(1/k)} \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right]$$

si vede che se $k=0$ diventa il caso cilindrico!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 112

$$\underbrace{\frac{L\omega}{|V|}}_{\text{poniamolo come } \frac{\alpha^2}{Re}} \frac{\Delta V_x'}{\Delta t'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \underbrace{\frac{\mu}{\rho |V| L}}_{1/Re} \left[\frac{\partial^2 V_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V_y'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V_z'}{\partial z'^2} \right]$$

Quindi la riscriviamo come:

$$\frac{\alpha^2}{Re} \frac{\Delta V_x'}{\Delta t'} = -\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 V_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V_y'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 V_z'}{\partial z'^2} \right]$$

l'equazione così ottenuta dipende SOLO, come parametri, da α^2 e Re, due fluidi diversi ma con questi due valori uguali, e nella stessa geometria, avranno la STESSA soluzione dell'equazione del moto!

Questo concetto è detto SIMILARITÀ DINAMICA.

- Cosa descrivono α^2 (numero di WOMERSLEY) e Re (numero di Reynolds)?

$\alpha^2 = \frac{\omega \rho L^2}{\mu} \Rightarrow \frac{\text{F. inerziali transitorie}}{\text{F. viscose}}$ ← non stazionarie

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{P_1 - P_2}{\mu l} = \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t}$$

viscosità cinematica

consideriamo un moto periodico per risolvere l'equazione, ad esempio il moto arterioso (più rilevante); il gradiente di pressione è periodico, e possiamo descriverlo come serie di Fourier:

$$\frac{P_1 - P_2}{l} = A e^{int}$$ (moto periodico con frequenza $f = \frac{n}{2\pi}$)

nel caso del sistema arterioso si avrà una SOMMA di termini simili

Nell'equazione differenziale:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{A}{\mu} e^{int}$$

eq. differenziale del 2° ordine non omogenea

La soluzione, data dalla somma di integrale generale (valore MEDIO) e componente pulsatile (dalla soluzione particolare), è regolata dal numero di WOMERSLEY, che ci dice quanto è predominante il contributo delle forze inerziali transitorie o delle forze viscose.

Dipende quindi dalla lunghezza del condotto e dalla quarta potenza del raggio. Molto importante nella meccanica cardiovascolare, infatti se si ha una STENOSI (restringimento del vaso), per mantenere il flusso servirà una ΔP molto maggiore (aumenta con la quarta potenza) generata dal cuore, quindi il carico su di esso (può portare a infarto).

- Quando è valida la legge di Poiseuille?

Sotto le ipotesi di:

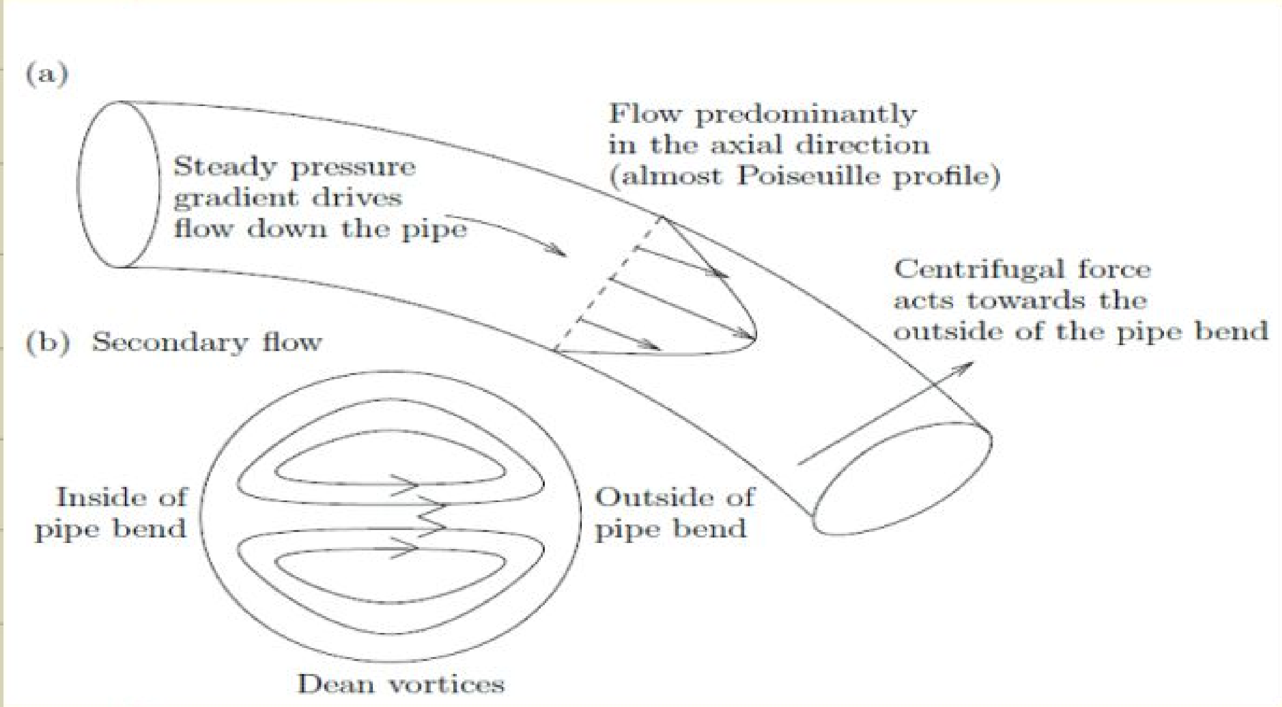
- STAZIONARIETÀ
- FLUIDO NEWTONIANO
- REGIME DI MOTO LAMINARE
- CONDOTTO CILINDRICO, ASSIALSIMMETRICO
- VELOCITÀ NULLA ALLA PARETE
- MOTO SVILUPPATO
- PARETE RIGIDA

Cosa succede se togliamo le ipotesi?

- Se non è assialsimmetrico, cioè la sezione

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 112

in tal modo:



Per caratterizzare l'effetto si usa il NUMERO DI DEAN, adimensionale:

$$De = 4\sqrt{\frac{D}{R_c}} \cdot Re = \sqrt{\frac{\text{Forza centrifuga} \cdot \text{forze inerz. conv.}}{\text{forze viscose}}}$$

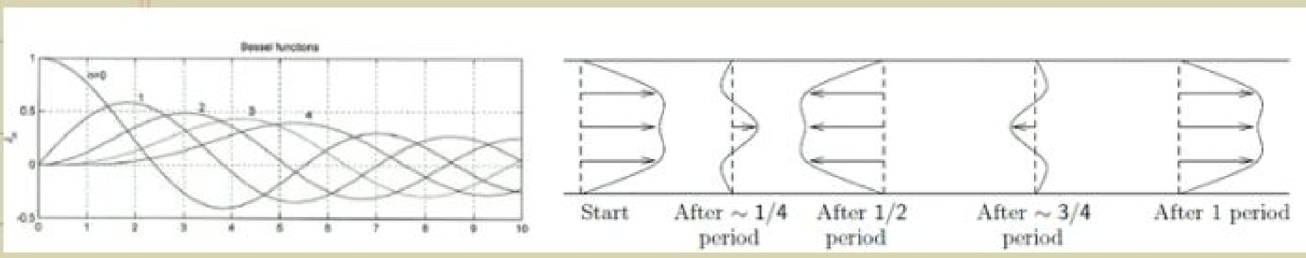
diametro

raggio di curvatura

- Se non c'è stazionarietà, si usa il numero di Womersly, se:

$\alpha^2 < 1$ soluzione quasi stazionaria, la derivata temporale può essere trascurata

$\alpha^2 \gg 1$ soluzione di Womersley



Consideriamo il sangue come un fluido omogeneo, la parte corpuscolata la trascuriamo in vasi di grandi dimensioni (>0,3 mm)

Elemento	Densità (gr/ml)	Numero (#/ml)	Volume (μm^3)	Dimensioni (μm)	Forma
Eritrociti	**1.090**				
maturi		$5x10^6$	87	8.5 x 2	discoidale biconcavo non nucleato
reticolociti		30000	300	8.5 x 5	irregolare - nucleati
Leucociti	**1.070**				Sferoidali con superficie corrugata, nucleati
neutrofili		4200	440	9.4	
esofili		170	440	9.4	
basofili		50	440	9.4	
linfociti		2200	210	7.4	
monociti		460	400	9.5	
Trombociti	**1.030**	300000	15	3	discoidale irregolare

Massa volumica → consideriamo la densità del sangue quindi:

$$\rho_s = (1 - H_t)\rho_p + H_t \rho_{ER} = 1060\ kg/m^3$$

H_t: ematocrito (45% in c. normali); ρ_p: plasma; ρ_{ER}: parte corpuscolata

(ematocrito persona media)

- Viscosità del sangue, si assume sempre un fluido omogeneo, dipende dalla parte corpuscolata:

EINSTEIN, particelle sferiche, c<5%:

$$\mu_p = \mu_F \frac{1}{1-2{,}5c}$$

Particelle sferiche in un fluido

μ_p: viscosità sospensione; μ_F: viscosità fluido; c: concentrazione volumetrica particelle

89

Il comportamento reale del sangue quindi é un aumento della viscositá al diminuire dello shear rate, a causa dei globuli rossi e del fibrinogeno (vedere slide).

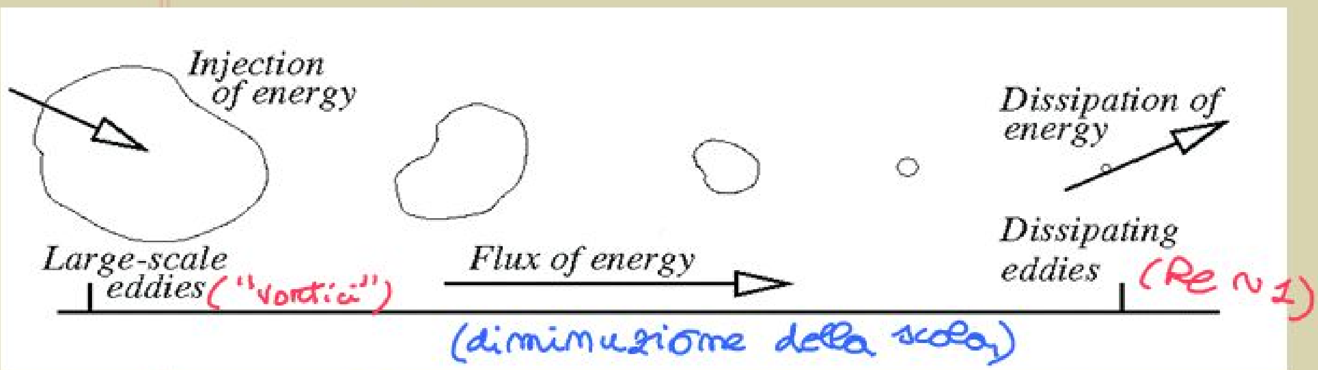
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 112

come moto, il numero di Reynolds vale $Re = \dfrac{\rho V D}{\mu}$ $\rho V D \rightarrow$ forze inerziali, $\mu \rightarrow$ forze viscose

Se Re = 1 le due forze sono comparabili, quando é elevato le forze viscose sono trascurabili e il moto é turbolento, quando Re é basso il moto é laminare (lamine di fluido che scorrono una sull'altra) perché sono considerevoli le forze viscose. Nel moto turbolento nascono componenti di velocità in tutte le direzioni dello spazio, non mono-dimensionale come il moto Poiseulliano laminare.

Le fluttuazioni di velocità indotte nel fluido dal moto turbolento, hanno la capacità di TRASPORTARE una quantità molto rapidamente, anche in assenza di moto medio (diffusione "turbolenta" molto più veloce della diffusione molecolare).

energia é inibito e quindi il moto medio non degenera a tali strutture; quando passa al moto turbolento le forze viscose non frenano più la trasmissione di energia a scala macroscopica e si ha la degenerazione in una cascata di microstrutture (cascata di Kolmogoroff), nelle quali $Re \sim 1$ e si ha dissipazione al loro interno:



La formazione di vortici non é esclusivo del moto turbolento!

- Nel sistema cardiovascolare sano, il moto non é mai turbolento (non si ha una dissipazione eccessiva non necessaria dovuta alla turbolenza) in caso di patologie, ad esempio un'