NUMERO: 1657A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Sordo

MATERIA: Fisica I + Eserc. Prof.Andrianopoli

FISICA

Scopo: studio di costituenti, materia e loro interazioni

Campo di interesse: vastissimo; da particelle subatomiche a ammassi galattici, a struttura materia

Approccio: sperimentale
↳ METODO SCIENTIFICO

- È scienza quantitativa
- Usa il linguaggio della matematica
  - ↳ grandezze fisiche ⟺ numeri
  - ↳ relazioni tra grandezze fisiche ⟺ equazioni

FISICA CLASSICA

- OTTICA
- ACUSTICA
- TERMODINAMICA
- ELETTRICITÀ
- MAGNETISMO
- MECCANICA
  - ↳ GRAVITAZIONE
  - ↳ FLUIDI

ELETTROMAGNETISMO

MECCANICA STATISTICA

FISICA MODERNA (XX sec)

- SCALE DI LUNGHEZZA PICCOLE ($\lesssim 10^{-10}$ m)
  - ↳ MECCANICA QUANTISTICA (laser)
- SCALE DI VELOCITÀ MOLTO ALTE ($\lesssim c = 3 \times 10^{8}$ m/s)
  - ↳ RELATIVITÀ SPECIALE (centrali nucleari / radioterapia)
- SCALE DI MASSE MOLTO GRANDI ($\gtrsim 10^{25}$ kg)
  - ↳ RELATIVITÀ GENERALE (GPS)

- RIPRODUCIBILITÀ
- MODELLI
- VALORE OGGETTIVO ⇒ INFORMAZIONI QUANTITATIVE

⇒ MISURAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE

MISURARE: CONFRONTARE CON UN CAMPIONE STANDARD (unità di misura)

DEFINIZIONE OPERATIVA DI GRANDEZZA FISICA: definizione di procedimento per misurarla

GRANDEZZE FISICHE ← hanno dimensioni

- fondamentali (L, t, M)
- derivate: definite da relazioni funzionali con grandezze fondamentali $\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

ANALISI DIMENSIONALE

$[\Delta x] = L$

$[\Delta t] = t$

$[\langle v \rangle] = L^1 \cdot t^{-1} \cdot M^0$ → non ha dimensioni di massa

$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ $\quad [\langle a \rangle] = [\Delta v] \cdot [\Delta t] = [L \cdot t^{-1} \cdot t^{-1}] = [L \cdot t^{-2}]$

$[\omega t] = [L^0 t^0 M^0] \Rightarrow [\omega] = [t^{-1}]$ $\quad \underbrace{x = 2\,\text{sen}(t)}_{\text{sbagliato}}$ → non è un n. puro

BUONA UNITÀ DI MISURA

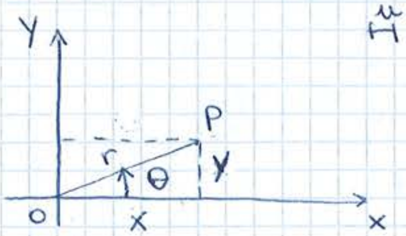
- Determinata con max precisione
- facilmente riproducibile
- NON variabile nel tempo

L: metro (m)
M: kilogrammo (kg)
t: secondo (s)

} MKS SISTEMA INTERNAZIONALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 266

COORDINATE POLARI (2D)



$r = |OP|$

$\theta = x\hat{O}P$

$P \leftrightarrow (r, \theta)$

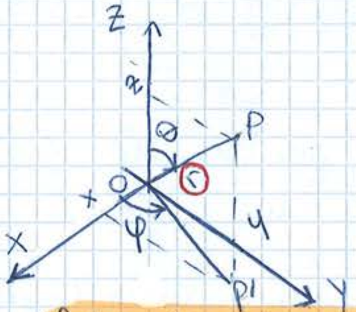
$0 \leq r < \infty$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

COORDINATE POLARI SFERICHE



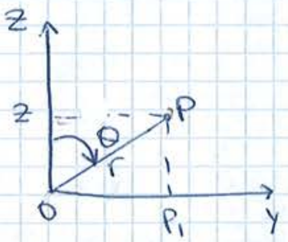
$0 \leq r < +\infty$

latitudine (fa tutto il giro) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq \theta \leq \pi$ → muovendomi con φ, θ può essere compreso tra 0 e π

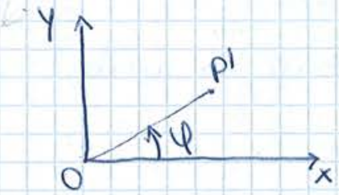
longitudine NORD-SUD

φ = corrispondente dell'angolo θ nelle coordinate polari 2D (vedi sopra)



$$\begin{cases} x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$|OP'| = r\,\text{sen}\,\theta$



$$\begin{cases} x = OP'\cos\varphi \\ y = OP'\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{r} = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

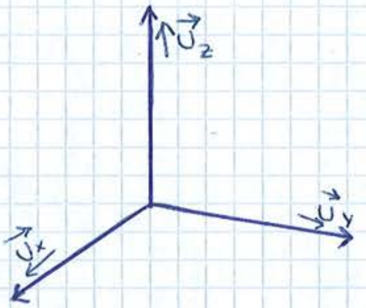
Ex. $a = -1$ $\quad (-1)\vec{v} = -\vec{v}$ → verso opposto a $\vec{v}$

$[\Delta\vec{r}] = [L]$ $\quad [\vec{v}] = [L \cdot t^{-1}]$ $\quad [\vec{m}] = [M]$

il prodotto di uno scalare e di un vettore genera un unità di misura ≠ dal vettore ← $\vec{p} = m\vec{v}$ $\quad [\vec{p}] = [M \cdot L \cdot t^{-1}]$

VERSORE: vettore di modulo 1 $\quad \vec{u}$. $|\vec{u}| = 1$

$\vec{v} \to \vec{u}_{\vec{v}} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ **ADIMENSIONALE**

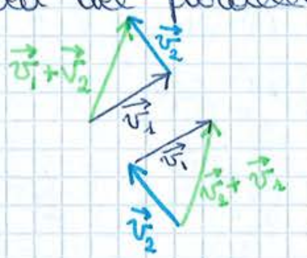


$|\vec{u}_v| = \frac{1}{\cancel{|\vec{v}|}} \cdot \cancel{|\vec{v}|} = 1$

$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{u}_{\vec{v}}$

SOMMA DI VETTORI (LIBERI)

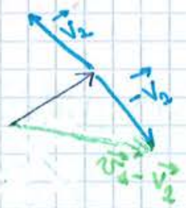
- Regola del parallelogramma

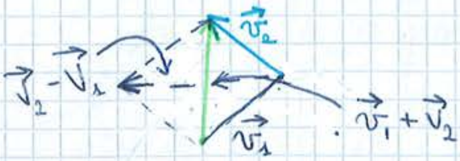


$\vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ → **COMMUTATIVA**

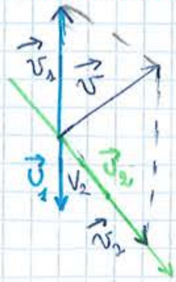
DIFFERENZA DI VETTORI (LIBERI)

$\vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$





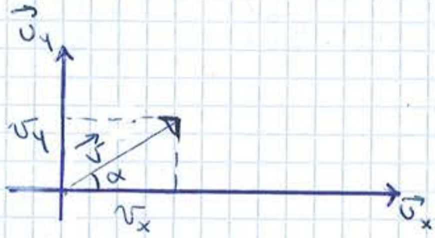
DECOMPOSIZIONE DI UN VETTORE



$$\begin{cases} \vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_1 \\ \vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_2 \end{cases} \qquad \vec{v} = v_1 \cdot \vec{u}_1 + v_2 \vec{u}_2$$

v_1, v_2 componenti di $\vec{v}$ lungo assi $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$

$v_1 < 0 \,,\ v_2 > 0$

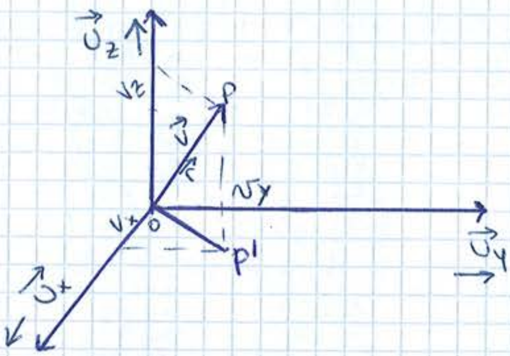


$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$$

$$v_x = |\vec{v}| \cos\alpha$$

$$v_y = |\vec{v}| \operatorname{sen}\alpha$$

Dati tre assi non complanari qualsiasi, è sempre possibile decomporre un vettore secondo questi.



$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$$

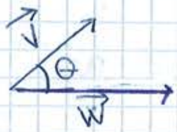
$\vec{OP} = \vec{v} = \vec{r}$ = vettore posizione

$$P \leftrightarrow (x,y,z) \leftrightarrow \vec{r} = \vec{OP}$$

$$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}| \cos\theta$$



PROPRIETÀ:

1) è uno scalare
2) è commutativo $= \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
3) $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ se $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$

   $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ se $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$

$\vec{v} \neq \vec{w}$

dimostro $\rightarrow$

4) $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \cdot \vec{w} = \vec{v}_1 \vec{w} + \vec{v}_2 \vec{w}$

Ex.

$$\vec{d} = (2\vec{u}_x + \vec{u}_y)\ m$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{2^2 + 1^2}\ m = \sqrt{5}\ m$$

RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \qquad \begin{cases} \vec{u}_x = (1,0,0) \\ \vec{u}_y = (0,1,0) \\ \vec{u}_z = (0,0,1) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z \\ \vec{w} = w_x \vec{u}_x + w_y \vec{u}_y + w_z \vec{u}_z \end{cases}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

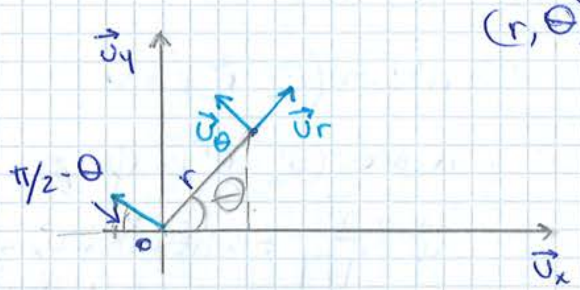
$$\vec{w} = (w_x, w_y, w_z)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_x, v_y, v_z) \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

ALTRI SISTEMI DI COORDINATE
DESCRIZIONE CON VERSORI

- coordinate polari nel piano

(r, θ)



$$r = |\vec{r}| \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \underbrace{\cos\theta\, \vec{u}_x + \operatorname{sen}\theta\, \vec{u}_y}_{\text{ho diviso per } r}$$

$$\vec{r} = \underbrace{r\cos\theta}_{\vec{r}\cdot\vec{u}_x}\, \vec{u}_x + \underbrace{r\operatorname{sen}\theta}_{\vec{r}\cdot\vec{u}_y}\, \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = \underbrace{-}_{\text{per archi associati}}\operatorname{sen}\theta\, \vec{u}_x + \cos\theta\, \vec{u}_y$$

$\vec{u}_\varphi$ = direzione lungo arco parallelo (latitudine); r, θ fissi
$\varphi \to \varphi + d\varphi$

Spostamenti

- radiale $dl_r = dr$
- meridiano $dl_\theta = r\,d\theta$
- parallelo $dl_\varphi = r\,\text{sen}\theta\,d\varphi$ $\quad r\,\text{sen}\theta = |\vec{r}'|$

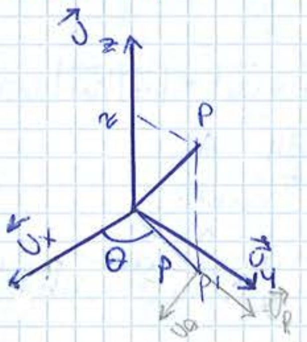
$$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\,\text{sen}\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

$$\vec{u}_r = \text{sen}\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + \text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi\,\vec{u}_y + \cos\theta\,\vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\text{sen}\varphi\,\vec{u}_y - \text{sen}\theta\,\vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\varphi = -\text{sen}\varphi\,\vec{u}_x + \cos\varphi\,\vec{u}_y$$

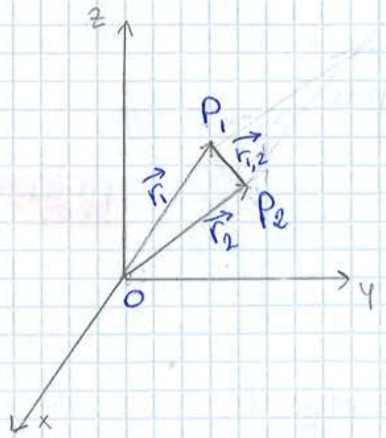
COORDINATE CILINDRICHE



$\rho = |\vec{OP'}|$
θ
z

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{u}_x + \text{sen}\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_\theta = -\text{sen}\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{cases}$$

POSIZIONE RELATIVA $\vec{r}_{1,2}$



$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{OP_1} & (x_1, y_1, z_1) \\ \vec{r}_2 = \vec{OP_2} & (x_2, y_2, z_2) \end{cases}$$

$$\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\vec{r}_{1,2} = (x_2 - x_1)\vec{u}_x + (y_2 - y_1)\vec{u}_y + (z_2 - z_1)\vec{u}_z$$

$$|\vec{r}_{1,2}| = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

$$\vec{M}_O = \vec{OP}^{*} \times \vec{V}$$
$$= \vec{OO'} \times \vec{V} + \vec{O'P} \times \vec{V}$$ distributiva del prodotto scalare

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} + \vec{OO'} \times \vec{V}}$$

MECCANICA = studio del moto

- **CINEMATICA**: descrizione del moto
- **DINAMICA**: studio del moto in relazione alle cause che lo determinano

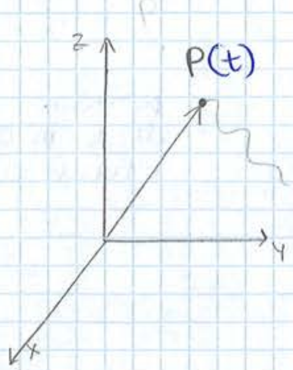
* Un oggetto è in moto se la sua posizione rispetto a un dato osservatore cambia nel tempo.
Altrimenti è in quiete

SISTEMA DI RIFERIMENTO

- un sistema di coordinate nello spazio (O, x, y, z)
- uno strumento per misurare le distanze (metro)
- uno strumento per misurare gli intervalli di tempo (cronometro)

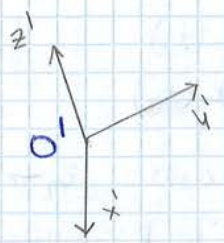
PUNTO MATERIALE

È un oggetto di dimensione trascurabile rispetto alle altre lunghezze coinvolte.



$$\vec{OP}(t) = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$= x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y + z(t)\,\vec{u}_z$$

$\vec{r}(t)$ descrive 3 funzioni della variabile tempo (variabile dimensionata)



In un diverso sistema di riferimento il moto di P avrà descrizioni diverse: $\vec{O'P} = \vec{r}'(t)$

ad arrivare a un punto in cui la v_{media} resta circa uguale. Diventa caratteristica del moto all'istante t_1:

VELOCITÀ ISTANTANEA → diventa una proprietà del punto x_1 (dello spazio)

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

→ derivata rispetto al tempo, limite del rapporto incrementale per $\Delta t \to 0$

$\dot{x}$ velocità → S.I. m/s

$[v] = [L t^{-1}]$

NOTA: deriviamo sempre rispetto al denominatore (lim rapporto incrementale)

→ TRAIETTORIA ≠ LEGGE ORARIA

curva nello spazio — posizione del punto nello spazio in funzione del tempo

OPERATIVAMENTE $v(t)$ (velocità istantanea) si misura individuando $(x, x+dx)$ molto vicine, e misurando l'intervallo di tempo dt che li separa
→ così vicine da considerare v costante in quell'intervallo

dx, dt quantità infinitesime

Sviluppo di Taylor

$x(t)$ (posizione al t_1)

$$x(t+dt) = x(t) + \dot{x}(t)\,dt + o(dt^2)$$

$(t-t_0)$ $(t-t_0)^2$

→ accelerazione nulla (termini di 2° grado nulli)

dt infinitesimo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o((x-x_0^2))$$

Taylor al 1° ordine

$$\begin{cases} f \to x \\ x \to t+dt \\ x_0 \to t \\ f' \to \dot{x} = \dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

$t - t_0 \Rightarrow dt$

$dx = v(t)\,dt$

$x(t) + \dot{x}(t) = v(t)$

$$dx = x(t+dt) - x(t) = \dot{x}(t)\,dt \qquad \boxed{dx = v(t)\,dt}$$

variazione di spostamento infinitesimo

1) $x(t) = v_0(t-t_0) + x(t_0)$ moto uniforme

Divido l'intervallo $t_f - t_0$ in intervallini dt_i piccoli:

$$dt_1 = t_1 - t_0 \qquad \boxed{t_f = t_n}$$

$$\rightarrow dt_i = t_i - t_{i-1}$$

posso considerare costante la velocità su tutti gli intervalli

$$t_f - t_0 = dt_1 + dt_2 + \ldots dt_n = \sum_{i=0}^{n} dt_i$$

linea dritta in ogni dt

$v(t_i) = v(t_{i+1}) = v_i$

approssimazione non molto precisa

→ area dei rettangolini

$$dx_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = v_i \, dt_i$$

base · altezza

$$\Delta x^{(n)} = x_f - x_0 = dx_1 + dx_2 + \ldots + dx_n$$

→ perché sto considerando gli intervalli piccoli, dovrei prenderli = 0 per ottenere il Δx preciso

$$\Delta x^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} dx_i = \sum_{i=1}^{n} v_i \, dt_i$$

Considero il limite per $n \to \infty$, $dt_i \to 0$

$$\Delta x = x(t_f) - x(t_0) = \lim_{n \to \infty} \Delta x^{(n)} = \int_{t_0}^{t_f} v(t)\, dt$$

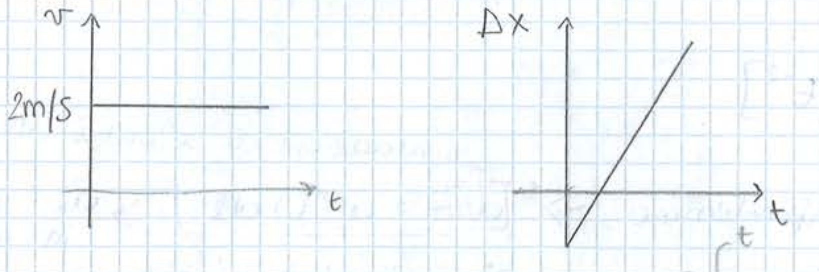
5) $v(t) = 2\,m/s \qquad t_0 = 1\,s \qquad t_1 = t$

calcolare $x(t) - x(t_0)$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} 2\,m/s \; dt =$$

$$= 2\,m/s \int_{t_0}^{t} dt = 2\,m/s\,[t - t_0] = 2\,m/s\,(t-1)\,s =$$

$$= (2t - 2)\,m$$ → perché t è in secondi



⑥ $v(t) = C\cos(\omega t) \qquad t = 0\,s$

$$\frac{c}{\omega}\int_0^t \omega\cos(t)\,dt = \frac{c}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{0s}^{t} c\cos(\omega t)\,dt \;^{*}$$

$\omega t = z \qquad \omega dt = dz$

$dt = \frac{1}{\omega}\,dz$

$t = 0 \rightarrow z = 0$

$$= c\int_0^{x} \cos z\,\frac{dz}{\omega} = \frac{c}{\omega}\left([\mathrm{sen}\, z]_0^{\omega t}\right)$$

$$\frac{c}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$\to x - x_0 \Rightarrow x = x_0(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$

$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$

Nota $a(t)\ \forall t$, $v(t_0)$, $x(t_0)$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt}$$

$$= x(t_0) + \underbrace{v(t_0)(t-t_0)}_{\text{spazio}} + \int_{t_0}^{t} dt \underbrace{\left[\int_{t_0}^{t} a(t)dt\right]}_{\text{spazio}}$$

$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)dt \to$ tutto viene integrato

$v(t_0)(t-t_0) =$ metro $\Rightarrow$ spazio

$m/\cancel{s}\quad \cancel{s}$

DIPENDENZA DI a DA x(t)

Se conosciamo

$a(x) = a(x(t)) \Rightarrow$ relazione utile $\to$ permette di conoscere a in funzione dello spazio

$$\begin{cases} v = \dfrac{dx}{dt} \\ dv = a\,dt \end{cases} \qquad v\,dv = a\frac{dx}{dt}dt$$

Se $a(t) = a(x(t)) \to$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ dx = \dfrac{dx}{dt}dt \end{cases} \leftarrow \text{cambio di variabile } t \to x$$

$$\int_{v_0 = v(t_0)}^{v} v\,dv = \int_{t_0}^{t} a\frac{dx}{dt}dt \qquad \begin{matrix} t_0 \to x_0 = x(t_0) \\ t \to x = x(t) \end{matrix}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{x_0}^{x} a(x)dx}$$

$y_0 = h$

$\vec{a} = -g \cdot \vec{u}$

$v(t) - v_0 = a(t - t_0)$

$$\boxed{v(t) - v_0 = -g(t - t_0)}$$

$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \quad (v_0 = 0) \; - g \int_{t}^{t_0} (t - t_0)\,dt$

$$\boxed{y(t) = y_0 - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2}$$

A quale istante il corpo tocca terra?

$t^* = y(t^*) = 0$

$y(t^*) = h - \frac{1}{2} g (t^* - t_0)^2 = 0$

$h \to y_0$

$(t^* - t_0)^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t^* = t_0 \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$

! Considero solo la soluzione positiva poiché voglio conoscere x ipotesi $t \geq t_0$, la soluzione negativa rappresenta un $t < t_0$

$$\boxed{t^* = t_0 + \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

$= 2s + \sqrt{\frac{8m}{9{,}8 m/s^2}} = 2{,}9\ s$

MOTO ARMONICO SEMPLICE

$$\boxed{x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)}$$

A → ampiezza; ω → pulsazione; ϕ → fase iniziale

A, ω, φ costanti

A, φ sono costanti arbitrarie che individuano le condizioni iniziali

$t \to t + \frac{2\pi}{\omega} = t' \Rightarrow x(t') = x(t)$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

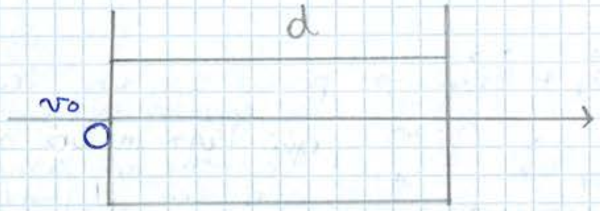
ωt → adimensionale $\quad [\omega] = [t^{-1}]$

$$\boxed{v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 e^{-k(t-t_0)} dt$$

$$= x_0 + \left[-\frac{v_0}{k} e^{-k(t-t_0)} \right]_{t_0}^{t}$$

$$= x_0 + \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-k(t-t_0)}\right)$$



$x_0 = 0$, $t_0 = 0$

$x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$

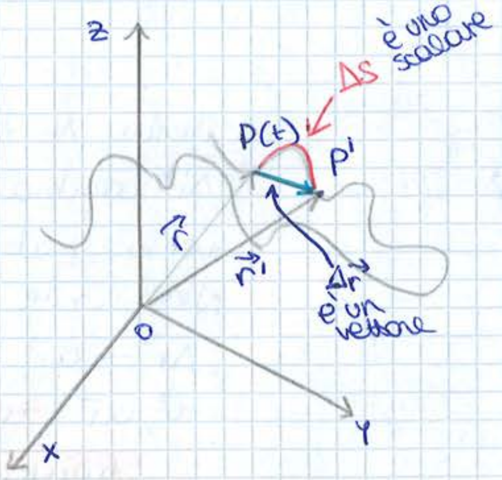
$v(t) = v_0 e^{-kT}$

$v(d) = 0$

$$t \to \infty \begin{cases} v \to 0 \\ a \to 0 \\ x \to \frac{v_0}{k} \end{cases}$$

- Bisogna determinare la costante k

MOTO CURVILINEO (3D)



$\vec{r}(t) = \vec{OP}(t)$

$= (x(t), y(t), z(t))$

Supponiamo di studiare il moto da un istante $t' > t$

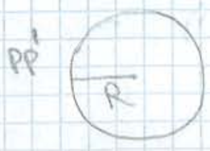
$P' = P(t')$

Il punto materiale tra t e t' ha percorso un tratto curvilineo $\widehat{PP'}$ $\Delta s = \widehat{PP'}$, però lo spostamento è $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{PP'}$

Distanza percorsa $\neq$ spostamento

$\Delta s = \widehat{PP'}$ $\qquad \Delta \vec{r}$

Distanza percorsa $2\pi r$



Spostamento 0

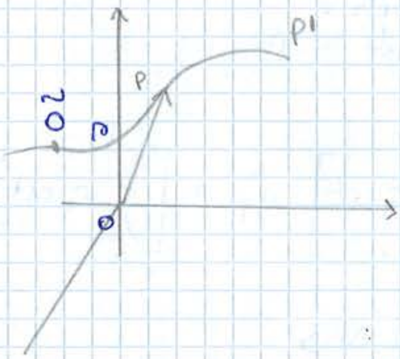
$\vec{u}_T = \vec{u}$ costante → MOTO RETTILINEO (caso particolare)

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}$$ → derivate rispetto al tempo

vettore velocità:
- modulo: $|\vec{v}|$
- direzione: $\vec{u}_T$
- verso in cui è percorsa la traiettoria

DESCRIZIONE INTRINSECA del moto:



$\Delta s = \widehat{PP'}$ $\quad s = \widehat{\tilde{O}P}$

$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{PP'}$

$\vec{r}(P(t)) \qquad d\vec{r}(s(t))$

$f(s(t)) \qquad f = f(s), \quad s = s(t)$

$\frac{df}{dt}, \quad \frac{df}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \qquad d\vec{r}(s(t))$

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}$

$P' \to P \quad \begin{cases} \Delta s \to 0 \\ \Delta r \to 0 \end{cases} \qquad \Delta s \to |\Delta\vec{r}|$

$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| \to 1$ corda $|\Delta\vec{r}|$ → arco Δs

$\boxed{\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{u}_T}$ è il versore tg alla traiettoria

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\, dt$$

$$d\vec{v} = \vec{a}\, dt$$

Noti $\vec{v}(t), \vec{r}(t_0) \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t_0)\, dt$

n gradi di libertà:

n possibili direzioni ≠ di movimento nello spazio

$\Rightarrow$ condizioni iniziali per integrare il moto in 3 dimensioni sono $2n = 6$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (3D) $\vec{a} = cost$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

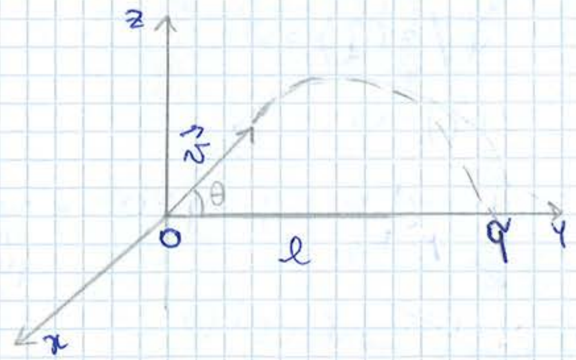
} moto che rimane nel piano, $\vec{a}$ e $\vec{v}$ hanno due direz. diverse

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}\,(t - t_0)^2$$

Per questo moto $\vec{v} \in$ piano $(\vec{v}_0, \vec{a})$ *

$\vec{r}$ giace sul piano // al piano definito da $\vec{v}$, passante per $\vec{r}_0$.

MOTO DEI PROIETTILI



$\vec{v}_0 = (0, v_0 \cos\theta, v_0 \operatorname{sen}\theta)$ (direz. y: $v_0\cos\theta$; direz. z: $v_0\operatorname{sen}\theta$)

$\vec{a} = -g\,\vec{u}_z$

$\vec{r}_0 = \vec{0}$

$t_0 = 0$

Direzione x:

$a_x = 0 \rightarrow v_x = v_{0x} = 0 \rightarrow x(t) = x_0 = 0 \rightarrow$ il moto avviene in un piano (y, z) *

Direzione y:

$a_y = 0 \rightarrow v_y = v_{0y} = v_0 \cos\theta$

$\boxed{y(t) = (v_0 \cos\theta)t} \rightarrow$ uniforme

PROPRIETÀ di DERIVATA DI VETTORI

Ip) $\vec{V}(x)$ $|\vec{V}| = c$ costante

Th) allora $\frac{d}{dx}\vec{V} \perp \vec{V}$ → la derivata di $\vec{V}$ rispetto a x è ortogonale a $\vec{V}$

x → parametro qualunque

Dimostrazione

$\vec{V} \cdot \vec{V} = c^2$ è una costante

$$\frac{d}{dx}(\vec{V}\cdot\vec{V}) = \frac{d}{dx}c^2 = 0$$

$$\frac{d\vec{V}}{dx}\cdot\vec{V} + \vec{V}\cdot\frac{d\vec{V}}{dx} = 0$$ ← il prodotto scalare è COMMUTATIVO

$$\hookrightarrow 2\frac{d\vec{V}}{dx}\cdot\vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dx} \perp \vec{V}$$

ESEMPIO

COORDINATE POLARI 2D:

$$\vec{u}_r(\theta) = \cos\theta\,\vec{u}_x + \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta(\theta) = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y$$

$\vec{u}_r \perp \vec{u}_\theta$ → devo dimostrare che l'uno è la derivata dell'altro

modulo costante

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \, , \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r$$

DESCRIZIONE INTRINSECA DEL MOTO nel piano

$$\vec{v} = v\vec{u}_T$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

→ direzione normale

In un moto ≠ dal moto rettilineo uniforme un contributo ad $\vec{a}$ viene anche dato dalla direzione che varia sempre

Sappiamo

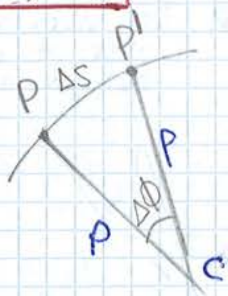
$$\boxed{\frac{d\vec{u}_T}{dt} \perp \vec{u}_T}$$

verso : regola della mano dx

$P(s(t))$

$\phi(s(t)) \quad \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$

$\boxed{\frac{ds}{dt} = v}$ velocità scalare



$P' \sim P$
$\hookrightarrow CP \sim CP' = \rho$

$\hookrightarrow$ raggio di curvatura

ρ = raggio della circonferenza che meglio approssima la traiettoria tra i punti P e P' (purché P' sia abbastanza vicino)

$\Delta s \cong \rho \, \Delta\phi$ spostamento lungo l'arco che approssima la traiettoria

$\Delta s : \Delta\phi = 2\pi\rho : 2\pi$

$A = \frac{\cancel{2\pi}\rho \cdot \Delta\phi}{\cancel{2\pi}}$

$$\rho = \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\phi} = \frac{ds}{d\phi}$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = v \frac{d\phi}{ds} = \frac{v}{\rho}}$$

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \vec{u}_n \frac{v}{\rho}$$

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{accelerazione tangenziale}} \vec{u}_T + \underbrace{\frac{v^2}{\rho}}_{} \vec{u}_n}$$

accelerazione normale o CENTRIPETA

• se ω costante $\Rightarrow$ v costante $\Rightarrow$ MOTO CIRCOLARE UNIFORME
↳ velocità scalare

$v = \omega R$

$$\frac{dv}{dt} = a_T = 0$$

$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R$

• se $a_T \neq 0$ se $\frac{d\omega}{dt} \neq 0$ $\boxed{\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt}}$ accelerazione angolare

$[\alpha] = [t^{-2}]$ Nel S.I. rad/s^2

• Se $\alpha = 0 \rightarrow \omega = \omega_0$ (costante) MOTO CIRCOLARE (moto uniforme)

Posso introdurre il periodo T, il periodo del moto

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad [T] = [t]$$

frequenza $\boxed{\nu = \frac{1}{T}} = \frac{\omega}{2\pi}$

$$[\nu] = [t^{-1}]$$

• Se $\omega = \omega_0$

$$d\phi = \omega dt$$

$$\phi - \phi_0 = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt = \omega_0 (t - t_0)$$

$$\phi_f - \phi_i = \omega_0 (t_f - t_0)$$

$$2\pi = \omega_0 T \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

PER IL MOTO CIRCOLARE

R cost

$$\boxed{v = \omega R}$$

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = \alpha R}$$

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = R\alpha \vec{u}_T + \omega^2 R \vec{u}_n$$

Nel moto circolare uniforme $|\vec{r}| = R$ — x proprietà derivate dei vettori $\vec{v} \perp \vec{r}$

* È nulla la componente tangenziale dell'accelerazione non quella normale

$$\vec{a}(t): \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -R\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

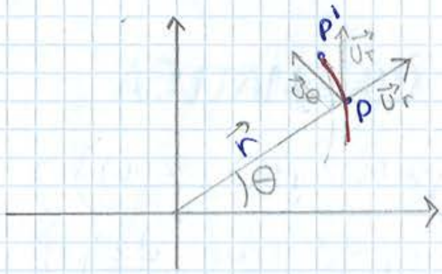
$\boxed{\vec{a} = -\omega_0^2 \vec{r}}$ → direzione radiale ma verso opposto

$\boxed{\vec{a}_n = \omega_0^2 R \vec{u}_n}$ $\quad a_\tau = 0 \quad \vec{a} = a_n \vec{u}_n$

MOTO PIANO IN COORD. POLARI $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$

Per moti vari generali:

$$\begin{cases} \vec{u}_r \neq -\vec{u}_n \\ \vec{u}_\theta \neq \vec{u}_r \end{cases}$$



La coord radiale di $P \neq P'$ ma anche θ è cambiato

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{u}_r(t)$$

$$\boxed{\vec{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} \Rightarrow \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \boxed{v_r \cdot \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta}$$

$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta$

trasverse ($\perp$) rispetto alla direzione radiale

$$\vec{u}_r(\theta) = \cos\theta\,\vec{u}_x + \operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_y = -\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$$

$$\vec{u}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$$

$$\vec{u}_r(\theta(t))$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta\,\omega$$

$$\omega = \dot{\theta}$$

$$\boxed{\vec{a}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{\vec{u}_\theta\dot{\theta}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\underbrace{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}}_{-\dot{\theta}\vec{u}_r}$$

$\rightarrow -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{u}_\theta\,\dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

Per il MOTO CIRCOLARE nel piano (xy)

$$\vec{r} = R\vec{u}_r \qquad \dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad \ddot{\theta} = \alpha, \quad r = R$$

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = R\omega\vec{u}_\theta \rightarrow \vec{u}_\theta = \vec{u}_\tau$$

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$= R\omega^2\underbrace{(-\vec{u}_r)}_{} + r\alpha\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = R\omega^2\vec{u}_n + R\alpha\vec{u}_\tau$$

RIASSUNTO CINEMATICA

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}(t) &= (x(t), y(t), z(t)) \\ \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\end{aligned}\right\} \text{coord. cartesiane}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt}, \frac{d^2z}{dt}\right)$$

DESCRIZIONE INTRINSECA (moto piano)

$$\vec{v} = v\vec{u}_\tau \qquad \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_n$$

DESCRIZIONE IN COORDINATE POLARI (nel piano)

$$\vec{r} = r\vec{u}_\tau \qquad \vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\vec{u}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{u}_\theta$$

Per il MOTO CIRCOLARE nel piano xy, centro in O:

$$r = |\vec{r}| = R \text{ cost} \qquad \vec{u}_\tau = \vec{u}_\theta \qquad \vec{u}_n = -\vec{u}_r$$

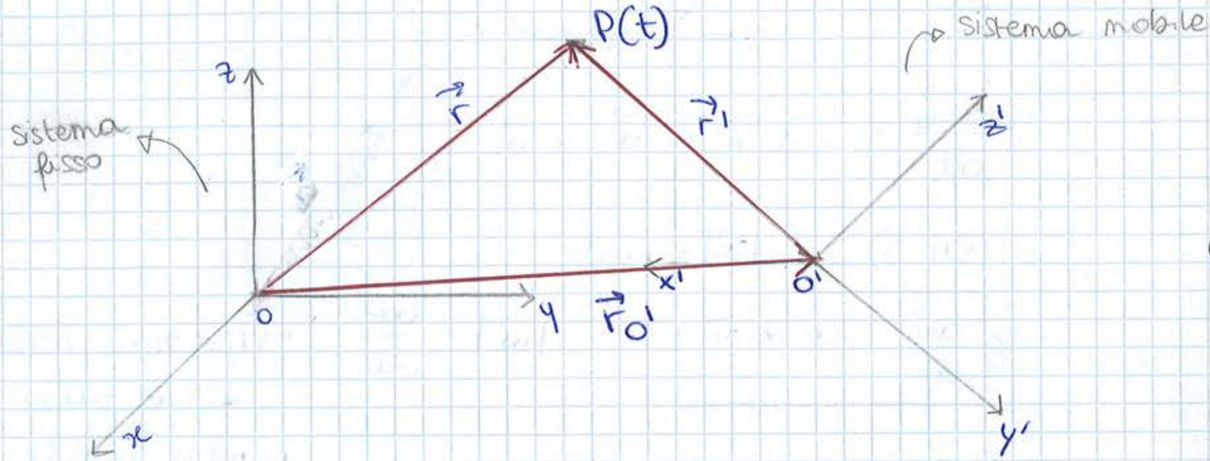
FISICA CLASSICA:

il tempo è ASSOLUTO

⇒ gli intervalli di tempo sono uguali nei sistemi S e S'

[superato da relatività speciale]

$\boxed{t' = t}$ cronometri sincronizzati



costanti

$\vec{OP} = \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$ → sono indipendenti dal tempo

$\vec{O'P} = \vec{r}' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}$ → non sono indipendenti dal tempo, ruotano

$\vec{O'O} = \vec{r}_{O'} = x_{O'}\vec{u}_x + y_{O'}\vec{u}_y + z_{O'}\vec{u}_z$

$\boxed{\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'}}$ → somma vettoriale con il metodo PUNTA-CODA

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}$$

→ VELOCITA' ASSOLUTA

In un dato sistema di riferimento gli assi cartesiani sono FISSI

$$\frac{d\vec{u}_x}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{u}_y}{dt} = 0 \qquad \frac{d\vec{u}_z}{dt} = 0$$

ma $\vec{u}_{x'}(t)$, $\vec{u}_{y'}(t)$, $\vec{u}_{z'}(t)$

$\vec{u}_i$: $\vec{u}_1 = \vec{u}_x$ $\quad \vec{u}_2 = \vec{u}_y$ $\quad \vec{u}_3 = \vec{u}_z$

$\vec{u}_{1'} = \vec{u}_{x'}$ $\quad \vec{u}_{2'} = \vec{u}_{y'}$ $\quad \vec{u}_{3'} = \vec{u}_{z'}$

$\boxed{\vec{u}_i(\Theta(t))}$ x moto relativo nel piano

Analizziamo i singoli contributi

$\vec{\omega} \times \vec{u}_{x'}$ $\quad \vec{\omega} \times \vec{u}_{y'}$

- $$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \underbrace{\frac{dv'_x}{dt}\vec{u}_{x'} + \frac{dv'_y}{dt}\vec{u}_{y'} + \frac{dv'_z}{dt}\vec{u}_{z'}}_{\vec{a}'} + v'_x\frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + v'_y\frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + v'_z\frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}$$

$\vec{\omega} \times \vec{u}_{z'}$

$$\boxed{\frac{dv'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'}$$

Quindi $\longrightarrow$ acc. del sist. in moto

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}_{O'}}$$

$\hookrightarrow$ acc. del sist. in quiete

MOTO RELATIVO TRASLATORIO

$$\frac{d\vec{\omega}_i}{dt} = 0 \qquad (\vec{\omega} = 0)$$

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_{O'} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{O'} \\ \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} \end{cases}$$

Se $\vec{v}_{O'}$ è costante $\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'$

$\Rightarrow$ per Sistema di Riferimento in moto relativo traslatorio uniforme, gli osservatori misurano le stesse accelerazioni nello studio del moto

$\vec{a} \propto \sum_i \vec{F}_i \Rightarrow$ In questi sistemi di riferimento ho la stessa descrizione delle leggi fisiche

SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI = Sistemi di riferimento in quiete o in moto relativo traslatorio uniforme rispetto ai sistemi in quiete

$\triangleright$ $V_{O'}$ = cost

in quiete = fermo rispetto al sistema di riferimento delle stelle fisse

$\vec{OP} = \vec{r} = \vec{r}\,' = \vec{O'P}$

$\vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\vec{r}\,' = x'\vec{u}_{x'} + y'\vec{u}_{y'} + z'\vec{u}_{z'}$

$x \neq x'$, $y \neq y'$, $z \neq z'$ ma $\vec{r} = \vec{r}\,'$ $\left(\omega = \frac{d\theta}{dt} = cost\right)$

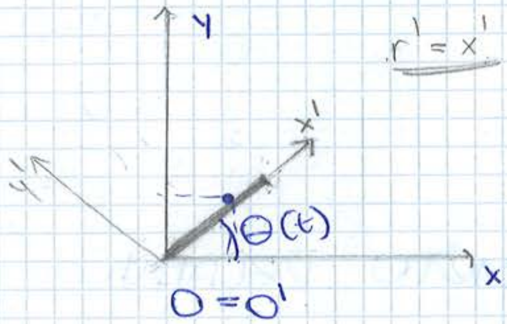
$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{acc. centripeta}} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{\text{acc. di Coriolis}}}$$

Esempio:

Un insetto è su una sbarra vincolata in O, che ruota con $\vec{\omega}$ costante nel piano xy e si muove lungo la sbarra con velocità $\vec{v}\,' = v'u_{x'}$



$r' = x'$

$\vec{r} = r\cos\theta\,\vec{u}_x + r\,\text{sen}\theta\,\vec{u}_y$

$\vec{r}\,' = x'\vec{u}_{x'} = r'\vec{u}_{x'}$

$r' = r$

$\vec{u}_{x'} = \cos\theta\,\vec{u}_x + \text{sen}\theta\,\vec{u}_y$

$$\begin{cases} x(t) = x'(t)\cos\theta \\ y(t) = x'(t)\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}\cos\theta - x'\text{sen}\theta\,\omega \rightarrow$ derivata di θ (derivata di f comp.)

$v' \leftarrow$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dx'}{dt}\text{sen}\theta + x'\cos\theta\,\omega$

$\frac{dx'}{dt} = v' \Rightarrow \frac{dr'}{dt} = \frac{dr}{dt}$

$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\rightarrow \omega x'(-\text{sen}\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y)$

$v' = -\vec{\omega} \times \vec{r}$

$$-2\vec{\omega} \times \vec{v}' = -2\vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{r}) = +2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\vec{a}' = 0 - \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{a}'} + \underbrace{2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{ma bisogna anche tenere conto dell'acc. di Coriolis}} = a' = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

MOTO RELATIVO DELLA TERRA

$T_{riv} = 1y \sim 3,16 \times 10^{+7} s$

$\hookrightarrow \omega_{riv} = 1,99 \times 10^{-7} \, rad/s$

$T_{rot} = 1d = 8,64 \cdot 10^4 s$

$\hookrightarrow \omega_{rot} = 7,29 \times 10^{-5} \, rad/s$

La terra non è un sistema di Riferimento Inerziale perché ruota su se stessa e intorno al sole, $\omega_{riv} << \omega_{rot}$

$$\begin{cases} S' & \text{terra} \\ S & \text{sist. di rif. inerziale} \end{cases}$$

punto di vista della terra

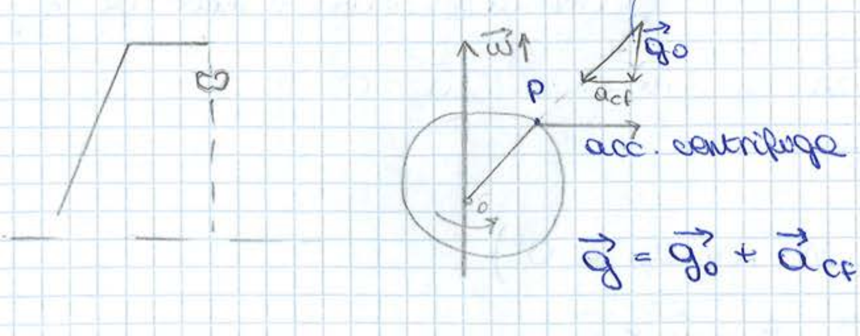
$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \underbrace{- \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{acc. centrifuga}}$$

$g = g_0$

$\vec{g} = \vec{a}'$ (terra) $\rightarrow$ la terra sta ruotando su se stessa

$\vec{g}_0 = \vec{a}$ (sis. rif. in)

Considero $\vec{v}' = 0$



$\vec{g} \rightarrow$ verso sud

$$\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{a}_{cf}$$

$\Rightarrow$ "verticale" è deviata rispetto a $(-\vec{u}_r)$ poiché la terra ruota ($\vec{g}$ non è verso il centro della terra ma è deviata)

- Effetto deviazione MAX = EQUATORE
- Questa deviazione è causata da $\vec{a}_{cf}$

$v' = gt$

$$z(t) = \frac{1}{2} g t^2 - h$$

$$a_x = |a_{col}| = 2\omega v' = 2\omega g t = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v_x = \int_0^t 2\omega g t \, dt = \omega g t^2$$

$$x(t) = \int_0^t v_x(t) \, dt = \frac{1}{3} \omega g t^3$$

$\bar{t}$ istante in cui il corpo tocca terra

$$\bar{t} \cdot z(\bar{t}) = 0 \Rightarrow \bar{t} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$d = x(\bar{t}) = \frac{1}{3} \omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

Ex. se $h = 100$ m $\Rightarrow d = 1{,}53 \cdot 10^{-2}$ m

DINAMICA

- Studio del sistema fisico in interazione con un altro sistema o con l'ambiente.
- Si occupa di capire le cause del moto
L'esperienza ci insegna che il moto di un corpo è il risultato delle sue interazioni con gli altri corpi

↳ FORZE $\Rightarrow$ responsabili della variazione dello stato di moto dei corpi

vettori applicati

Newton (1642 – 1727)
↳ Galileo (1564 – 1642)

$|\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2} = 5\,\mu_F$

NOTA: la stessa forza applicata ad un corpo diverso genererà un'accelerazione diversa

$\vec{F} = m\vec{a}$ chiamiamo massa inerziale (m) il coefficiente di proporzionalità tra $\vec{F}$ e $\vec{a}$

MASSA o INERZIA: è una proprietà intrinseca a un corpo, che misura la sua resistenza, cioè la sua inerzia, a cambiare il suo stato di moto

- consideriamo due corpi A, B $m_A \neq m_B$ applichiamo la stessa forza $\vec{F}$:

$$\vec{F} = m_A \vec{a}_A \qquad \vec{a}_A \neq \vec{a}_B$$
$$\vec{F} = m_B \vec{a}_B$$

$$|\vec{F}| = m_A |\vec{a}_A|$$
$$|\vec{F}| = m_B |\vec{a}_B| \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A}$$

se applico $\vec{F}' \parallel \vec{F}$

$$F' = m_A a'_A$$
$$F' = m_B a'_B \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = \frac{a'_B}{a'_A} = \frac{a_B}{a_A} \Rightarrow$$

il rapporto resta costante anche se cambio le accelerazione

- dipende da proprietà intrinse che di A e B

MASSA: grandezza scalare, intrinseca ad ogni corpo

DEFINIZIONE OPERATIVA

Considero m_c (massa campione) $m_c = \mu_m$, a_c = nota

$$\Rightarrow \frac{m}{m_c} = \frac{a_c}{a} \Rightarrow m = \frac{\mu_m a_c}{a}$$

Nel SI la massa si misura in kg

$1\,kg = 1\,\mu_m$ = massa di $5{,}0183 \cdot 10^{25}$ atomi di ${}^{12}_{6}C$

cambiare la velocità

1ª legge di Newton: $\vec{P} = cost$ per sistemi liberi

2ª legge di Newton: $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$

Se $m =$ costante $\Rightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

In generale: $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a} + \dfrac{dm}{dt} \cdot \vec{v}$ questo contributo è nullo poiché la derivata della $m = cost$ è nullo

Per sistemi a massa variabile l'espressione corretta per la 2ª legge di Newton è $\boxed{\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}}$

Per esempio nei sistemi relativistici

$$v \leq c \Rightarrow m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

3ª legge di Newton

In natura le forze si manifestano sempre in azioni reciproche

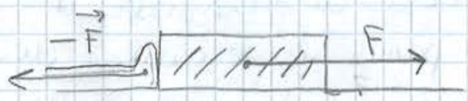
$\Rightarrow$ INTERAZIONI TRA PIÙ CORPI

"Quando A esercita una forza su B, anche B esercita una forza su A, uguale e contraria."

Se ho due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

$\rightarrow$ Vale solo se le due forze sono applicate nello stesso punto



La terza legge di Newton ci dice quindi che le forze vanno pensate come reciproche reazioni tra i corpi coinvolti

$\neq$

Invece due o più forze sono in equilibrio quando la loro risultante sullo stesso corpo è nulla altra $\vec{F}$ ⇒ se provoca sulla molla lo stesso Δl ⇒ dà $|\vec{F}|$

In generale, ha soluzioni numeriche, in casi particolari la soluzione è data in termini di funzioni analitiche (polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche).

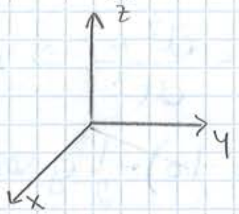
CASI PARTICOLARI

a) **Forze costanti**: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}$

Ex. $\vec{F}_p = m\vec{g}$

2^a Legge di Newton: $F_p = m\vec{a} \Rightarrow \cancel{m}\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \cancel{m}\vec{g}$

$\vec{g} = -g\,\vec{u}_z$



$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases}$$

Condizioni iniziali

$\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v}(t_0) = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$

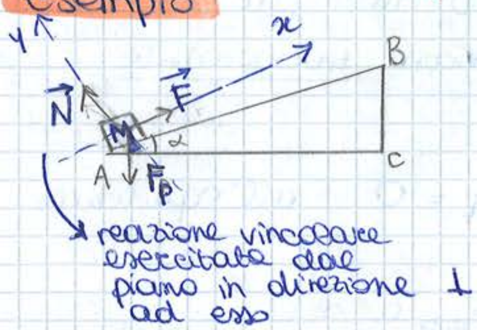
$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0)$ → $\Delta x = \int v\,dv \Rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v_0 + a(t - t_0)$

$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0)$ $\qquad x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) + \cancel{\frac{1}{2}a(t-t_0)^2}$

$z(t) = \underbrace{z_0 + v_{0z}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2}$ $\qquad a = 0$ tranne lungo $\vec{u}_z$

moto unif. accelerato nella direz. // a g

Esempio



Un carrello di massa M viene spinto verso l'alto su un piano inclinato di α liscio. Determinare la forza $\vec{F}$ tale che M si muova di moto uniforme.

Liscio = NO ATTRITO RADENTE

$\sum_i \vec{F}_i = M\vec{a}$ $\qquad \vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F} = M\vec{a}$

Scegliamo un sistema di riferimento

$\vec{F} = F\,\vec{u}_x$

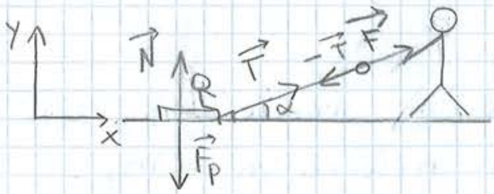
$\vec{N} = N\,\vec{u}_y$

$\vec{F}_p = -Mg\,\text{sen}\,\alpha\,\vec{u}_x - Mg\cos\alpha\,\vec{u}_y$

$\vec{T_1} = -\vec{T_2} = \vec{T} = \vec{F}$ → è come se stessi applicando la forza direttamente al corpo

Esempio

$\vec{T} = \vec{F}$ (per esempio precedente)

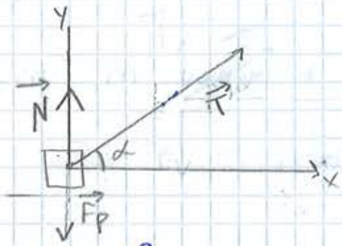


$$\vec{F_p} + \vec{N} + \vec{T} = M\vec{a}$$

$$\vec{a} = a_x \vec{u_x} + a_y \vec{u_y}$$

$$\vec{F_p} = -Mg\,\vec{u_y}$$

$$\vec{T} = F_x \vec{u_x} + F_y \vec{u_y}$$



x: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F\cos\alpha$

y: $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -Mg + N + F\,\text{sen}\,\alpha$

$t_0 = 0$

x: $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{F}{m}\cos\alpha \; t^2$

y: 2 possibili fasi del moto:

a) Se F è sufficientemente debole → solo moto direzione orizzontale (⇆)

a_y $\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}} = 0 \Rightarrow N = Mg - F\,\text{sen}\,\alpha$

(la slitta non "si alza")

Caso limite: la slitta sta per sollevarsi

⇒ F "aiuta" a sostenere M

Al crescere di F, si arriverà a F: $F\,\text{sen}\,\alpha = Mg \Rightarrow N = 0$

b) Se $F > \dfrac{Mg}{\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow F\,\text{sen}\,\alpha - Mg = M\dfrac{d^2y}{dt^2}$

→ Il moto ha una acc. verso l'alto ma non ho più una reazione vincolare del piano perché la slitta è sollevata dal piano (↗)

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

ATTRITO RADENTE

livello microscopico

piano **scabro** ⇒ oppone resistenza al moto.
A livello microscopico il contatto tra le 2 superfici è una zona 10^4 volte più piccola delle superfici che si vedono ad occhio nudo date le irregolarità delle superfici.

• EFFETTO MACROSCOPICO:

Forza in direzione del moto con verso opposto al moto, che NON dipende dall'area della superficie di contatto né dalla velocità, ma dipende dal modulo della forza ⊥ al piano che tiene premuti uno all'altro corpo e piano:

$$|\vec{F}_{a_r}| = \mu |\vec{N}|$$

reazione vincolare

↳ coeff. di attrito

μ: coefficiente di attrito
è ADIMENSIONALE

Sperimentalmente ∃ 2 ≠ coeff. μ per ogni coppia di materiali: μ_s, μ_d

$$\boxed{\mu_s > \mu_d}$$

$\boxed{F_s = \mu_s N}$ dà la forza **MINIMA** necessaria per porre in moto relativo corpo e superficie, inizialmente in quiete.

$\boxed{F \leq F_s}$ il corpo resta fermo

$\boxed{F > F_s}$ il corpo si mette in moto
⇒ F vince i legami intermolecolari

Iniziato il moto l'attrito è minore → per mantenere il corpo in moto uniforme $(a = 0)$ $F_d = \mu_d N < F_s$, è sufficiente $|\vec{F}| = |\vec{F}_d|$

Se $|\vec{F}| = |\vec{F}_d|$ ⇒ moto uniforme
Se $|\vec{F}| = |\vec{F}_s|$ ⇒ moto accelerato

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 266

ATTRITO VISCOSO

$$\boxed{\vec{F}_{av} = -k\eta\vec{v}}$$

k: coefficiente che dipende dalla forma del corpo

$\eta(T)$: coefficiente di VISCOSITÀ, caratteristico del fluido in cui il corpo è immerso

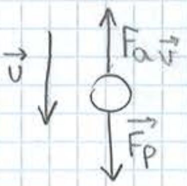
$[k] = L$ per una sfera di raggio R: $k = 6\pi R$

$$[\eta] = [F\,v^{-1}\,L^{-1}] = [M\cancel{L}T^{-\cancel{2}-1}(\cancel{T}L^{-1})\cancel{L^{-1}}] = [M L^{-1} T^{-1}]$$

2ª LEGGE DI NEWTON: $-k\eta\vec{v} = m\vec{a}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-k\eta}{m}\vec{v}$$ eq. diff. a variabili separabili

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-\frac{k\eta}{m}t}$$



$$\vec{F}_p + \vec{F}_{av} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = a\vec{u} \qquad \vec{v} = v\vec{u}$$

$$\underbrace{mg}_{\text{termine costante}} - k\eta v = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k\eta}{m}v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k\eta}{m}\left(v - \frac{m}{k\eta}g\right)$$ ho solo riscritto l'espressione precedente in un modo più conveniente

sostituzione: $v' = v - \frac{m}{k\eta}g$

$dv' = dv \rightarrow$ perché rimane solo dv poiché $\frac{m}{k\eta}g$ è costante

$$\int_{v_0'}^{v'} \frac{dv'}{v'} = -\frac{k\eta}{m}\int_0^t dt$$

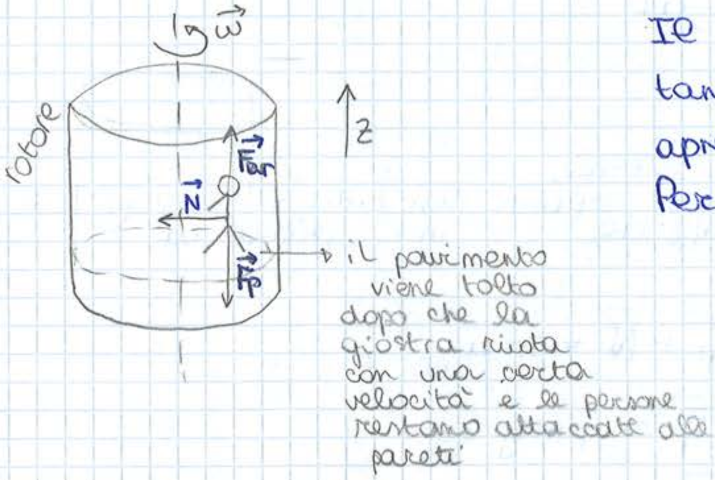
$$\ln\frac{v'}{v_0'} = -\frac{k\eta}{m}t \rightarrow v' = v_0' e^{-\frac{k\eta}{m}t}$$

$$v = \frac{mg}{k\eta} + v_0' e^{-\frac{k\eta}{m}t}$$ ho sostituito le variabili

$$v(t) = \frac{mg}{k\eta} + \left(v_0 - \frac{mg}{k\eta}\right)e^{-\frac{k\eta}{m}t}$$

modo che $\vec{a}$ punti sempre verso il centro del cerchio

Esempio



Il rotore in moto circolare, aumentando v finché il pavimento si apre, ma la persona non cade. Perché?

$$\begin{cases} \vec{F}_{ar} \leq \mu_s N \ \vec{u}_z \\ \vec{F}_p = -mg \ \vec{u}_z \\ \vec{N} = N(-\vec{u}_r) \end{cases}$$

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{ar} + \vec{N} = m\vec{a} = m\omega^2 R \ \vec{u}_n$$

$\vec{u}_z : -mg + \mu_s N = 0$

$\vec{u}_n : N = m\omega^2 R$

non dipende dalla massa

$$\Rightarrow -\cancel{m}g + \mu_s \cancel{m}\omega^2 R = 0$$

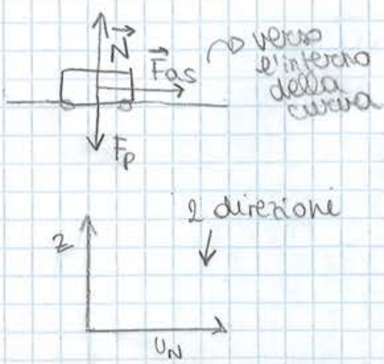
$$\mu_s = \frac{g}{\omega^2 R}$$

questo è un valore limite, dovrei mettere $\mu_s \geq \frac{g}{\omega^2 R}$

- È l'attrito radente a tenere la persona attaccata alle pareti

Esempio

Chi è responsabile di tenere la macchina in strada in curva?
È l'ATTRITO STATICO, fornisce la forza centripeta necessaria a far ruotare l'auto.



$$\vec{F}_p + \vec{N} + \vec{F}_{as} = \frac{mv^2}{\rho} \vec{u}_N$$

z: $N - mg = 0$

n: $F_{as} = \frac{mv^2}{\rho}$

$\vec{u}_r$: $-T + mg\cos\theta = -l\dot{\theta}^2 m$ ①

$\vec{u}_\theta$: $-\cancel{m}g\,\text{sen}\theta = l\dfrac{d^2\theta}{dt^2}\cancel{m}$ ②

$$T = \underbrace{mg\cos\theta}_{\text{reazione vincolare}} + \underbrace{\omega^2 l m}_{\text{centripeta}}$$

② $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}\,\text{sen}\theta}$

Per piccole oscillazioni $\text{sen}\theta \sim \theta$ — $\theta_0 \leq 10°$

$\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}\theta}$ È equazione differenziale del 2° ordine dell'oscillatore armonico

$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$

$x \to \theta$ * $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{\theta} = -A\omega_0\,\text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$

$\ddot{\theta} = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2\theta$ *

Per fissare A, φ (costanti) uso i dati iniziali del problema

$t = 0$ $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$

$\theta(0) = A\cos\varphi = \theta_0$ — $\theta_0 = A$

$\dot{\theta}(0) = -A\omega_0\,\text{sen}(\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ o $\varphi = \pi$ (è partito dall'altra parte)

$A\omega_0$ devono essere $\neq 0$

altrimenti: $A = 0 \to$ non ci sarebbe il moto

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \neq 0$ sempre

$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) \to$ equazione del moto con queste condizioni iniziali $(\varphi = 0)$

$$\left.\begin{array}{l} x \rightarrow x - l_0 \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \tilde{x} = x - l_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \tilde{x}(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \\ x(t) - l_0 = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \end{array}$$

Calcoliamo A e φ note le condizioni iniziali

$x(0) = l_1 < l_0$ $\qquad \dot{x}(0) = 0$

$x(0) = l_0 + A\cos\varphi = l_0 + A = l_1$ $\qquad l_0 - A = l_1$

$-A\omega_0 \operatorname{sen}\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$

$A = l_1 - l_0$

$x(t) = l_0 - (l_0 - l_1)\cos(\omega_0 t)$ oppure

$x(t) = l_0 + (l_0 - l_1)\cos(\omega_0 t + \pi) \rightarrow$ se $\varphi = \pi$

$$l_1 \leq x(t) \leq 2 l_0 - l_1$$

$$-(l_0 - l_1) \leq x - l_0 \leq (l_0 - l_1)$$

INTERAZIONE GRAVITAZIONALE

$\vec{F}_{12} = -G \dfrac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{r_{12}}$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

↳ costante di gravitazione universale

Qui le masse coinvolte sono masse gravitazionali, cioè le cariche dell'interazione gravitazionale.

$$\left.\begin{array}{l} m_G = \text{massa gravitazionale} \\ m_i = \text{massa inerziale} \end{array}\right\} \text{si indicano entrambe con } m$$

È un dato sperimentale che numericamente i due valori coincidono. Questo non è ovvio. È su questo che si basa il principio di equivalenza su cui è fondata la relatività generale.

Consideriamo $m_1 = M_T$ $\quad m_2 = m$ $\quad r \ll R_T$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 266

DINAMICA IN SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI

In un sistema di riferimento inerziale ($\vec{a}_T = 0$)

$\vec{a} = \vec{a}'$ ← acc. in sist. di rif. inerziali

↑

acc. in un sistema di riferimento IN QUIETE

① Per sistemi di riferimento INERZIALI

Osservo $\vec{a}$ se e solo se $\exists$ una forza $\vec{F}$ responsabile di $\vec{a}$.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

② Per sistemi di riferimento non INERZIALE

$$(\vec{a})_S = (\vec{a})_{S'} + \vec{a}_T$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_T$$

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_T$$

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{in}$$

$\boxed{\vec{F}_{in} = -m\vec{a}_T}$ = forza apparente o inerziale o fittizia

S' non inerziale può ancora scrivere la 2^a legge di Newton però purché includa tra le forze anche quelle fittizie.

Esempio

treno $\vec{v}_{cost} = \vec{v}_T$ → velocità di trascinamento

no attriti

S : a terra

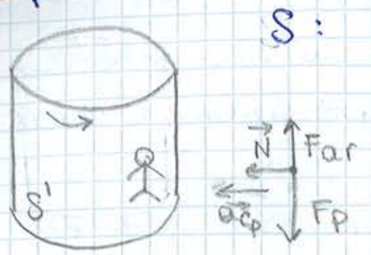
S': sul treno

Per S $\vec{v}_{vag} = \vec{v}_T$

Per S' $\vec{v}_{vag} = 0$

Esempio

S :



$$|\vec{F}_{ar}| \propto |\vec{N}|$$

S' :

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$\vec{P} = m\vec{v}$ $\qquad$ $\vec{P}$ cost per particella libera

$\vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$ $\Rightarrow$ 2^a legge di Newton

- Considero 2 particelle m_1, m_2 con velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ che interagiscono

$$\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1 \ , \quad \vec{P}_2 = m_2\vec{v}_2$$

Supponiamo che la sola forza che agisce su m_1 sia quella dovuta a m_2

$\vec{F}_{21}$: forza che agisce su m_1

La 3^a legge di Newton dice che su m_2 agisce una forza dovuta a m_1:

$$\underbrace{\vec{F}_{12}}_{\text{forza che agisce su } m_2} = -\vec{F}_{21}$$

2^a legge di Newton:

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} \qquad (1)$$

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{P}_2}{dt} \qquad (2)$$

Se sommo (1) e (2):

$$\frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$\Rightarrow$ in questo caso $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{cost} = \vec{P}$

$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$

$\hookrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \cancel{\vec{F}_{21}} + \vec{F}_{31} + \cancel{\vec{F}_{12}} + \vec{F}_{32} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} = \sum_{i=1}^{2} F_i$ esterna

- Per un sistema composto da n particelle

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i$$

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\,int} + \vec{F}_i^{\,est.} \quad , \quad \begin{cases} \vec{F}_i^{\,int} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_{ji} \\ \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \end{cases}$$

risultante delle forze interne esercitate su i

Per 3ª legge di Newton:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,int} = 0$$

(poiché le forze con le componenti 3 non si annullano mentre quelle con componenti 1 e 2 si annullano)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,int}}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,est.}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,est.}}$$

! IL PRINCIPIO di CONSERVAZIONE della QUANTITÀ di MOTO TOTALE per SISTEMI ISOLATI è stato verificato sperimentalmente in tutti i processi fisici.

TEOREMA DELL' IMPULSO

$$\text{impulso } \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt$$

$$= \underbrace{\langle \vec{F} \rangle_{t_1, t_2}}_{\text{valor medio}} \Delta t$$

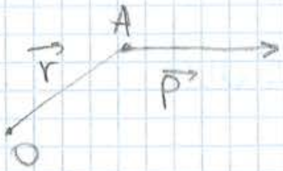
$$\underbrace{\langle \vec{F} \rangle}_{\text{media integrale}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt}{\Delta t} \rightarrow \frac{1}{t_2 - t_1}$$

MOMENTO ANGOLARE

Data particella di massa m, e velocità $\vec{v}$, il momento angolare $\vec{L}$ della particella in A rispetto a O:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}}$$

$$\vec{P} = m\vec{v}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0 \text{ poiché i vettori sono } //} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{\tau}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

N.B.: Questo ha senso solo se $\vec{F}$ e $\vec{P}$ sono applicati nello stesso punto A, e se $\vec{\tau}$, $\vec{L}$ sono calcolati rispettivamente allo stesso polo O.

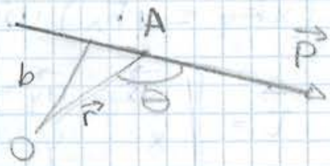
2ª legge di Newton: $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ ↙ 1ª equazione cardinale del moto rotatorio

2ª equazione cardinale del moto (rotatorio) $\rightarrow$ $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ è l'equazione fondamentale del moto rotatorio

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \Sigma \vec{\tau_i}$ $\rightarrow$ le 2 eq cardinali vengono modificate con Σ davanti a F e τ nel caso di n particelle

In quali casi $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$? $\Rightarrow$ 3 casi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$



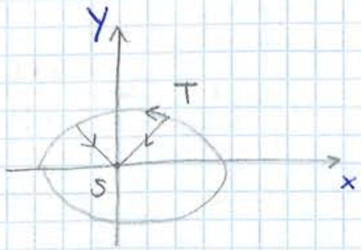
ⓐ $\vec{F} = 0 \rightarrow$ particella libera

$b = r\,\text{sen}\,\theta$ cost. al variare di r, θ sen θ

↳ $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen}\,\theta$ ← poiché A si muove in linea retta $\Rightarrow \perp$ OA = cost

• **Esempio:** moto sotto l'azione di interazione gravitazionale

Se prendiamo come polo la posizione di uno dei due corpi

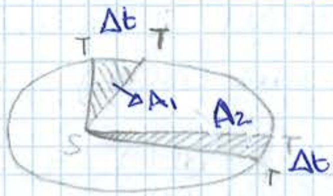


Il sole occupa uno dei due fuochi della traiettoria ellittica della terra.

SISTEMA TS

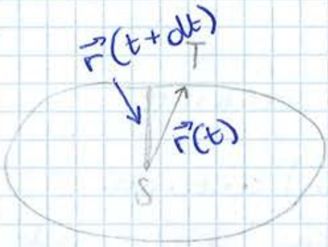
$$\vec{F}_{TS} = -G \frac{M_T M_S}{r^2}$$

$\vec{L}$ costante $\Rightarrow$ **2ª legge di keplero:**

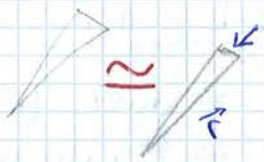


La velocità AREOLARE della Terra intorno al Sole è costante.

Velocità areolare: area spazzata da $\vec{r}$ nell'unità di tempo.



dt piccolo



dA = area spazzata da $\vec{r}$ in dt

area di un triangolo = metà area di un parallelogrammo

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \, dt$$

$$v_A = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \frac{1}{2m} \cdot |\vec{L}|$$

velocità areolare

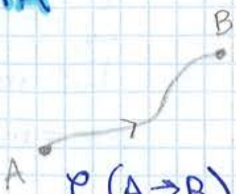
$$\frac{\cancel{m} \, \vec{r} \times \vec{v}}{2\cancel{m}}$$

Dimostrazione 2ª legge di keplero

LAVORO ED ENERGIA

LAVORO $W = \int_{\mathcal{C}(A \to B)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

integrale di linea



$\mathcal{C}(A \to B)$

- $\vec{F}_p$ compie lavoro >0 su un corpo che scende in ascensore, compie $W<0$ su un corpo che sale in ascensore.

- Le forze di attrito si oppongono al moto $\Rightarrow$ producono $W<0$

UNICA ECCEZIONE: ATTRITO STATICO, non produce spostamento $\Rightarrow$ compie lavoro nullo $W=0$

c) Analisi dimensionale

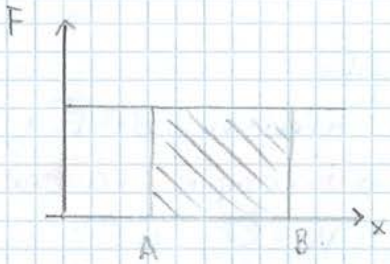
$$[W]=[F][L]=[ML^2t^{-2}]$$

Nel S.I. si misura in Joule.

$$1J=1N\cdot m$$

d) $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i$ risultante di più forze $\Rightarrow$ $W=\sum_i \vec{F}_i\cdot\Delta\vec{\ell}=\sum_i W_i$

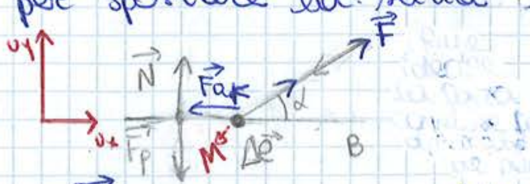
e) In un grafico $F(x)$



W è l'area sottesa da F tra A e B (posizioni rispettivamente iniziale e finale).

Esempio

Un bambino tira una slitta di massa M con una fune ideale, inclinata di α con l'orizzontale. Tra slitta e piano c'è attrito radente ($\mu_k\neq0$). Calcolare W fatto dal bambino per spostare la slitta di $\Delta\vec{\ell}$ orizzontale, se $\vec{v}_{slitta}=cost.$



$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{\ell}$$
$$=F\Delta\ell\cos\alpha$$

- la fune è ideale $\Rightarrow$ è come se la forza fosse applicata dirett. al punto.

$\sum_i \vec{F}_i=0$ x ipotesi ($\vec{v}_{slitta}=cost$ $\Rightarrow$ $a=0$)

Devo trovare F

$$\vec{F}_p+\vec{N}+\vec{F}_k+\vec{F}=0$$

Suppongo $\mu_k \neq 0$ lungo l

CASO B) → uguale al caso precedente, in direzione verticale non c'è attrito.

CASO A) $F_k + F + N + F_p = 0$

$y: N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$

$x: F - mg\,\text{sen}\alpha - \mu_k N = 0 \Rightarrow F - mg\,\text{sen}\alpha - \mu_k mg\cos\alpha = 0$

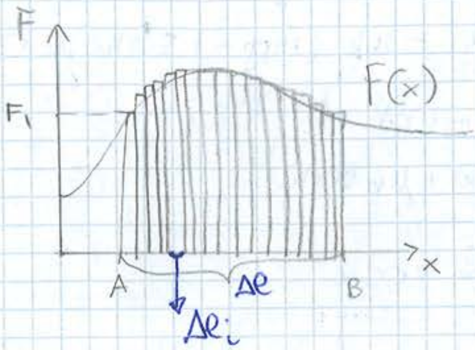
$\Rightarrow F = mg(\text{sen}\alpha + \mu_k\cos\alpha)$

$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta l} \Rightarrow W = mg(\text{sen}\alpha + \mu_k\cos\alpha)\, l$

W DI FORZA VARIABILE

$\vec{\Delta l} = \Delta l\, \vec{u}_x$

$\vec{F} = F(x)\, \vec{u}_x$



$\Delta l = \sum_{i=1}^{N} \Delta l_i$

$F_i = \langle F(x) \rangle_{\Delta l_i}$

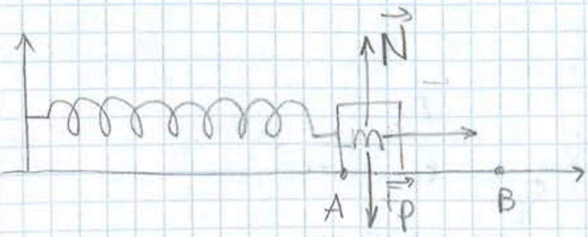
$W_{AB} \approx \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_i F_i \Delta l_i$

Δl_i sempre più piccoli → dl

$W_{AB} = \sum_{i=1}^{N} W_i = \int_A^B F(x)\, dl = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl}$

Esempio :

Considero una molla ideale. Calcoliamo W di forze in gioco tra A e B.



Forze in gioco : $\underbrace{\vec{F_p}, \vec{N}}_{W=0}, \vec{F_e}$

$\vec{F_e} = -k(x - l_0)\, \vec{u_x}$

$\vec{dl} = v\, dt\, \vec{u_x} = dx\, \vec{u_x}$

$A = (R, 0) \quad B = (0, R) \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Retta $A \to B$

$y(x) = R - x$

parametrizzo

$\begin{cases} y(s) = s \\ x(s) = R - s \end{cases} \Rightarrow$ $0 \leq s \leq R$ $\to A \to B$

Se conosco $P(s)$, $s_i \leq s \leq s_f$
$(\ell(A \to B))$

$$P \in \ell \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases} \Rightarrow d\vec{r} = \begin{cases} dx = \frac{dx}{ds} ds \\ dy = \frac{dy}{ds} ds \end{cases}$$

$$W_{\ell(A,B)} = \int_{\ell(A \to B)} [\vec{F}(P(s)) \cdot d\vec{r}(s)]$$

metto solo i punti della traiettoria, cioè che soddisfano l'equazione della traiettoria

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(x,y)\,\vec{u}_x + F_y(x,y)\,\vec{u}_y$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y$$

$$d\vec{r}(s) = \frac{dx}{ds} ds\,\vec{u}_x + \frac{dy}{ds} ds\,\vec{u}_y$$

$$\vec{F}(\vec{r}(s)) = \underbrace{F_x[x(s), y(s)]}_{F_x(s)}\,\vec{u}_x + \underbrace{F_y[x(s), y(s)]}_{F_y(s)}\,\vec{u}_y$$

$$W = \int_\ell [F_x(s)\,dx(s) + F_y(s)\,dy(s)]$$

$$= \int_{s_i}^{s_f} \left(F_x(s) \frac{dx}{ds} + F_y(s) \frac{dy}{ds} \right) ds$$

LAVORO LUNGO IL CAMMINO A → B

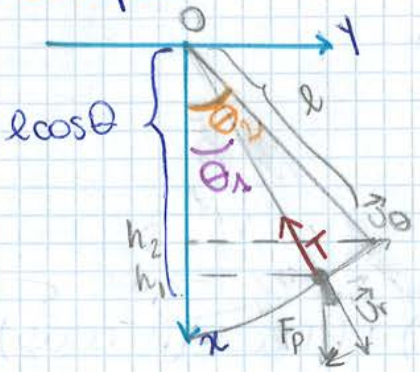
$$\begin{cases} \vec{r}(s) \\ \vec{F}(s) \end{cases} \Rightarrow W_{e(A,B)} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F}(s) \frac{d\vec{r}}{ds} ds$$

$\vec{r}(s_1) = \vec{OA}$ $\quad A=(x(s_1), y(s_1))$

$\vec{r}(s_2) = \vec{OB}$ $\quad B=(x(s_2), y(s_2))$

$$\boxed{W_{e(B,A)} = \int_{s_2}^{s_1} \vec{F}(s) \frac{d\vec{r}}{ds} ds = -W_{e(A,B)}}$$

Esempio



Calcoliamo W delle forze in gioco per spostare m da θ_1 a θ_2 (piccoli)

$\vec{F}_p = mg\cos\theta\,\vec{u}_r - mg\,\text{sen}\theta\,\vec{u}_\theta$

$T = -T\,\vec{u}_r$

Spostamento è lungo un $\boxed{\text{arco di circonferenza}}$ di raggio l.

$s(t) = l\theta(t)$ → per trovare l'arco di circonferenza $\quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

Abbiamo ricavato (vedi esempio del pendolo: $t=0$, $\theta(0)=0$)

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

$W_{e(\theta_1,\theta_2)}$ $\quad \vec{v} = l\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$ → (per moto circolare)

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = l\cos(\theta(t)) \\ y(t) = l\,\text{sen}(\theta(t)) \end{cases}$$

$$d\vec{r}(t) = \vec{v}\,dt = l\frac{d\theta}{dt}dt\,\vec{u}_\theta$$

Parametrizzo il cammino con θ

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) \rightarrow \frac{dv}{dt}v + \frac{dv}{dt}v \Rightarrow 2\frac{dv}{dt}v = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})$$

$$W_{e(A,B)} = \frac{1}{2}m\int_{t_A}^{t_B}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})\,dt = \frac{1}{2}m\int_{t_A}^{t_B}\frac{dv^2}{dt}\,dt$$

$\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$ velocità scalare al quadrato

Cambio variabile di integraz.

$$t \rightarrow v^2(t)$$

$$W_{e(A,B)} = \frac{1}{2}m\int_{v_A^2}^{v_B^2} dv^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$W_{e(A,B)} = E_{K,B} - E_{K,A}$$

N.B per un moto circolare uniforme

$$a_T = 0 = \frac{dv}{dt} \Rightarrow E_K \text{ costante} \Rightarrow W = 0$$

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{dv^2}{dt}\,dt = 0$$

Esempio

Calcolare W su palla da baseball di massa m, se viene lanciata con velocità $\vec{v}$.

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$v_i = 0$ (prima del lancio)

$v_f = v$ (

$$W = \frac{1}{2}mv^2$$

$$W(t) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot \vec{v}\, dt \rightarrow W(t) = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot \underbrace{d\vec{r}}_{\vec{v}}\, dt$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = P$$

Esempio

Data $\vec{F} = F(t)\vec{u}_x$ con $F(t) = m\alpha t$, calcolare W di $\vec{F}$ su una massa m (non soggetta ad altre forze) tra t_1 e t_2 e la potenza massima dissipata in Δt_i e la potenza in t. $[v(0)=0]$ partendo da t_1.

$$F(t)\vec{u}_x = m\vec{a} \qquad \vec{a} = a\vec{u}_x$$

$$\left(\frac{1}{2}\alpha t\right) t = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\frac{dv}{dt} = \alpha t \Rightarrow v(t) = \cancel{v(0)} + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$W_{e(t_1,t_2)} = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v^2(t_2) - \frac{1}{2} m v^2(t_1)$$

$$= \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{4}\alpha^2 (t_2^4 - t_1^4)\right]$$

$$\left(\langle P \rangle_{t_1,t_2} = \frac{W_{t_1,t_2}}{\Delta t} = \frac{m\alpha^2}{8} \frac{t_2^4 - t_1^4}{t_2 - t_1} \right)$$

$$W(t) = \frac{\alpha^2}{8} m (t_2^4 - t_1^4)$$

1° METODO

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\alpha^2}{\cancel{8}_2} m \cancel{4}^{1} t^3$$

$$\|$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\alpha t \cdot \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} m\alpha^2 t^3$$

2° METODO

$$W_e(A,A) = e_1(A,B) + e_2(B,A) = 0$$

NOTA:

$$W_e = \oint_e \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

↓ Il lavoro di una forza conservativa lungo un percorso chiuso è nullo

FORZE NON CONSERVATIVE (Dissipative)

* Forze che dipendono da $\vec{v}$

⇒ forze di attrito non sono conservative: $\vec{F}_{a} \sim \alpha \vec{v}$,

$\vec{F}_{a\,dinamico} \propto \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ ⇒ agisce nella direzione della velocità (si oppone al moto)

$$\vec{F}(x,y) = (F_x, F_y)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \iff \text{è conservativa}$$

$$\left[\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}\right]$$

PROPRIETA' DI FORZE CONSERVATIVE

1) $W_{e_1(A,B)} = W_{e_2(A,B)} = W_{A,B}$

2) $W_e = \oint_e \vec{F}\, d\vec{r} = 0$

3) A $\vec{F}$ è associata $E_p(\vec{r})$ che dipende solo dalla posizione

Esempio

- E_p elastica → $E_p = \frac{1}{2} k (x - l_0)^2$

$$W_{(x_1,x_2)} = E_p(x_1) - E_p(x_2)$$

- E_p forza peso $= mgy$

$$W = mgy_A - mgy_B \rightarrow W = E_p(A) - E_p(B)$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}\overset{0}{\cancel{v_A^2}} + mgz_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 = \cancel{m}g(z_A - z_B) \Rightarrow v_B = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

FORZE CENTRALI → sono conservative

$$\vec{F} = F(r)\vec{u_r}$$

$$W = \int_{\mathcal{C}(A,B)} F(r)\vec{u_r} \cdot d\vec{r} = \int F(r)\, dr$$

$$d\vec{r} = dr\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + \overset{NO}{(r\,d\theta\,\vec{u_\theta})} + r\,\mathrm{sen}\theta\, d\varphi\, \vec{u_\varphi}$$

$$\vec{F} = \frac{-k}{r^2}\vec{u_r} \qquad k = Gm_1m_2 = -\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$W = \left.\frac{k}{r}\right]_A^B = \frac{k}{r_B} - \frac{k}{r_A}$$

$$\Rightarrow E_p(r) = -\frac{k}{r} + C$$

Se $E_p(r \to \infty) = 0 \Rightarrow C = 0$

Esempio

A: $r_A = R_T$ $\quad v_A$? → in A c'è un proiettile

velocità di fuga: v minima per sfuggire all'attrazione della terra.

$\Rightarrow$ B $\quad v_B = 0 \quad r_B = \infty$

$$E_p = -\frac{GmM_T}{r}, \quad E_K = \frac{m}{2}v^2$$

$$E = -\frac{GmM_T}{R_T} + \frac{1}{2}mv_A^2 = 0$$

$$v_A = \sqrt{\frac{2M_TG}{R_T}}$$

* a $t = 0 \Rightarrow E_k = 0, \quad E = E_p = \frac{1}{2}k(x_1 - \ell_0)^2$

* a $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega_0} \rightarrow$ massima velocità

$$E_p = \frac{1}{2}k(x_1 - \ell_0)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega_0^2(x - \ell_0)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$E_k = \frac{1}{2}k(x_1 - \ell_0)^2$$

* a $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$

$$x(t) - \ell_0 = (x_1 - \ell_0)(-1)$$

$$v(t) = 0$$

$\Rightarrow E_k = 0, \quad E_p = \frac{1}{2}k(x_1 - \ell_0)^2 = E$

RELAZIONE TRA $E_p(\vec{r})$ e $\vec{F}$ CONSERVATIVA

*

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p} =$$

$$= -\left[\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z\right]$$

Data $f(x, y)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}\right]_{y = \text{costante}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left[\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\right]_{x = \text{costante}}$$

* Dimostrazione

$$W_{A,B} = -\Delta E_p$$

$$W_{(A,B)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B) = -\int_A^B dE_p$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$$

DIFFERENZIALE

$f(x) \quad df = f(x + dx) - f(x)$

$$= \frac{df}{dx}dx \quad \text{al } 1^\circ \text{ ordine}$$

$$f(x, y, z) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

PER FORZE NON CONSERVATIVE

$$\boxed{W^{nc}_{e\,(A,B)} = E_B - E_A}$$

- Le interazioni fondamentali sono forze conservative
  ⇒ concetto di $F_{\text{non cons}}$ corrisponde all'impossibilità di seguire uno per uno i moti delle particelle elementari che compongono il sistema

  ⇒ le forze non conservative indicano che a livello macroscopico l'energia meccanica può essere convertita in altre forme di energia (ad esempio termica).

- Conoscere le costanti del moto rende più semplice ricavare la traiettoria di una particella:

a) particella libera ⇒ $\vec{P}$ = costante, E costante

$$E = E_k = \frac{p^2}{2m}$$

$$\vec{P} = m\vec{v} = m v \vec{u}$$

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{P}{m} \rightarrow x(t) = \frac{P}{m}t + x(0)$$

b) Moto 1D sotto l'azione di una forza conservativa

$$\vec{F} = F(x)\,\vec{u}_x \Rightarrow E_p(x) \qquad F = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

$$E = E_p(x) + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$ eq. differenziale del 1° ordine

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - E_p(x)$$

$$\hookrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}$$

C'è una radice quadrata ⇒ $E \geq E_p$

⇒ Il moto può avvenire solo se $E \geq E_p$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}}$$

Torniamo alla relazione:

$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$ per forze conservative

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ $\quad F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial E_p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}F_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}}$$

verifichiamo per $E_p = \alpha x^2 y$

$F_x = -2\alpha x y$; $\quad F_y = -\alpha x^2$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -2\alpha x = \frac{\partial F_y}{\partial x} = -2\alpha x$$

Per $\vec{F} = (-ky, kx)$

$F_x = -ky \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -k$

$F_y = kx \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = +k$ $\quad \neq$

- La forza in questo caso non è conservativa

MOTO IN 2D SOTTO L'AZIONE DI FORZE CENTRALI

$\Rightarrow$ si conservano E, L (sono due costanti del moto)

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) \\ L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$ costanti nel moto

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2}$$

$\vec{r} = r\vec{u}_r$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta$$

$$v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \cancel{r^2}\frac{L^2}{m^2r^{\cancel{4}2}}$$

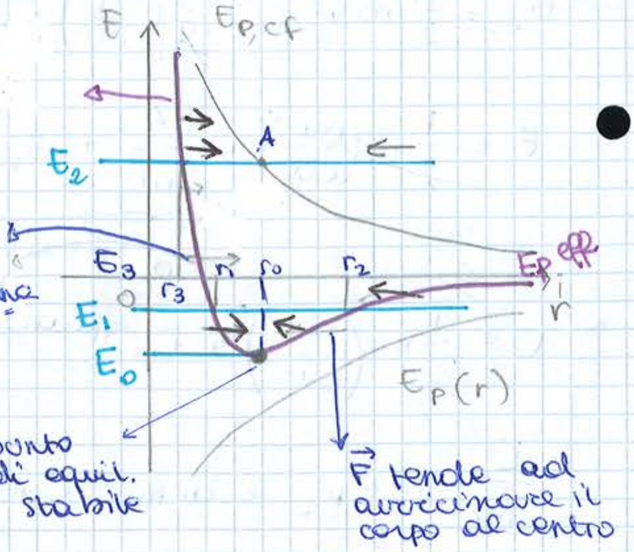
Esempio

$$\left.\begin{array}{l} E_p(r) = -\dfrac{k}{r} \\ E_{p,cf}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} \end{array}\right\} E_p \text{ eff.}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2(t)}$$

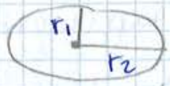
$$\vec{F} = F(r)\,\vec{u}_r$$

$$F_r = -\frac{\partial E_p}{dr}$$



1) Se $E = E_0 \Rightarrow r(t) = r_0$ moto circolare uniforme con $\omega = \dfrac{L}{mr_0^2}$

2) Se $E = E_1 \Rightarrow r_1 \leq r \leq r_2$
moto ellittico



3) Se $E = E_2$ il moto non è più chiuso; traiettoria aperta (iperbole)
Fino al punto A il corpo riceve una "spinta" poiché la forza tende ad avvicinare il corpo, poi inizia a sentire la forza che tende a farla allontanare, decelera

4) Se $E = E_3 = 0$

parabola

DINAMICA DEI SISTEMI DI PARTICELLE

L'evoluzione di un sistema di particelle si può sempre decomporre nel moto del CENTRO DI MASSA, e nel moto relativo tra i costituenti del sistema.

CENTRO DI MASSA:

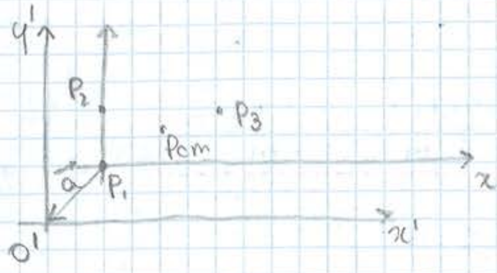
Considero un sistema di due particelle:

Esempio

Dato un sistema di riferimento S, consideriamo un altro sistema di riferimento (S') traslato di $\vec{a}$ rispetto a S.

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a}$$

$$\vec{r}_i\,' = \vec{r}_i + \vec{a} \qquad \forall i = 1, \dots, n$$



$$\vec{r}\,'_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\,'$$

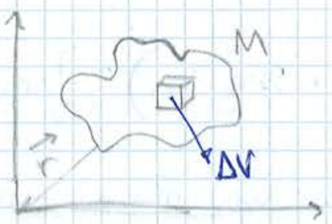
$$= \frac{1}{M}\sum_i m_i(\vec{r}_i + \vec{a})$$

$$\vec{r}\,'_{cm} = \vec{r}_{cm} + \frac{1}{\cancel{M}}\underbrace{\sum_i m_i}_{\cancel{M}}\vec{a} \rightarrow \text{prop. distrib.} \rightarrow \sum m_i r_i = \vec{r}_{cm}$$

$$\vec{r}\,'_{cm} = \vec{r}_{cm} + \vec{a}$$

$|\vec{r}_i\,' - \vec{r}\,'_{cm}| = |\vec{r}_i + \cancel{\vec{a}} - (\vec{r}_{cm} + \cancel{\vec{a}})| = |\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}|$ = la posizione delle particelle relativa al centro di massa **NON** dipende dal sistema di riferimento.

COME SI GENERALIZZA AD UN CORPO ESTESO?



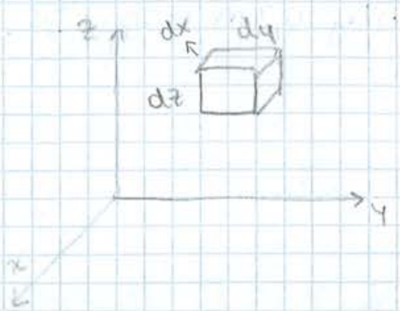
Def: **DENSITÀ DI MASSA** (ρ)

$$\rho \text{ media } (\Delta\rho) = \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

Δm = quantità di massa in ΔV

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

dV = volume infinitesimo dal punto di vista macroscopico ma ancora composto da un numero molto grande di molecole = <u>elemento di volume</u>



In coordinate cartesiane

$dV = dx\,dy\,dz$

$$= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i = \frac{\vec{P}}{M}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = M\vec{v}_{CM}$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO del CENTRO DI MASSA:

Ha origine in $\vec{r}_{CM}$ $\Rightarrow$ in questo sistema di riferimento il centro di massa è in quiete $\Rightarrow \vec{P}=0$

In generale non è un sistema di riferimento inerziale a meno che il sistema sia ISOLATO

Su un sistema agiscono $\vec{F}^{ext}$, $\vec{F}_{ij}^{int}$ $\rightarrow$ $\vec{F}_{ij}^{int} = -\vec{F}_{ji}^{int}$

$\hookrightarrow \sum_{part} \vec{F}_{ij}^{int} = 0$ ← particelle

$$\vec{F}^{ext} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

*

MOTO RELATIVO DEI COSTITUENTI DEL CORPO

Considero un sistema isolato di 2 particelle $(m_1, \vec{r}_1), (m_2, \vec{r}_2)$

Su m_1: $\vec{F}_{12} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt}$ $\qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

Su m_2: $\vec{F}_{21} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt}$

Calcolo il moto relativo di m_1 rispetto a m_2

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{a}_{12} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \underbrace{\frac{\vec{F}_{21}}{m_2}}_{-\vec{F}_{12}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} \Rightarrow \vec{a}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{\mu}$$

Def: μ = MASSA RIDOTTA DEL SISTEMA

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{(m_1+m_2)\vec{r}_1 - \cancel{m_1\vec{r}_1} - m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$$\begin{cases} \vec{r}_1' = \dfrac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm} = \dfrac{-m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_1-\vec{r}_2) \end{cases}$$

$$m_1\vec{v}_1' = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_{12}$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

derivata di $\vec{r}_1'$

$$\begin{cases} \vec{v}_1' = \dfrac{m_2}{M}\vec{v}_{12} \\ \vec{v}_2' = -\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_{12} \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{p}_1' = \underbrace{\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)}_{\mu}\vec{v}_{12} = \mu\vec{v}_{12}$$

$$\vec{p}_2' = -\frac{m_2 m_1}{m_1+M_2}\vec{v}_{12} = -\mu\vec{v}_{12}$$

In questo sistema di riferimento $\boxed{\vec{p}_1' = -\vec{p}_2'}$

$\longrightarrow \quad \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p} = \vec{0} \Rightarrow$ perché il cm è fermo in questo sistema di riferimento

$$\boxed{\vec{F}_{12} = \mu\vec{a}_{12} = \frac{d\vec{p}_1'}{dt}}$$

- In generale non è un sistema di riferimento INERZIALE

Su una particella i-esima

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{int} = 0, \quad \sum_i \vec{F}_i^{ext} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{F}_i' = \vec{F}_i - \underbrace{m_i\vec{a}_{CM}}$$ forza apparente = MOTO DEL CENTRO DI MASSA

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i' = \sum_i \vec{F}_i^{ext} + \cancel{\sum_i \vec{F}_i^{int}}^{\,0} - M\vec{a}_{CM}$$

$$= M\vec{a}_{cm} - M\vec{a}_{CM} = \vec{0}$$

E_k^{int} nel sistema di riferimento del centro di MASSA

$$E_k^{int} = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$$

$$|\vec{v}_1'| = \frac{m_2}{M}|\vec{v}_{12}| = \frac{m_2}{M}\cdot\frac{|\vec{p}_1'|}{\mu} = \frac{\cancel{m_2}\cancel{M}}{\cancel{M}m_1\cancel{m_2}}|\vec{p}_1'|$$

Se le forze interne sono CONSERVATIVE

$\Rightarrow W_{int} = E_p(A) - E_p(B)$

$\Rightarrow W_{ext} = E_{K,B} - E_{K,A} + E_p(B) - E_p(A)$

$= (E_{K,B} + E_p(B)) - (E_{K,A} + E_p(A))$

URTI

Processi che coinvolgono particelle in moto relativo che interagiscono in una regione di spazio limitata (ΔV) e in un intervallo di tempo breve.

$\Rightarrow$ sotto l'azione di FORZE IMPULSIVE ($\Delta t = t_2 - t_1$ piccolo)

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

Se Δt è piccolo e $\Delta\vec{P}$ finita

$\Rightarrow |\vec{F}|$ molto grande in Δt

$\Rightarrow$ Tutte le altre forze sono trascurabili in Δt rispetto a quelle impulsive

$\Rightarrow$ In fenomeni di URTO ho sistemi composti da particelle

1. che nello stato iniziale sono libere

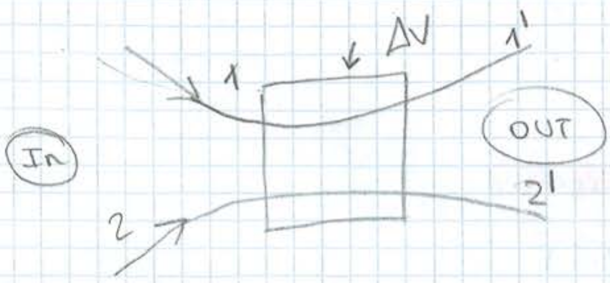
$$\Rightarrow \vec{P}^{in} = \sum_i \vec{P}_i^{in} = cost$$

2. INTERAZIONE DOVUTA a FORZE IMPULSIVE INTERNE

3. Stato finale delle particelle libere

$$\vec{P}^{OUT} = \sum_\alpha \vec{P}_\alpha^{OUT} = \vec{P}_i^{IN} \Leftarrow \text{poiché le forze impulsive sono interne}$$

$\Rightarrow$ SISTEMA ISOLATO



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 111 di 266

- Se ho un urto elastico: $E_k^{in} = E_k^{out}$ — 1 equaz. in più — d-1 parametri da determinare
- Se ho un urto anelastico: d parametri da determinare

Esempio

$d = 1$ $(m_1, v_1^{in}, v_1^{out})$, $(m_2, v_2^{in}, v_2^{out})$

URTO ELASTICO:
$$\begin{cases} m_1 v_1^{in} + m_2 v_2^{in} = m_1 v_1^{out} + m_2 v_2^{out} \\ \frac{1}{2} m_1 (v_1^{in})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{in})^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^{out})^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^{out})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_1^{in} - m_1 v_1^{out} = -m_2 v_2^{in} + m_2 v_2^{out} \\ \frac{1}{2} m_1 (v_1^{in\,2} - v_1^{out\,2}) = \frac{1}{2} m_2 (v_2^{out\,2} + v_2^{in\,2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1^{in} - v_1^{out}) = m_2 (v_2^{out} - v_2^{in}) \\ \cancel{\frac{1}{2}} m_1 (v_1^{in} - v_1^{out})(v_1^{in} + v_1^{out}) = \cancel{\frac{1}{2}} m_2 (v_2^{out} - v_2^{in})(v_2^{out} + v_2^{in}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (v_1^{in} - v_1^{out}) = m_2 (v_2^{out} - v_2^{in}) & (1) \\ m_1 \cancel{(v_1^{in} - v_1^{out})}(v_1^{in} + v_1^{out}) = m_1 \cancel{(v_1^{in} - v_1^{out})}(v_2^{out} + v_2^{in}) & (2) \end{cases}$$

↳ Se $v_1^{in} \neq v_1^{out}$

$$\rightarrow v_1^{in} + v_1^{out} = v_2^{in} + v_2^{out}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2 v_1^{in} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_2^{out} + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v_2^{in}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2 v_1^{out} = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_2^{in} + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) v_2^{out}$$

$$\begin{cases} v_1^{out} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^{in} + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2^{in} \\ v_2^{out} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1^{in} - \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2^{in} \end{cases}$$

* Per determinare i segni delle velocità parto da v_1^{in} di cui conosco il segno (stabilisco un s. Rif), poi stabilisco gli altri a seconda che siano concordi a v_1^{in} o no.

URTO IN 2D

$\vec{v}_1^{\,OUT}$, $\vec{v}_2^{\,OUT}$ $(\vec{v}_{1x}^{\,out}, \vec{v}_{1y}^{\,OUT})(\vec{v}_{2x}^{\,OUT}, \vec{v}_{2y}^{\,OUT})$

a) urto completamente anelastico

$\vec{p}^{\,in} = \vec{p}^{\,OUT}$ $\quad m_1\vec{v}_1^{\,in} + m_2\vec{v}_2^{\,in} = m_1\vec{v}_1^{\,OUT} + m_2\vec{v}_2^{\,OUT}$

$\rightarrow \vec{v}_1^{\,OUT} = \vec{v}_2^{\,OUT} = \vec{v}_{CM}$

$$\vec{v}_{OUT} = \frac{m_1\vec{v}_1^{\,in} + m_2\vec{v}_2^{\,in}}{m_1 + m_2} \qquad m_1\vec{v}_1^{\,in} + m_2\vec{v}_2^{\,in} = (m_1+m_2)\,\vec{v}_{CM}$$

b) urto parzialmente anelastico

$\vec{P} = cost \Rightarrow$ 2 equazioni $\Rightarrow$ rimangono due incognite da determinare con esperimenti

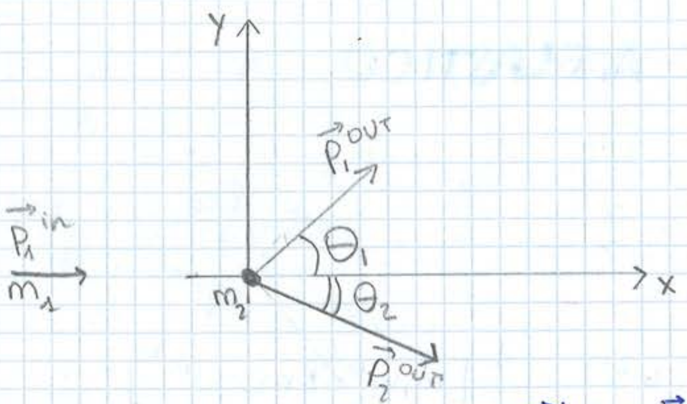
c) urto elastico

$$\begin{cases} \vec{P} = cost \\ E_k^{in} = E_k^{OUT} \end{cases}$$

3 equazioni
1 incognita
non fissata da vincoli cinematici

URTO IN DUE SISTEMI DI RIFERIMENTO

URTO ELASTICO



$\boxed{\vec{P}_2^{\,in} = 0}$

Conservazione di $\vec{P}$:
$$\begin{cases} \vec{P}_1^{\,in} = \vec{P}_1^{\,OUT} + \vec{P}_2^{\,OUT} \\ \dfrac{(\vec{P}_1^{\,in})^2}{2m_1} = \dfrac{(\vec{P}_1^{\,OUT})^2}{2m_1} + \dfrac{(\vec{P}_2^{\,OUT})^2}{2m_2} \end{cases}$$
$\leftarrow$ energia cinetica

x: $P_1^{in} = P_1^{OUT}\cos\theta_1 + P_2^{OUT}\cos\theta_2$

y: $0 = P_1^{OUT}\operatorname{sen}\theta_1 + P_2^{OUT}\operatorname{sen}\theta_2$

$$\frac{(P_1^{in})^2}{2m_1} = \frac{(P_1^{OUT})^2}{2m_1} + \left(\frac{P_2^{OUT}}{2m_2}\right)^2$$

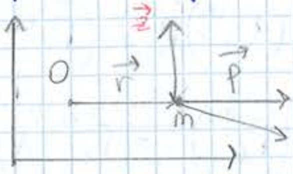
- URTO ELASTICO $q = p$
- URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO $\vec{q} = 0$ → • ← i non si muovono più

MOTO ROTAZIONALE di un sistema di particelle

Momento angolare di una particella rispetto al polo O

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\vec{r}$ = posizione della particella rispetto al polo



$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + \dot{\theta} r \vec{u}_\theta$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

$$= mr^2\dot{\theta}\,\vec{u}_z$$ ← non considero la velocità radiale poiché è // a $\vec{r}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

Considero ora un sistema di due particelle interagenti

Il momento meccanico delle 2 particelle rispetto al polo O è

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \sum_i \vec{F}_{i1} = \frac{d\vec{L}_1}{dt}$$

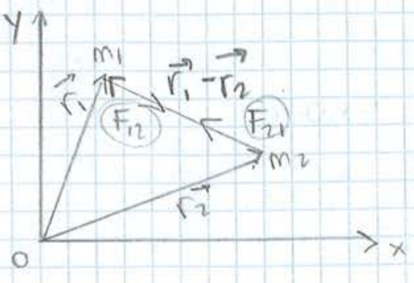
$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \sum_i \vec{F}_{i2} = \frac{d\vec{L}_2}{dt}$$

Su m_1 agiscono $\vec{F}_{12}^{int} + \vec{F}_1^{ext}$

Su m_2 $\vec{F}_{21}^{int} + \vec{F}_2^{ext}$

$$\vec{F}_{12}^{int} = -\vec{F}_{21}^{int} = \vec{F}_{12}$$ 3ª legge di Newton

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_{12} + \vec{F}_1^{ext}), \quad \vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_{21} + \vec{F}_2^{ext})$$



Def $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\vec{F}_{12}}_{0} + \underbrace{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{ext}}_{\vec{\tau}_1^{ext}} + \underbrace{\vec{r}_2 \times \vec{F}_2^{ext}}_{\vec{\tau}_2^{ext}}$$

Solitamente → $\vec{F}_{1,2} \,//\, \vec{r}_{12}$

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{cm} = \frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_{12} \qquad \vec{P}_2' = -\vec{P}_1'$$

$$\vec{L}_c = \vec{r}_1' \times \vec{P}_1' + \vec{r}_2' \times \vec{P}_2'$$

↳ Momento angolare totale con polo nel centro di massa.

$$\vec{L}_c = (\vec{r}_1' - \vec{r}_2') \times \vec{P}_1' = \vec{r}_{12} \times \mu \vec{v}_{12}$$

$\vec{P}_1' = \mu \vec{v}_{12}$

$\vec{r}_1' - \vec{r}_2' = \vec{r}_{12}$

$\vec{L}_c$ dipende SOLO da quantità intrinseche al sistema

Vediamo com'è legato $\vec{L}_c$ a $\vec{L}$ nel sistema di riferimento del laboratorio con polo nell'origine

$$\vec{P}_i = \vec{P}_i' + m_i\vec{v}_{cm}$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{cm}$$

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times P_2$$

$$= (\vec{r}_1' + \vec{r}_{cm}) \times (\vec{P}_1' + m_1\vec{v}_{cm}) + (\vec{r}_2' + \vec{r}_{cm}) \times (\vec{P}_2' + m_2\vec{v}_{cm})$$

$$\vec{L} = \overbrace{(\vec{r}_1' \times \vec{P}_1' + \vec{r}_2' \times \vec{P}_2')}^{L_c} + \vec{r}_{cm} \times \overbrace{(\vec{P}_1' + \vec{P}_2')}^{=0 \; P_1} + \underbrace{(m_1\vec{r}_1' + m_2\vec{r}_2')}_{=0 \text{ vedi definizione di } \vec{r}_1' \text{ e } \vec{r}_2'} \times \vec{v}_{cm} +$$

$$+ (m_1+m_2)\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_c + \overbrace{(m_1+m_2)\vec{r}_{cm} \times \vec{v}_{cm}}^{\text{mom. angolare del centro di masse}}}$$

Anche per E_k

$$\boxed{E_k = E_k^{int} + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2} \qquad M = m_1 + m_2 = \sum_i m_i$$

Abbiamo trovato: $\vec{\tau}_{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

(se $\vec{v}_0 = 0$)

$$\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{r}_{cm} \times \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_c}{dt} + \cancel{\vec{v}_{cm} \times \vec{P}} + \vec{r}_{cm} \times \frac{d\vec{P}}{dt} \quad *$$

sono ∥

RELAZIONI DINAMICHE

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^{ext}$$ 1ª eq. cardinale

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{ext}$$ 2ª eq. cardinale

Se sul sistema agiscono forze conservative

$$U = E_K + E_P^{int} \Rightarrow W^{ext} = \Delta U$$

- $\vec{F}_{ext} = 0$ (= SISTEMA ISOLATO)
  - ↳ $\vec{P}$ costante
- $\vec{\tau}^{ext} = 0$ (= FORZE ESTERNE CENTRALI)
  - ↳ $\vec{L}$ costante
- Se sul sistema agiscono SOLO forze conservative → $E = cost$

CORPO RIGIDO

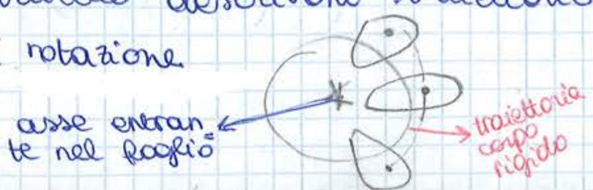
Sistema di particelle in cui le distanze tra le particelle che lo compongono restano COSTANTI ⇒ conserva la sua forma durante il moto.

2 TIPI DI MOTO PER IL CORPO RIGIDO

1. TRASLAZIONE: le particelle descrivono traiettorie parallele tra loro.

Le rette che uniscono due punti sono sempre // alla direzione iniziale.

2. ROTAZIONE di CORPO RIGIDO intorno a un asse: tutte le particelle descrivono traiettorie circolari intorno all'asse di rotazione



L'asse di rotazione può cambiare durante il moto.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 121 di 266

$m_i \to dm(\vec{r}) = \rho(x,y,z)\,dV$

$R_i \to R(\vec{r}) = R(x,y,z)$

$$I_z = \iiint_V R^2(\vec{r})\,\rho(\vec{r})\,dV$$

$$= \iiint R^2(x,y,z)\,dm(x,y,z)$$

$\vec{L}$ non è legato in modo semplice a $\vec{\omega}$, in generale, anche se $L_z = I_z\omega \to$ valido sempre.
proiezione lungo l'asse di rotazione

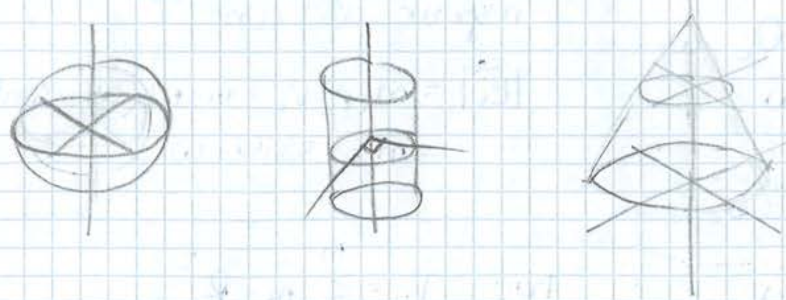
- Si può dimostrare che per ogni corpo esistono almeno 3 direzioni mutuamente ortogonali per le quali $\vec{L}$ è parallelo a $\vec{\omega}$, cioè all'asse di rotazione.

Questi assi si chiamano ASSI PRINCIPALI D'INERZIA la cui caratteristica è quella di passare tutti per il centro di massa del corpo.

I corrispondenti momenti di inerzia si chiamano MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA I_1, I_2, I_3

- Se l'asse di rotazione è principale: $\boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$
- Per un asse di rotazione non principale: $\vec{\omega}$ // asse di rotazione, ma $\vec{L}$ non è // a $\vec{\omega}$

Quando il corpo è omogeneo (ρ costante) e possiede qualche simmetria $\Rightarrow$ assi principali coincidono con gli assi di simmetria



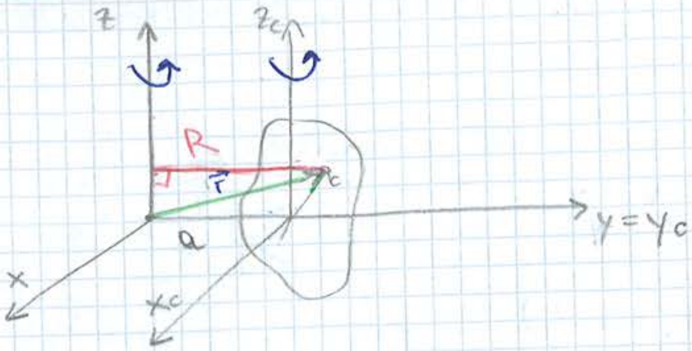
(Per la rotazione del corpo rigido intorno ad un asse principale

$\vec{L} = I\vec{\omega}$

$\Updownarrow$

$\vec{P} = m\vec{v}$)

Dimostrazione



$$\vec{r} = \vec{r}_c + a\vec{u}_y$$

$$\begin{cases} x = x_c \\ y = y_c + a \\ z = z_c \end{cases}$$

$$R^2 = x^2 + y^2 = x_c^2 + (y_c + a)^2$$

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 =$$

$$= \sum_i [m_i (x_{ic}^2 + y_{ic}^2 + 2a y_{ic} + a^2)]$$

$$= \sum_i m_i \underbrace{(x_{ic}^2 + y_{ic}^2)}_{R_{ic}^2} + 2a \sum_i (m_i y_{ic}) + \sum_i m_i a^2$$

posiz. del centro di massa rispetto al S. Rif del centro di massa → CM è nell'origine tutte le componenti sono nulle

$$I_z = I_{zc} + 2aM\overset{0}{y_c} + Ma^2$$

$$y_{ic} = y'$$

$$\vec{r}_c = \sum_i m_i y_i' = My'_{cm} = 0$$

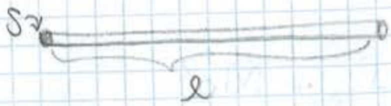
$$\Rightarrow \quad I_z = I_{zc} + Ma^2$$

$$I_{lab} = I_c + Ma^2$$ per due assi di rotazione paralleli

CASI PARTICOLARI

Quando una o più dimensioni del corpo rigido sono molto più sottili rispetto alle altre:

1. Sbarra sottile $\quad S << l^2$



2. Disco sottile $\quad d << R$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 125 di 266

Scelgo le coordinate polari nel piano $x_c\, y_c$ (cilindriche in $x_c\, y_c\, z_c$)

$dV = h\, 2\pi r\, dr$ ← volume dell'anello

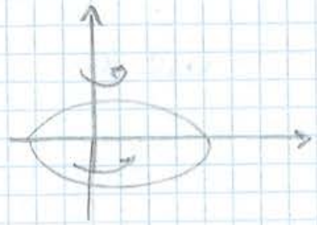
anello a distanza r da O spesso dr e altezza h

$R^2 = x^2 + y^2 = r^2$

$$I_{zc} = \rho \int_0^R r^2 h\, 2\pi r\, dr = \rho h 2\pi \int_0^R r^3 dr = \rho h 2\pi \frac{R^4}{4}$$

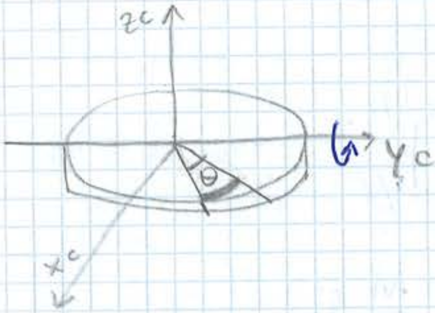
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{h\pi R^2}$$

$$I_{zc} = \frac{M}{\cancel{h}\cancel{\pi}\cancel{R^2}} \cdot \cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{h} \frac{R^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{4}\,2} = \frac{1}{2} MR^2$$



Quanto vale I_{xc}, I_{yc}?

Cambio asse di rotazione



$$I_{yc} = \rho \int R^2 dV$$

$$R^2 = x^2 + z^2 \cong x^2$$

$$dV = h\, dr\, r\, d\theta$$

$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

I di un disco omogeneo

$$I_{yc} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho x^2 h r\, dr\, d\theta$$

$$x = r\cos\theta$$

$$I_{yc} = \left[\rho h \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\; r^3 \cos^2\theta\right]$$

$$= \rho h \left[\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta\right]\left[\int_0^R r^3 dr\right]$$

$$I_{yc} = \frac{1}{4} MR^2$$

moto rotatorio	moto traslatorio
$\vec{\omega}$	$\vec{v}$
$\vec{\alpha}$	$\vec{a}$
I	M
$\vec{L}$	$\vec{p}$
$\vec{\tau}$	$\vec{F}$

$$\begin{cases} \vec{F}^{ext} = \dfrac{d\vec{P}}{dt} \\ \vec{\tau}^{ext} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

Impostando questo sistema si risolvono i problemi.

Se $\vec{\tau}^{ext} = 0 \Rightarrow \vec{L} = $ costante $\Rightarrow I\vec{\omega}$ costante nei due casi

* Se $\dfrac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\omega}$ costante poiché I cost $\Rightarrow I\vec{\omega}$ cost $\Rightarrow \vec{\omega}$ cost

* Se $\dfrac{dI}{dt} \neq 0 \Rightarrow$ all'aumentare di I diminuisce ω e viceversa

a2) z non è principale

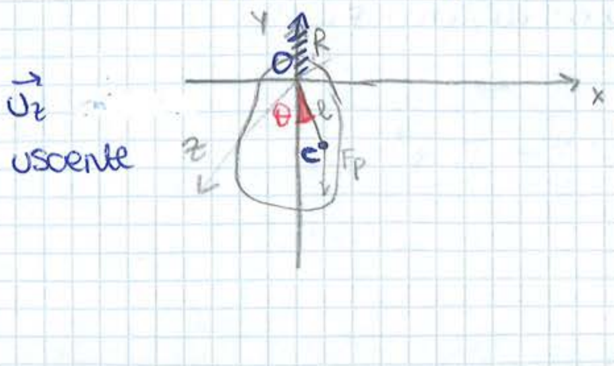
$$L_z = I\omega$$

$$\tau_z^{ext} = \frac{d}{dt}(I\omega) \quad \left(\text{se } \tau^{ext} = 0 \Rightarrow L \text{ cost} \Rightarrow I\omega \text{ cost}\right)$$

b) posso usare $\vec{\tau}_c = \dfrac{d\vec{L}_c}{dt}$

PENDOLO FISICO

Corpo rigido di massa M e momento di inerzia I rispetto all'asse (z), libero di ruotare intorno all'asse fisso orizzontale (z) per un punto fisso O.



$l = OC$

R = reazione vincolare

$\vec{F}_p = -Mg\,\vec{u}_y$, in C

$\vec{R} = R\vec{u}_y$, in O

z non è principale $\Rightarrow \tau_z = I\dfrac{d\omega}{dt}$

$I_z = I_c + MR^2 = 2MR^2$

steiner

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$ → periodo uguale a quello di un pendolo semplice di lunghezza pari al diametro dell'anello

ENERGIA CINETICA DI ROTAZIONE per CR

$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2$ (per un sist. di particelle)

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ $\quad |\vec{v}_i| = \omega \underbrace{r_i \operatorname{sen}\theta_i}_{R_i} = \omega R_i$

$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

PER MOTO DI ROTO-TRASLAZIONE

$E_k = E_k^{int} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$ (per un sist di particelle)

Energia cinetica interna ⇒ rispetto al centro di massa

Per un corpo rigido: $E_k^{int} = \frac{1}{2} I_c \omega^2$ → rotazione con l'asse passante per il centro di massa

ENERGIA MECCANICA per CR

$W^{ext} = E_{kf} - E_{ki}$

$E_p^{int} = cost$

Se le forze esterne sono conservative

$W^{ext} = E_{pi}^{ext} - E_{pf}^{ext}$

$E_{p,i}^{ext} - E_{pf}^{ext} = E_{kf} - E_{k,i} + E_{p,f}^{int} - E_{p,i}^{int}$ aggiungo 0 (la differenza è 0)

$\Rightarrow \boxed{E = E_p^{ext} + E_p^{int} + E_k}$ costante

$E_{p,i}^{int} = E_{pf}^{int}$ ← ho usato → perché solo le forze ext compiono lavoro

Posso studiare questo moto in 2 modi:

1) pura rotazione intorno all'asse per O (asse di istantanea rotazione)

Scelgo un sist di rif in O

2) Come roto-traslazione con $\vec{v}_O = 0$

Scelgo un sist di rif in C

$\vec{r} = \vec{r}_{cm} + \vec{r}\,'$

C = centro di massa

$\vec{v} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}\,'$

Condizione $\vec{v}_O = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_O\,' = -\vec{v}_{cm}}$

↳ per puro rotolamento

$\vec{r}_O = 0 \Rightarrow \vec{r}_O\,' = -\vec{r}\,'_{cm} \Rightarrow \vec{CO} = -\vec{OC}$

1) pura rotazione intorno all'asse per O

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v}_{cm} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{cm}}$$

$$E_K^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

2) roto-traslazione:

$$E_K^{(2)} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

Verifico che due modi sono equivalenti:

$$I_O = I_c + MR^2$$

$$E_K^{(1)} = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = \frac{1}{2}(I_c + MR^2)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

Le due espressioni per E_K coincidono se uso $v_{cm} = \omega R$

$$\begin{cases} F - f_a = M a_{cm} \\ R f_a = I_c \alpha \end{cases}$$

rotolamento $\Rightarrow$ $a_{cm} = R\alpha$ ($v_{cm} = \omega R$)

$$\begin{cases} F - f_a = M a_{cm} \\ R f_a = I_c \dfrac{a_{cm}}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{cm} = \dfrac{F R^2}{I_c + M R^2} \\ f_a = \dfrac{I_c}{I_c + M R^2} F \end{cases}$$

$I_c + MR^2 \rightarrow$ momento di inerzia del CM rispetto a O
$I_O = I_c + MR^2$

$$f_a = \frac{I_c}{I_O} F \leq \mu_s N \quad , \quad N = Mg$$

$$\frac{I_c}{I_O} F \leq \mu_s Mg$$

$$F \leq \frac{I_O}{I_c} \mu_s Mg = F_{cr} = \text{critica}$$

Se $F > F_{cr}$ $\Rightarrow$ non ho più solo rotolamento ma ho anche uno strisciamento

Esempio $\rightarrow$ CASO 2

- È il momento $\vec{\tau}$ a causare il rotolamento
- in questo caso f_a favorisce il moto, è responsabile dell'avanzamento del CR (del rotolamento)

$\vec{\tau} = \tau \vec{u}$ $\quad$ $\vec{u}$ cost

1ª eq $\begin{cases} y: N - Mg = 0 \\ x: f_a = M a_{cm} \end{cases}$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA NEL MOTO DI ROTOLAMENTO

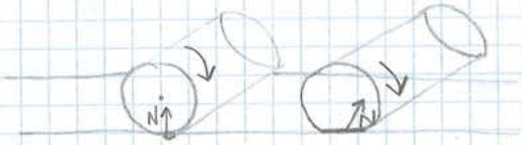
L'attrito statico non compie lavoro poiché non produce spostamento

⇒ Se la forza motrice è conservativa ⇒ l'energia meccanica si conserva.

Sperimentalmente si osserva che il corpo che rotola (senza strisciare) su un piano orizzontale dopo un po' si ferma.

⇒ ATTRITO VOLVENTE ($F_{volv.}$)

$F_{volv} \ll F_{rad}$ ⇒ trascuriamo l'attrito volvente



La reazione vincolare $\vec{N}$ è spostata (nella direzione del moto) rispetto al centro di massa.

$\vec{N}$ ha quindi un momento che si oppone al moto. Il fatto che $\vec{N}$ sia spostata è una conseguenza del fatto che in realtà la regione di contatto tra corpo e piano non è un asse (nel caso del cilindro) ma è più ampia.

STUDIO di PROBLEMI con SISTEMI DI PARTICELLE (o CR)

1^a eq. card. $\sum_i \vec{F_i} = Ma_{cm}$

2^a eq. card. $\sum_i \tau_{ci} = \frac{d\vec{L_c}}{dt} = I_c \vec{\alpha_c}$

per CR.

PROBLEMI DI STATICA

$a_{cm} = 0 \qquad \alpha = 0$

MOTO GIROSCOPICO

MOTO DELLA TROTTOLA

$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0 \qquad \frac{d|\vec{L}|}{dt} = 0$

θ: $z_0 \hat{O} z$

φ: $d\varphi$: $A\hat{P}A'$

$|\vec{\tau}| = \ell M g \,\text{sen}\theta$

$d\varphi = \dfrac{\widehat{AA'}}{|AP|}$ $\qquad |AP| = L\,\text{sen}\theta$

$\widehat{AA'} \cong |AA'| = dL = \tau dt$ → come se fosse un segmento?

$$d\varphi = \frac{\tau dt}{L\,\text{sen}\theta} \Rightarrow \Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\tau}{L\,\text{sen}\theta} = \frac{Mg\ell\,\cancel{\text{sen}\theta}}{L\,\cancel{\text{sen}\theta}}$$

Ω ↓ velocità angolare di precessione

$[\Omega] = [t^{-1}]$

$\vec{L} = I_{z_0}\vec{\omega}$

$\Omega = \dfrac{Mg\ell}{I_{z_0}\omega}$

come per i versori $\vec{u_r}(\theta)$ $|u_r| = 1$

$\dfrac{d}{dt}\vec{u_r} = \vec{\omega} \times \vec{u_r}$

$|\vec{\omega}| = \dfrac{d\theta}{dt}$

N.B. $|\vec{L}| = \text{cost} \Rightarrow \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

$\vec{\tau} = \vec{OC} \times \vec{F_p} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

$\vec{F_p} \,//\, \vec{\Omega}$

$\vec{L} \,//\, \vec{OC}$

$|\vec{\tau}| = Mg\ell\,\text{sen}\theta = |\vec{\Omega} \times \vec{L}| = \Omega L\,\text{sen}\theta \Rightarrow \Omega = \dfrac{Mg\ell}{L} = \dfrac{Mg\ell}{I_{z_0}\omega}$

In realtà

$\vec{L} = I_{z_0}\vec{\omega} + I_z\vec{\Omega}$

$\boxed{\Omega \propto \dfrac{1}{\omega}} \Rightarrow$ se ω è molto alto $\Rightarrow \Omega \cong 0$

Se Ω non è trascurabile $\Rightarrow$ NUTAZIONE

la NUTAZIONE diventa importante se

$\Omega \sim \omega$

L'inclinazione di $z_0 \nparallel z$ è responsabile delle stagioni

La precessione porterebbe all' inversione delle stagioni in 13.000 anni

La precessione fa sì che il tempo per cui la Terra torni nella stessa posizione è di 20 minuti più breve ogni anno.

MOTO DI RIVOLUZIONE DELLA TERRA INTORNO AL SOLE

II sec Tolomeo : SR con origine su T → descrizione molto complicata
XVI sec → Scelgo come sist. di Riferimento con origine nel Sole

Sistema T, S :

$$M_T \sim 6 \times 10^{24} \text{ kg}$$
$$M_S \sim 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$(10^{23} \text{ kg} < M \text{ pianeti} < 10^{27} \text{ kg})$

$$\mu = \frac{M_T M_S}{M_T + M_S} \cong \frac{M_T \cancel{M_S}}{\cancel{M_S}} = M_T$$

$$r_{TS} \simeq 1{,}5 \times 10^{11} \text{ m}$$

Scelgo S nell' origine

$$\begin{cases} \vec{r}_S = 0 \\ \vec{r}_T = r_{TS}\, \vec{u}_r \end{cases}$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\cancel{M_S \vec{r}_S} + M_T \vec{r}_T}{M_S + M_T} = \frac{M_T \vec{r}_T}{M_S + \cancel{M_T}} \cong \frac{M_T}{M_S} \vec{r}_T \sim 3 \times 10^{-6} \vec{r}_T$$

→ trascurabile rispetto al sole

$$\vec{r}_T{}' = \vec{r}_T - \vec{r}_{cm} = \vec{r}_T - \underbrace{3 \cdot 10^{-6} \vec{r}_T}_{\text{quantità molto piccola}} \cong r_T$$

$$\vec{r}_S{}' = \vec{r}_S - \vec{r}_{cm} = -3 \times 10^{-6} \vec{r}_T$$

$$|\vec{r}_S{}'| \sim 4{,}5 \times 10^{5} \text{ m} \qquad R_S \sim 0{,}7 \cdot 10^{9} \text{ m}$$

↳ raggio medio del sole

⇒ la posizione del centro di massa del sistema T, S è all'incirca al centro del sole, comunque è dentro al sole dt piccolissimo

$$|SA| \simeq |SA'| = r$$

$$|\widehat{AA'}| \simeq |A'H| \simeq r\,d\theta$$

$$dA \simeq \frac{1}{2}|AA'||SA| = \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$d\theta = \frac{d\theta}{dt} dt$ → Taylor 1° ordine

$$\Rightarrow dA \cong \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

2ª legge di Keplero

$$\frac{dA}{dt} = \text{costante}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante} \rightarrow = \frac{|\vec{L}_c|}{2\mu} = \text{costante}$$

$$|\vec{L}_c| = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{costante}$$

$r \equiv r_{12}$

Quindi $\Rightarrow \vec{F}$ è forza CENTRALE

$$\vec{\tau}_c = \frac{d\vec{L}_c}{dt} = 0 \leftrightarrow \vec{L}_c = \text{cost} \Rightarrow \vec{r}_{12} \parallel \vec{F}$$

→ distanza Terra-Sole

$\vec{r}, \vec{v}$ sono in un piano $\Rightarrow \vec{L} = \mu\vec{r} \times \vec{v}$ sempre $\perp$ a quel piano $\Rightarrow \vec{L}$ costante $\Rightarrow \vec{F} = F(r)\vec{u}_r$ CENTRALE

- L'interazione gravitazionale è una proprietà universale della materia $\Rightarrow$ F deve essere proporzionale alla quantità di materia di ogni corpo $F \propto m_1$, $F \propto m_2$

$$F(r) = m_1 m_2 f(r)$$

$$\vec{F} = F(r)\vec{u}_r = \mu\vec{a}_{cp} = -\mu\frac{v^2}{r}\vec{u}_r$$

→ produce un'accelerazione centripeta poiché F deve essere centrale

se la traiettoria è una circonferenza: $v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 266

$$M_P = \frac{4\pi^2}{G}\frac{r^3}{T^2}$$ → In funzione solo dei dati del satellite

Per un satellite GEOSTAZIONARIO

$$\boxed{T_{sat} = T_{terra}}$$ T di rotazione

$$G\frac{\cancel{m}M_T}{R^2_{sat}} = \cancel{m}\,a_{cp} = \cancel{m}\frac{4\pi^2}{T^2_{sat}}r_{sat}$$

$\Rightarrow r_{sat}(M_T, T_{terra})$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$E_p(r) = -\frac{\gamma}{r} \qquad \vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial r}\vec{u}_r$$

per forza centrale

$E = E_p + E_k$ costante

$$E = -\frac{\gamma}{r} + \frac{1}{2}\mu\left[\underbrace{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right]$$

non c'è doppio prodotto poiché $u_r \perp u_\theta \to 0$

dove $\vec{v} = \left[\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta\right]$

$$\vec{L}_c = \vec{r}_1{}' \times \vec{p}_1{}' + \vec{r}_2{}' \times \vec{p}_2{}' = \mu r^2\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_z$$

$\vec{L}_c$ = costante : 2ª legge di Keplero

$$L = |\vec{L}_c| = \mu r^2\frac{d\theta}{dt}$$

2 costanti del MOTO : E, L

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$$

$$E = -\frac{\gamma}{r} + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$E = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

$$\boxed{E_p^{eff}(r) \equiv -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}}$$

$$-2\mu(\omega\vec{u_z}) \times \left(\frac{dr}{dt}\vec{u_r}\right) - \mu\left[\frac{d\omega}{dt}\vec{u_z}\right] \times (r\vec{u_r})$$

$$= -\mu\,\vec{u_z} \times \vec{u_r}\left[2\omega\frac{dr}{dt} + r\frac{d\omega}{dt}\right]^{*} \overset{?}{=} 0$$

$L = \mu r^2 \omega$ costante

$$\frac{dL}{dt} = 0 = \mu\left[2r\frac{dr}{dt}\omega + r^2\frac{d\omega}{dt}\right]$$

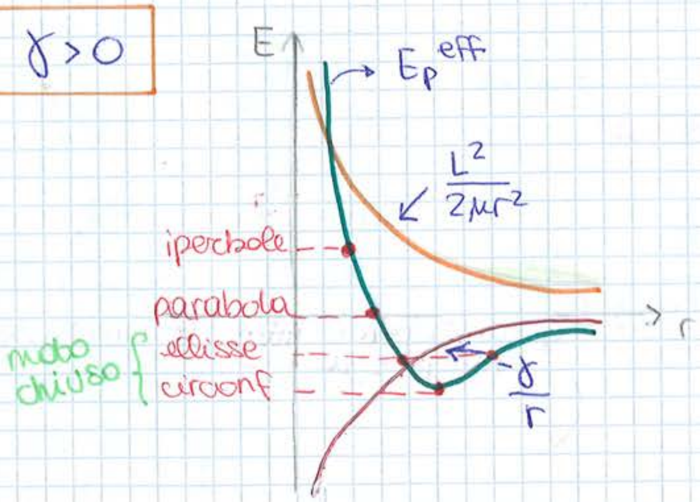
$$\overset{*}{=} \mu r\left[2\frac{dr}{dt}\omega + r\frac{d\omega}{dt}\right] = 0$$

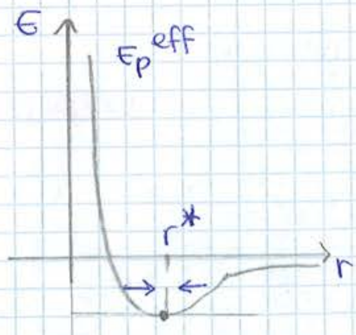
→ le due quantità entro parentesi sono uguali ⇒ sono sicura che la prima uguaglianza sia = 0

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{coriolis} - \mu\vec{\alpha} \times \vec{r} = 0$$

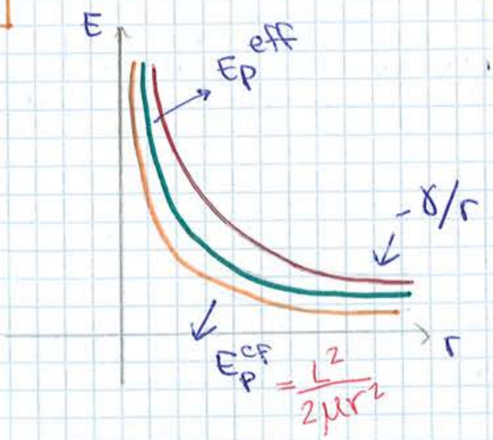
$$E_p^{eff} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

$\boxed{\gamma > 0}$





$\boxed{\gamma < 0}$



→ se $\gamma < 0$ non c'è possibilità di moto chiuso → il moto sarà sempre aperto

$\boxed{\gamma > 0}$

1. $E < 0 \Rightarrow \varepsilon < 1$ → ellisse / circonferenza

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow r_{min} &= \frac{-\gamma}{2E}(1-\varepsilon) \\ r_{max} &= \frac{-\gamma}{2E}(1+\varepsilon) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{stato legato}$$

$$\varepsilon_{min} = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\mu\gamma^2} E_p^{eff}(r_*)}$$

$$\varepsilon_{min} = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{\mu\gamma^2}\left[-\frac{\mu\gamma^2}{2L^2}\right]} = 0$$

$$\varepsilon \geq 0 \quad \forall E, \forall \gamma$$

$$\Delta E = E_{lib}^{min} - E \qquad \text{Energia di legame}$$

$$E_{lib}^{min} = 0$$

2. $E = 0 \Rightarrow \varepsilon = 1$ → parabola $\quad (r_{extr} \sim r_{min})$

$$\gamma r - \frac{L^2}{2\mu r} = 0 \Rightarrow r_{extr} = \frac{L^2}{2\mu\gamma}$$

$$r_{min} = \frac{1}{2} r_*$$

$$r_{extr}: \quad \gamma r_{extr} - \frac{L^2}{2\mu r_{extr}} = 0$$

$$r_{min} = \frac{L^2}{2\mu\gamma}$$

per $\gamma < 0$
$\Rightarrow r_{min} < 0$

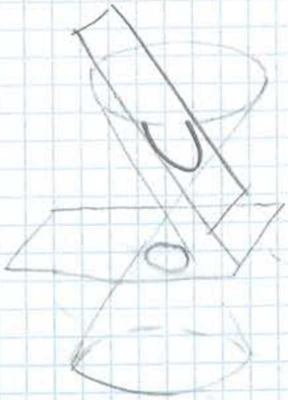
3. $E > 0 \qquad \varepsilon > 1$ → iperbole

$\boxed{\gamma > 0}$ $\quad r_{min} = +\frac{\gamma}{2E}(\varepsilon - 1) > 0$

$\quad r_{max} = -\frac{\gamma}{2E}(1+\varepsilon) < 0 \Rightarrow \nexists$

$\boxed{\gamma < 0}$ $\quad$ Ora $r_{min} = -\frac{\gamma}{2E}(1+\varepsilon) > 0$

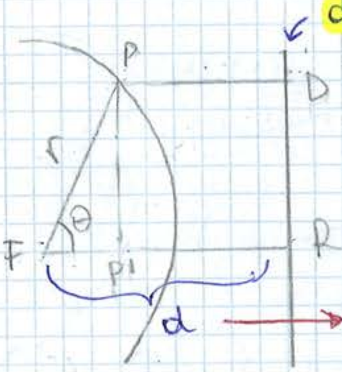
$$r(\theta) = \frac{r_*}{1+\varepsilon\cos\theta}$$ → equazione delle coniche



Le coniche sono il luogo dei punti P con eccentricità ε e distanza tra fuoco e direttrice $d = \frac{r_*}{\varepsilon}$ costanti

$d = |FR|$

$$\varepsilon = \frac{|PF|}{|PD|}$$



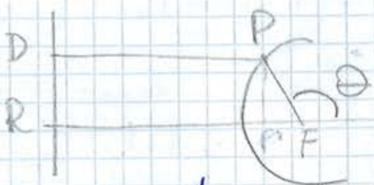
→ distanza fuoco-direttrice

$$|PD| = |FR| - |FP'| = d - r\cos\theta$$

$$\varepsilon = \frac{r}{d - r\cos\theta}$$

$$r(1+\varepsilon\cos\theta) = \varepsilon d = r^*$$

$$r = \frac{r_*}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

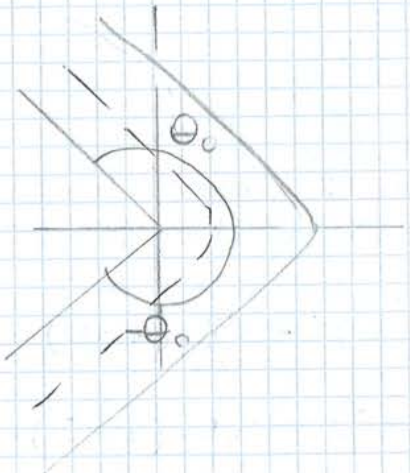


ottengo a denominatore il segno − ⇒ $\theta = \frac{\pi}{2} + \theta$

$1 - \varepsilon\cos\theta$

	circonferenza	ellisse	parabola	iperbole
$\varepsilon \geq 0$	$\varepsilon = 0$	$0 < \varepsilon < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon > 1$
E	$E_{min} < 0$	$E_{min} < 0$	$E_{min} = 0$	$E_{min} > 0$

$\theta_0 = \left| \arccos \frac{1}{\varepsilon} \right|$



$-\theta_0 < \theta < \theta_0$

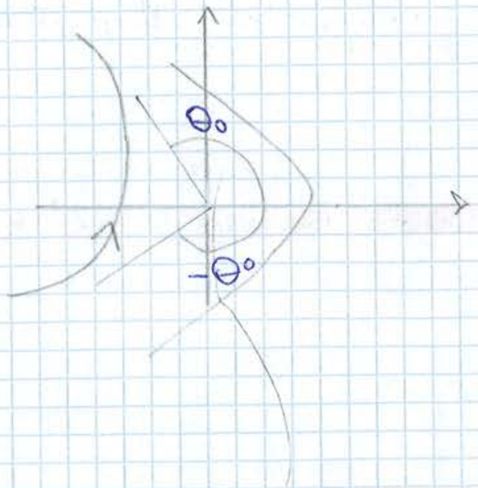
$\boxed{\gamma < 0}$: $\exists$ caso $\varepsilon > 1$.

$$r_* = \frac{L^2}{\mu \gamma} < 0$$

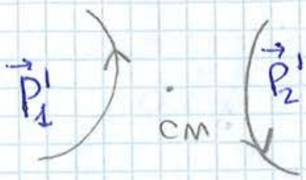
$$r \geq 0 \Rightarrow 1 + \varepsilon \cos\theta < 0$$

$$r_{min} = r(\pi) = \frac{r_*}{1-\varepsilon} > 0$$

$$r > r_{min} \qquad \begin{cases} -\pi \leq \theta < -\theta_0 \\ \theta_0 < \theta \leq \pi \end{cases}$$



L'interazione per $\gamma < 0$ corrisponde alla descrizione del moto relativo nell'urto tra 2 particelle nel sistema di riferimento del CM.

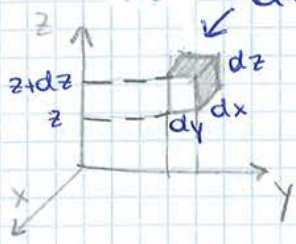


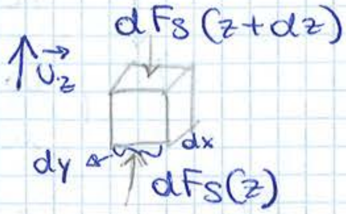
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 153 di 266

Condizione di equilibrio statico in un fluido

$$\boxed{d\vec{F}_S + d\vec{F}_V = 0}$$

$dV(x,y,z) = dx\,dy\,dz \qquad dS_z = dx\,dy$





Calcolo $d\vec{F}_S$ lungo l'asse z:

$$z:\ dF_S = dF_S(z) - dF_S(z+dz)$$
$$= P(z)\,dx\,dy - P(z+dz)\,dx\,dy$$
$$= [P(z) - P(z+dz)]\,dx\,dy$$
$$= [\cancel{P(z)} - \cancel{P(z)} - \frac{\partial P}{\partial z}dz]\,dx\,dy$$
↳ Taylor

$$\left.\begin{aligned} dF_{S_z} &= -\frac{\partial P}{\partial z}dV \\ dF_{S_y} &= -\frac{\partial P}{\partial y}dV \\ dF_{S_x} &= -\frac{\partial P}{\partial x}dV \end{aligned}\right\} \quad \boxed{d\vec{F}_S = -\vec{\nabla}P \cdot dV}$$

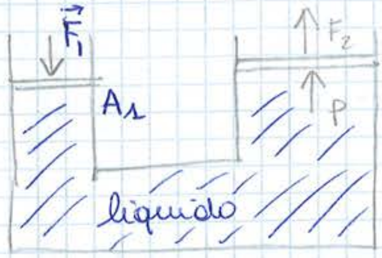
- Se $d\vec{F}_V = 0 \Rightarrow$ all'equilibrio $d\vec{F}_S = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}P = 0 \Rightarrow P = P_0$ ↗ pressione costante
- Se $d\vec{F}_V \neq 0 \quad d\vec{F}_V = dm\,\vec{a}\ ,\quad dm = \rho\,dV$
  $= dm\,\vec{f}_m \rightarrow \vec{f}_m =$ forza per unità di massa

All'equilibrio $\quad d\vec{F}_S + d\vec{F}_V = 0$

$$-\vec{\nabla}P\,dV + dm\,\vec{a} = 0$$
$$(-\vec{\nabla}P + \rho\vec{a})\,dV = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 155 di 266

APPLICAZIONE: martinetto idraulico



$A_2 \gg A_1$

Esercito F_1 su A_1

$P \to P + \Delta P$

$$\Delta P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \gg F_1$$

Per un liquido perfetto $\rho = cost$

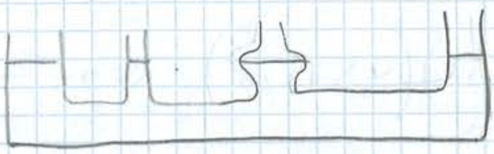
$$A_1 dh_1 = dV_1 = dV_2 = A_2 dh_2$$

$$dh_2 = \frac{A_1}{A_2} dh_1 \ll dh_1$$

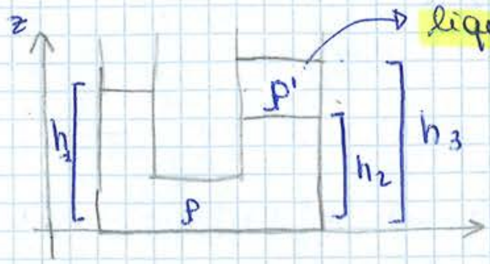
$$dW_2 = F_2 dh_2 = \frac{A_2}{A_1} dF_1 dh_2 = F_1 dh_1$$

PARADOSSO IDROSTATICO

Tutti i punti alla stessa profondità hanno la stessa pressione P_0



→ il liquido sta sempre alla stessa altezza poiché la pressione è costante



$$P(z) = P(z_0) + \rho g (z_0 - z)$$

$$P(h_2) = P_0 + \rho g (h_1 - h_2)$$

$$P(h_2) = P_0 + \rho' g (h_3 - h_2)$$

$$\frac{dP}{\rho(P)} = -g\,dz \rightarrow \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \int_{z_0}^{z} -kg\,dz$$

z_0 = livello del mare $\quad P(z_0) = P_0 \simeq 1\ atm$

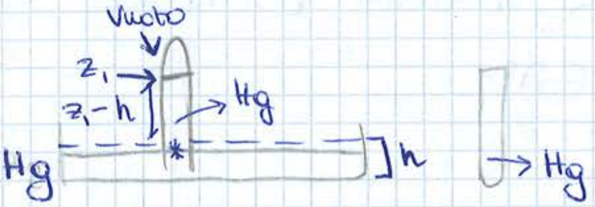
$$\Rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = -kg(z-z_0) \Rightarrow P = P_0 e^{-kg(z-z_0)}$$

$k = \frac{\rho_0}{P_0}$ costante

$$P = P_0 e^{-\frac{\rho_0 g}{P_0}(z-z_0)} = P_0 e^{-\frac{(z-z_0)}{a}}$$

$$a = \frac{P_0}{\rho_0 g} \simeq 9 \cdot 10^{-3}\ m$$

BAROMETRO DI TORRICELLI



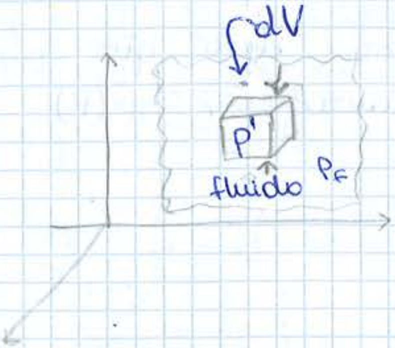
• Si alza leggermente il livello di mercurio nella bacinella

$P(h) = P_0$, ma se la calcolo dall' *

$$P(h) = P_0 = \underbrace{P(z_1)}_{0} + \rho g (z_1 - h)$$

0 → ho creato il vuoto

$\Rightarrow$ Calcolo P_0 misurando $z_1 - h$



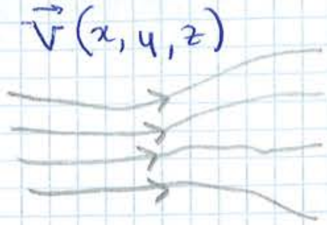
→ A quali forze è sottoposto l'oggetto di massa $dm = \rho dV$?

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

$$dF_V = \rho' g\,dV\,(-\vec{u}_z)$$
$$dF_S = \rho_f g\,dV\,(u_z) = d\vec{F}_A$$

• Se il corpo ha densità costante $\rightarrow \vec{F}_V = \rho' V g(-\vec{u}_z) = mg(-\vec{u}_z)$

$$\vec{F}_a = \rho_f V g(+\vec{u}_z) = m_f g(\vec{u}_z)$$



linee tangenti alla velocità, sono le linee di campo alla velocità, anche dette LINEE DI FLUSSO o di CORRENTE

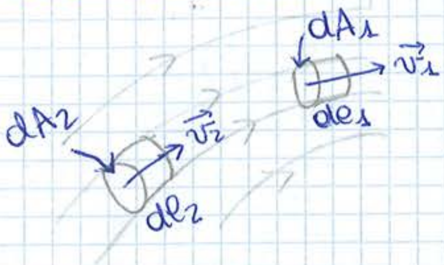
PROPRIETÀ: le linee di flusso NON si intersecano MAI (tranne nei pozzi e nelle sorgenti)

- Nel REGIME STAZIONARIO le linee di flusso non variano nel tempo.

- Considero FLUIDI PERFETTI (no attriti) con ρ cost e in REGIME STAZIONARIO

- **CONSERVAZIONE DELLA MASSA** (in assenza di pozzi e/o sorgenti)

TUBO DI FLUSSO



$dA_2 \perp \vec{v}_2$ $dA_1 \perp \vec{v}_1$ $dl_1 = |\vec{v}_1|\, dt$ $dl_2 = |\vec{v}_2|\, dt$

$\vec{v}_1 = \vec{v}(dA_1)$ velocità <u>media</u> in dA_1

$dm_1 = dm_2$

$\rho_1 (dA_1 v_1 dt) = \rho_2 dA_2 v_2 dt$

$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow dA_1 v_1 = dA_2 v_2$, $\rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow dV_1 = dV_2$

Portata $\boxed{Q = Sv}$

PORTATA COSTANTE se ρ cost.

LEGGE DI LEONARDO

$$\boxed{v = \frac{Q}{S}}$$

- **CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA**

Equazione di Bernoulli

$\vec{F}_1 = P_1 dA_1 \vec{n}_1$ $\vec{F}_2 = P_2 dA_2 \vec{n}_2$

$$\cancel{P_0} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \cancel{v_0^2} = \cancel{P_0} + \cancel{\rho g 0} + \frac{1}{2}\rho v^2$$

quota 0 sul fondo

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

TEOREMA DI TORRICELLI

TUBO DI VENTURI (per misurare la portata del condotto)

$z_1 = z_2$

$$P_1 + \cancel{\rho g z_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \cancel{\rho g z_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2)$$

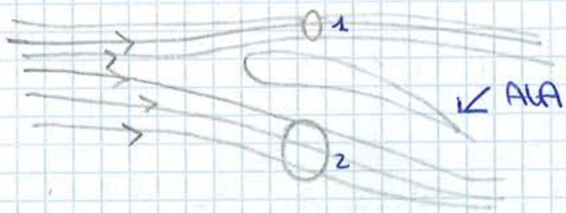
$$Q = Sv = \text{cost}$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{Q^2}{2}\rho \left[\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right]$$

$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$ se z cost $\Rightarrow$ se sono in un tubo orizzontale

Dove v è più alta (S + piccola) $\Rightarrow P$ è minore
↓
aspiratori

PORTANZA DI AREOPLANO



$v_1 > v_2$ $\quad \rho_1 = \rho_2$ $\quad z_1 \sim z_2$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \rho$$

$$P_1 < P_2$$

$$\frac{\vec{F}}{S} = (P_2 - P_1)\,\vec{u_z}$$

forza × unità di superficie di Ala

TERMODINAMICA

Studio di energia TERMICA dei SISTEMI e di scambi termici con l'AMBIENTE

Sistemi:
- APERTO → scambia Energia e materia
- CHIUSO → scambia Energia
- ISOLATO → no scambi

Molte proprietà fisiche variano al variare di T (proprietà termometriche)

Le sfrutto per costruire i termometri.

- Se il termometro è in equilibrio con A, la T che misura è $T_T < T_{eq} < T_A$

$T_T \to$ termometro

$\Rightarrow$ Termometro piccolo rispetto a M_A → più piccolo sarà il termometro più precisa la misura

$T(X) = aX$ relazione lineare arbitraria

$$T_0 = T(X_0) = aX_0$$

$$\hookrightarrow a = \frac{T_0}{X_0} \Rightarrow T(x) = \frac{T_0}{X_0} X$$

Si è scelto un valore di riferimento T_0 comune per tutti i termometri è la T dell'acqua al punto triplo (P/ coesistono lo stato solido, liquido, gassoso)

$$T_0 = T(X_0) = 273,16 \ K$$

grado kelvin (K) → UNITÀ di MISURA di T nel S.I.

$$1K = \frac{1}{273,16} T_0$$

$P = P_{atmosf.}$ T ghiaccio fondente è $T_1 = 273,15 \ K = T(X_1)$

$T_2 = T(X_2) = 373,15 \ K$ → acqua in ebollizione

Bisogna scegliere un termometro di riferimento universale.

→ Una buona definizione si avrà con l'introduzione della T termodinamica assoluta.

- Si sceglie come riferimento universale il termometro a gas (perfetto → rarefatto) a volume costante, sfruttando la proprietà $P = P(T) \Rightarrow P \propto T$

- Celsius (°C) usa le stesse unità di (K) ma riscalata

$$T(°C) = T(K) - 273,15 \ K$$

Q perché un sistema termodinamico passi da $T_1 \rightarrow T_2$

$$Q = \int_{T_1 \to T_2} m\,c(T)\,dT = m\,\bar{c}\,\Delta T$$

↳ se c non si può assumere costante tra T_1 e T_2

Per l'acqua tra 0°C e 100°C il c cambia dell'1%.

$$\bar{c} = \frac{1}{\Delta T}\int c(T)\,dt$$

Esempio

contenitore stagno

$T_1 \rightarrow T_2$

$Q_1 = m c_v (T_2 - T_1)$

↳ calore specifico a volume cost.

pistone che può scorrere

sorgente termica

- Il volume cambia poiché il gas si espande spingendo verso l'alto il pistone

$Q_2 = m c_p (T_2 - T_1)$

↳ calore specifico a pressione cost

Sperimentalmente $Q_2 > Q_1$

$c_p \neq c_v$

c_p, c_v solo per i GAS
(per solidi e liquidi variazione di V si può trascurare)

CAPACITÀ TERMICA MOLARE (= calore specifico molare)

calore specifico molare

$$\boxed{c_m = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dt}}$$

n = numero di moli di sostanza

↳ capacità termica di una mole di sostanze

capacità termica molare

$$\boxed{C = n\,c_m}$$

- c_m è una proprietà intrinseca della sostanze

- Per la maggior parte delle sostanze $c_m \sim 6 \frac{cal}{mol\,K}$
- Fa eccezione il carbonio che ha $c_m \sim 1{,}5 \frac{cal}{mol\,K}$

TROVO' $1\ cal = 4{,}186\ J$

OSSERVAZIONI

① Distinzione W, Q dipende da cosa definiamo "sistema" e cosa "ambiente"
↳ es. se consideriamo come sistema tutto l'ambiente la descrizione cambia, non avrò scambio di calore con l'ambiente.

② Colleghiamo concetti con la meccanica del sistema di particelle che definiscono il sistema.

- Se in un sistema le forze interne sono conservative:

$$U = E_k + E_p^{int} \quad \text{ENERGIA PROPRIA DI UN SISTEMA}$$

$$E_k = E_k^{int} + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

$$E_k^{int} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (m_i v_i^2) = N \bar{E}_k^{int}$$

Nei sistemi termodinamici in genere $v_{cm} = 0$

$$U = E_k^{int} + E_p^{int} \quad \text{ENERGIA INTERNA}$$

- Se il sistema è isolato $U = cost.$
- Se sul sistema agiscono $\vec{F}^{ext}$

$$\boxed{W^{ext} = \Delta U}$$

$$\boxed{W^{ext} = W_{macroscopico} + W_{microscopico}}$$

- $W_{macroscopico}$: produce spostamenti macroscopici nel sistema (per esempio quando comprimo il sistema attraverso un pistone)

- $W_{microscopico}$: produce un'agitazione delle molecole che compongono il sistema ma non produce spostamenti macroscopici.

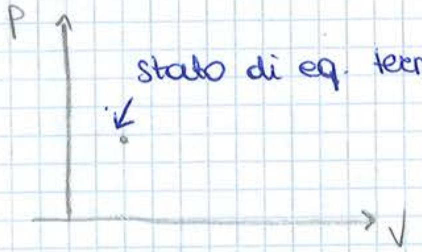
PER I GAS IDEALI

$$\boxed{f(P,V,T) = pV - nRT = 0}$$

costante universale $R = 8,314\ J/molK$

Variabili termodinamiche e le equazioni di stato sono definite solo all'equilibrio termodinamico

Posso anche definire delle funzioni delle variabili termodinamiche che ⇒ dello stato di equilibrio termodinamico, per esempio $U(T,V)$, S



Per cambiare lo stato del sistema devo cambiare le condizioni che caratterizzano il sistema e l'ambiente.

⇒ TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE: scambi di energia: Q, W

NOTA: Q, W sono proprietà della trasformaz. termodinamica che mi fanno passare da uno stato di equilibrio all'altro. Allo stato di equilibrio corrisponde un Q e un W nullo

Fuori dall'equilibrio le variabili termodinamiche non sono definite ⇒ durante le trasformazioni P, V, T non sono definite

TRASFORMAZIONE REVERSIBILE: è possibile per una trasformazione molto lenta, attraverso una successione di trasformazioni infinitesime durante le quali lo stato del sistema varia di quantità infinitesime (dP, dT, dV), attendendo dopo ognuna che sia ristabilito l'equilibrio termodinamico.

⇒ in questo caso anche gli stati intermedi sono stati di equilibrio.

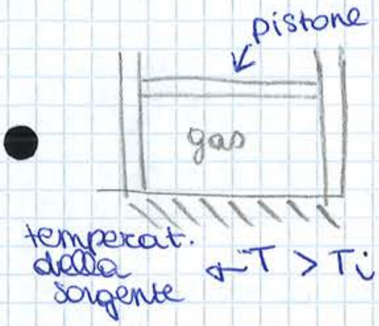
$\Rightarrow$ posso tornare allo stato di partenza

Quando questo non è possibile $\Rightarrow$ TRASFORMAZIONE IRREVERSIBILE

TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

- ISOCORA $\Rightarrow dV = 0$, $V = cost$ $\quad dQ = mc_V dT$
- ISOBARA $\Rightarrow dP = 0$, $P = cost$ $\quad dQ = mc_p dT$
- ISOTERMA $\Rightarrow dT = 0$, $T = cost$
- ADIABATICA $\Rightarrow Q = 0 \rightarrow$ no scambi di calore

Calcoliamo W:

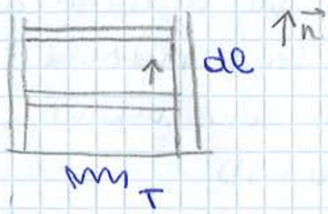


NO ATTRITI

$i: (V_i, T_i, P_i)$ $\hookrightarrow$ all'inizio

- Il sistema scambia calore con l'ambiente attraverso la sorgente
  $T \Rightarrow$ gas si espande

Calcoliamo il lavoro dW (infinitesimo) compiuto dal gas che si espande

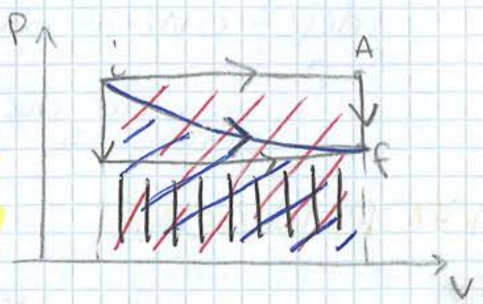


$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{F} = PA\vec{n} \qquad A = \text{sez. del cilindro}$$

$$dW = PA \cdot \vec{n} \cdot dl = P\underbrace{A\,dl}_{V} = PdV$$

$$W = \int_{e(i,f)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{e(i,f)} PdV$$



- Il lavoro non è una funzione di stato $\Rightarrow$ dipende dal cammino percorso

$$W = \int_e P(V,T)\,dV$$

- Se $P = cost \Rightarrow W = \int_e PdV = W = P\int dV = P(V_f - V_i)$
- Se $V = cost \Rightarrow PdV = 0 \rightarrow W = 0$

- Per le trasformazioni isoterme uso l'equazione di stato $f(P,V,T)=0$

$$\Rightarrow P(V) \rightarrow W=\int P(V)\,dV$$

Per esempio per i gas ideali $PV=nRT$

Se $T=cost$ $\quad W=\int P\,dV$

$$P=\frac{nRT}{V} \Rightarrow W=\int_{T=cost}\frac{nRT}{V}\,dV = nRT\int\frac{dV}{V}=nRT\ln\frac{V_f}{V_i}$$

SCAMBI DI CALORE per TRASF. REVERSIBILI

$$Q=\int mc\,dT \sim mc_{trasf}(T_f-T)$$

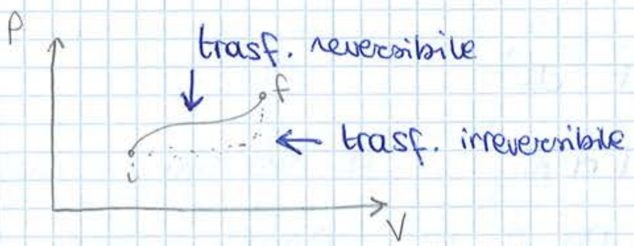
ISOCORA $Q=mc_v(T_f-T_i)$

ISOBARA $Q=mc_p(T_f-T_i)$

ISOTERMA $Q=0$ se non c'é cambiamento di stato

$Q=m\ell$ se c'è cambiamento di stato

ADIABATICA $Q=0$



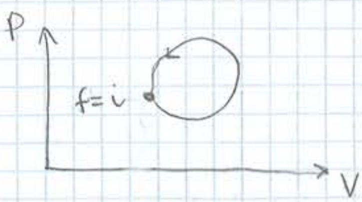
Q, W caratterizzano le trasformazioni ma non sono definiti all'equilibrio TD

Primo Principio della TD – Per trasformazioni infinitesime

$$\boxed{\delta Q-\delta W=dU}$$

ci ricorda che δQ e δW non sono differenze di funzioni di stato

TRASFORMAZIONE CICLICA $i=f$



$U_f=U_i$

$\Downarrow$

$Q=W$

$P \propto \bar{E}_k$

Esempio

Considero un cilindro con un pistone che contiene aria.

A Stato di equilibrio Termodinamico: $\begin{cases} T_A = 20°C \\ P_A = 15\ atm \\ V_A = 100\ L \end{cases}$

$\downarrow$ trasf.

B: $T_B = 25°C$ $\quad V_B = 80\ L$

Qual è la pressione P_B?

$$\frac{PV}{T} = cost$$

NOTA: dove le unità di misura sono quelle del SI [in particolare $T(K)$]

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B}$$

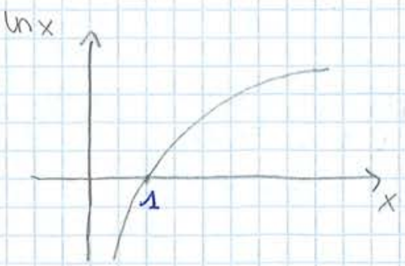
$$P_B = \frac{P_A V_A T_B}{T_A V_B}$$

Esempio

Calcolare W in una espansione isoterma (di gas perfetto)

$$W = \int_{i \to f \ (T = cost)} p\, dV \qquad P = \frac{nRT}{V}$$

$$W = \int_i^f \frac{nRT}{V} dV \underset{T\ cost}{=} nRT \int_i^f \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$$



! Il lavoro compiuto è positivo dove il sistema si espande ($V_f > V_i$) e negativo dove si comprime ($V_f < V_i$)

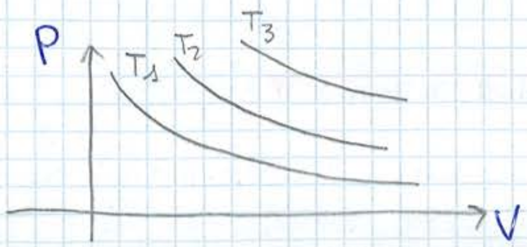
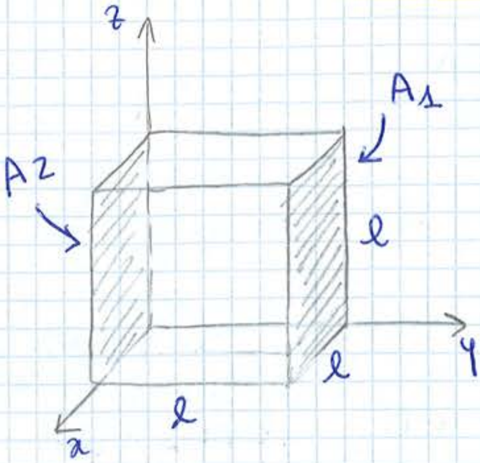


GRAFICO TRASF. ISOTERME

$T_1 > T_2 > T_3$

$$\boxed{\left(P + \frac{a}{\left(\frac{V}{n}\right)^2}\right)(\underbrace{V - bn}_{\text{volume libero}}) = nRT}$$

gas Reali



Considero l'urto di una particella i-esima contro A_1

$$\Delta \vec{P_i} = \langle \vec{F_i} \rangle \Delta t$$

$$\langle \vec{F_i} \rangle = \frac{\Delta \vec{P_i}}{\Delta t}$$

forza impulsiva

Δt = intervallo tra 2 urti su A_1

Pressione di m_i su A_1: $\frac{\langle F_{iy} \rangle}{A_1}$

- ΔP_{iy} per un urto contro A_1:

Ricordiamo $M >> m_i$

$$\begin{cases} v_y^{in} = -v_y^{fin} \\ v_x^{in} = v_x^{fin} \\ v_z^{in} = v_z^{fin} \end{cases}$$

$$\Delta \vec{P_i} = \vec{v_y}\, \Delta P_{yi} = m\,(v_{iy}^{OUT} - v_{iy}^{in})$$

→ quantità di moto

$$\Delta P_{yi} = -2 v_{yi}^{in}\, m$$

dopo l'urto → moto rettilineo uniforme fino ad A_2

→ $v = S/t$ → $t = S/v$

$$\frac{\Delta t}{2} = \frac{l}{v_{yi}} \Rightarrow \Delta t : \underbrace{A_1 \xrightarrow{l} A_2}_{\Delta t/2} \underbrace{\xrightarrow{l} A_1}_{\Delta t/2}$$

$$\Delta t = \frac{2l}{v_{yi}}$$

→ quantità di moto

$$|F_{yi}| = \left|\frac{\Delta P_{yi}}{\Delta t}\right| = \cancel{2} v_{yi}\, m\, \frac{v_{yi}}{\cancel{2} l} = \frac{m v_{yi}^2}{l}$$

$$P_{(i)A_1} = \frac{F_{yi}}{A_1} = \frac{m v_{yi}^2}{l^3}$$

→ pressione ↓ quadrato $= l^2$

$$P = \frac{1}{3}\frac{N}{V} m \overline{v}^2$$

4) Uso l'equazione di stato (macroscopico)

$$P = \frac{N}{V} KT$$

$$\Rightarrow \boxed{KT = \frac{1}{3} m \overline{v}^2}$$

5) $E_{K_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$\overline{E}_K = \frac{\frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N} = \frac{1}{2} m \overline{v}^2$$

$$\Rightarrow KT = \frac{1}{3} 2 \underbrace{m \overline{v}^2}_{\overline{E}_K} \Rightarrow \boxed{\overline{E}_K = \frac{3}{2} KT}$$

per un gas perfetto monoatomico

perché altrimenti potrei schematizzare il GAS

può ruotare $\Rightarrow E_K$ sarebbe un po' più alta

$$U = E_K^{TOT} + \cancel{E_P^{TOT}} \to 0$$

per un gas PERFETTO

in funzione solo di T

$$U = N\overline{E}_K \Rightarrow \boxed{U = \frac{3}{2} NKT}$$, Per gas REALI $U(V,T)$

6) Per gas poliatomici?

(no dimostrazione)

TEOREMA DI EQUIPARTIZIONE dell'ENERGIA (Dimostrato da Maxwell)

Ogni molecola ha f gradi di libertà:

MOLECOLA MONOATOMICA $f = 3$ (3 traslazioni)

MOLECOLA BIATOMICA $f = 5$ (3 traslazioni + 2 rotazioni)

MOLECOLA POLIATOMICA (>2) $f = 6$ (3 traslazioni + 3 rotazioni)

$$\boxed{U = \frac{f}{2} NKT}$$ per un gas perfetto con f gradi di libertà

$\delta Q = nRT \frac{dV}{V}$ $\rightarrow$ $P = \frac{nRT}{V}$ $\rightarrow$ ha sostituito

$Q_{T=cost} = W = nRT \ln \frac{V_f}{V_i}$

4 ADIABATICA REVERSIBILE

$Q = 0$

Dimostriamo che vale l'equazione di POISSON $PV^{\gamma} = cost.$ per una trasf. adiabatica reversibile (per quella irreversibile non si può stabilire una relazione)

$\boxed{\gamma \equiv \frac{C_p}{C_v} > 1}$, $C_p^m - C_v^m = R$

$\Rightarrow C_p^m > C_v^m$

o dm

Nella trasformazione $\delta Q = 0$

$dU = n c_v^m dT$

$\delta W = P dV$

1° principio: $\delta W = -dU$

$PdV = -n c_v^m dT$

Uso $PV = nRT$

$\left[\cancel{n}RT \frac{dV}{V} = -\cancel{n} c_v^m dT\right] \cdot \frac{1}{T c_v^m}$ $\rightarrow$ divido per questo termine

$\frac{R}{c_v^m} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$

$\frac{c_p^m - c_v^m}{c_v^m} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$

$(\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$ eq. differenziale

$\int_i^f (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = \int_i^f -\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1) \ln \frac{V_f}{V_i} = -\ln \frac{T_f}{T_i}$

$\ln \left[\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma - 1}\right] + \ln \frac{T_f}{T_i} = \ln 1$

② Un pendolo che si mette in oscillazione prendendo energia dal calore dell'ambiente non si è mai visto.

- Produrre calore raffreddando l'ambiente <u>non</u> avviene <u>spontaneamente</u>. (per raffreddare avevano bisogno di lavoro)

③ L'espansione libera di un gas. Il processo inverso <u>non</u> avviene <u>spontaneamente</u>

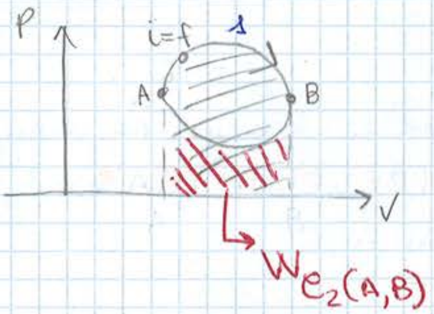
La violazione di questi principi, cioè tutti i fatti che <u>NON</u> avvengono spontaneamente rappresenterebbero dei MOTI perpetui di 2^a specie.

Definizione operativa del 2° principio:

SORGENTE DI CALORE = corpo a T costante che può scambiare energia con gli altri corpi <u>solo</u> sotto forma di Q.

$\Rightarrow$ è un corpo di grande capacità termica

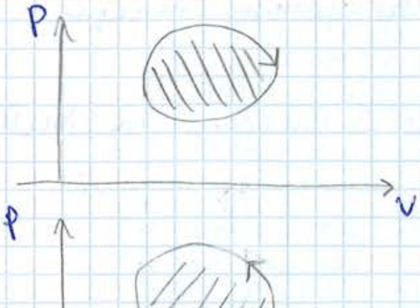
CICLO REVERSIBILE:



$W_{e_1}(A,B)$ = area tra la curva 1 e il piano

$W_{e_2}(A,B) = -W_{e_2}(B,A)$

$W_e = e_1 - e_2$ = Area racchiusa nel ciclo



Per TRASFORMAZIONI CICLICHE

$W > 0 \Rightarrow Q$ assorbito dal sistema

$\Rightarrow Q = W > 0$

$W < 0 \Rightarrow Q = W < 0$

$\boxed{AB}$ $T = T_2$ isoterma

$\Delta U = 0$

$$W_{A \to B} = Q_{A \to B} = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$\boxed{BC}$ $Q_{BC} = 0$ adiabatica reversibile

$$W_{B \to C} = -(U_C - U_B) = n\, C_V^m (T_2 - T_1)$$

N.B: $T_{\cancel{B}_2} V_B^{\gamma-1} = T_{\cancel{C}_1} V_C^{\gamma-1}$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1}$$

$\boxed{CD}$ $T = T_1$

$\Delta U_{CD} = 0$

$$W_{C \to D} = Q_{CD} = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

$\boxed{DA}$ $Q_{DA} = 0$ $\leftarrow T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1}$

$$W_{D \to A} = -\Delta U_{DA} = nC_V^m (T_1 - T_2)$$

$$\frac{T_A}{T_D} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\gamma-1} \quad *$$

RENDIMENTO

$$\eta = \frac{W}{Q_{ASSORBITO}} \qquad \begin{cases} Q_{ASSORBITO} = Q_{AB} \\ Q_{CEDUTO} = Q_{CD} \end{cases}$$

$\left(\frac{V_D}{V_C} < 1 \Rightarrow \ln \frac{V_D}{V_C} < 0 \right.$ $\downarrow$ Q ceduto $\Big)$

$$W = W_{AB} + \cancel{W_{BC}} + W_{CD} + \cancel{W_{DA}}$$

$$W = Q_{AB} + Q_{CD} > 0$$

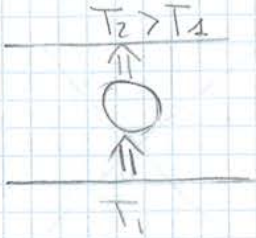
$$\eta = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{\cancel{nR} T_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}{\cancel{nR} T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

$\Rightarrow \frac{V_D}{V_A} = \frac{V_C}{V_B}$ $*$ lo ricavo da lì $\Rightarrow \frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$

Un' efficienza infinita non è possibile

NO →

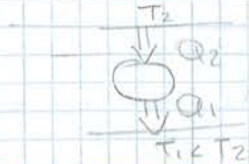
In una trasf. ciclica



Postulato di Clausius (C)

del 2° principio:

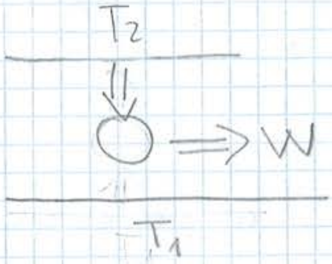
$\eta = 1$ non è possibile



← sì

NO →

In una trasf. ciclica



Postulato di Kelvin (K)

del 2° principio

← sì

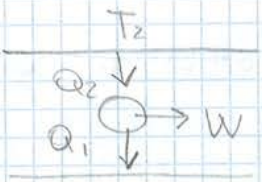
Esempio

Una macchina di carnot lavora tra $T_1 = 273K$ e $T_2 = 373K$; la sorgente T_1 è costituita da un blocco di ghiaccio. Calcolare W prodotto quando si è fusa una massa di ghiaccio di 5 kg.

$\ell_F = 79{,}7$ kcal / kg

$$|Q_1| = m\ell_F$$

$$W = |Q_2| - |Q_1| = |Q_1| \cdot \left(\frac{|Q_2|}{|Q_1|} - 1\right)$$



Per il ciclo di Carnot

$$\frac{|Q_2|}{|Q_1|} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$W = |Q_1| \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)$$

$$W = 146 \text{ kcal} = 6{,}11 \cdot 10^5 \text{ J}$$

AB: compressione ADIABATICA
BC: isocora
CD: scoppio (→ modellizzata da adiabatica reversibile)
DA: scarico
AO: compressione a vuoto

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_A|} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

V_1 → iniziale
V_2 → finale

$$Q_A = n c_v (T_C - T_B) = Q_{BC}$$

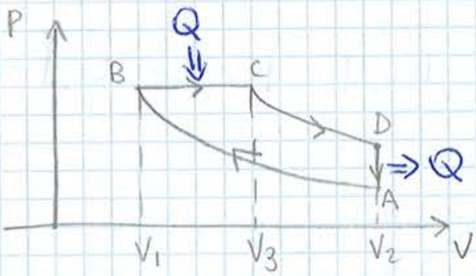
$$Q_C = n c_v (T_A - T_D) = Q_{DA}$$

T_A, T_D, T_B, T_C?

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

CICLO DIESEL

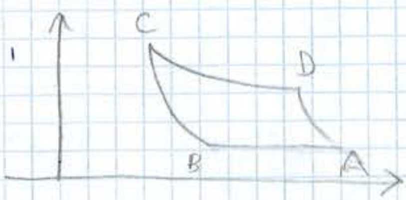


AB, CD sono adiabatiche
BC è un'isobara
DA è un'isocora

Il fatto che ci sia BC (isobara) fa sì che il diesel parta lentamente.
Al punto C inizia lo scoppio

$$\eta = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 - \frac{1}{\gamma}\left[\frac{(V_3/V_2)^{\gamma} - (V_1/V_2)^{\gamma}}{V_3/V_2 - V_1/V_2}\right]$$

CARNOT (gas perfetto)



$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Se $M = M_{R'}$ posso ripetere il ragionamento scambiando i ruoli di M_R e $M_{R'}$

$\Rightarrow \eta^{(R')} \geq \eta^{(R)}$

$\Rightarrow$ CONCLUDO $\eta^{(R)} = \eta^{(R')}$

(b) Se $M = M^{(I)}$

$\Rightarrow \eta^{(I)} \leq \eta^{(R)}$

Sperimentalmente le cause di irreversibilità riducono il rendimento.

$$E_{in} = W_R - W = Q_2^R + Q_1^R - (Q_2 + Q_1)$$
$$= Q_1^R - Q_1$$
$$= |Q_1| - |Q_1^R| \geq 0$$

$\Rightarrow$ Per tutte le M_R tra T_1 e T_2

$$\eta = 1 - \frac{|Q_1|}{|Q_2|} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$\Rightarrow$ Per tutte le M_R

$$\frac{|Q_1|}{|Q_2|} = \frac{T_1}{T_2}$$

Possiamo definire una scala termodinamica assoluta di temperatura

$p \sim T$ per un gas perfetto a $V = cost$

Ma i gas condensano per $T \sim 1K$

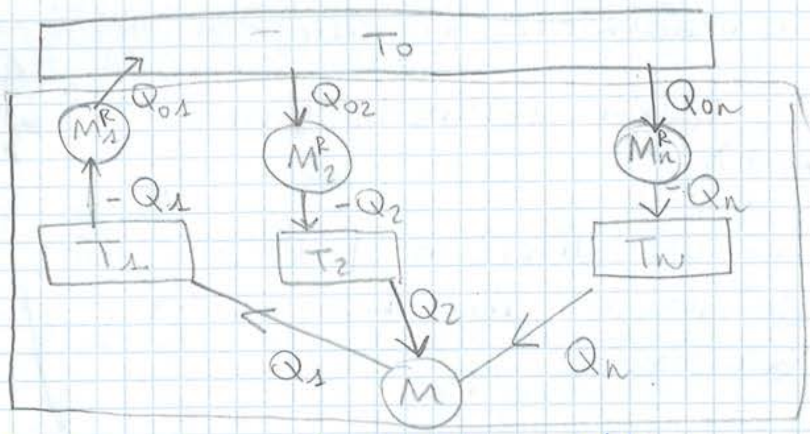
Scelgo $T_2 = T_{tr} = 273,16$ K

$$\boxed{T = \frac{T_2}{|Q_2|} |Q|}$$ Termometro

Più bassa e T, minore è la Q che il sistema scambia con la sorgente.

La minima $|Q|$ che si può scambiare è $|Q| = 0$

$\Rightarrow T = 0$ zero assoluto



Immaginiamo di avere extra:

- sorgente $T_0 > T_i \quad \forall i$
- n M_i^R di Carnot, operanti tra T_0 e T_i; in ogni ciclo, M_i^R scambia con T_i il calore $-Q_i$ e con T_0 il calore Q_{0i}

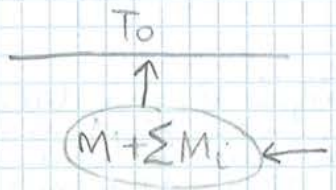
Per M_i^R vale:

$$\frac{-Q_i}{T_i} + \frac{Q_{0i}}{T_0} = 0 \quad \forall i$$

Per il teorema di Carnot:

Considero $M + \sum_{i=1}^{n} M_i$ (macchina unica)

$\Rightarrow$ Scambia calore con la sola sorgente T_0



Compatibile con Kelvin solo se

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{0i} \leq 0$$

Però

$$\frac{Q_i}{T_i} T_0 = Q_{0i} \Rightarrow \sum_i Q_{0i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} T_0$$

$$T_0 > 0 \text{ K}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Q_{0i} \leq 0$$

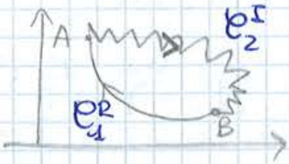
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{S_B - S_A = \int_{\mathcal{C}(A\to B)} \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R}$$

$S(P,V,T)$ è una funzione di stato è definita a meno di una costante

$$[S] = \frac{[E]}{[T]} \quad \text{nel S.I.} \quad J/K \text{ o } cal/K$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^R + \mathcal{C}_2^I$$



$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\delta Q}{T} < 0 \rightarrow$$ è irreversibile poiché una delle 2 $\mathcal{C}$ è $\Rightarrow$ non si può invertire il ciclo

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{\delta Q}{T} = \int_{\mathcal{C}_2(A,B)} \frac{\delta Q}{T} - \int_{\mathcal{C}_1^R(A,B)} \frac{\delta Q}{T} < 0$$

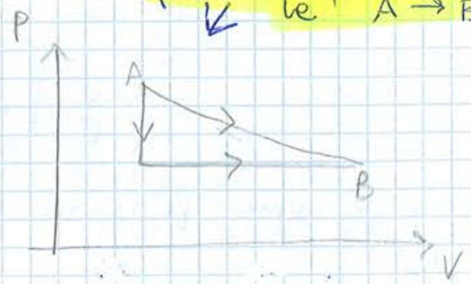
$$\int_{\mathcal{C}_1^R(A,B)} \frac{\delta Q}{T} > \int_{\mathcal{C}^I(A,B)} \frac{\delta Q}{T}$$

$$\int_A^B \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_R = S_B - S_A$$

$$\Rightarrow \boxed{S_B - S_A > \int_{\mathcal{C}^I(A,B)} \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_I}$$

integrale calcolato lungo una generica trasformazione → non ha un particolare significato fisico

Per calcolare ΔS posso usare qualunque trasf. reversibile $A \to B$



$$\frac{\delta Q}{T} = dS \qquad \delta Q = TdS$$

$$dU = \delta Q - pdV$$
$$dU = TdS - pdV$$

NOTA: se la trasformazione è ciclica $\Delta S = 0$

Per un sistema isolato

$$\delta Q = 0 \Rightarrow \Delta S \geq 0$$

Dato un sistema con l'ambiente = universo termodinamico

$\Rightarrow$ È un sistema isolato