



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1659A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Sordo

MATERIA: Topografia + Eserc. Prof.Cina

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

TOPOGRAFIA

Topografia → conoscere il territorio attraverso le MISURE
 Un luogo è individuato dalle COORDINATE è quindi necessario stabilire un sistema di riferimento (diversi)

Le coordinate in cui si può esprimere la posizione all'interno di un sistema di riferimento sono molte.

In realtà non misuriamo direttamente le coordinate, misuriamo dei funzionali di coordinate, dai funzionali attraverso delle operazioni di calcolo otteniamo le coordinate.

Le coordinate sono sempre accompagnate di altri numeri che indicano l'ERRORE.

Il GPS presente all'interno dei cellulari ha un errore di qualche metro (5/10 m)

PROCEDURE GENERALI DI RILIEVO

Considerato:

- Sup. terrestre irregolare
- Sup. di riferimento curva
- dimensioni eccedenti quelle umane

Occorre ^① definire un sistema di riferimento solidale alla terra, (fisso nella terra), si origina nel c. di massa della terra, l'asse z è l'asse di rotazione

Sistema di riferimento ECEF detto anche geocentrico

Per tutte le nostre considerazioni, (per le nostre misure) in realtà usiamo un sistema di riferimento in cui sia possibile differenziare ciò che avviene a livello planimetrico e ciò che avviene a livello altimetrico.

^② Si stabilire una superficie di riferimento → GEOIDE e ^③ stabilire sulla superficie di riferimento un sistema di coordinate curvilinee (poiché la superficie è sferica).

^④ Definire la matura delle grandezze da rilevare → rileviamo solo funzionali e non le coordinate → (angoli, distanze ecc...)

^⑤ Definire algoritmi di calcolo FUNZIONALI → → → COORDINATE

^⑥ Definire equazioni della rappresentazione cartografica e delle deformazioni

RETE DINAMICA NAZIONALE (IGN)

- rete di stazioni permanenti GPS o GNSS
- 99 stazioni in Italia
- SR ufficiale del 1/1/2009
- Materializza il SR WGS84

I sistemi di riferimento sono numerosissimi.

In Italia usiamo 3 sistemi di Riferimento nati in epoche diverse.

I sistemi di coordinate sono numerosi.

SUPERFICI DI RIFERIMENTO

① Materializzabile \forall punto

② Matematicamente semplice

- La verticale è materializzabile \forall punto \Rightarrow direzione \vec{v}
 La verticale è definita dalla gravità $\vec{g} = g(x, y, z)$ dove
 la verticale coincide con le linee di forza che sono curve
GOBBE

- Considero la superficie L alle linee di proiezione:

GEOIDE: superficie equipotenziale della forza di gravità passante per il livello medio marino. \Rightarrow TROVO L'EQUAZIONE DEL GEOIDE

g è conservativo \Rightarrow ammette \vec{w} potenziale

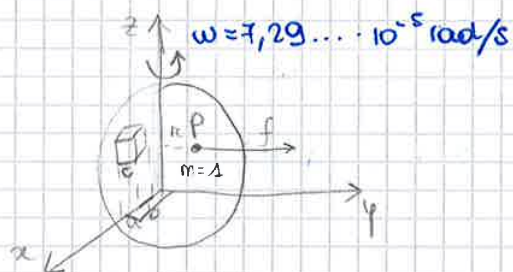
$$dW = \vec{g} \cdot d\vec{P} \quad \vec{g} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right), \quad d\vec{P} = \text{spostamento}$$

$W = \text{costante} \Rightarrow dW = 0 \Rightarrow \vec{g} \perp d\vec{P} \rightarrow$ il campo è \perp alla superficie equipotenziale

- Il potenziale è generato dalla forza di gravità:

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{f}, \quad \begin{array}{l} \vec{f} = \text{forza centrifuga della terra} \\ \vec{F} = \text{forza di attrazione Newtoniana} \end{array}$$

$$W = V + \psi, \quad V, \psi \text{ potenziali di } F \text{ e } f$$



Considero una massa unitaria posta in P

$$f = \frac{mv^2}{r} = \omega^2 r$$

$$v = \omega r$$

\hookrightarrow velocità

$$W = U + T$$

$U =$ potenziale normale

$$\vec{g} = \text{gravità normale} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

• La gravità normale è legata al potenziale anomalo, e si differenzia dalla gravità reale, è come se i gravi cadessero non sulla vert. Considerare \vec{g} significa che stiamo facendo un'approssimazione ma ciò è ammissibile poiché pur facendo le approssimazioni non influenziamo ciò a cui vogliamo arrivare, cioè non cambia ciò a cui vogliamo arrivare.

A meno di termini $\frac{1}{\sigma^4}$ $\sigma \approx 6300 \text{ km}$

Sviluppo in serie:

$$V' = \frac{GM}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2 M} \left(C - \frac{A+B}{2} \right) (1 - 3\text{sen}^2 \psi) + \frac{3}{4\sigma^2} \frac{B-A}{M} \cos^2 \psi \cos 2\lambda \right]$$

$$GM = 3,986 \dots \cdot 10^{14}$$

→ A, B, C MOMENTI D'INERZIA

$\sigma =$ raggio vettore

$\lambda =$ longitudine

$\psi =$ latitudine geocentrica

• È ben noto che la terra è approssimabile con una sup. di rotazione e quindi i momenti di inerzia rispetto ad x e y sono uguali:

$$A = B$$

$$\Rightarrow V' = \frac{GM}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2 M} (C - A)(1 - 3\text{sen}^2 \psi) \right]$$

$$U = \frac{GM}{\sigma} \left[1 + \frac{1}{2\sigma^2 M} (C - A)(1 - 3\text{sen}^2 \psi) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

Se $U = \text{cost}$ ottengo l'equazione di una superficie detta **sferoide** → approssimazione

Lo sferoide è quindi la superficie che si avrebbe se si considerasse la \vec{g} invece di \vec{g} .

A e C sono dei parametri meccanici e voglio passare a dei parametri geometrici.

$$\sigma^2 = a^2 \left(1 - 2\alpha \frac{z^2}{a^2} \right) \quad (2)$$

Ma $c \leq \sigma \leq a$

$$\Rightarrow (2) \approx a^2 \left(1 - 2\alpha \frac{z^2}{a^2} \right)$$

$$\sigma^2 = a^2 (1 - 2\alpha \sin^2 \psi)$$

$$\sigma = a (1 - 2\alpha \sin^2 \psi)^{1/2} \text{ con lo sviluppo binomiale } \sigma = a (1 - \alpha \sin^2 \psi)$$

- Equazione dell'ellissoide equivale a quella dello sferoide a meno di $\frac{1}{2} \alpha \approx 10^{-5}$

PARAMETRI ELLISSOIDI

Si fa riferimento all'ellissoide di BESSEL 1841, che è quello a cui fa riferimento il catasto (è un ellissoide molto piccolo).

Un altro ellissoide di riferimento è quello di HAYFORD in cui

$$a = 6378388 \text{ m}$$

$$\approx 6380000 \text{ m}$$

$$e^2 = 0,006722670022$$

$$\approx 6,72267 \cdot 10^{-3}$$

Oggi tuttavia si usa il sistema di riferimento WGS84 in cui

$$a = 6378137 \text{ m}$$

→ all'incirca 250 m in meno di quello di HAYFORD

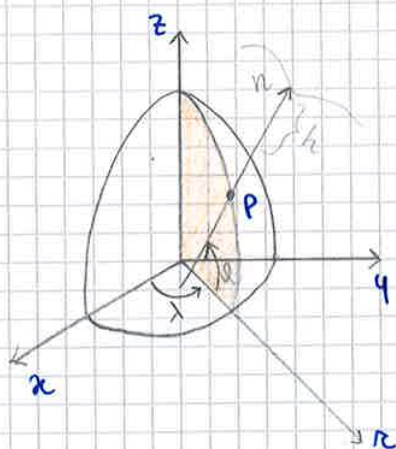
$$e^2 = 0,006894379990$$

$$\approx 6,8943 \cdot 10^{-3}$$

Tale sistema è usato dai GPS

COORDINATE SULL'ELLISSOIDE

Quali sono le coordinate che possiamo definire sull'ellissoide?



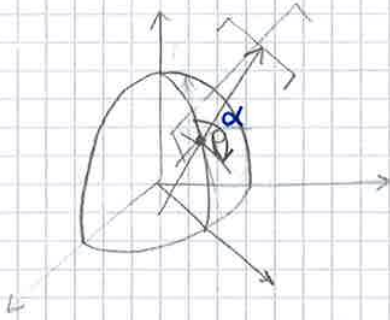
$$(x, y, z) \rightarrow \text{COORDINATE GEOCENTRICHE (COORD. ECEF)}$$

Le coord ecef non sono le più comode da usare in ingegneria, occorre dividere planimetria e altimetria

Traccio la normale alla superficie

Longitudine = λ = angolo di cui devo ruotare il meridiano fondamentale perché mi sovrapponga al meridiano passante per P

RAGGI DI CURVATURA DI SEZIONI NORMALI



Def: **SEZIONE NORMALE**: intersezione dell'ellissoide con un piano che contiene la normale come costola.

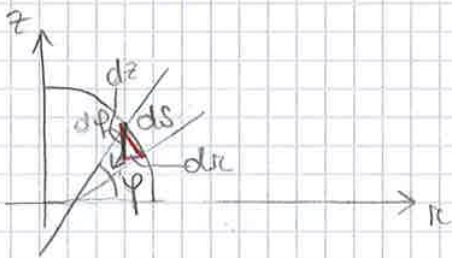
Def: **AZIMUT DELLA SEZIONE NORMALE** α : angolo tra la tg meridiana e la tg alla retta normale.

Ci sono infinite sezioni normali e il Raggio di curvatura varia con continuità tra un massimo (**N-GRAN NORMALE**) e un minimo p (π meridiano)

TEOREMA DI EULERO

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{N}$$

NOTA: un parallelo non è una sezione normale



Considero gli infinitesimi

$$ds = \rho d\varphi \rightarrow \rho = \frac{ds}{d\varphi}$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + dz^2} \rightarrow \text{per gli infinitesimi il triangolo non è più curvo}$$

$$r = \frac{a}{W} \cos \varphi$$

$$z = \frac{a}{W} (1 - e^2) \sin \varphi$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}$$

\Rightarrow raggio di curvatura della sez. normale minimo

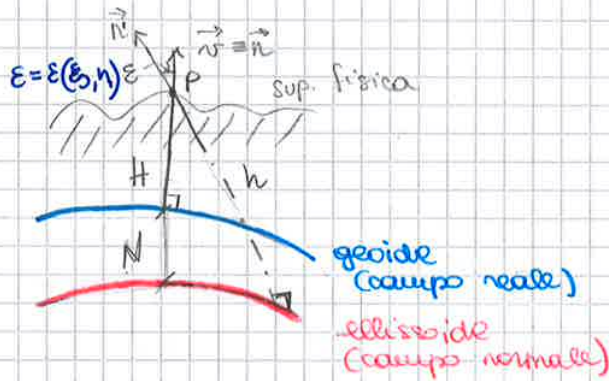
Le sezioni con R_{minimo} p e R_{max} N sono dette **SEZIONI NORMALI PRINCIPALI**

PROPRIETA'

Le sezioni normali principali sono ortogonali.

(N sezioni con piano che contiene la tg al parallelo e la \vec{n})

RELAZIONE TRA \vec{n} e \vec{v}



ξ = componente meridiana
 η = componente parallela

ϵ = deviazione dalla verticale

COORDINATE GEODETICHE o NATURALI o ASTRONOMICHE

λ = longitudine ASTRONOMICA

ϕ = latitudine ASTRONOMICA

H = quota ORTOMETRICA

Trovo le relazioni con ϕ, λ, h

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \phi - \varphi \\ \eta &= (\lambda - \lambda') \cos \varphi \end{aligned} \right\} \text{valori di alcuni secondi} \\ \approx +20'' \div -20''$$

NOTA: posso considerare trascurabili queste deviazioni della normale dalla verticale per misurazioni normali.

$$N = h - H$$

$$h = H + N$$

N = ondulazione del geoido (= scostamento geoido dall'ellissoide)

approssimata ma con ϵ piccolo e valido
 un errore < 1 mm

WGS 84 $N \sim 37$ m $\div 50$
 \rightarrow in Piemonte e valle d'Aosta

• Perché H e non h ?

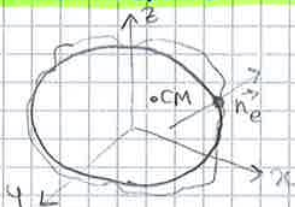
H ha significato "FISICO"

campo reale

$\rightarrow \Delta H \neq \Delta h \rightarrow$ campo normale

ELLISSOIDI $\left\{ \begin{array}{l} \text{ORIENTAMENTO LOCALE} \\ \text{GEOCENTRICI} \end{array} \right.$

ORIENTAMENTO LOCALE



① Normale dell'ellissoide coincide con la normale del geoido: $\vec{n}_e \equiv \vec{v}$

② $N = 0$

Coseni direttori della superficie : $\left(\frac{\partial f}{\partial x} k, \frac{\partial f}{\partial y} k, \frac{\partial f}{\partial z} k \right)$

Coseni direttori della linea : $k' \left(\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2} \right)$

Calcolo il rapporto tra i coseni direttori e li uguaglio

$$\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{\frac{df}{dz}}{\frac{d^2z}{ds^2}}$$

$$s = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

↳ elemento di arco

→ EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA GEODETICA

TEOREMA DI CLAIRAUT

In una geodetica è costante in ogni punto il prodotto tra r e il seno dell'azimut.

↓
raggio del parallelo

r = raggio del parallelo

$$r \sin \alpha = \text{COST}$$

NOTA : andando verso nord il raggio del parallelo diminuisce quindi il $\sin \alpha$ deve aumentare

ESERCIZIO

Calcolare la geodetica uscente da P considerando $\varphi = 40^\circ$ con azimut $\alpha = 40^\circ$. Calcolare l'azimut della geodetica $\varphi' = 41^\circ$ $\varphi'' = 42^\circ \rightarrow \alpha' = ?$ $\alpha'' = ?$

Usiamo l'ellissoide di HAYFORD $a = 6378388$ $e^2 = 0,0067226700$

$$r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

W

PUNTO	W	r
P = $\varphi = 40^\circ$	0,998610211	4892928,82
P' = $\varphi = 41^\circ$	0,998552188	4820810,16
P'' = $\varphi = 42^\circ$	0,998493875	4747215,93

Calcolo la COST di CLAIRAUT in P

$$r \sin \alpha = 4892928,82 \sin 40^\circ = 3145114,02$$

$$\alpha' = \arcsen \frac{C. CLAIRAUT}{r'} = 40^\circ,72307094 \approx 40^\circ 43' 23,06''$$

NOTA: Quindi ai poli le differenze tra geodetiche e sezioni normali sono nulle cioè l'ellissoide si comporta come una sfera.

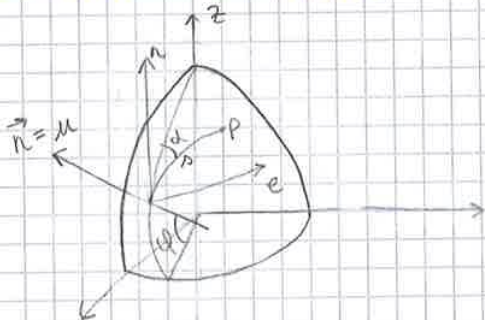
Per $S = 1000 \text{ km} \rightarrow s' - s \approx 1 \text{ cm} \rightarrow \frac{s' - s}{s} \approx 10^{-8}$

Per $S = 100 \text{ km} \rightarrow A - \alpha \approx 0,01'' \rightarrow \text{se } \varphi = 45^\circ$

Precisioni $\left\{ \begin{array}{l} \text{DISTANZE (EDM)} \sim 10^{-6} \text{ (1mm/km)} \\ \text{ANGOLI} \sim 0,1'' \end{array} \right.$

NOTA: questi errori sono trascurabili, sono errori di 2 ordini di grandezza ma noi stiamo considerando la geodesia operativa quindi non riusciamo a misurare grandi distanze (quelle in cui gli errori diventano apprezzabili).

TERNA EULERIANA (SR LOCALE)



e, n, u
 $P(s, \alpha)$
 $P(e, n, u)$

$\alpha = \text{azimut sezione normale}$

SVILUPPI DI PUISEUX - WEINGARTEN arrestati al 2° ordine

$$e = s \sin \alpha \left\{ 1 - \frac{s^2}{6pN} \left(1 - \frac{e^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) \right\}$$

$$n = s \cos \alpha \left\{ 1 - \frac{s^2}{6pN} \left(1 + \frac{e^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}{1 - e^2} \right) \right\}$$

$$u = -\frac{s^2}{2R_\alpha}$$

Sulla sfera $e^2 = 0 \rightarrow R_\alpha = \sqrt{pN}$

$$e_s = s \sin \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6pN} \right)$$

$$u_s = -\frac{s^2}{2\sqrt{pN}}$$

$$n_s = s \cos \alpha \left(1 - \frac{s^2}{6pN} \right)$$

e, n, u in funzione di α e s (coord geodetiche polari)

s [km]	$ z_s - z $
1000	1,3 m
50	0,33 m
20	5,4 cm
1	0,13 mm

livellazione trigonometrica
 ⇒ campo geodetico in
 altimetria estensione < 20 km

Supponiamo di sostituire alla sfera locale un piano tg in un punto.

$$x_{\text{piano}} = s \sin \alpha \quad |\Delta x| = |x_p - x_{sf}| = \frac{s^3}{6\rho N} \sin \alpha$$

$$y_p = s \cos \alpha \quad |\Delta y| = |y_p - y_{sf}| = \frac{s^3}{6\rho N} \cos \alpha$$

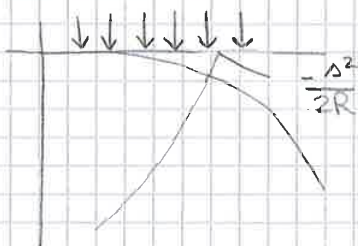
$$z_p = 0 \quad \Delta z = |z_p - z_{sf}| = +\frac{s^2}{2\rho N}$$

$$\Delta x_{\text{max}} = \Delta y_{\text{max}} = \frac{s^3}{6\rho N}$$

s [km]	$\frac{s^3}{6\rho N} = \Delta x$	$\frac{\Delta z}{s}$
50	0,51 m	10^{-5}
20	3,3 cm	$1,6 \cdot 10^{-6}$
15	1,4 cm	10^{-6}
10	4 mm	10^{-7}

In $s \sim 15$ km → un campo topografico piano → usiamo un piano locale tg in P al posto della sfera locale

Campo topografico per altimetrie



s [km]	$\Delta z = -\frac{s^2}{2R}$
10	-7,8 m
5	-2 m
1	-8 cm
100 m	-0,8 mm

TEOREMA DEI SENI

$$\frac{\Delta}{\sin(90-\epsilon)} = \frac{x}{\sin(\alpha-\epsilon)} = \frac{y}{\sin(90-(\alpha-2\epsilon))}$$

$$\frac{\Delta}{\cos\epsilon} = \frac{x}{\sin(\alpha-\epsilon)} = \frac{y}{\cos(\alpha-2\epsilon)}$$

ϵ piccolo $\rightarrow \cos\epsilon \sim 1$

$$x = \Delta \sin(\alpha - \epsilon)$$

$$y = \Delta \cos(\alpha - 2\epsilon)$$

POLARI \rightarrow RETTANGOLARI

$$x = \Delta \sin\alpha \cos\epsilon - \Delta \cos\alpha \sin\epsilon$$

$$y = \Delta \cos\alpha \cos 2\epsilon + \Delta \sin\alpha \sin 2\epsilon$$

y se ϵ è piccolo $\sin\epsilon \sim \epsilon$

x se ϵ è piccolo $\sin 2\epsilon \sim 2\epsilon$

$$\begin{cases} \Delta \sin\alpha = X + \epsilon Y \\ \Delta \cos\alpha = Y - 2\epsilon X \end{cases}$$

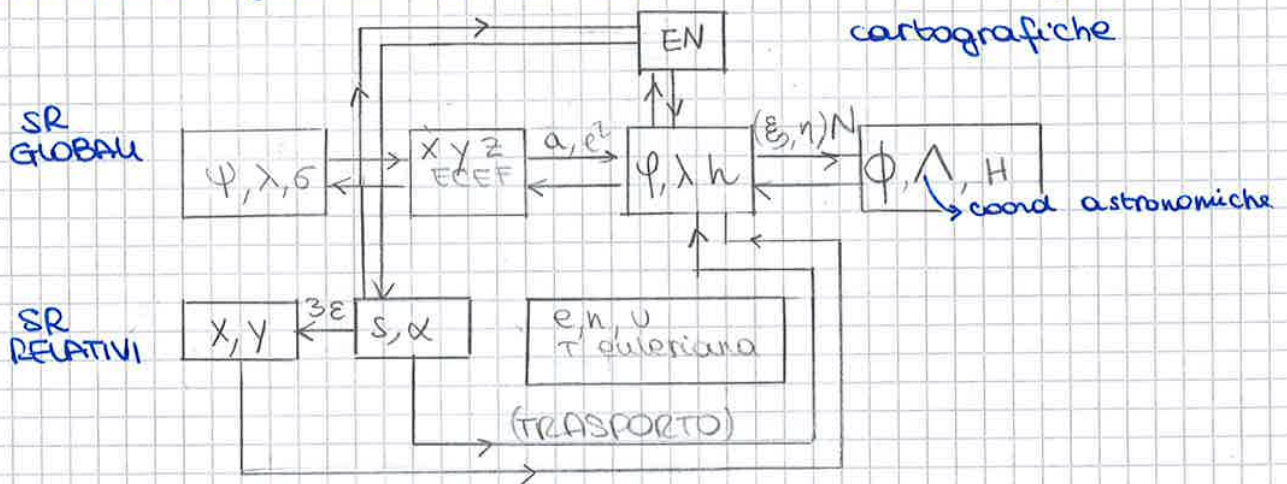
Per ricavare Δ elevo al quadrato e sommo

$$\Delta = \sqrt{(X + \epsilon Y)^2 + (Y - 2\epsilon X)^2}$$

$$\alpha = \arctg \frac{X + \epsilon Y}{Y - 2\epsilon X}$$

RETTANGOLARI \rightarrow POLARI

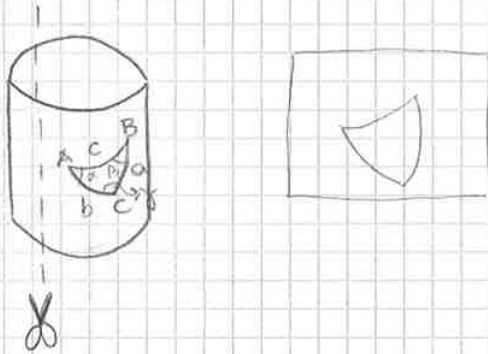
Δ e α sono dette coordinate di **CASSINI - SOLDNER** o coordinate catastali (In Italia il 90% del catasto usa queste coord.)



CARTOGRAFIA

Tutto ciò che abbiamo detto finora vale solo se ci basiamo su una superficie di riferimento come l'ellissoide.

Se avessimo, per esempio, una superficie cilindrica?



Il triangolo mantiene le proporzioni
 $(\alpha, \beta, \gamma, a, b, c = cost)$

E così accadrebbe anche per un cono e per tutte le superfici a

CURVATURA SEMPLICE

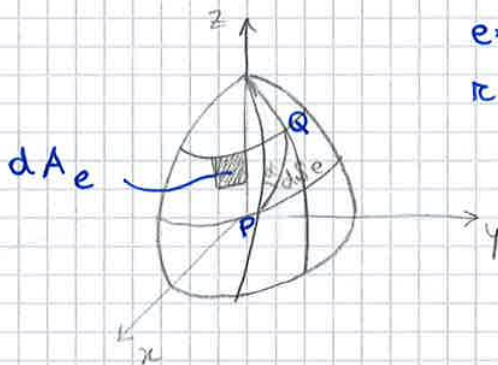
in esse tutto ciò che è stato detto finora si può omettere

Noi, però, facciamo riferimento ad una superficie a doppia curvatura sulla quale:

- 1 - la rappresentazione su un piano è "deformata";
- 2 - ∞ modi di deformare;
- 3 - deformazioni limitate
- 4 - deformazione che varia da punto a punto \Rightarrow la stessa figura in due posizioni diverse è deformata diversamente
- 5 - rappresentazione:
 - analitica
 - geometrica

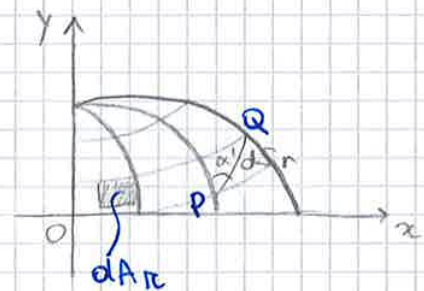
poi si applica il fattore di

scala $\frac{1}{n} \rightarrow$ di quanto ho ridotto



e = ellissoide

r = rappresentazione



TRASFORMATA DI GEODETICA

* modulo di

DEFORMAZIONE LINEARE

* Non esiste una corrispondenza tra carta e realtà per quanto riguarda la lunghezza

$$\Rightarrow m = \frac{ds_r}{ds_e} \rightarrow m = 1 \Rightarrow \text{carta equidistante}$$

* non esiste! non è possibile ricavarla per lo meno non su tutto il piano della rappresentazione

Useremo la proiezione cilindrica inversa come approccio di rappresentazione topografica ≠ rappresentazioni secanti → servono per far ripartire le deformazioni



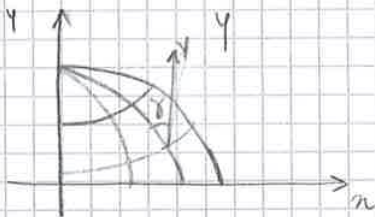
2) Moduli & deformazioni

$$m = f(\varphi, \lambda)$$

$$m = f(x, y)$$

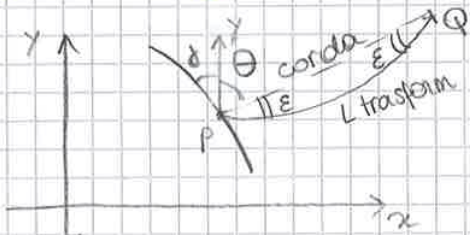
3) Trasformate di paralleli & meridiani → reticolato geografico

4) Geometria della trasformata di geodetica



f = convergenza della trasformata di meridiano

Trasformata geodetica



la lunghezza tra P e Q è quella della corda

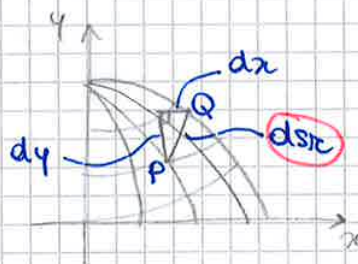
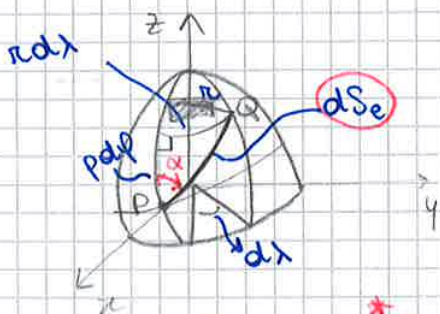
$$d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{x_Q - x_P}{y_Q - y_P}\right)$$

NOTA: in generale la geodetica sulla carta non è mai una retta!

MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE

Può raggiungere valori fino a ± 40 cm/km (piuttosto grande)



* Poiché $x = x(\varphi, \lambda)$
 $dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda$

$$(ds_{ic})^2 = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \right]}_e d\varphi^2 + \underbrace{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \right]}_f d\lambda^2 + \underbrace{2 \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right]}_f d\varphi d\lambda$$

carta conforme $\rightarrow f=0$

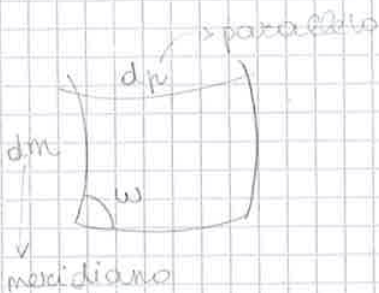
$$\frac{\rho}{r} \sqrt{g_e} = 1$$

$$g = \frac{r^2}{\rho^2} e$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \right] = 0 \quad \rightarrow \text{eq. carta conforme}$$

MODULO DI DEFORMAZIONE AREALE

$$m_A = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e}$$

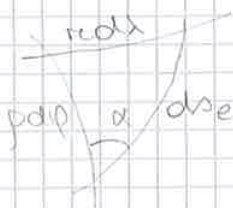


$$d\sigma_e = \rho d\varphi r d\lambda$$

$$d\sigma_r = dp dm \sin w = r d\lambda \sqrt{g^*} \rho d\varphi \sqrt{e^*} \sin w$$

$$m_A = \frac{d\sigma_r}{d\sigma_e} = \frac{\rho d\varphi r d\lambda \sqrt{g^*} e^* \sin w}{\rho d\varphi r d\lambda} = \sqrt{g^*} e^* \sin w$$

EQUAZIONI CARATTERISTICHE CONFORMI



$$ds_e^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2$$

latitudine ridotta u

$$r du = \rho d\varphi$$

$$\rightarrow \frac{d\varphi}{du} = \frac{r}{\rho}$$

È conveniente usare la latitudine ridotta poiché posso scrivere ds_e^2 in funzione di r grazie alla latitudine ridotta.

$$ds_e^2 = r^2 du^2 + r^2 d\lambda^2 = r^2 (du^2 + d\lambda^2)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\rho}{r} \frac{\partial y}{\partial u}$$

\rightarrow sostituiamo nell'eq. della carta conforme e otteniamo

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = \frac{r^2}{\rho^2} \frac{\rho^2}{r^2} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \right]$$

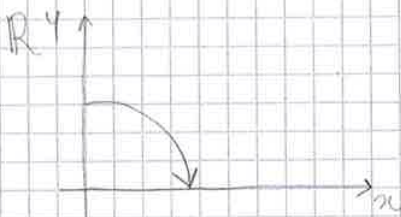
CARTA DI GAUSS:

Un meridiano si sviluppa in tutta la sua lunghezza senza deformazioni. Questo meridiano sarà l'asse y .

$$y(\lambda=0) = f(u) = \int p d\varphi = \int r du$$

$$f'(u) = \frac{d}{du} \int r du = r = N \cos \varphi = \frac{a \cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$f''(u) = \frac{dr}{du} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{du} = \frac{r}{\rho} \frac{dr}{d\varphi} = -r \sin \varphi$$



$$\begin{aligned} i^2 &= -1 & i^3 &= -i & i^4 &= 1 & i^5 &= i \\ i^6 &= -1 & i^7 &= -i & i^8 &= 1 & \dots & \end{aligned}$$

$$y = f(u) - \frac{f''}{2} \lambda^2 + \frac{f^{IV}}{4!} \lambda^4 \dots \rightarrow \text{reali}$$

$$x = f'(u) \lambda - \frac{f'''}{3!} \lambda^3 + \frac{f^{V}}{5!} \lambda^5 - \frac{f^{VII}}{7!} \lambda^7 \dots \rightarrow \text{immaginarie}$$

$$y = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{lunghezza} \\ \text{del} \\ \text{meridiano} \\ \text{(da tabella)}}}{l \varphi} + \frac{\lambda^2}{2} N \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\lambda^4}{24} N \sin \varphi \cos^3 \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots$$

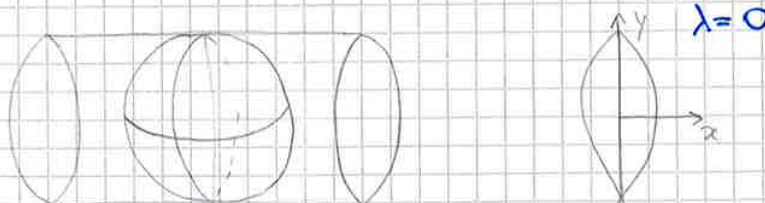
dove $t = \operatorname{tg} \varphi$ $\eta^2 = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi$

$$x = \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^5}{120} N \cos^5 \varphi$$

Queste approssimazioni arrivano ad una precisione centimetrica

Consideriamo un'analogia con la carta di Gauss

la carta di GAUSS è ben approssimata dalla proiezione cilindrica trasversale



- 1 m è pari a $\frac{1}{40 \text{ ml}}$ parte di un meridiano

⇒ meridiano = 40.000.000 m

- All'equatore un fuso di 6° corrisponde a 300 km per parte

- Consideriamo il luogo baricentrico dell'Italia → Roma $\varphi \approx 40^\circ$

trasfermo i gradi in radianti per avere la lunghezza

$$m = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3^\circ}{180} \pi \right)^2 \cos^2 40 = 1,0008$$

All'estremità del fuso $m: + 0,8\%$ che corrisponde ad una deformazione di
 80 cm / 1 km
 8 m / 10 km

- Poiché i fusi hanno ampiezza 6° servono 60 fusi di rappresentazione della terra ciò corrisponde ad avere più cilindri concentrici → una POCILINDRICA

L'Italia occupa 2 fusi (e parzialmente un 3° fuso)

* m in coordinate geografiche

$$m = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \cos^2 \varphi$$

* m in coordinate cartografiche

$$m = 1 + \frac{x^2}{2\rho N}$$

Puntuale valido per ~ 10 km

* m per elementi finiti

$$m = 1 + \frac{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}{6\rho_m N_m}$$

Valido fino a 20 km



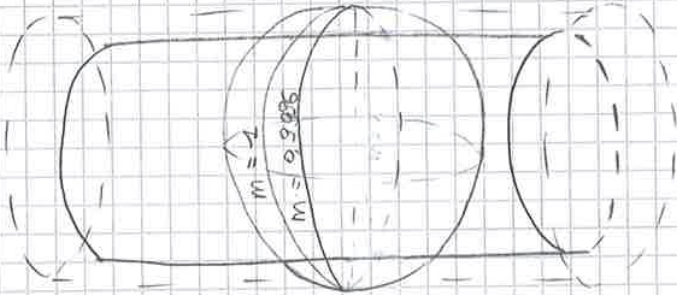
dove $\rho_m N_m$ = calcolati nel punto medio

$$\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

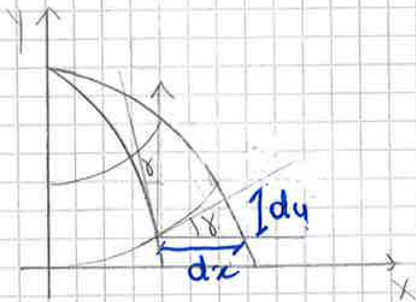
Valido fino a 100 km

ANALOGIA CON CILINDRO TANGENTE

Se considero il FATTORE DI CONTRAZIONE ANALOGIA CON CILINDRO SECANTE (stiamo considerando un cilindro un po' più piccolo)



TRASFORMATE DI MERIDIANI E PARALLELI SULLA CARTA DI GAUSS



γ = convergenza della trasformata del meridiano

$$\text{tg } \gamma = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\lambda} d\lambda}{\frac{dx}{d\lambda} d\lambda}$$

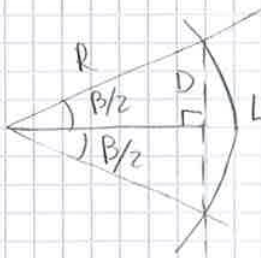
$$\left. \begin{aligned} x &= x(\varphi, \lambda) \\ y &= y(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} \text{eq. carta di Gauss}$$

$$\gamma = \lambda \frac{\text{sen } \varphi}{m c} \left[1 + \frac{1}{3} \lambda^2 \frac{\text{cos}^2 \varphi}{m c} (1 + 3 e' \text{cos}^2 \varphi) \right] + \dots \rightarrow \text{termini trascurabili}$$

dove $e' = \frac{a^2 - c^2}{c^2}$

$$x = r \lambda \rightarrow \lambda = \frac{x}{r} = \frac{x}{N \text{cos } \varphi}$$

$$\gamma = \frac{x}{N} \text{tg } \varphi \left[1 + \frac{1}{3} \frac{x^2}{N^2} \frac{\text{cos}^2 \varphi}{\text{cos}^2 \varphi} (1 + 3 e' \text{cos}^2 \varphi) \right]$$



$L =$ lungh. trasformate di geodetica

$D =$ lungh. corda

$$L = R\beta$$

$$D = 2R \sin \beta/2$$

Per β piccolo \Rightarrow posso fare lo sviluppo in serie di D

$$D = 2R \left(\frac{\beta}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\beta}{2} \right)^3 \right) = R\beta - R \frac{\beta^3}{24}$$

$$L - D = R\beta - \left(R\beta - R \frac{\beta^3}{24} \right) = \frac{R\beta^3}{24} \rightarrow \beta = \frac{L}{R}, \quad c^2 = \frac{1}{R^2}$$

$$\Rightarrow L - D = \frac{RL^3}{R^3 \cdot 24} = \frac{c^2 L^3}{24} = L - D$$

L	$\Delta = L - D$	Δ/L
100 km	2,5 mm	$2,5 \cdot 10^{-8}$
500 km	31 cm	$0,6 \cdot 10^{-6}$
1000 km	2,5 m	$2,5 \cdot 10^{-6}$

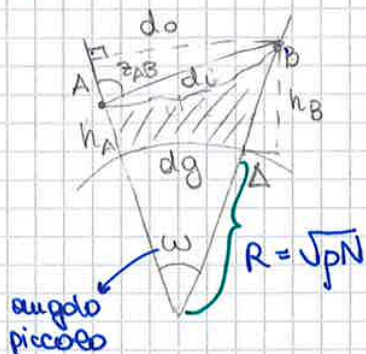
Errore/differenza influente solo per distanze di ~ 1000 km ma di solito non si misurano 1000 km con un distanziometro



Misuriamo la corda e la prendiamo per buona

NOTA: ϵ valore piccolo ma sensibile per applicazioni di precisione

RIDUZIONE DELLA DISTANZA alla sup di riferimento (ellissoide)



$d_i =$ distanza inclinata

$d_i \rightarrow d_o \rightarrow d_g \rightarrow d_{carte}$

1) $d_o = d_i \sin(z_{AB})$

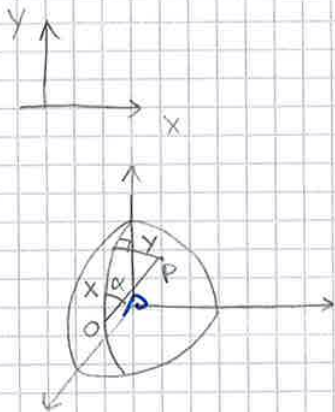
2) da d_o a d_g sulla sup di riferimento

$$d_g = R w \approx R \sin w = R \frac{d_o}{R + h_B} = \frac{R d_o}{R(1 + \frac{h_B}{R})} = d_o \left(1 + \frac{h_B}{R} \right)^{-1} = d_o \left(1 - \frac{h_B}{R} \right)$$

TIPI DI CARTOGRAFIA

CARTOGRAFIA CATASTALE (coordinate di cassini - Soldner)

→ Fa riferimento a Bessel 1841
(Scala 1:500 ÷ 1:4000)



coord. geodetiche rettangolari

$$\begin{cases} X = \rho \sin(\alpha - \epsilon) \\ Y = \rho \cos(\alpha - 2\epsilon) \end{cases}$$

$$3\epsilon = \frac{\text{Sup}}{R^2}$$

$\epsilon =$ eccesso sferico

Catasto nato inizialmente per uni locali, piccoli.

Nel catasto abbiamo 800 PICCOLE ORIGINI → estensioni di pochi km

35 GRANDI ORIGINI → estensioni regionali anche di 100 km

(WGS 84)

C. Soldner → AFILATTICA

$$m_e = 1 + \frac{X^2}{2\rho N} \cos^2 \alpha$$

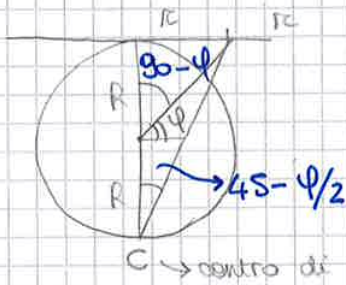
$$m_A = 1 + \frac{X^2}{2\rho N}$$

35 zone ciascuna con un'origine tale divisione è necessaria poiché i valori di deformazione angolare e lineare devono stare entro certi limiti ⇒ si può stare solo a certe distanze dalle origini

$$\left. \begin{aligned} \max m_e &\approx 6 \text{ cm/km} \\ \max \delta &= 6'' \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{toleranze catastali}$$

OK

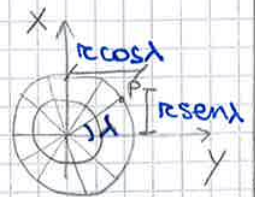
PROIEZIONE STEREOGRAFICA POLARE (conforme)



$$r = 2R \operatorname{tg} (45 - \frac{\varphi}{2})$$

$$x = 2R \operatorname{tg} (45 - \frac{\varphi}{2}) \sin \lambda$$

$$y = 2R \operatorname{tg} (45 - \frac{\varphi}{2}) \cos \lambda$$



$$x^2 + y^2 = \left(2R \operatorname{tg} \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \right)^2 (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda)$$

Se $\varphi = \text{cost}$ (parallelo) ⇒ $x^2 + y^2 = \text{cost}$ (circonferenza)

va bene per le calotte polari

I punti dell'ellissoide sono proiettati su un piano tg al polo con centro di proiezione sull'altro polo

PARALLELI → circonf. concentriche MERIDIANI → rette uscenti dall'origine

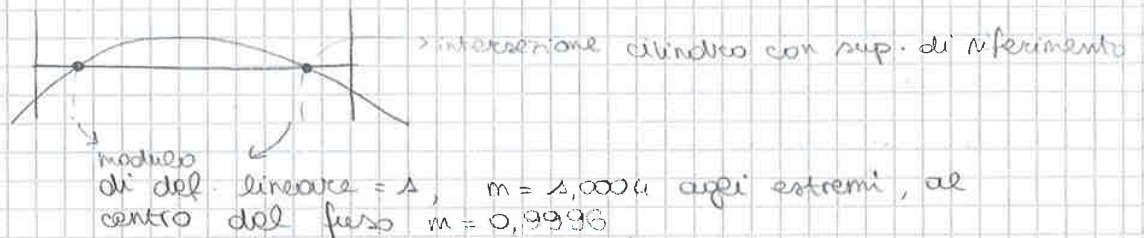
• Per la carta di Gauss dobbiamo considerare tanti cilindri tg a tanti meridiani → **FOUCILINDRICA**

60 FUSI numerati in senso antiorario a partire dall'autimerid. di Greenwich

La trasformato del meridiano fondamentale prende il nome di Y o coordinata **NORD**, la trasformato dell'equatore prende il nome di X o coord. **EST**.

Ogni fuso ha il suo sistema di riferimento centrato nel centro del fuso ⇒ 60 sistemi di rif. → **SISTEMA UTM**

ANALOGIA : PROIEZIONE CILINDRICA INVERSA



CARTOGRAFIA ITALIANA

Si basa sull'ellissoide geocentrico WGS84

2 fusi UTM

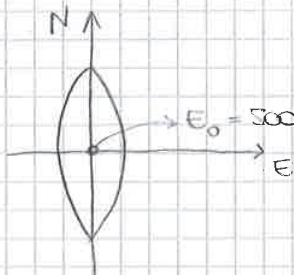
32) $\lambda_c = 9^\circ$ $\Delta\lambda = 6 - 12^\circ$ + FUSO 34) PARZIALE
 33) $\lambda_c = 15^\circ$ $\Delta\lambda = 12 - 18^\circ$

NOTA: L'Italia è quasi perfettamente quadrata di lato un po' maggiore di 11°

Convenzioni :

① Piano contratto 0,9996

② false origini → (le latitudini hanno un'origine a 500 km e le longitudini hanno un'origine sul meridiano fondamentale)



→ origine traslata di 500 km

↳ così non uso le coord. relative

Reticolato chilometrico di 100 km di lato

L'Italia è divisa in 20 zone → zone ogni 8° di parallelo

Dopo l'IGM95 si è creato ETRF2000 che si materializza nell' RDN (Rete dinamica nazionale), 100 stazioni permanenti
 Oggi si usa ETRF 2000 ma anch'esso è stato realizzato dall' IGM

NOTA: RDN precisione di mm \neq IGM95 precisione di cm

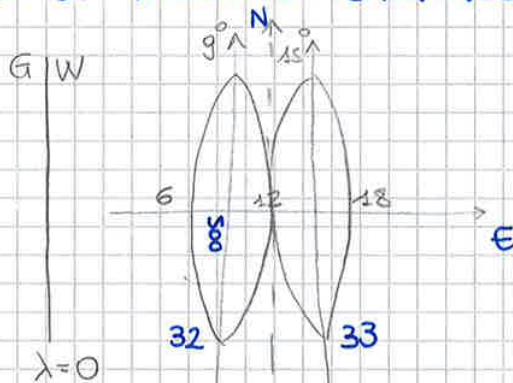
NOTA: ITRF e ETRF coincidono nell' anno '89 \rightarrow ITRF89 = ETRF89
 \Rightarrow ITRS 89 = EUREF89

NOTA: RDN materializza WGS84 ETRF2000 in modo "dinamico", continua acquisizione e ricalcolo.

In Italia esistono **5 enti cartografici:**

- IGM (Istituto geografico militare \rightarrow carta di Gauss)
- IIM (Istituto idrografico militare \rightarrow rappresentazione di Mercatore)
- Servizio Geologico (ISPRA \rightarrow carte tematiche)
- CIGA (centro di informazioni geotopografiche dell'Aviazione)
- Catasto

L' IGM usa il sistema UTM-WGS84 - ETRF2000



- Est è fisso e $E_0 = 500$ km valido per tutti i fusi
- Ogni fuso ha un suo asse NORD.

NOTA: quando ci viene dato un valore di longitudine rispetto al meridiano fondamentale dobbiamo sempre riferirlo al meridiano centrale del fuso.

Es. $\lambda = 8^\circ$ E GW $\rightarrow \lambda_c = 8^\circ - 9^\circ = -1^\circ$

$E = 475$ km Fuso 32 $\rightarrow E_c = -25$ km ($475 - 500$)

Quindi

$E = x \cdot 0,9996 + E_0$

$N = y \cdot 0,9996 + N_0$

$E_0 = 500$ km

$N_0 = 0$ km per emisf. NORD

$N_0 = 10.000$ km " " SUD

CLASSIFICAZIONE DELLE CARTE in base alla SCALA $\frac{1}{n}$

Carta a grande scala : piccolo denominatore
piccola scala : grande denominatore

* geografiche (1 : 1 000 000)

* corografiche (1 : 100 000 ÷ 1 : 1 000 000)

* topografiche :

piccola scala (1 : 50 000 ÷ 1 : 100 000)

media " (1 : 10 000 ÷ 1 : 25 000)

grande " (1 : 1 000 ÷ 1 : 5 000)

grandissima scala (1 : 200 ÷ 1 : 500)

Comuni : cartografia 1 : 1 000

Province : " 1 : 5 000

Regioni : " 1 : 10 000 - CTR

NOTA : si usa scala 1 : 500 per, ad esempio, un tetto mentre scala 1 : 200 o 1 : 100 si usa per le opere d'arte

- Non si parte da una grandissima scala e poi si sale poiché la scala influisce su: precisione, grado di dettaglio, segni convenzionali che per una scala media o piccola vengono usati mentre su grande scala arco' meno segni convenzionali e più rappresentazione dei dettagli così come sono. La scala influisce anche sull'equidistanza delle curve di livello

RAPPRESENTARE L'ALTIMETRIA

① con piani quotati (sempre QUOTA ORTOMETRICA)

Posso discretizzare il terreno con dei triangoli e suppongo che all'interno di questi triangoli ci sia un piano, il terreno assume una forma poliedrica.

Tuttavia tale divisione in triangoli non è univoca quindi risulta più utile la rappresentazione del piano curve di livello

② Piano c. di livello :

Le curve di livello si ottengono interpolando i punti quotati e congiungendo tutti i punti alla stessa quota → oggi fatta

Divido il foglio in 4 quadranti 1:50'000

4	1
3	2

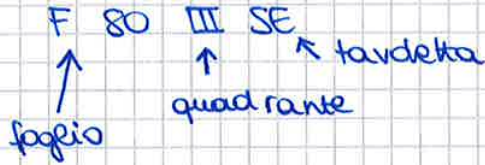
ogni quadrante risulta ancora diviso in 4

tavolette tracciando il meridiano centrale del quadrante

Tavolette: 1:25000 → $5' \times 7' 30''$
 $\Delta\varphi \quad \Delta\lambda$

NO	NE
SO	SE

*Indicazione della tavoletta esempio:



• Nuova carta IGM 1:50'000 → taglio $\Delta\varphi = 12' \times \Delta\lambda = 20'$

Si traccia: parallelo e meridiano centrale della carta 1:50'000

e ottengo 4 sezioni 1:25000 ^{-1:10'000} all'interno di ogni sezione

traccio parallelo e meridiano e ottengo gli elementi 1:5'000

e poi le mappe 1:2000

DATUM ROMA 40 → Hayford 1940

origine longitudini: Roma MM

2 fusi: $\begin{matrix} O & 1500 \text{ km} \\ E & 2520 \text{ km} \end{matrix}$ } fase origini per convenzione (traslazioni asse NORD)

C'è anche un sistema ED50: su cui si basa il vecchio

taglio dei fogli.

Hayford 1940

TRASFORMAZIONE CONTINUA - PROCEDURA VERTO

è un programma inform: interpolatore

per determinare le coordinate nei vari SR

forniti dall'IGM

Mette in relazione i SR ROMA 40 ED50 e WGS84

I grigliati di isovariazione per ogni foglio 1:50'000 relativi a:

- latitudine
- longitudine
- **Ondulazione del geoide**

↳ su cui si basa la trasformazione continua

Carta al tratto → si scannerizza per rasterizzarla e poi la si digitalizza.

Nelle carte esistono 3 NORD:
 • NORD GEOGRAFICO N
 • NORD RETICOLATO N_r
 • NORD MAGNETICO N_m → da bussola

ESERCIZI

- Stazione permanente GNSS - Poli TO

WGS84 - ETRF2000

$$\begin{array}{l|l} \varphi = 45^{\circ} 3' 48,1186'' & N = 4990861,323 \text{ m} \\ \lambda = 7^{\circ} 39' 40,6046'' & E = 394604,682 \text{ m} \\ h = 310,764 \text{ m} & \end{array}$$

$d_0 = 2000 \text{ m} \rightarrow$ piano di Gauss $\Rightarrow d_c = ?$

Calcolo i raggi di curvatura nell'intorno di questo punto:

$$w = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = 0,998321294$$

la latitudine in sessagesima $le =$

$$p = \frac{a(1-e^2)}{w} = 6367452,77 \text{ m}$$

$$N = \frac{a}{w} = 6388862,02 \text{ m}$$

$$R = \sqrt{pN} = 6378148,41 \text{ m}$$

$$\textcircled{1} m = 0,9996 \left(1 + \frac{(E - 500 \text{ km})^2}{2pN 0,9996^2} \right) = 0,999737 \quad (1)$$

$$E - 500 \text{ km} = -105395,318 \text{ m}$$

$$\textcircled{2} m = 0,9996 \left(1 + \frac{\lambda_c^2}{2} \cos^2 \varphi \right) = 0,999737 \quad (2)$$

$$\lambda_c = \lambda - 90^\circ = -1^\circ,33872094$$

$$\lambda_c = \frac{\lambda_c}{180} \pi$$

$$d_g = d_0 \left(1 - \frac{h}{R} \right) = 2000 \left(1 - \frac{310,764}{6378148,41} \right) = 1999,903 \text{ m}$$

\downarrow
sul
geode

$$d_c = md_g = 1999,377 \text{ m}$$

$$y = \lambda_c \operatorname{sen} \varphi \left[1 + \frac{\lambda^3}{3} \cos^2 \varphi (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) \right] = -1,338721$$

$$\eta = \frac{e^2}{1 - e^2} \cos^2 \varphi$$

$$\varepsilon_{TO} = \frac{(N_{TO} - N_{AV})(2x_{TO} - x_{AV})}{G \rho_m N_m 0,9996^2} = 0,000003914 \text{ rad} \quad (0,81'')$$

↳ proiezione asse-orbitale

$$X = E - 500 \text{ km}$$

$$\alpha_{TO-AV} = \theta + \gamma - \varepsilon = 277,33803$$

$$277^\circ 20' 16,925''$$

Con una precisione maggiore diventano sensibili degli errori che con precisione minore non lo erano (es. dilatazione termica, colpi all'oggetto o allo strumento, non allineamento perfetto del campione...) Questi sono errori accidentali.

• **accidentali**: hanno queste caratteristiche:

- piccoli (sono fluttuazioni piccole)
- \neq segno
- \neq entità

Abbiamo un ordine di priorità di questi errori accidentali detto **PROBABILITÀ** ($0 \div 1$).

Gli errori accidentali hanno la **STABILITÀ STATISTICA**, cioè tendono a disporsi secondo funzioni note o distribuzioni.

PROBABILITÀ

DEFINIZIONE ASSIOMATICA di PROBABILITÀ:

VALORE ARGOMENTALE: misura un attributo della popolazione che considero.

Consideriamo l'insieme S dei risultati di un esperimento.

Considero dei sottoinsiemi di S : $\{A, B, \phi, S\}$

→ La **PROBABILITÀ** è una misura su una famiglia di sottoinsiemi di S :



$$1) p(A) \geq 0$$

$$2) p(\phi) = 0$$

$$3) p(S) = 1$$

$$4) p(A \cup B) = p(A) + p(B) \quad \text{se} \quad A \cap B = \phi$$

Esempio:

lancio una moneta: TESTA / CROCE

$S\{T, C\}$

$$p(T) = 0,5$$

$$p(C) = 0,5 > 0$$

$$p(\phi) = 0$$

$$p(T \cup C) = p(T) + p(C) = 0,5 + 0,5 = 1$$

Possiamo vedere la probabilità anche in un altro modo.

Supponiamo di avere degli eventi, A e B .

Probabilità dell'evento A :
$$p(A) = \frac{n(A)}{n}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \frac{1}{36} \quad (1+3) \\
 & \frac{1}{36} \quad (2+2) \\
 & \frac{1}{36} \quad (3+1)
 \end{aligned}
 \quad n(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Il numero più probabile: 7 poiché ha 6 combinazioni.

VARIABILE CASUALE

È una previsione di come si distribuisce un attributo in una popolazione

VARIABILE STATISTICA

È un censimento (se ho tutta la popolazione accessibile)

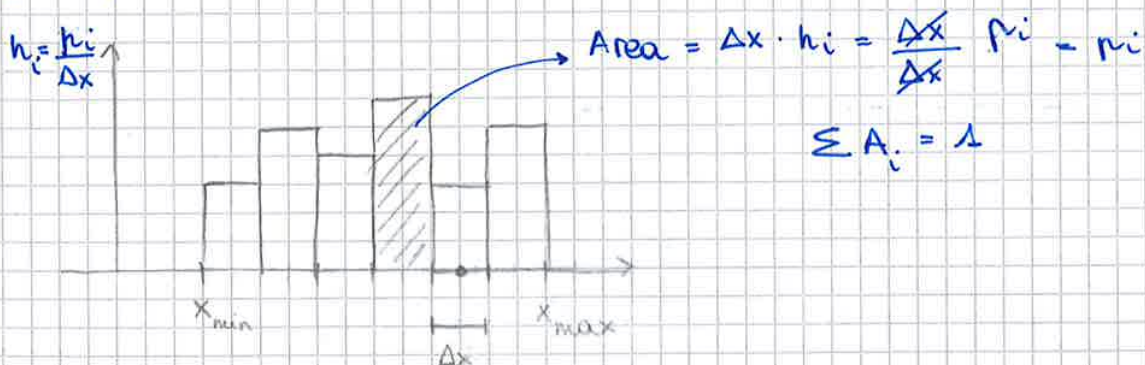
VARIABILE STATISTICA CAMPIONE

Deve tendere al valore della variabile casuale se faccio un certo numero di misure; non ho tutta la popolazione ma solo un campione

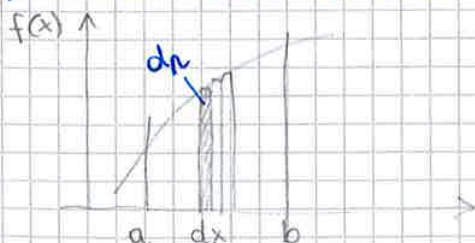
VARIABILE CASUALE 1D

$$X = \begin{cases} X_1, X_2, \dots, X_n \\ p_1, p_2, \dots, p_n \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} p_i \geq 0 \\ \sum_i^n p_i = 1 \end{array} \right.$$

Possiamo dare una rappresentazione grafica attraverso un ISTOGRAMMA



Rappresentazione continua $\Delta x \rightarrow dx$



$$\begin{aligned}
 f(x) &= \text{densità di probabilità} \\
 dp &= f(x) dx
 \end{aligned}$$

$$M(x) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{21}$$

$$m_2(x) = \sum_i^n x_i^2 p_i$$

valore quadratico medio

VARIABILE SCARTO (differenza tra valore osservato e media)

$$v_i = (x_i - m_1(x))$$

$$\rightarrow m_1(v) = \sum_i^n (x_i - m_1(x)) p_i = \underbrace{\sum_i^n x_i p_i}_{m_1(x)} - m_1(x) \sum_i^n p_i = 0$$

⇒ La media è il baricentro della distribuzione dei valori argomentali

$$\sigma^2 = m_2(v) = \sum_i^n (x_i - m_1(x))^2 p_i$$

varianza
(media del quadrato degli scarti)

- varianza bassa ⇒ buona misura
- varianza alta ⇒ cattiva misura

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_i^n (x_i - m_1(x))^2 p_i = \sum_i^n (x_i^2 + m_1(x)^2 - 2x_i m_1(x)) p_i = \\ &= \sum_i^n x_i^2 p_i + m_1(x)^2 \sum_i^n p_i - 2m_1(x) \sum_i^n x_i p_i = \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = m_2(x) + m_1^2(x) \cdot 1 - 2m_1(x) m_1(x) = m_2(x) - m_1(x)^2$$

σ = scarto quadratico medio → dà l'indice della precisione della misura

Dato x si danno $m_1(x) \pm \sigma_x$

DISUGUAGLIANZA DI TCHEBYCHEFF

Calcolare la probabilità dei valori in un intervallo $m-L \div m+L$

$$L = \lambda \sigma$$

$$\sigma^2 = v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + \dots + v_m^2 p_m + \dots + v_n^2 p_n$$

$\xrightarrow{\text{V crescenti}}$

\uparrow
 L

Dimostrazione

$$m_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{f(x) dx}_{dp}$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1(x))^2 f(x) dx$$

Quindi

$$m_1(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f(x) dx = a \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{f(x) dx}_{dp} = a m_1(x) + b$$

Esercizio

x	y = 3x + 2
1	5
3	11
2	8
1	5
3	11
<hr/>	
$m_1(x) = 2$	$\frac{40}{5} = 8 \quad m_1(y)$

Col teorema della media (1° corollario)
 $m_1(y) = 3 \cdot m_1(x) + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

Esercizio

x	y = 3x ² + 2
1	5
3	29
2	14
1	5
3	29
<hr/>	
	$m_1(y) = 16,4$

Col teorema della media (1° corollario)
 $m_1(y) = 3 \cdot m_1(x)^2 + 2 = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14 \neq 16,4$

NOTA: il corollario vale solo se $g(x) = y$ è lineare

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_1(x))^2 p_i = \sum_{i=1}^n (v_i^2) p_i = M(v^2)$$

in n DIMENSIONI → MATRICE di varianza - covarianza C_{xx}

$$C_{xx} = M \left[(x - m_1(x)) (x - m_1(x))^T \right]$$

2D → planimetria

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$C_{xx} = M \left[\begin{pmatrix} x - m_1(x) \\ y - m_1(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x - m_1(x))(y - m_1(y)) \end{pmatrix} \right] =$$

$$= M \begin{bmatrix} (x - m_1(x))^2 & (x - m_1(x))(y - m_1(y)) \\ (x - m_1(x))(y - m_1(y)) & (y - m_1(y))^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

σ_{xy} = COVARIANZA → dice come sono legati x e y

3D

$$C_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} X \rightarrow C_{xx} \\ Y = AX \rightarrow C_{yy} \end{array}$$

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

coeff. di correlazione lineare

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq r \leq 1 \\ r = 0 \text{ corr. no lineare} \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{No } C_{xx} \\ \text{poiché compare} \\ \text{un termine negativo} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{No } C_{xx} \text{ poiché} \\ \text{non è quadrata} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Sì } C_{xx} \\ \text{Simmetrica e i termini sulla diagonale principali} \\ \text{solo sono positivi} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0,5 \\ 0,5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Sì } C_{xx} \text{ e } r_{xy} = \frac{1}{\sqrt{9}\sqrt{4}} = \frac{1}{6} \sim 0 \\ \text{correlazione non lineare o debolmente} \\ \text{lineare} \end{array}$$

$$C_{yy} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}}_{C_{xx}} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (a_{11}\sigma_1^2 + a_{12}\sigma_{12}) & (a_{11}\sigma_{12} + a_{12}\sigma_2^2) \\ (a_{21}\sigma_1^2 + a_{22}\sigma_{12}) & (a_{21}\sigma_{12} + a_{22}\sigma_2^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^2\sigma_1^2 + 2a_{11}a_{12}\sigma_{12} + a_{12}^2\sigma_2^2 & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

CASO 1D lineare

$$\sigma_{y1}^2 = a_{11}^2\sigma_1^2 + a_{12}^2\sigma_2^2 + 2a_{11}a_{12}\sigma_{12}$$

→ La varianza di una somma è la somma delle varianze moltiplicate per il quadrato dei loro coefficienti eventualmente tenendo conto del doppio prodotto se sono correlate (cioè $r \neq 0$)

Esempio

$$d_1 = 100\text{m} \pm 1\text{cm} \quad d_2 = 80\text{m} \pm 1\text{cm} \quad d_3 = 230\text{m} \pm 1\text{cm}$$

Ip. d_1, d_2, d_3 incorrelati
 $d = d_1 + d_2 + d_3$
 → coeff. a_{11}, a_{12}, a_{13}
 quelli di d_1, d_2, d_3

$$d = (100 + 80 + 230)\text{m} = 410\text{m} \quad (\text{per teorema della media})$$

$$\sigma_d^2 = 1^2 \cdot (1\text{cm})^2 + 1^2 \cdot (1\text{cm})^2 + 1^2 \cdot (1\text{cm})^2 = 6\text{cm}^2$$

$$\sigma_d = \sqrt{6} = 2,4\text{cm} \quad d = 410 \pm 2,4\text{cm} \quad \text{scarto quadratico medio}$$

$3\sigma \rightarrow 99\%$ di probabilità che in questo intervallo ci sia il valore teorico $\Rightarrow 410 \pm (3 \cdot 2,4)\text{cm}$

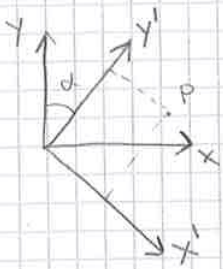
Esempio

$$a = 200\text{m} \pm 4\text{cm} \quad b = 100\text{m} \pm 3\text{cm}$$

$$A = a \cdot b = 20000\text{m}^2$$

↓ **Non è una funzione lineare**
 \Rightarrow deve non rizzarla

CASO 2D : rotazione



$\alpha = 30^\circ$

$X_p = 100 \text{ m} \pm 0,03 \text{ m}$

$Y_p = 200 \text{ m} \pm 0,05 \text{ m}$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30 & \sin 30 \\ -\sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0,5 \\ -0,5 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 186,60 \\ 123,21 \end{pmatrix}$$

$C_{x'x'} = \begin{bmatrix} (3 \text{ cm})^2 & 0 \\ 0 & (5 \text{ cm})^2 \end{bmatrix}$ $C_{xx} = R \cdot C_{x'x'} \cdot R^t$ *matrice di rotazione*

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0,5 \\ -0,5 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 5^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -0,5 \\ 0,5 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -3,9 \\ -3,9 & 21 \end{bmatrix}$$

$X_p = 186,60 \pm \sqrt{13} = 3,6 \text{ cm}$

$Y_p = 123,21 \pm \sqrt{21} = 4,6 \text{ cm}$

x e y sono correlate
(si vede da r)

f(x) funzione densità di probabilità

$\int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = F(b) - F(a)$

F funzione distribuzione

$F' = f(x)$

DISTRIBUZIONE DI GAUSS o "NORMALE"

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$O \rightarrow (O_1, O_2 \dots O_n)$ Serie di osservazioni

Per prima cosa devo normalizzare i valori

$$z_1 = \frac{m + \sigma - m}{\sigma} = 1$$

$$z_1 = \frac{m - \sigma - m}{\sigma} = -1$$

$$z_2 = \frac{m + 2\sigma - m}{\sigma} = 2$$

$$z_2 = \frac{m - 2\sigma - m}{\sigma} = -2$$

$$z_3 = \frac{m + 3\sigma - m}{\sigma} = 3$$

$$z_3 = \frac{m - 3\sigma - m}{\sigma} = -3$$

$$\textcircled{1} \quad P(-1 \leq z \leq 1) = F(1) - F(-1)$$

Da tabella

$$F(1) = 0,34$$

$$F(-1) = -0,34$$

$$\Rightarrow F(1) - F(-1) = 0,34 + 0,34 = 68\%$$

in una distribuzione normale il 68% dei valori cade nell'intervallo $-\sigma + \sigma$ e così via

$$\textcircled{2} \quad P(-2 \leq z \leq 2) = F(2) - F(-2) = 0,477 + 0,477 = 95\%$$

$$\textcircled{3} \quad P(-3 \leq z \leq 3) = F(3) - F(-3) = 0,4987 + 0,4987 = 99,7\%$$

* **NOTA:** ciò è diverso dalla disuguaglianza di Tchebycheff poiché essa è valida per qualunque distribuzione questo invece pone una restrizione forte sulla distribuzione; deve essere una **distribuzione normale**.

NOTA: Se volessimo avere la probabilità del 100% dovremmo considerare l'intervallo $\{-\infty, +\infty\}$

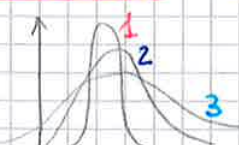
Definiamo

• **RISOLUZIONE:** intervallo minimo di graduazione

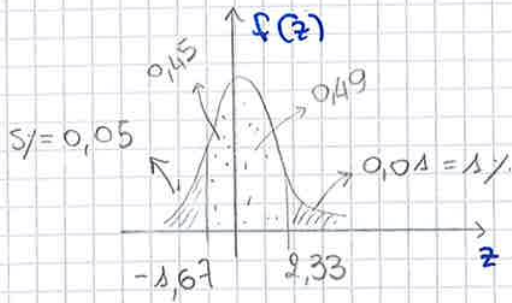
ES.: righello \rightarrow risoluzione 1mm

livello \rightarrow decimo di mm

• **PRECISIONE:** σ



la 1 è la più precisa



$$F(z_{(2,33)}) = 0,49$$

$$F(z_{(-1,67)}) = -0,45$$

$$P(x \geq 27) = P(z \geq 2,33) = 0,5 - 0,49 = 1\%$$

$$P(x \leq 15) = P(z \leq -1,67) = 0,5 - 0,45 = 5\%$$

TEOREMA CENTRALE DELLA STATISTICA

supponiamo di avere una serie $\{x_i\}$

1) se $x_i \in N(m, \sigma)$ $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \in N$

2) $x_i \in N$ ma n è grande
 $y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \sim N$

Ipotesi

$$\{x_i\} \in N(m, \sigma^2)$$

Tesi

$$\sum_{i=1}^n x_i \sim N(nm, n\sigma^2)$$

Assumendo la normalità della distribuzione calcolo $m \pm \sigma$

$$\sum_{i=1}^n (o_i - m)^2 = \min$$

→ stimatore corretto dei parametri

$$N\hat{x} = T_n$$

$$\hat{x} = N^{-1}T_n$$

⇒ PRINCIPIO dei MINIMI QUADRATI (MQ)

Ipotesi aggiuntiva valida per quanto trovato in precedenza: le osservazioni hanno tutte la stessa precisione

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^n (o_i - m)^2}{\partial m} = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^n (o_i - m) = 0$$

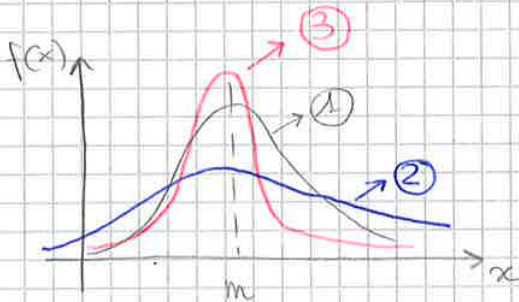
$$\sum_{i=1}^n (o_i - m) = 0$$

$$nm = \sum_{i=1}^n o_i$$

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n o_i}{n}$$

⇒ la media è la stima di MAX verosimiglianza che minimizza i miei scarti.

• misure con diverse precisioni



Peso

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$$

$$\sigma_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{p_i}$$

$\sigma_0^2 =$ VARIANZA UNITA' DI PESO

$$n(o_i) = \frac{\sqrt{p_i}}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} e^{-\frac{\sum (o_i - m)^2 p_i}{2\sigma_0^2}}$$

NOTA: Se la misura è migliore il peso aumenta perché σ_i^2 diminuisce

$$V = f(o_1) f(o_2) \dots f(o_n) = \frac{\sqrt{p_1 p_2 \dots p_n}}{(2\pi\sigma_0^2)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n p_i (o_i - m)^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$V = \max \quad \text{se} \quad \sum_{i=1}^n p_i (o_i - m)^2 = \min$$

$C - \alpha_0 = l_0 \Rightarrow \boxed{AX - l_0 = V}$ modello di Gauss

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{rs} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_{01} \\ l_{02} \\ \vdots \\ l_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

↑ termini noti
↓ misure

• In generale questa matrice non è invertibile

INCOGNITE $r + n$ (scarti incogniti)

EQUAZIONI n

$n \geq r$

→ MQ. $\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_{i=1}^n v_i}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n v_i}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial \sum_{i=1}^n v_i}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

SISTEMA NORMALE

in r equaz. ed r incognite

$\boxed{NX = T_n \rightarrow \hat{X} = N^{-1} T_n}$

T_n = vettore normalizzato dei termini noti

N = matrice normale

X = vettore delle incognite

Esempio

Stimare x_1, x_2 con 3 misure l_1, l_2, l_3

↑ parametri
↓ misure dirette

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - l_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - l_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - l_3 = 0 \end{cases}$$

Se le misure sono reali avrà uno scarto

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - l_{01} = v_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - l_{02} = v_2 \end{cases}$$

$$\sum_i v_i^2 = \min \rightarrow \text{MQ}$$

Ipotesi: stesso peso

→ dal sistema eleva al quadrato ogni riga e poi somma

$$(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2)x_1^2 + (a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2)x_2^2 + (l_{01}^2 + l_{02}^2 + l_{03}^2) +$$

$$+ 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32})x_1x_2 - 2(a_{11}l_{01} + a_{21}l_{02} + a_{31}l_{03})x_1 +$$

$$- 2(a_{12}l_{01} + a_{22}l_{02} + a_{32}l_{03})x_2 = \sum_i v_i^2 = \text{MIN}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_i v_i^2}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial \sum_i v_i^2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

SISTEMA NORMALE

$$\begin{cases} \frac{\partial \sum_i v_i^2}{\partial x_1} = 2x_1(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) + 2x_2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) + \\ - 2(a_{11}l_{01} + a_{21}l_{02} + a_{31}l_{03}) = 0 \\ \frac{\partial \sum_i v_i^2}{\partial x_2} = 2x_2(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) + 2x_1(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) + \\ - 2(a_{12}l_{01} + a_{22}l_{02} + a_{32}l_{03}) = 0 \end{cases}$$

SISTEMA NORMALE $NX = T_n \Rightarrow \hat{X} = N^{-1}T_n$

→ stima delle dirette misurate

$$\begin{bmatrix} (a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2) & (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) \\ (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32}) & (a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}l_{01} + a_{21}l_{02} + a_{31}l_{03} \\ a_{12}l_{01} + a_{22}l_{02} + a_{32}l_{03} \end{bmatrix}$$

Metodo Alternativo (quello usato) per scrivere sistema normale

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_{01} \\ l_{02} \\ l_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

A = MATRICE DISEGNO (progettabile)

$$A \quad X \quad - \quad l_0 \quad = \quad v$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} & a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 \end{pmatrix}$$

$N =$ progettabile

Calcolo gli **scarti STIMATI** inserendo le stime nel sistema
 $\rightarrow \hat{v}$

$$A\hat{x} - l_0 = \hat{v} \quad \text{scarto stimato} \rightarrow \text{analisi}$$

Esempio

$$v = \begin{pmatrix} 1 \text{ mm} \\ -2 \text{ mm} \\ 47 \text{ mm} \\ -0,9 \text{ mm} \\ +2 \text{ mm} \end{pmatrix}$$

la 3^a misura scarta troppo rispetto alle altre \Rightarrow questa misura è affetta da errori grossolani

SCARTO STIMATO: è la differenza tra la misura stimata e quella reale -; l'analisi dello scarto stimato permette di individuare le misure affette da errori grossolani

NOTA: in realtà l'analisi degli scarti stimati è più complessa, più errori grossolani possono essere mascherati se ho tante misure che scartano troppo.

σ_0^2 altera la stima dei parametri (incognite) \hat{x} ?

$$P = \sigma_0^2 C_{ee}^{-1}$$

$$\hat{x} = \underbrace{\left(A^t \sigma_0^2 C_{ee}^{-1} A \right)^{-1}}_P \left(A^t \sigma_0^2 C_{ee}^{-1} l_0 \right)$$

$\Rightarrow \sigma_0^2$ può essere arbitrario

$\hat{\sigma}_0^2$ può essere stimato dal campione di misure

\rightarrow STIMARE $\hat{\sigma}_0^2 \rightarrow \hat{x} C_{xx}$

$V = f.$ di verosimiglianza

$$\text{STIMA } \hat{\sigma}_0^2 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \sigma_0^2} = \text{MAX} \quad \frac{\partial \ln V}{\partial \sigma_0^2} = \text{MAX}$$

NOTA: a volte capita che dopo che sono state fatte le misure ci si accorge che la precisione non è sufficiente → meglio progettare bene la matrice prima di fare la misura.

Esempio

1 GRANDEZZA $x \rightarrow (a, b, c)$

$$\begin{cases} x - a = v_1 \\ x - b = v_2 \\ x - c = v_3 \end{cases} \quad AX - l_0 = v$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

A l₀ v

→ n° di osservazioni (n° di misure dirette)

$$N = A^t A = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$T_n = A^t l_0 = (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + b + c$$

$$X = N^{-1} T_n = \frac{a + b + c}{3} \rightarrow \text{i minimi quadratici coincidono con la media}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum v_i^2}{n-1} = \frac{(\hat{x} - a)^2 + (\hat{x} - b)^2 + (\hat{x} - c)^2}{n-1}$$

↓
stima della popolazione da cui è stato estratto il campione

$$C_{xx} = \sigma_x^2 = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \frac{\sum \hat{v}_i^2}{n(n-1)} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{n}$$

→ n° di misure dirette

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\frac{\sum \hat{v}_i^2}{n(n-1)}}$$

RETI GEODETICHE / TOPOGRAFICHE

- 1D livellazione (CAPISALDI)
- 2D planimetriche (VERTICI TRIGONOMETRICI)
- 3D GPS/GNSS o reti classiche

GRADI DI LIBERTÀ:

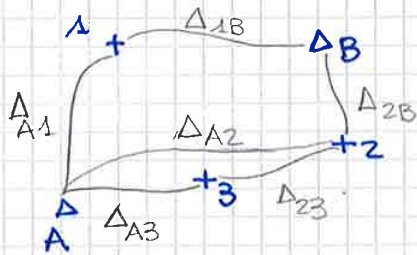
MINIMI VINCOLI: n° minimo di parametri necessari per avere la rete

1D → fissare una quota nota

2D → fissare 1 vertice (x,y) e 1 direzione θ

RETE DI LIVELLAZIONE

Supponiamo di avere un caposaldo A e uno B



Q_1, Q_2, Q_3 incognite

misurati Δ_{ij}

L_{ij} (km)

$$A_{ij} = Q_j - Q_i$$

$$Q_j - Q_i - \Delta_{ij} = 0 / v_i$$

$n = 3$ incognite

$n = 6$ equaz.

NOTA: la matrice normale ha n° di righe e colonne pari al n° delle incognite; quella dei pesi ha n° righe e colonne pari al n° delle misure

$$A = 6 \times 3$$

$$X = 3 \times 1$$

$$l_0 = 6 \times 1$$

$$V = 6 \times 1$$

$$N = 3 \times 3$$

$$P = 6 \times 6$$

$$\begin{cases} Q_1 - Q_A - \Delta_{A1} = v_1 \\ Q_B - Q_1 - \Delta_{1B} = v_2 \\ Q_B - Q_2 - \Delta_{2B} = v_3 \\ Q_3 - Q_2 - \Delta_{23} = v_4 \\ Q_3 - Q_A - \Delta_{A3} = v_5 \\ Q_1 - Q_A - \Delta_{A2} = v_6 \end{cases}$$

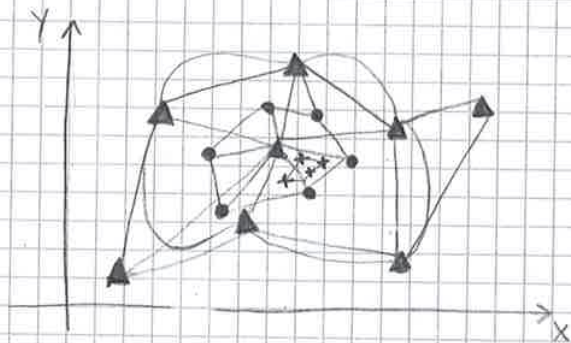
$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum p_i v_i^2}{n-r}$$

6 ← → 3

$$C_{xx} = \hat{\sigma}_0^2 N^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{Q_1}^2 & \neq 0 & \neq 0 \\ \neq 0 & \sigma_{Q_2}^2 & \neq 0 \\ \neq 0 & \neq 0 & \sigma_{Q_3}^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Q_1 \pm \sigma_{Q_1} \\ Q_2 \pm \sigma_{Q_2} \\ Q_3 \pm \sigma_{Q_3} \end{aligned}$$

RETI PLANIMETRICHE



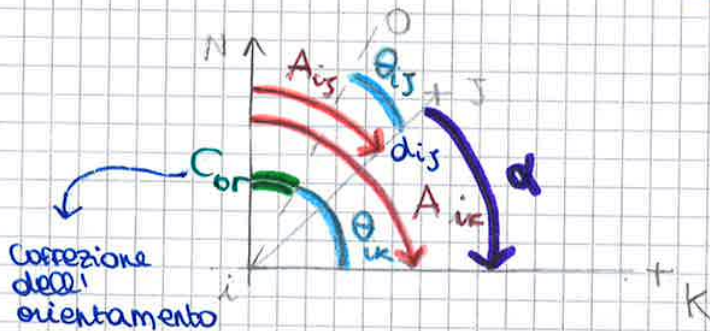
- 1° ordine = 1 p.to ogni 60 km
- 2° ordine = 1 p.to ogni 20 km
- 3° ordine
- 4° ordine

IGM 95 (GPS)

1 p.to ogni 20 km

RETE DINAMICA NAZIONALE (quella usata attualmente)

EQUAZIONI OSSERVAZIONE RETE 2D



1) Eq. distanza $d_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$

2) Eq. azimuth $A_{ij} = \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i}$

3) Eq. direzione angolare $\theta_{ij} = A_{ij} - C_{or}$

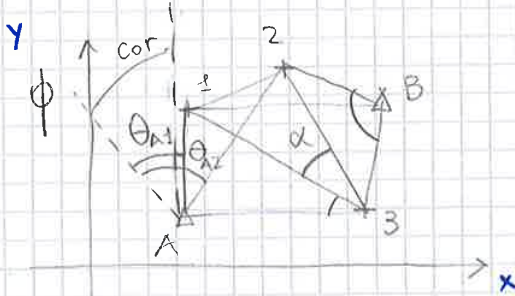
$\theta_{ij} = \arctg \frac{x_j - x_i}{y_j - y_i} - (C_{or}) \rightarrow$ incognita, per eliminarla usa la 4)

4) Eq. angolo azimutale $\alpha = A_{ik} - A_{ij} = \theta_{ik} + C_{or} - \theta_{ij} - C_{or}$

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_i} = \frac{-1}{1 + \frac{(x_j - x_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} \cdot \frac{1}{(y_j - y_i)} = \frac{-1}{\frac{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}{(y_j - y_i)^2}} \cdot \frac{1}{(y_j - y_i)} = -\frac{y_j - y_i}{d_{ij}^2}$$

$$A_{ij} = A_{ij}^{(0)} + \text{grad}(A_{ij}) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

$(XY)_{A,B} = \text{NOTE}$
 $(XY)_{1,2,3} = ?$



	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	cor	l_0
d_{12}	$\left(\frac{\partial d_{12}}{\partial x_1}\right)_0$	$\left(\frac{\partial d_{12}}{\partial y_1}\right)_0$	$\left(\frac{\partial d_{12}}{\partial x_2}\right)_0$	$\left(\frac{\partial d_{12}}{\partial y_2}\right)_0$	0	0	0	$d_{ij} - d_i^{(0)}$
α	$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right)_0$	$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_1}\right)_0$	$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}\right)_0$	$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_2}\right)_0$	$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_3}\right)_0$	$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y_3}\right)_0$	0	$\alpha - \alpha^{(0)}$
θ_{A1}	$\left(\frac{\partial \theta_{A1}}{\partial x_1}\right)_0$	$\left(\frac{\partial \theta_{A1}}{\partial y_1}\right)_0$	0	0	0	0	1	$\theta_{A1} - \theta_{A1}^{(0)}$
θ_{A2}	0	0	$\left(\frac{\partial \theta_{A2}}{\partial x_2}\right)_0$	$\left(\frac{\partial \theta_{A2}}{\partial y_2}\right)_0$	0	0	1	$\theta_{A2} - \theta_{A2}^{(0)}$

+ pag 98

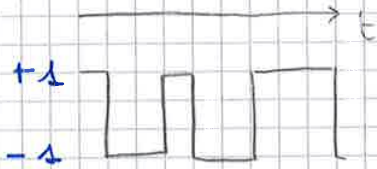
NOTA: per il calcolo di σ gli angoli vanno espressi in radianti

- Se la funzione densità di probabilità dipende da x e y la funzione non è il prodotto di $f(x)$ e $f(y)$ ma bisogna aggiungere un fattore di correlazione $\sqrt{1-p^2}$ dove p è il coeff. di correlazione lineare.

L'equazione è quella di una conica che intersecata con un piano $z = \text{cost.}$ ottengo l'**ELLISSE D'ERRORE** che è una **zona**

Le stazioni di controllo oltre a ricevere dati possono anche trasmetterli mentre le stazioni di utilizzo (es. i cellulari ecc...) possono solo riceverli.

GPS → natura militare del sistema non si può rendere nota la nostra posizione → i dispositivi di utilizzo non possono trasmettere dati.



$$\text{Se } f = 1,5 \text{ GHz} = 1,5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,5 \cdot 10^9 \text{ 1/s}} = 20 \text{ cm}$$

COMPONENTE IMPULSIVA (codici) per modulare le portanti producendo uno sfasamento di π sulla fase.

Alcuni di questi codici sono noti, altri no e vengono usati per scopi militari.

GPS è una sorta di intersezione spaziale di distanziometri.

- Il telefono fa delle misure di codice

SEGMENTO DI CONTROLLO composto dalle stazioni a terra

Satelliti che viaggiano a 4 m/s danno una precisione di posizione mm.

SISTEMA GPS

$$f_0 = 10,23 \text{ MHz}$$

- PORTANTE

$$f_{L1} = 154 \quad f_0 = 1575,42 \text{ MHz} \rightarrow \lambda_1 \approx 19 \text{ cm}$$

$$f_{L2} = 120 \quad f_0 = 1227,60 \text{ MHz} \rightarrow \lambda_2 \approx 24 \text{ cm}$$

$$f_{L5} = 115 \quad f_0 = 1176,45 \text{ MHz} \rightarrow \lambda_5 \approx 25 \text{ cm}$$

} $\approx 20 \text{ cm}$

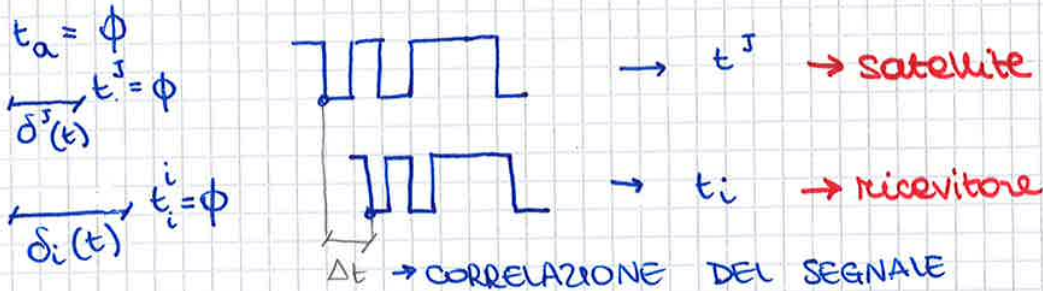
$$\lambda_1 = \frac{c}{f_{L1}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1575,42 \cdot 10^6 \text{ 1/s}} = \approx 19 \text{ cm}$$

NOTE $(x, y, z)^J \rightarrow \rightarrow$ incognite $(x, y, z)_i$

NOTA: Stiamo parlando di sistemi 3D

Per risolvere il problema del posizionamento servono **4 equazioni**, cioè **4 satelliti**, 3 equazioni **non** sono sufficienti.

MISURA DEL RANGE CON CODICI (C/A)



Il secondo segnale è ritardato poiché ha già percorso lo spazio stazione - satellite

in linea teorica $R_i^J = c \Delta t \rightarrow$ **PSEUDORANGE**

- L'orologio del satellite è un orologio atomico molto preciso mentre l'orologio della stazione è un orologio atomico al quarzo che avrà una precisione minore; comunque un leggero ritardo o anticipo lo hanno anche gli orologi dei satelliti.

$$p_i^J(t) = c [(t^J - t_i) + \delta^J(t) + \delta_i(t)] = R_i^J(t) + c [\delta^J(t) + \delta_i(t)]$$

$$R_i^J(t) = \text{range misurato} \rightarrow \text{PSEUDORANGE}$$

$$\delta^J(t) = a_0 + a_1(t - t_{oc}) + a_2(t - t_{oc})^2$$

MESSAGGIO NAV $\left\{ \begin{array}{l} a_0, a_1, a_2 \text{ calcolati dalla stazione e mandati al satellite} \\ t_{oc} \text{ tempo di riferimento} \rightarrow \text{anche esso è calcolato dalla stazione e mandato al satellite} \end{array} \right.$

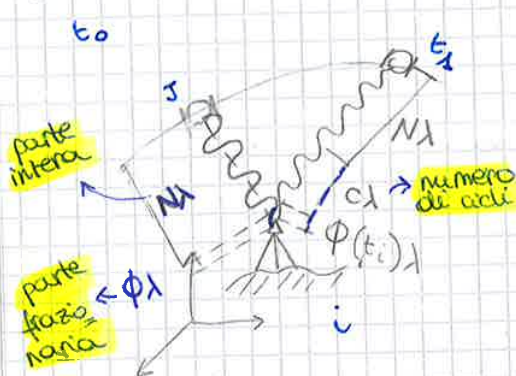
$$\delta^J(t) < 1 \text{ ns}$$

$$10^{-9} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 30 \text{ cm} \rightarrow \text{di errore}$$

Ipotesi di satelliti sincronizzati

$$n_t n_s \geq 4 n_t \rightarrow n_s \geq 4$$

MISURA DEL RANGE CON FASE



$$\phi = \frac{\varphi}{2\pi} \text{ (cicli)}$$

ϕ → la fase NON cambia

$$(1) \quad p_i^J(t) = \underbrace{\phi_i^J(t)}_{\text{parte misurata}} \lambda + N_i^J \lambda + \underbrace{c d^J(t)}_{\text{NOTA}} + \underbrace{c d_i^J(t)}_{?}$$

$N =$ ambiguità di fase

NOTA: noi misuriamo solo la parte frazionaria, N non è oggetto di misura

Posso scrivere la (1) in cicli

$$\frac{c}{\lambda} = f$$

$$\frac{p_i^J(t)}{\lambda} = \phi_i^J(t) + N_i^J + f^J d^J(t) + f^J d_i^J(t)$$

↓
permane uguale indipendentemente dal tempo

Ipotesi:

N è la stessa se non ci sono CYCLE SLIP (es. quando passo sotto un cavalcavia)

CASO STATICO

$$n^{\circ} eq = n_t \cdot n_s$$

$$n^{\circ} inc = 3 + n_t + n_s$$

(x,y,z) (d_i) (N)

$$\Rightarrow n_t n_s \geq 3 + n_t + n_s$$

$$n_t (n_s - 1) \geq 3 + n_s$$

$$n_t \geq \frac{3 + n_s}{(n_s - 1)}$$

n_s	n_t
1	4
2	5
5	2

RITARDO IONOSFERICO

Si ha nella parte alta dell'atmosfera

Il ritardo ionosferico può essere modellizzato attraverso la determinazione di 4 parametri; applicando tale modello l'errore viene dimezzato.

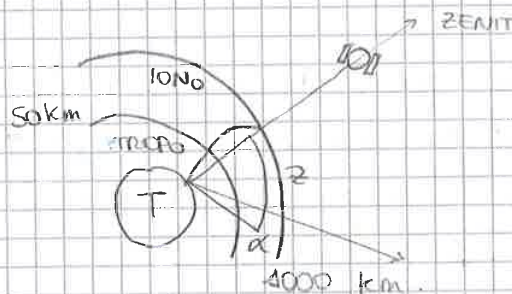
Il rit. ionosferico dipende dal ciclo solare, (all'equatore è maggiore) quindi dipende: da

- dalla posizione;
- dal tempo; (giorno - notte)
- dal periodo dell'anno o degli anni (max/min dell'attività solare ogni 11 anni un ciclo).

TROPOSFERA

dipende da:

- pressione
- temperatura
- umidità
- zenit



NOTA: { la misura è più precisa se il satellite è più lontano dalla Terra, \Rightarrow sconsigliabili misure con elevazione $< 15^\circ$ (complementare dell'angolo zenitale \Rightarrow MODELO HOPEFIELD \rightarrow angolo zenitale $> 75^\circ$ la curva si impenna \Rightarrow errori maggiori)

DEGRADO DEL SEGNALE GPS

SA : SELECTIVE AVAILABILITY

\rightarrow con SA = $\pm \sim 150$ m

Dal 1 maggio 2000 la SA è stata eliminata:

\rightarrow senza SA = $\pm 5-10$ m

ELIMINAZIONE ERRORI SISTEMATICI

Attraverso dei differenziali

\hookrightarrow PRINCIPI DI POSIZIONAMENTO DEL DIFFERENZIALE

STAZIONE BASE (A)

(x, y, z) NOTE

STAZIONE ROVER (B) (è la stazione che si sposta)

$$DOP \sim \frac{1}{V}$$



Tanto il volume è piccolo quanto il DOP è grande

Data la matrice di Varianza-covarianza

$$C_{xx} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & & \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \text{ SIMM}$$

$$GDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \sigma_t^2}$$

(Global DOP)

Può essere scomposto in PDOP, HDOP, VDOP, TDOP

$$PDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$$

$$VDOP = \sqrt{\sigma_z^2}$$

$$TDOP = \sqrt{\sigma_t^2}$$

$$HDOP = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

NOTA: abilitando il sistema EGNOS si migliora la precisione di uno o 2 metri.

I sistemi EGNOS, GPS e Galileo vanno bene per la topografia ma non per la geodesia di precisione.

Le stazioni GNSS inviano dati in tempo reale al centro di controllo

La RDN garantisce che passando da una regione all'altra non cambi il sistema di riferimento

GPS e ALTIMETRIA

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_B$$

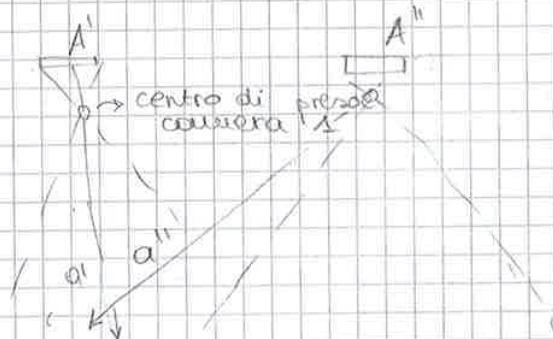
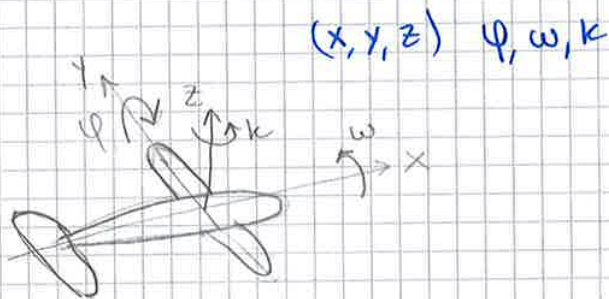
$$(x \ y \ z) \rightarrow \underbrace{\varphi, \lambda, h}_{(EN)UTM} \quad H = h - N$$

Scatto un fotogramma misuro ξ, η , mi sposto e scatto un secondo fotogramma misuro ξ_2, η_2 che saranno \neq dalle prime poiché mi sono spostato

DISTANZA di PRESA = distanza che congiunge i 2 centri di presa

Come si opera:

- PRESA DEI FOTOGRAMMI (da terra o AEROFOTOGRAMMA)
Tra le varie strisciate deve esserci una sovrapposizione trasversale (20% o 60%); Ricoprimento longitudinale 60% in modo che il 3° fotogramma si sovrapponga non solo al 2° ma anche al 1°.



camera fotogrammetrica : 4 punti fiduciali prendoli non si ha distorsione

PP proiezz. centro di presa sul piano dell'immagine

Da progetto vengono date PP e c.

PARAMETRI DI ORIENTAMENTO int e ext.

