



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1654A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Salis

MATERIA: Meccanica delle Macchine + Eserc. Prof.Eula

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

Meccanica delle macchine

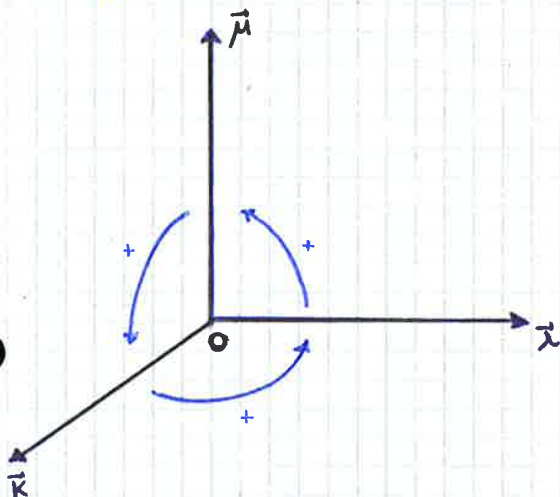
TEOREMA

Sia $\vec{r}$ un vettore posizione, rotante nel piano, di versore $\vec{\lambda}$ e con velocità angolare $\omega \vec{k}$, allora si ha

$$\frac{d(\vec{r}\vec{\lambda})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge \vec{r}\vec{\lambda}$$

dove $\vec{r}\vec{\lambda}$ = vettore rotante nel piano

La derivata di un vettore rotante è legata al prodotto vettoriale tra il vettore rotante stesso e la sua velocità angolare ω

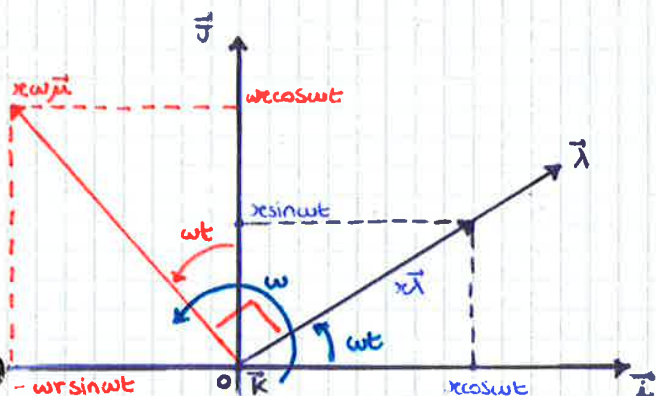


• Orientazione positiva: (ANTICLOCKWISE)

$$\begin{cases} \vec{\lambda} \wedge \vec{\mu} = \vec{k} \\ \vec{\mu} \wedge \vec{k} = \vec{\lambda} \\ \vec{k} \wedge \vec{\lambda} = \vec{\mu} \end{cases}$$

• Al contrario (orientazione negativa): (CLOCKWISE)

$$\begin{cases} \vec{\mu} \wedge \vec{\lambda} = -\vec{k} \\ \vec{k} \wedge \vec{\mu} = -\vec{\lambda} \\ \vec{\lambda} \wedge \vec{k} = -\vec{\mu} \end{cases}$$



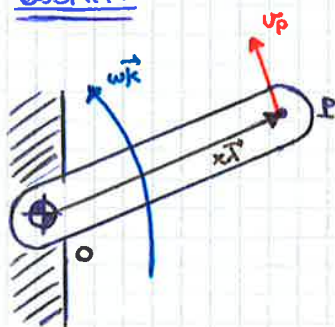
Consideriamo il vettore $\vec{r}\omega\vec{\mu}$ $\left\{ \begin{array}{l} \perp \vec{r}\vec{\lambda} \\ |\vec{r}\vec{\lambda}|\omega \\ \text{rotato di } 90^\circ \text{ nel} \\ \text{senso di } \omega \text{ rispetto} \\ \text{a } \vec{r}\vec{\lambda} \end{array} \right.$

Posiamo scrivere che:

$$\vec{r}\omega\vec{\mu} = \frac{d(\vec{r}\vec{\lambda})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{r}\vec{\lambda}) = \omega \vec{k} [\vec{k} \wedge \vec{\lambda}] = \omega \vec{k} \vec{\mu}$$

che è la derivata (velocità) del vettore $\perp$ al vettore iniziale.

ESEMPIO



Vettore posizione $(\vec{r}\vec{\lambda}) \Rightarrow (\vec{P}-\vec{O})$

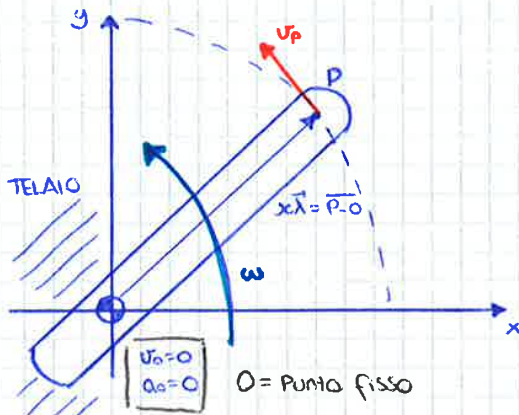
La velocità di P può essere espressa come:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{v}_{P/O} = \frac{d(\vec{P}-\vec{O})}{dt} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{P}-\vec{O})$$

$\vec{v}_P$ $\left\{ \begin{array}{l} \perp (\vec{P}-\vec{O}) \\ \text{rotato di } 90^\circ \\ \text{nel senso di } \omega \\ \omega PO \end{array} \right.$

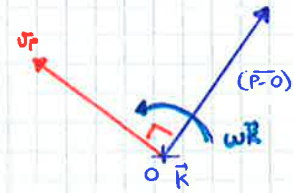
POSIZIONE $\rightarrow$ VELOCITÀ $\rightarrow$ ACCELERAZIONE

2- Moto rotatorio intorno a un punto fisso - vincolato al telaio ($\vec{v}_0=0, \vec{a}_0=0$)



$$\vec{v}_P = \frac{d(\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega} \wedge (\vec{P}-\vec{O})$$

$$\begin{matrix} M & \vec{v}_P = \omega PO = \omega r \\ D & \perp PO \\ V & \omega \end{matrix}$$



SIMBOLOGIA:



cerniera fissa



cerniera mobile

Sappiamo che:

$$\vec{v}_P = \frac{d(\vec{r})}{dt} = \omega \vec{r} = \omega [\vec{k} \wedge \vec{r}] = \omega \vec{k} \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt} [\omega \vec{r}] = \frac{d\omega}{dt} \vec{r} + \omega \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\omega} \vec{r} + \omega [\vec{k} \wedge \vec{r}] = \dot{\omega} \vec{r} + \omega^2 [\vec{k} \wedge \vec{r}] = \dot{\omega} \vec{r} - \omega^2 (\vec{r}) = \vec{a}_P$$

stessa direz.
della vettore

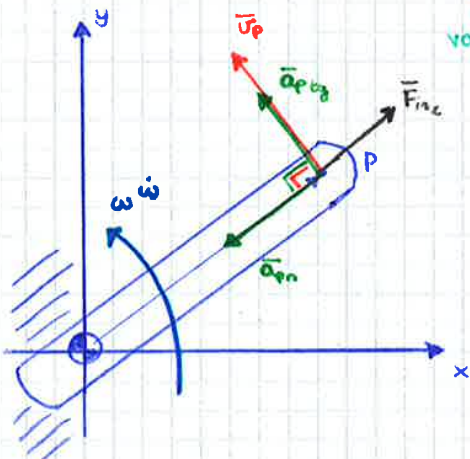
accelerazione
tangenziale
 $\vec{a}_{Ptg}$

variazione
modulo

accelerazione
centripeta o
normale
 $\vec{a}_{Pn}$

negativa perché sempre rivolta
verso il centro di rotazione
(stessa direzione del vettore posizione)

variazione direzione

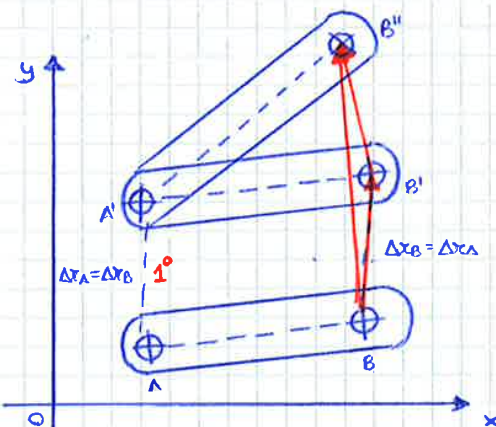


$$\vec{a}_{Ptg} \begin{cases} M & \omega PO \\ D & \perp PO \\ V & \omega \end{cases}$$

$$\vec{a}_{Pn} \begin{cases} M & \omega^2 PO \\ D & \parallel PO \\ V & P \rightarrow O \end{cases}$$



3- Moto piano generico



RIASSUMENDO...

1) MOTO PIANO GENERICO

$$\Delta \vec{x}_B = \Delta \vec{x}_A + \Delta \vec{x}_{B/A}$$

$$[\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (\vec{B}-\vec{A})]$$

F.F.C. = Formula fondamentale della cinematica

$$[\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} = \vec{a}_A + [\vec{a}_{B/A, tg} + \vec{a}_{B/A, n}]]$$

Teorema di Rivals

$$\downarrow \omega \wedge (\vec{B}-\vec{A}) \quad \downarrow -\omega^2 (\vec{B}-\vec{A})$$

2) TRASLAZIONE

$$\omega = 0, \dot{\omega} = 0 \quad \begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_A \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A \end{cases}$$

3) MOTO ROTATORIO ATTORNO A UN PUNTO

$$\vec{v}_A = 0, \vec{a}_A = 0$$

$$(\text{punto fisso del telaio}) = A \quad \begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \wedge (\vec{B}-\vec{A}) \\ \vec{a}_B = \vec{a}_{B/A} = \dot{\omega} \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{A}) - \omega^2 (\vec{B}-\vec{A}) \end{cases}$$

Moto di un corpo rigido nel piano

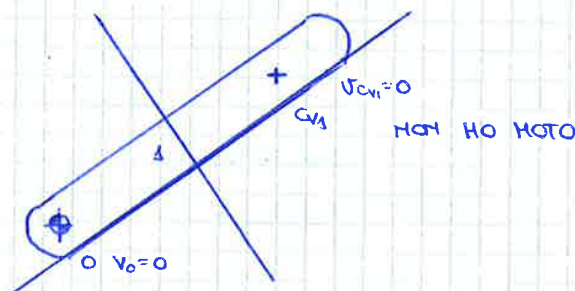
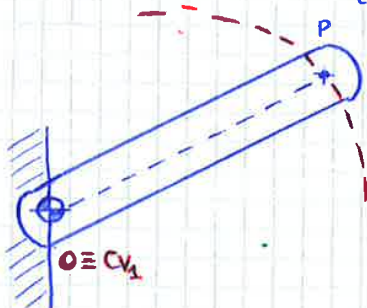
1) Centro di istantanea rotazione (o centro delle velocità)

Nel moto piano generico di un corpo rigido si può sempre individuare un punto del C.R. o del piano appartenente ad esso in cui la velocità è nulla [l'accelerazione può, in tale punto, essere anche non nulla]

→ Moto vazio → accelerazione costante o variabile (o nulla)

- a) Se ho un vincolo fisso, per esempio una cerniera fissa, in quel caso il C_r = centro di istantanea rotazione (o centro delle velocità) coincide con la cerniera fissa.

⊙ O = cerniera fissa $\begin{cases} v_O = 0 \\ a_O = 0 \end{cases}$



Il C_r nei problemi di cinematica è un metodo alternativo alla F.F.C.

- * NON può estendersi anche alle accelerazioni perché $a_{C_v} \neq 0$, in genere, e quindi per il calcolo delle accelerazioni conviene utilizzare solo il teorema di RIVALS

F.F.C. $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

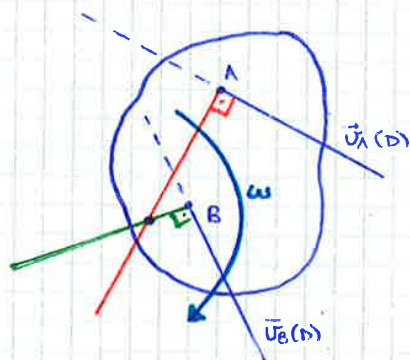
T. di Rivals $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A_n} + \vec{a}_{B/A_{tan}}$

$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_v} + \vec{v}_{B/C_v}$

~~$\vec{a}_B = \vec{a}_{C_v} + \vec{a}_{B/C_v}$~~

Calcolo della posizione di C.v.

1) Corpo rigido con due velocità non parallele



- C_{v1} è all'intersezione delle $\perp$ a $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$. Può anche cadere fuori dal corpo 1

$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_{v1}} + \underbrace{\omega \vec{k} \wedge (\vec{A} - \vec{C}_{v1})}_{\vec{v}_{A/C_{v1}}}$

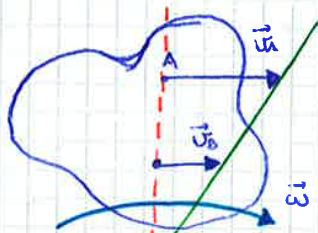
$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_{v1}} + \underbrace{\omega \vec{k} \wedge (\vec{B} - \vec{C}_{v1})}_{\vec{v}_{B/C_{v1}}}$

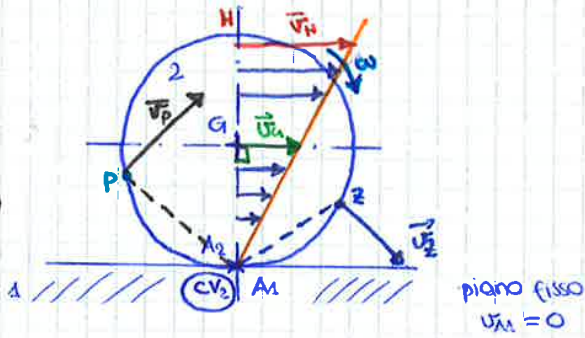
- ω è uguale per tutto il C.R.
- Tutti i punti del C.R. 1 ruotano con ω intorno a C_{v1}

$\begin{cases} \omega = \frac{v_A}{AC_{v1}} \\ v_B = \omega BC_{v1} \end{cases} \quad \text{same relation}$

2) Corpo rigido con due velocità parallele e concordi ma $|\vec{v}_A| \neq |\vec{v}_B|$

Se velocità devono in tal caso essere concordi in modulo, direzione e verso per il calcolo del C_{v1} che cadrà all'esterno del segmento AB.





DATO: c'è puro rotolamento (rotola senza strisciare)

$$v_{rel A/2} = 0$$

$$v_{A1} = v_{A2}; \text{ se } v_{A1} = 0 \Rightarrow v_{A2} = 0 = v_{Cv2}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_G = \vec{v}_{Cv2} + \omega \vec{k} \wedge (\vec{G} - \vec{Cv2}) \\ \vec{v}_G = \vec{v}_{G/Cv2} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{G} - \vec{Cv2}) \end{cases} \quad v_G \perp \omega \vec{k}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_H = \vec{v}_{Cv2} + \omega \vec{k} \wedge (\vec{H} - \vec{Cv2}) \\ HCv2 = 2R \\ |\vec{v}_H| = 2|\vec{v}_G| \end{cases}$$

- Velocità di P

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{Cv2} + \omega \vec{k} \wedge (\vec{P} - \vec{Cv2})$$

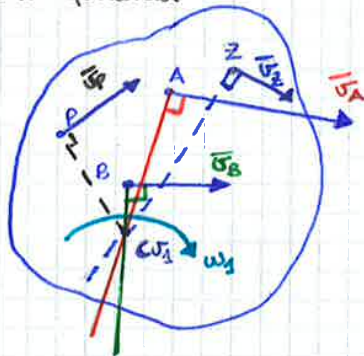
$$\vec{v}_P \perp PCv2$$

- Velocità di Z

$$\vec{v}_Z = \vec{v}_{Cv2} + \omega \vec{k} \wedge (\vec{Z} - \vec{Cv2})$$

$$\vec{v}_Z \perp ZCv2$$

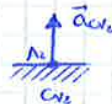
C.R. qualsiasi



$$\vec{v}_Z = \begin{cases} D \perp ZCv2 \\ V \omega R \\ H \end{cases}$$

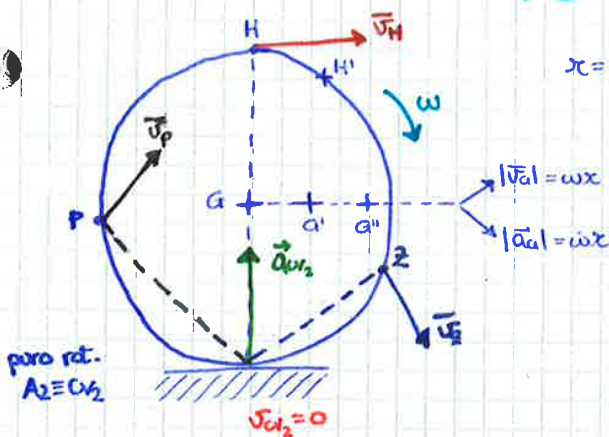
$$\vec{v}_Z = \vec{v}_{Cv2} + \vec{v}_{Z/Cv2} \rightarrow \vec{v}_Z = \omega \vec{k} \wedge (\vec{Z} - \vec{Cv2}) \rightarrow |\vec{v}_Z| = \omega (ZCv2)$$

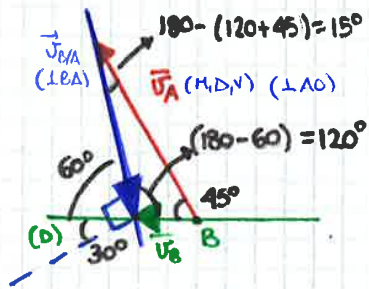
* DISCO $a_{Cv2} \neq 0 \Rightarrow |a_{Cv2}| = \ddot{y}_{Cv2} = \omega^2 x$



rotolamento, dunque solo accelerazione normale, variazione in direzione ma non in modulo per il $\underline{Cv}$

$$x = GCv2$$





Per il calcolo di $|u_{B/A}|$ e di $|u_B|$ ricorro al teorema dei seni nel Δ delle velocità qui definito

$$\begin{cases} \frac{u_A}{\sin(120^\circ)} = \frac{u_{B/A}}{\sin(45^\circ)} \Rightarrow u_{B/A} = u_A \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(120^\circ)} = 26.93 \text{ m/s} \\ \frac{u_A}{\sin(120^\circ)} = \frac{u_B}{\sin(15^\circ)} \Rightarrow u_B = u_A \frac{\sin(15^\circ)}{\sin(120^\circ)} = 9.858 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$u_{B/A} = \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{A}) \Rightarrow \omega_2 = \frac{u_{B/A}}{BA} = 44.15 \text{ rad/s}$$

verso rotato
dal Δ delle vel.
verso calcolato
dalla figura



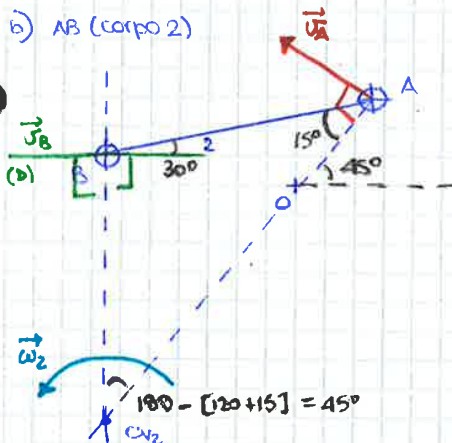
Sempre in base alla formula $\frac{d(x\vec{k})}{dt} = \omega\vec{k} \wedge (x\vec{k}) = x\omega\vec{k}$ (TEOREMA)



*Metodo alternativo alla F.F.C., cioè uso il C_v

a) $C_{v_A} \equiv 0$ in AO $u_0 = 0$; $a_0 = 0$
(stesso procedimento di prima per calcolare u_A)

b) AB (corpo 2)



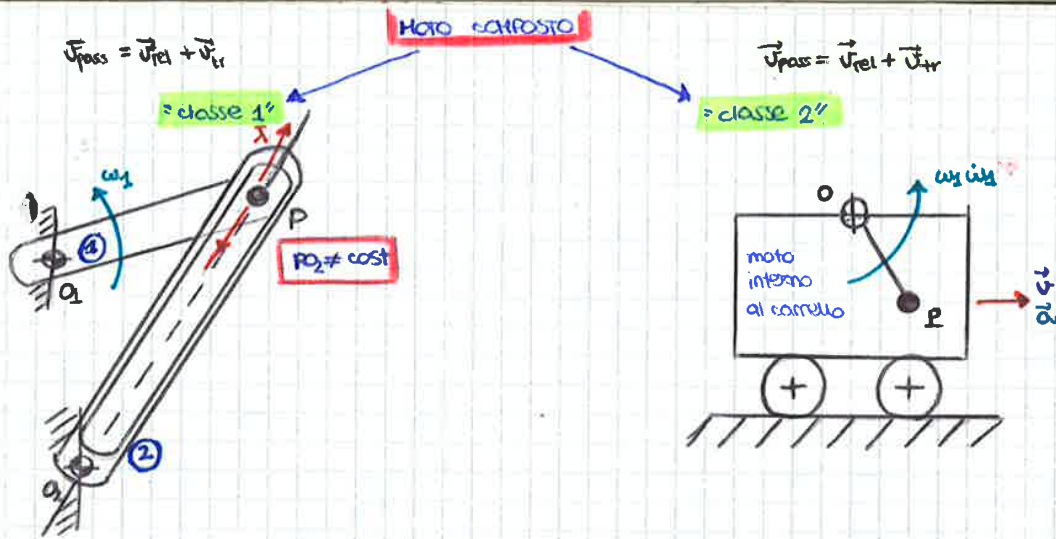
Applico il thm dei seni:

$$\frac{AC_{v_2}}{\sin(120^\circ)} = \frac{AB}{\sin(15^\circ)} = \frac{BC_{v_2}}{\sin(45^\circ)}$$

$$\begin{cases} AC_{v_2} = AB \frac{\sin(120^\circ)}{\sin(15^\circ)} \\ BC_{v_2} = AB \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(15^\circ)} = 0.223 \text{ m} \end{cases}$$

$$\vec{u}_A = \vec{u}_{C_{v_2}} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{C}_{v_2}) \Rightarrow \omega_2 = \frac{u_A}{AC_{v_2}} = 44.21 \text{ rad/s}$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_{C_{v_2}} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{C}_{v_2}) \Rightarrow \vec{u}_B = \omega_2 (BC_{v_2}) = 9.858 \text{ m/s}$$



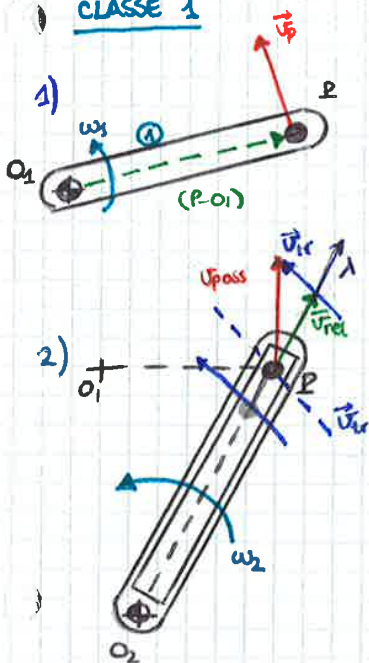
• Identificazione dei moti

- 1) MOTO ASSOLUTO rot. di P intorno a O_1
- 2) MOTO RELATIVO trasl. di P lungo $\vec{\lambda}$
- 3) MOTO DI TRASCINAMENTO rot. di P intorno a O_2

• Identificazione dei moti

- 1) MOTO ASSOLUTO composizione di 2) e 3)
- 2) MOTO RELATIVO rot. di P intorno ad O ($v_0=0, a_0=0$)
- 3) MOTO DI TRASCINAMENTO trascinamento del carrello (trasl. di P con il carrello)

CLASSE 1



$PO_1 = \text{cost}$ F.F.C.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O_1} + \vec{v}_{P/O_1} = \omega_1 \vec{k} \wedge (\vec{P} - \vec{O}_1)$$

H	$\omega_1 (PO_1)$
D	$\perp PO_1$
V	$\vec{\omega}_1$

$$\vec{v}_{rel} = \pm v_{rel} \vec{\lambda}$$

$$\vec{v}_{tr} = \vec{v}_{O_2} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{P} - \vec{O}_2)$$

H	$\omega_2 PO_2$?
D	$\perp PO_2$
V	$\vec{\omega}_2$?

$\vec{v}_{ass} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}$

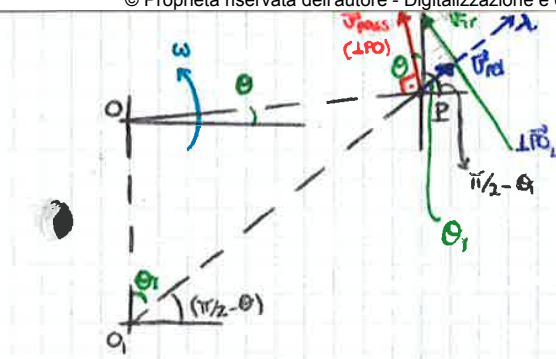
$\vec{a}_{ass} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{co}$

Formule per il
MOTO COMPOSTO

$$\begin{cases} \vec{a}_{rel} = \pm \ddot{a}_{rel} \vec{\lambda} \\ \vec{a}_{tr} = \vec{a}_{O_2} + \ddot{a}_{P/O_2,n} + \ddot{a}_{P/O_2,tg} \end{cases}$$

$\left[\vec{a}_{co} = 2\omega_{tr} \vec{k} \wedge \vec{v}_{rel} \right]$ accel. di Coriolis o
COMPLEMENTARE

(qui $\vec{\omega}_{tr} = \vec{\omega}_2$, nell'es. classe 1)



Tramite Δ delle velocità

$$\vec{v}_{pass} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}$$

$$\vec{v}_{tr} = \vec{v}_{pass} \sin(\theta + \theta_1) = 37,93 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{pass} \cos(\theta + \theta_1) = 27,94 \text{ m/s}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_{pass} &= \vec{a}_O + \vec{a}_{P/O} + \vec{a}_{tr} \\ \vec{a}_{pass} &= \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} + \vec{a}_{co} = \\ &= \pm \vec{a}_{rel} + [\vec{a}_O + \omega_1 \vec{r} \wedge (\vec{P}-\vec{O}_1) - \omega_1^2 (\vec{P}-\vec{O}_1)]_{tr} + \\ &+ 2\omega_1 \hat{n} \wedge \vec{v}_{rel} \\ &\quad \quad \quad \omega_1 \vec{r} \end{aligned}$$

$$|\vec{a}_{pass}| = \omega^2 (PO) = 7394,7 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_{P/O}| = \omega_1^2 (PO_1) = 2398 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{a}_{co}| = 2\omega_1 \vec{v}_{rel} = 3528,9 \text{ m/s}^2$$

$$|\vec{v}_{tr}| = \omega_1 PO_1 = \vec{v}_{pass} \sin(\theta + \theta_1)$$

$$\omega_1 = 63,22 \text{ rad/s}$$



Esercitazione 1

5

$AB \neq \text{cost}$

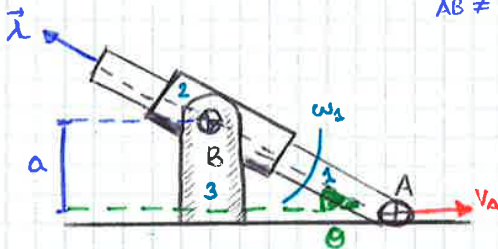
$$AB = \frac{a}{\sin \theta} = 0,5 \text{ m}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$a = 25 \text{ cm}$$

$$v_A = 1 \text{ m/s}$$

ω_A ?
 $\vec{v}_{rel}$?



1) $\Rightarrow AB \neq \text{cost} \Rightarrow$ Moto castrato

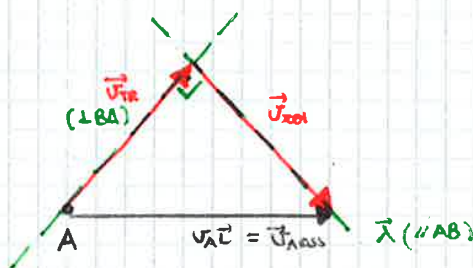
$$\vec{v}_{ass} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}$$

- 2) Identificazione dei moti : - Moto assoluto $\rightarrow$ traslazione di A lungo $\vec{r}$
- Moto di trascinamento $\rightarrow$ rotazione intorno a B
- Moto relativo $\rightarrow$ traslazione lungo λ

$$3) \vec{v}_{ass} = v_A \vec{r} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}$$

$$v_A \vec{r} = \pm v_{rel} \vec{\lambda} + [\vec{v}_B + \omega_A \vec{r} \wedge (\vec{A}-\vec{B})]_{tr}$$

H		?	$\omega_A (BA)$?
D	NOTA	lungo λ	$\perp BA$
V		?	$\vec{\omega}_A$?



$$v_{tr} = v_{ass} \sin \theta = 0,5 \text{ m/s}$$

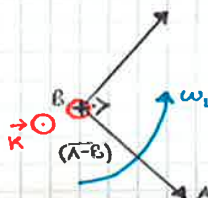
$$v_{rel} = v_{ass} \cos \theta = 0,866 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{tr} = \vec{v}_B + \omega_A \vec{r} \wedge (\vec{A}-\vec{B})$$

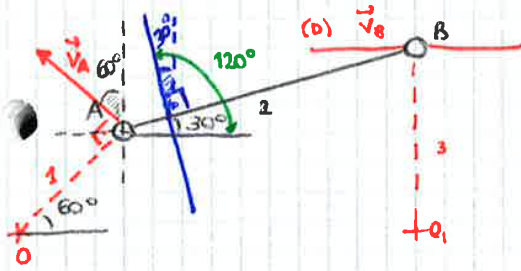
$$\omega_A = \frac{v_{tr}}{BA} = 1 \text{ rad/s}$$

quella di $\vec{r}$

$$v_{tr} = \omega_A \vec{r} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$$



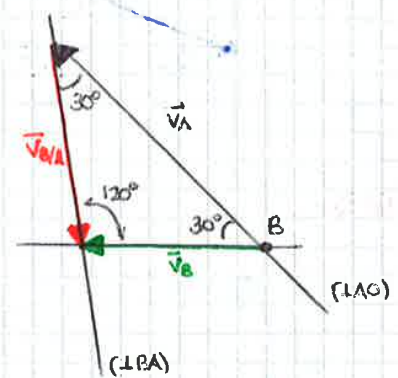
BA:



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{A})]$$

H	2	$\omega_2 BA$?
D	—	$\perp BA$
V	2	(ω_2) ?

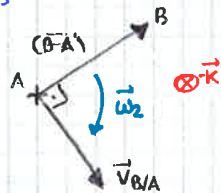


Applico il teorema dei seni:

$$v_B = \left(\frac{v_A}{\sin 120^\circ} \right) \sin 30^\circ = 2,08 \text{ m/s}$$

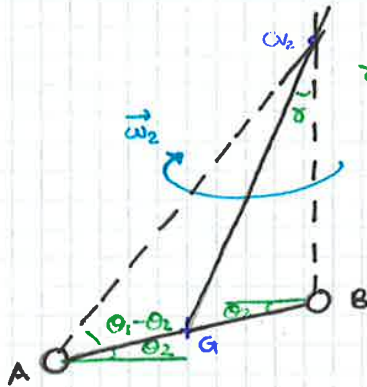
$$v_{B/A} = \left(\frac{v_A}{\sin 120^\circ} \right) \sin 30^\circ = 2,08 \text{ m/s}$$

$$\omega_2 = \frac{v_{B/A}}{AB} = 34,17 \text{ rad/s}$$



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega_3 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{O}_1) \rightarrow \omega_3 = \frac{v_B}{BO_1} = 11,69 \text{ rad/s}$$

Risoluzione tramite centro delle velocità



$$\theta = \pi - [(\theta_1 - \theta_2) + (\theta_2 + \pi/2)]$$

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_{C_v2} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{C_v2}) \Rightarrow v_B \\ \vec{v}_A = \vec{v}_{C_v2} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{C_v2}) \Rightarrow \omega_2 \end{cases}$$

$$\vec{v}_{C_v2} = \vec{v}_{C_v2} + \omega_2 \vec{k} \wedge (\vec{C_v2}-\vec{O}_2)$$

$$\frac{AC_{v2}}{\sin[\pi/2 + \theta]} = \frac{AB}{\sin \theta}$$

$$\frac{BO_{C_v2}}{\sin[\theta_1 - \theta_2]} = \frac{AB}{\sin \theta}$$

Posso calcolare la v (l'ava congiungente, verso automaticamente definito dalla ω) di un punto qualsiasi del corpo e considerandolo la congiungente.

ACCELERAZIONI:

1) AO: $\omega_1 = \text{cost}$ $\dot{\omega}_1 = 0$



TEOREMA DI RIVALS

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{a}_{A/O,n} + \vec{a}_{A/O,t}$$

$$\vec{a}_A = -\omega_1^2 (\vec{A}-\vec{O}) + \dot{\omega}_1 \vec{k} \wedge (\vec{A}-\vec{O})$$

H	$\omega_1^2 (AO) = 566,93 \text{ m/s}^2$
D	$\parallel AO$
V	$A \rightarrow O$

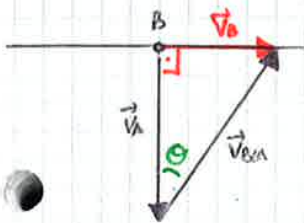
3) BO:



TEOREMA DI RIVALS

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \vec{a}_{B/O,n} + \vec{a}_{B/O,t} = -\omega_3^2 (\vec{B}-\vec{O}_1) + \dot{\omega}_3 \vec{k} \wedge (\vec{B}-\vec{O}_1)$$

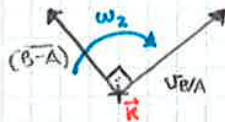
H	$\omega_3^2 (BO_1) = 86,91 \text{ m/s}^2$	$\omega_3 (BO_1)$?
D	$\parallel BO_1$	$\perp BO_1$
V	$B \rightarrow O_1$	$(\dot{\omega}_3)$?



$$V_{B/A} = \frac{V_A}{\cos \theta} = 2,31 \text{ m/s}$$

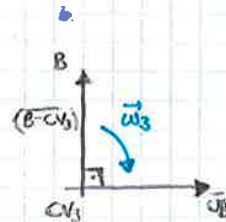
$$V_B = V_A + g\theta = 1,155 \text{ m/s}$$

$$\omega_2 = \frac{V_{B/A}}{AB} = 11,55 \text{ rad/s}$$

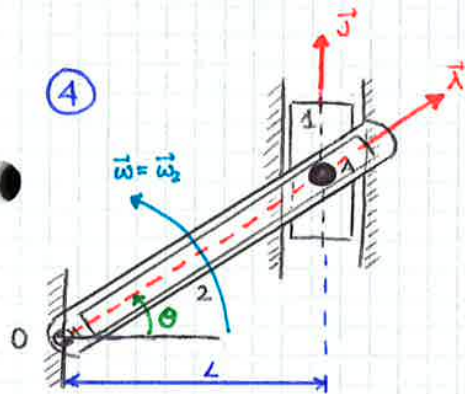


$$\vec{V}_{B/A} = \omega_2 \vec{u} \wedge (\vec{B}-\vec{A})$$

Sappiamo che $\vec{V}_B = \vec{V}_{C_3} + \omega_3 \vec{u} \wedge (\vec{B}-\vec{C}_3) \rightarrow \omega_3 = \frac{V_B}{BC_3} = 11,55 \text{ rad/s}$



④



$$\begin{cases} \omega = \omega_2 = 1 \text{ rad/s} = \text{cost} \\ \dot{\omega}_2 = 0 \end{cases}$$

$$L = 200 \text{ mm}$$

$$\theta = 0^\circ; 20^\circ$$

$$AO = L / \cos \theta \rightarrow \begin{cases} 0,2 \text{ m} \\ 0,213 \text{ m} \end{cases}$$

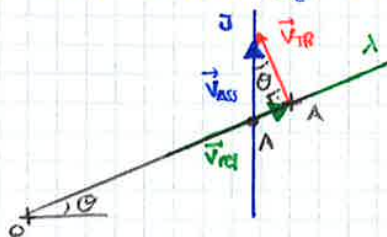
$$AO \neq \text{cost} \Rightarrow \text{Moto curvilineo}$$

$$\vec{V}_{\text{ass}} = \vec{V}_{\text{rel}} + \vec{V}_{\text{tr}}$$

Identificazione dei moti

- 1- Moto assoluto $\rightarrow$ traslazione lungo $\vec{j}$ (corpo 1)
- 2- Moto relativo $\rightarrow$ traslazione lungo $\vec{x}$
- 3- Moto di trascinamento $\rightarrow$ rotazione intorno ad O } corpo 2

$$\vec{V}_{\text{ass}} = \pm V_A \vec{j} = \pm V_{\text{rel}} \vec{x} + [\vec{\omega}_2 \wedge (\vec{A}-\vec{O})]_{\text{tr}}$$



$$\begin{cases} M \ V_{\text{tr}} = \omega_2 AO \rightarrow \begin{cases} 0,20 \text{ m/s} \\ 0,213 \text{ m/s} \end{cases} \\ D \perp AO \\ V \ \vec{\omega}_2 \end{cases}$$

$$V_{\text{ass}} = \frac{V_{\text{tr}}}{\cos \theta} = \begin{cases} 0,20 \text{ m/s} \\ 0,226 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$V_{\text{rel}} = V_{\text{tr}} \tan \theta = \begin{cases} 0 \text{ m/s} \\ 0,077 \text{ m/s} \end{cases}$$

4) Coppia di forze: ($\vec{F}$ e $-\vec{F}$)

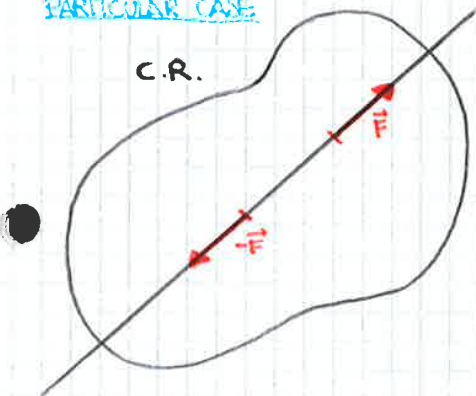


$$\begin{aligned} H_0 &= F(a+d) - Fa \\ H_0 &= Fd \\ D \quad &\vec{F} \parallel -\vec{F} \\ H \quad &|\vec{F}| = |-\vec{F}| \\ V \quad &\text{opposto} \end{aligned}$$

d = distanza tra le forze $\vec{F}$

* Fd = coppia di forze, è un vettore libero (non dipende da O) e tende solo a far ruotare il C.R.
Infatti $\vec{F} - \vec{F} = \vec{R} = 0$ (cioè NO TRASLAZIONE)

PARTICULAR CASE



* Ho due forze con stesso modulo, stessa retta di azione e versi opposti.

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \vec{F} - \vec{F} = 0 \\ H_0 &= F \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Si annulla sia l'effetto di rotazione che quello di traslazione, poiché le due forze si compensano e la risultante è NULLA, così come il momento

DEFINIZIONI:

a) SISTEMI EQUIVALENTI: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$, $\vec{H}_R = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \dots + \vec{H}_n$
↳ IDENTITÀ FORZA

Sono quei sistemi che hanno la stessa risultante e lo stesso momento risultante

b) SISTEMI IN EQUILIBRIO: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$ ($\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$), $\vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \dots + \vec{H}_n = 0$ ($\vec{H}_R = \sum_{i=1}^n \vec{H}_i = 0$)

Sistemi che hanno risultante = 0 e momento risultante = 0

c) Forze concentrate

Forze distribuite

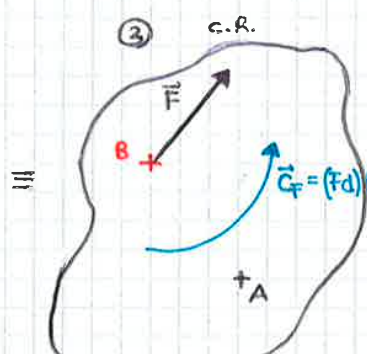
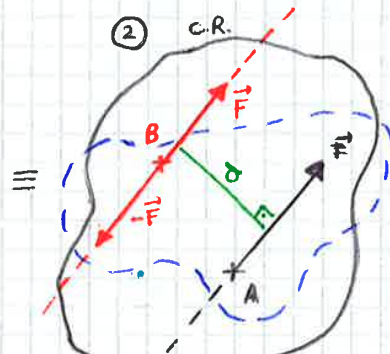
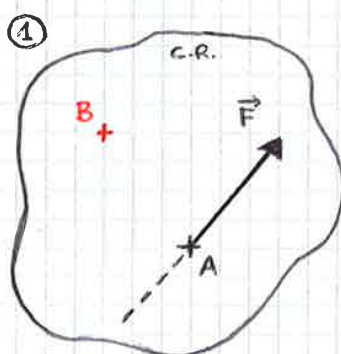
Forze esterne: Forza peso e le azioni di inerzia (si vedono anche sulla struttura assemblata)

Forze interne: Reazioni vincolari (sempre ignote; sono azioni interne al vincolo; si vedono solo separando le varie parti del meccanismo e quindi spezzando il vincolo, per es. cerniera piana e carrello ecc.)

• D.C.I. = diagramma di corpo libero

↓
schema del C.R. con indicate tutte le azioni (Forze, momenti, coppie) che agiscono su di esso.

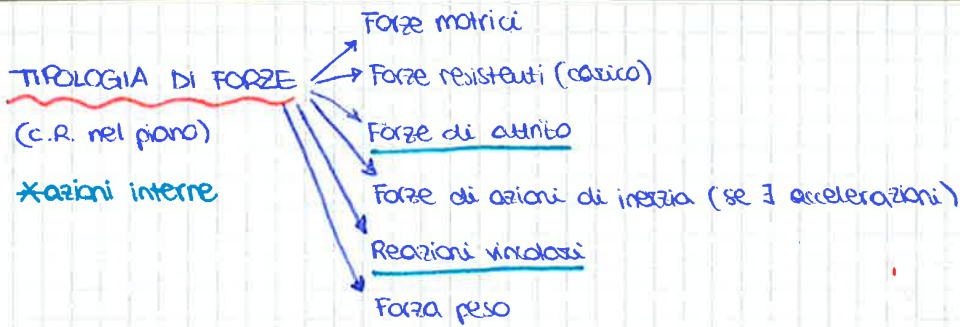
5) Trasporto di una forza fuori dalla sua retta di azione



≡ sistemi equivalenti

d di F d = braccio della coppia di $\vec{F}$

$\vec{G}_F$ = momento di trasporto di una forza $\vec{F}$



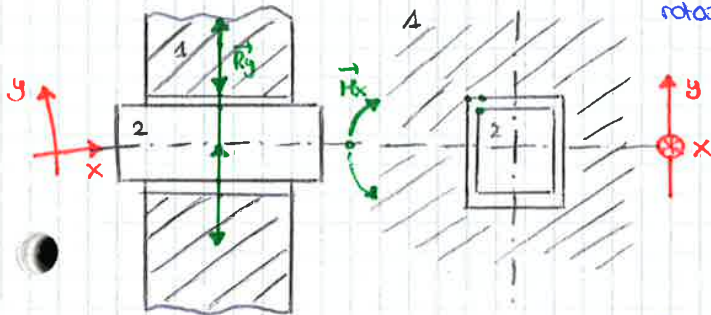
REAZIONI VINCOLARI (senza attrito)

Le reazioni vincolari nascono nella direzione in cui il vincolo impedisce il movimento

a) GUIDA PRISMATICA:



PATTINO $\Rightarrow$ Permette solo la traslazione lungo x e non la traslazione lungo y o la rotazione intorno a x.

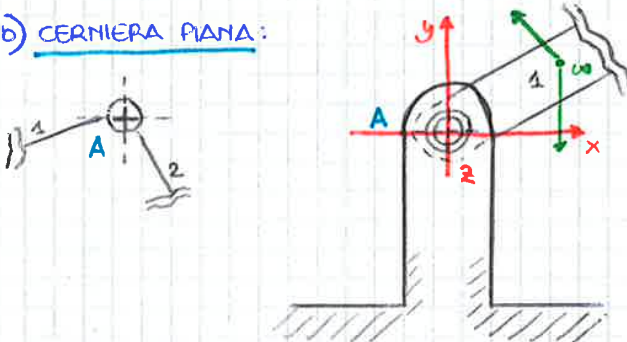


1: telaio
2: perno prismatica

$$\begin{cases} V_x \neq 0 \\ V_y = 0 \\ \omega_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ H_x \neq 0 \end{cases}$$

reazioni vincolari guida prismatica

b) CERNIERA PIANA:



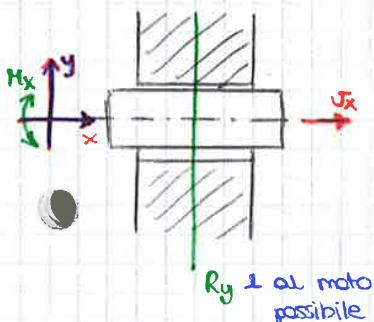
La cerniera piana permette solo ROTAZIONE, dunque:

$$\begin{cases} V_x = 0 \\ V_y = 0 \\ \omega_z \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_x \neq 0 \\ R_y \neq 0 \\ H_z = 0 \end{cases}$$

reazioni vincolari di 1 cerniera piana

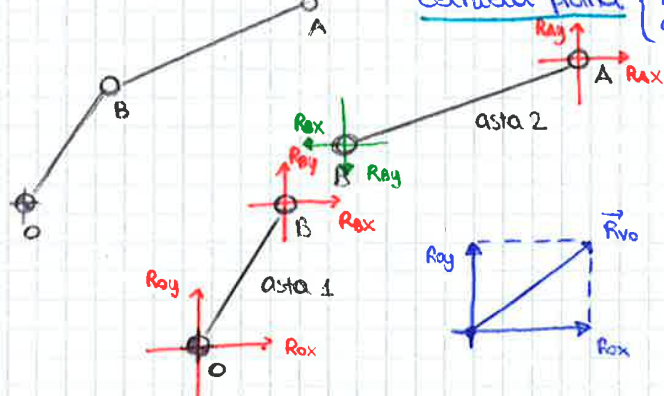
RIASSUMENDO: VINCOLI SENZA ATTRITO

Guida prismatica



(Permette solo traslazione) lungo x

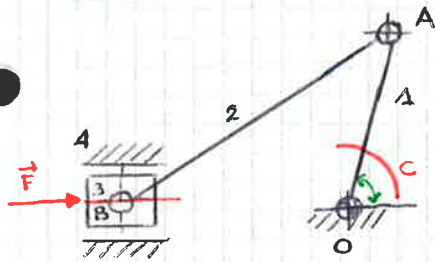
Cerniera piana



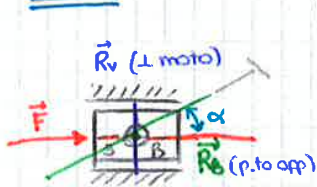
(Permette solo rotazione)

APPLICAZIONE DELLE 3 REGOLE DEGLI EQUILIBRI (usando solo le risultanti)

1) BIELLA-HANOVELLA : mettere in equilibrio il sistema

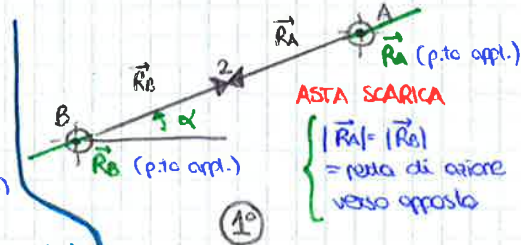


D.C.R.



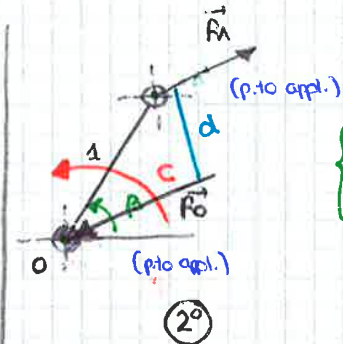
③ B ≡ p.to di stella (*)

DATI $\begin{cases} \vec{F}(M, D, V) \\ \text{si trascurano i pesi} \\ \text{si trascura l'attrito} \end{cases}$
? $\vec{C}$



ASTA SCARICA
 $\begin{cases} |\vec{R}_A| = |\vec{R}_B| \\ = \text{retta di azione} \\ \text{verso opposto} \end{cases}$

①



$\begin{cases} |\vec{R}_A| = |\vec{R}_B| \\ R_{Ad} = C \end{cases}$

②

ASTA SCARICA → $\vec{R}_A$ e $\vec{R}_B$ hanno direzione uguale alla congiungente dei vincoli

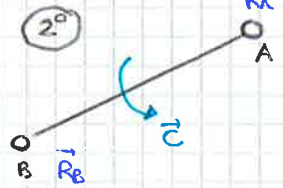
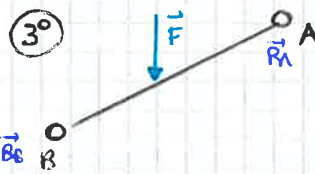
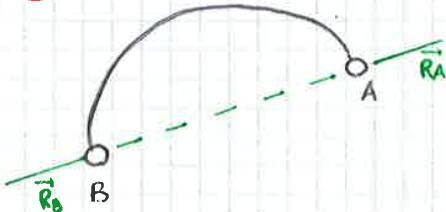
1) ASTA RETTILINEA

3 FORZE ⇒ ③

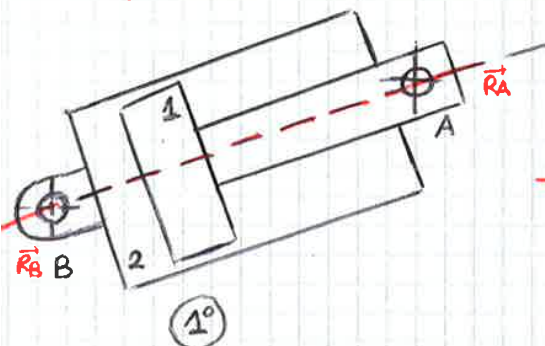


NON È UN'ASTA SCARICA

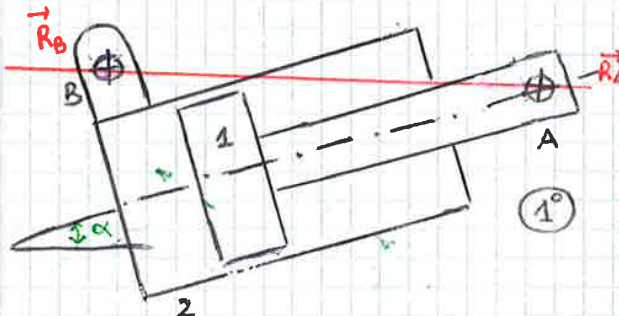
2) ASTA CURVILINEA



3) CILINDRI (pneumatici o idraulici)



1: stelo
2: carter



* Se aste scorriche permettono di avere informazioni sulla direzione delle reazioni vincolari che sono sempre incognite

$$2) \text{ C.R. } \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n \vec{F}_{est} = m\vec{a}_G & \text{equilibrio alla traslazione} \\ \sum_{i=1}^n \vec{M}_{est} = I_G \vec{\omega} & \text{equilibrio alla rotazione} \end{cases}$$

$G = \text{baricentro del C.R.}$

$m = \text{massa del C.R. [kg]} \rightarrow \text{rappresenta la resistenza del C.R. a cambiare la sua vel. lineare}$

$I_G = \text{momento di inerzia (di massa) [kgm}^2] \rightarrow \text{rappresenta la resistenza del C.R. a cambiare la sua velocità angolare.}$

$$\vec{F}_{ina} = \text{forza di inerzia} = -m\vec{a}_G$$

$$\vec{H}_{ina} = \text{coppia di inerzia} = -I_G \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_{est} + \vec{F}_{ina} = 0 \quad \text{equilibrio dinamico alla traslazione}$$

EQUAZIONI CARDINALI della DINAMICA

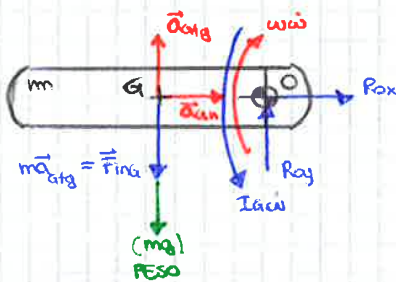
$$\textcircled{2} \sum_{i=1}^n \vec{M}_{est} + \vec{H}_{ina} + (\vec{P}-\vec{G}) \wedge \vec{F}_{ina} = 0 \quad \text{equilibrio dinamico alla rotazione}$$

* Nel piano si possono utilizzare due equazioni di equilibrio alla traslazione e 1 di rotazione.

$$x \sum_{i=1}^n \vec{F}_{estx} + (F_{ina})_x = 0 \quad \text{eq. alla traslazione lungo } x$$

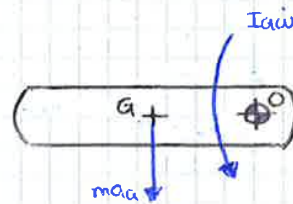
$$y \sum_{i=1}^n \vec{F}_{esty} + (F_{ina})_y = 0 \quad \text{eq. alla traslazione lungo } y$$

$$P \sum_{i=1}^n \vec{M}_{esti} + \underbrace{M_{ina}}_{I_G \vec{\omega}} + F_{ina}(b) = 0 \quad \text{eq. alla rotazione intorno a } P$$

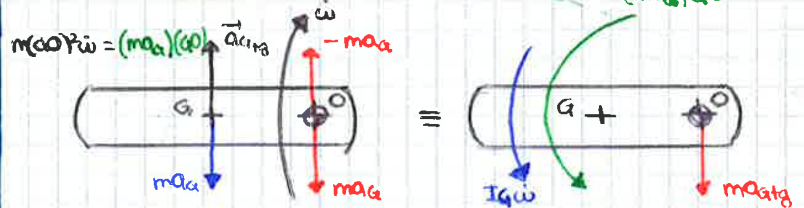


$m \text{ distribuita} \rightarrow m - \vec{F}_{ina}$
 $I_G - \vec{H}_{ina}$

$$\textcircled{0}^+ \underbrace{[mg]G_G}_{\text{STATICO}} + \underbrace{(ma_G)(G_O) + I_G \vec{\omega}}_{\text{concentrate } \textcircled{G}} = 0$$



$I_G = \text{Momento di inerzia riferito al baricentro } G \text{ della sbarretta}$



$I_O = \text{momento di inerzia della sbarretta applicato in } O$

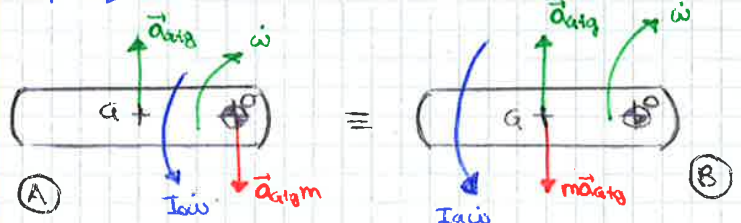
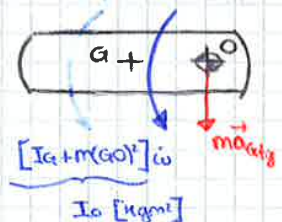
$$\Rightarrow I_O \vec{\omega} \quad (\text{riferito ad } O)$$

$$\Rightarrow F_{ina} \quad (\text{spost. in } O)$$

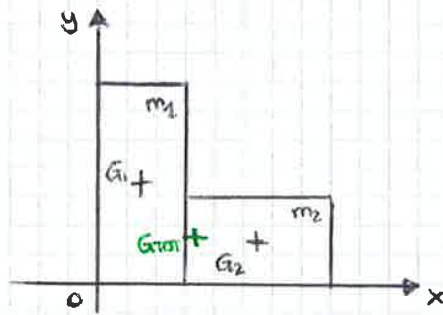
$$\vec{a}_G = \vec{a}_O - \omega^2 (\vec{G}-\vec{O}) + \omega \vec{k} \wedge (\vec{G}-\vec{O})$$

$$\vec{a}_{G/G} = \omega \vec{k} \wedge (\vec{G}-\vec{O})$$

$$\begin{matrix} M & \vec{\omega} G_O \\ D & \perp G_O \\ V & \vec{\omega} \downarrow \end{matrix}$$



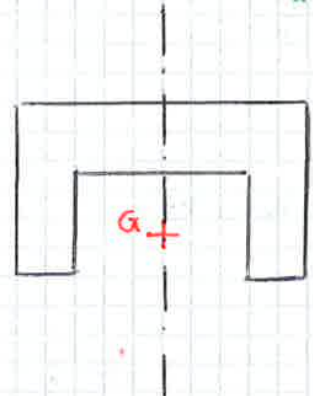
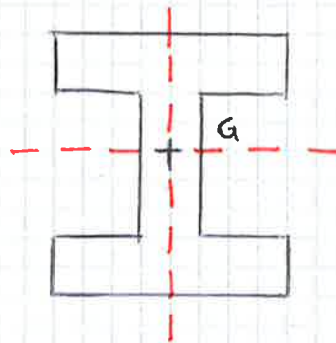
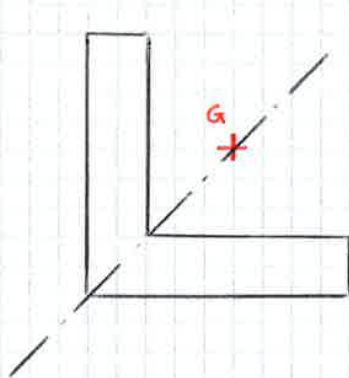
* Per esempio Grot in un sistema con 2 diversi materiali



$$y_{G_{TOT}} = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2}}{m_1 + m_2}$$

$$x_{G_{TOT}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

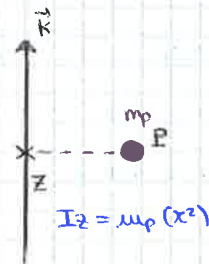
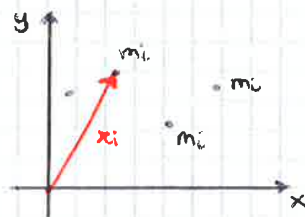
ESEMPLI DI SISTEMI SIMMETRICI WRT ASSE



* MOMENTO DI INERZIA - Prodotto tra la massa (conc. nel baricentro) e la sua distanza da un asse al quadrato (quadrato sempre +)

a) SISTEMA DISCRETO

$$I_a = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$$



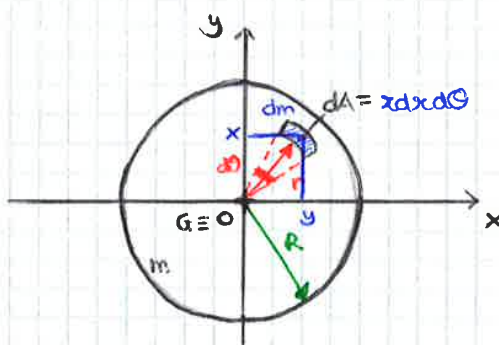
b) sistema continuo

$$I_a = \int_V x^2 dm = \int_V x^2 (\rho dv) = \int_V x^2 \rho [hdA]$$

VOLUME

$$\rho = \frac{dm}{dv} \rightarrow \text{density}$$

CALCOLO DEL MOMENTO DI INERZIA ASSIALE DI UN DISCO SOTTILE:



h = spessore disco sottile
R = raggio del disco

$$\begin{aligned} I_a &= \int_V x^2 dm = \int_V x^2 (\rho dv) = \int_V x^2 [\rho h dA] = \rho h \int_0^R x^2 [x dr] \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \rho h (R^3/3) 2\pi = \underbrace{\rho h [\pi R^2]}_M [R^2/3] = \boxed{MR^2/3 = I_a} \end{aligned}$$

I momenti diametrali del disco sottile valgono:

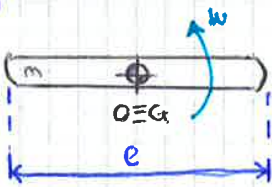
$$\left[I_x = \int_V y^2 dm \quad I_y = \int_V x^2 dm \right]$$

* Il disco è assialsimmetrico e quindi

$$I_x = I_y = \boxed{I_a/2 = MR^2/4} \quad [\text{kgm}^2]$$

$$\boxed{I_a = MR^2/2} \quad [\text{kgm}^2] \rightarrow \text{mom. di inerzia assiale}$$

2



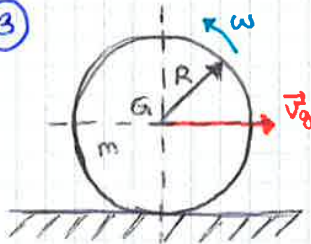
SOLO ROTAZIONE ($v_G = 0$)

$$E_c = \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$$\left[I_G = \frac{m l^2}{12} \right] [\text{kgm}^2]$$

mom. inerzia sbarretta

3



ROTOTRASLAZIONE

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

$$\left[I_G = \frac{m R^2}{2} \right] [\text{kgm}^2]$$

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$L_{est} + L_i = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pe}$$

dip. dal percorso

dip. dallo stato (in. o fin.)

L_{est} = lavoro delle forze esterne [tranne forza peso e inerzie]

L_i = lavoro delle forze interne

ΔE_c = variazione di en. cinetica

ΔE_{pg} = variazione di en. potenziale gravitazionale

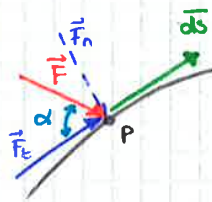
ΔE_{pe} = variazione di en. potenziale elastica

POTENZA

lavoro riferito all'unità di tempo [W]

$$P = \frac{dL}{dt} = F_t \frac{ds}{dt} = F_t v \quad (\text{FORZE})$$

$$P = \frac{dL}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M \omega \quad (\text{COPPIE})$$



As we saw before

$$dL = F_x ds = F ds \cos \alpha = (F \cos \alpha) ds = F_t ds$$

• Lavoro di una coppia = $\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$

• Lavoro di una forza = $\int_{s_1}^{s_2} F_t ds$

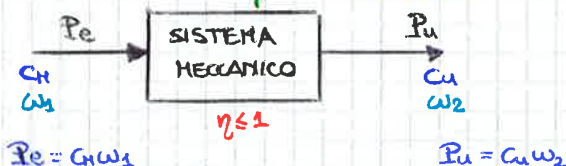
$$P_{tot} = F_t v + M \omega$$

RENDIMENTO

$$\eta = \frac{\text{Potenza uscente}}{\text{Potenza entrante}} = \frac{P_u}{P_e} \leq 1 \rightarrow \text{c'è potenza dissipata}$$

$$P [W = J/s]$$

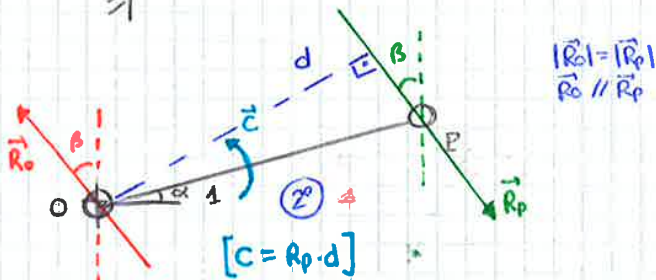
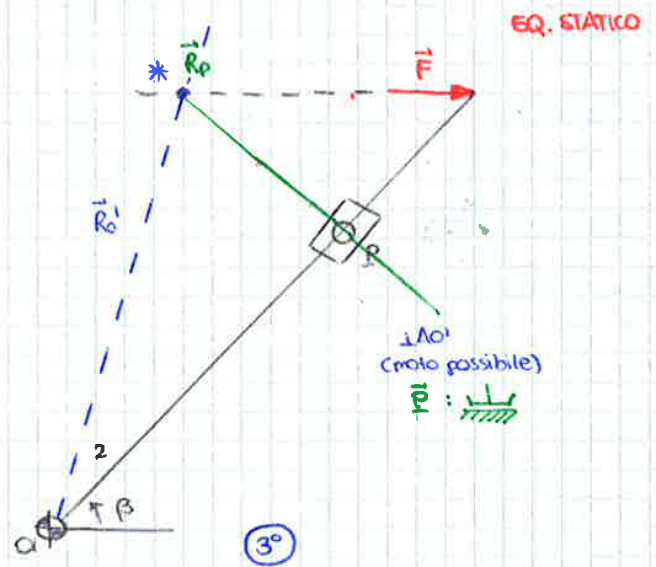
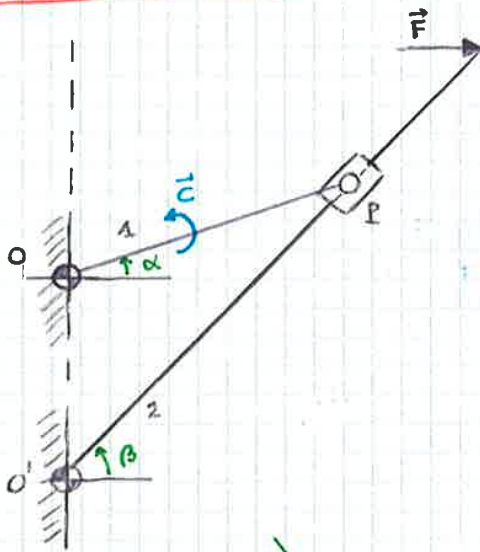
$$P_{dissipata} = P_e - P_u \quad (\text{scatto})$$



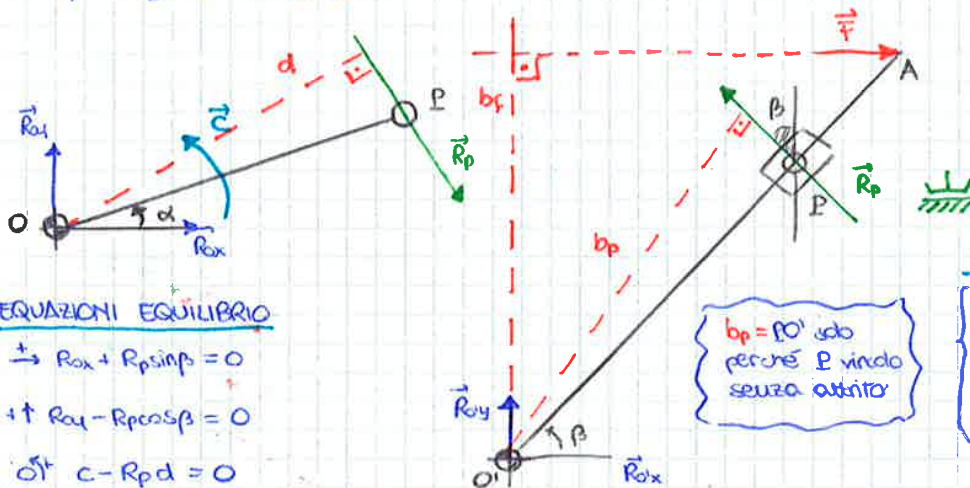
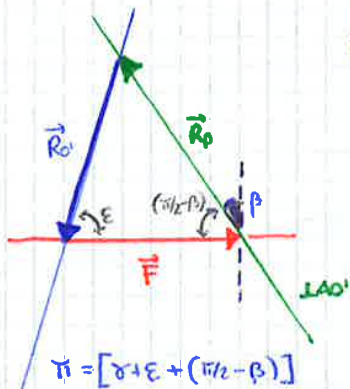
Eq. di equilibrio

$$+ \uparrow F = mg + m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = 3.27 \text{ m/s}^2$$

Esercizio 2.20 FERRARESI



$$\frac{F}{\sin \epsilon} = \frac{R_O}{\sin(\pi/2 - \beta)} = \frac{R_P}{\sin \epsilon}$$



EQUAZIONI EQUILIBRIO

$$\begin{cases} + \rightarrow R_{Ox} + R_P \sin \beta = 0 \\ + \uparrow R_{Oy} - R_P \cos \beta = 0 \\ \circlearrowleft c - R_P d = 0 \end{cases}$$

$b_P = R_O$ solo perché P vincola senza attrito

EQUAZIONI EQUILIBRIO

$$\begin{cases} + \rightarrow R_{Ox} - R_P \sin \beta = 0 \\ + \uparrow R_{Ox} + R_P \cos \beta = 0 \\ \circlearrowleft -F[b_P] + R_P[b_P] = 0 \end{cases}$$

$$R_O = \sqrt{R_{Ox}^2 + R_{Oy}^2}$$

CARRELLI

$$-m_1 \ddot{x} - m_1 g \sin \alpha + T_A = 0 \quad (1)$$

$$\dot{\omega}_2 x_2 \approx 2 \ddot{x} \quad (5)$$

PULEGIA 3

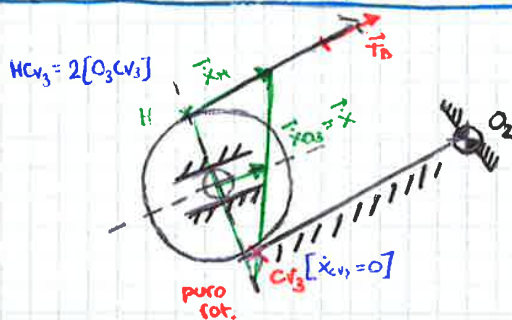
$$O_3 \rightarrow T_b \cdot x_5 - T_3 \cdot x_5 = 0 \rightarrow T_b = T_3 \quad (2)$$

$$-T_A + T_b + T_3 = 0 \rightarrow T_A = 2 T_b \quad (3)$$

PULEGIA 2

$$O_2 \rightarrow F \cdot r_2 - (T_A/2) \cdot r_2 - I_{O_2} \dot{\omega}_2 = 0 \quad (4)$$

$I_{O_2} = I_{C_2} = (m_2 r_2^2)/2$ momento di inerzia assiale di un disco sottile



$$\vec{x}_{O_3} = \vec{x} = \vec{x}_{C_3} + \omega_3 \vec{u} \wedge (\vec{O}_3 - \vec{C}_3)$$

$$\vec{x}_H = \vec{x}_{C_3} + \omega_3 \vec{u} \wedge (\vec{H} - \vec{C}_3)$$

$$|\vec{x}_H| = 2 |\vec{x}|$$

$$\begin{cases} |\vec{x}_H| = \omega_3 (2 r_3) \\ |\vec{x}| = \omega_3 (r_3) \end{cases}$$

$$O_3 : |\vec{x}_{O_3}| = \omega_3 (r_3) = |\vec{x}|$$

$$|\vec{x}_H| = 2 |\vec{x}_{O_3}| \approx 2 |\vec{x}|$$

$$\text{Rel. 2: } \vec{x}_H = \vec{a}_H = \dot{\omega}_2 \vec{u} \wedge (\vec{P} - \vec{O}_2)$$

$$|\vec{x}_H| = |\dot{\omega}_2 x_2 \approx 2 \ddot{x}| \quad (5)$$

Ora ho 5 equazioni in 5 incognite.

$$\ddot{x} = \frac{2 T_b - m_1 g \sin \alpha}{m_1} = \frac{2 (T_A/2) - m_1 g \sin \alpha}{m_1}$$

$$T_A/2 = F - I_{O_2} \dot{\omega}_2 / r_2$$

$$\dot{\omega}_2 \approx \ddot{x}_H / r_2 \approx 2 \ddot{x} / x_2$$

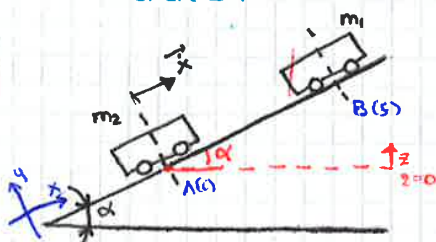
$$[\dot{x}_B = \sqrt{2 x_{B0}(\dot{x})} = 4,35 \text{ m/s}]$$

$$\rightarrow \ddot{x} m_1 = 2 F - 4 I_{O_2} / r_2^2 \cdot \ddot{x} - m_1 g \sin \alpha$$

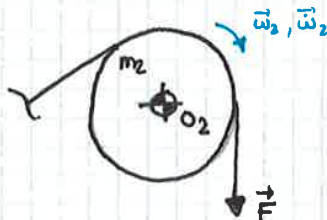
$$\rightarrow \ddot{x} = \frac{2 F - m_1 g \sin \alpha}{m_1 + 4 I_{O_2} / r_2^2} = \frac{2 F - m_1 g \sin \alpha}{m_1 + 4 \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{m_1 r_2^2}{2}} = 4,698 \text{ m/s}^2$$

$$I_{O_2} = \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

METODO ENERGETICO



$$\text{C.I.} \begin{cases} \dot{x}_A = 0 \\ x_{AB} = 2m \\ \omega_2 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} L_{\text{rest}} = 0 \\ F_{C_2} = 0 \\ E_{\text{pot}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{C(s)} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_B^2 + \frac{1}{2} I_{O_2} \omega_2^2 \\ (I_{O_2} = m_2 r_2^2 / 2) \\ E_{\text{pot}}(s) = m_1 g (h_0) = m_1 g [AB \sin \alpha] \\ L_{\text{rest}} = [F_{C_2}] \Theta_2^* \quad \Theta_2^* = 7 x_{AB} \end{cases}$$

Nello spazio: Per calcolare $\vec{K}_G$ conviene riferirsi ad ASSI PRINCIPALI di INERZIA DEL CORPO.

- Gli assi principali di inerzia hanno I_{max} e I_{min}
- Gli assi principali di inerzia sono assi di simmetria del corpo
- Se gli assi principali di inerzia sono centrati nel baricentro G del corpo si chiamano assi centrali di inerzia

Rispetto ad assi centrali di inerzia, $\vec{K}_G$ nello spazio è espresso come:

$$[\vec{K}_G = a \vec{I}_x \vec{\omega} + q \vec{I}_y \vec{\omega} + r \vec{I}_z \vec{\omega}] \text{ (nello spazio)}$$

- $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ è una terna centrale di inerzia
- I_x, I_y, I_z sono i momenti di inerzia rispetto a tale terna
- $\begin{cases} a = \vec{\omega}_{ass} \times \vec{x} \\ q = \vec{\omega}_{ass} \times \vec{y} \\ r = \vec{\omega}_{ass} \times \vec{z} \end{cases}$

$\vec{\omega}_{ass}$ del sistema

NEL PIANO:

$$\frac{d\vec{K}_G}{dt} = I_G \dot{\omega} = -\vec{M}_{ing} \rightarrow \text{è l'opposto della derivata } I \text{ del momento della quantità di moto rispetto al tempo}$$

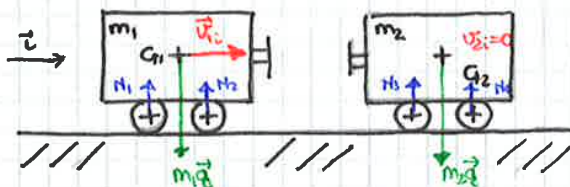
EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE (dinamico)

$$[\vec{G}] \quad \sum_{i=1}^n \vec{M}_{est,i} + \vec{M}_{ing} = 0$$

$$\left[\sum_{i=1}^n \vec{M}_{est,i} = -\vec{M}_{ing} = \frac{d\vec{K}_G}{dt} \right] \quad \text{Teorema del momento della q. di moto}$$

$$\text{se in un sistema } \sum_{i=1}^n \vec{M}_{est,i} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{K}_G}{dt} = 0 \Rightarrow [\vec{K}_G = \text{cost}] \quad \text{Teorema conservazione momento della q. di moto}$$

URTO ELASTICO



- NO ATTRITO ruote-torreno
- $\vec{v}_{2f}$ (dopo l'urto)

$$\vec{x}_i = \sum_{i=1}^n (F_{est})_x = 0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0 \Rightarrow [Q_x = \text{cost}]$$

$$\begin{cases} \vec{Q}_i = m_1 \vec{v}_{1i} \\ \vec{Q}_f = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \end{cases} \quad (\text{urto elastico quindi i due corredi non si appicciano})$$

$$Q_i = Q_f \rightarrow [m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}] \quad (1)$$

• urto elastico $\rightarrow$ conservazione dell'energia

$$\Rightarrow \text{p.c.e.} \Rightarrow \cancel{L_{est}} + \cancel{L_{int}} = \cancel{\Delta E_c} + \cancel{\Delta E_{pg}} + \cancel{\Delta E_{el}}$$

$$\Delta E_c = 0$$

$$\Rightarrow E_{cf} - E_{ci} = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 \right] \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = v_{1i} \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = v_{1i} \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

2) ? $\vec{H}_{\text{inca}}$ $\left[\vec{H}_{\text{inca}} = - \frac{d\vec{h}_a}{dt} \right]$

Nello spazio e con la terna centrale di inerzia $[\vec{x}, \vec{\mu}, \vec{v}]$

$\Rightarrow \vec{h}_a = J p \vec{x} + J q \vec{\mu} + I_v x \vec{v}$

$$\begin{cases} p = \omega \vec{u} \wedge \vec{x} = \\ q = \omega \vec{u} \wedge \vec{\mu} = \\ x = \omega \vec{u} \wedge \vec{v} = \end{cases}$$

$\left[\vec{u} = \sin \alpha \vec{x} + \cos \alpha \vec{v} \right]$

$\rightarrow \left[\omega \vec{u} = (\omega \sin \alpha) \vec{x} + (\omega \cos \alpha) \vec{v} \right]$

$\vec{h}_a = J (\omega \sin \alpha) \vec{x} + J (0) \vec{\mu} + I_v (\omega \cos \alpha) \vec{v}$

$\vec{H}_{\text{inca}} = - \frac{d\vec{h}_a}{dt}$

$\frac{d\vec{h}_a}{dt} =$

• Deriviamo rispetto al tempo $\vec{o}$

$$\begin{cases} \alpha = \cos t \\ \omega = \cos t \\ J = \cos t \\ I_v = \cos t \end{cases}$$

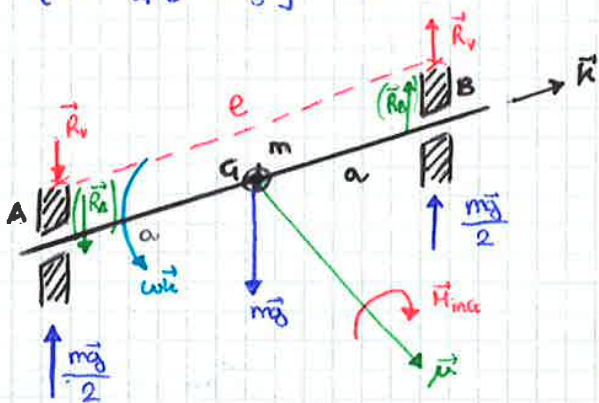
$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \omega \vec{u} \wedge \vec{x} = [\omega \sin \alpha] \vec{x} \wedge \vec{x} + \omega \cos \alpha \vec{v} \wedge \vec{x} = (\omega \cos \alpha) \vec{\mu} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega \vec{u} \wedge \vec{v} = [\omega \sin \alpha] \vec{x} \wedge \vec{v} + [\omega \cos \alpha] \vec{v} \wedge \vec{v} = -\omega \sin \alpha \vec{\mu} \end{cases}$$

$\frac{d\vec{h}_a}{dt} = J (\omega \sin \alpha) (\omega \cos \alpha) \vec{\mu} + I_v (\omega \cos \alpha) (-\omega \sin \alpha \vec{\mu}) = [J \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - I_v \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha] \vec{\mu}$

$\vec{H}_{\text{inca}} = - \frac{d\vec{h}_a}{dt} = - [J \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - I_v \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha] \vec{\mu}$

$\vec{H}_{\text{inca}} = - 1808 \vec{\mu} \text{ [Nm]}$

$\begin{cases} I_v = \frac{m x^2}{2} = 3,1 \text{ ugm}^2 \\ J = \frac{m}{A} \left[x^2 + \frac{h^2}{3} \right] = 4,3 \text{ ugm}^2 \end{cases} \quad J > I_v$



? $\vec{R}_A$
? $\vec{R}_B$

$\begin{cases} a = e/2 = AB/2 \\ e = AB \end{cases}$

AZIONI DINAMICHE

$\begin{aligned} + \uparrow \frac{mg}{2} - R_v &= R_A = - 1662 \text{ N} \\ + \uparrow \frac{mg}{2} + R_v &= R_B = 4366 \text{ N} \end{aligned}$

$|\vec{R}_v| = \frac{|\vec{H}_{\text{inca}}|}{e} = 3014 \text{ N}$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_{ext,i} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = \text{cost}$$

$$a) b) \begin{cases} \vec{Q}_i = m\vec{v} \\ \vec{Q}_c = (m_1+m_2)\vec{v}_F \end{cases} \Rightarrow m_1\vec{v} = (m_1+m_2)\vec{v}_F$$

$$b) c) \text{ P.C.E. } L_{ext} + L_{int} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pot}$$

$$\begin{cases} \Delta E_{c,b) = [0]_c - [\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_F^2]_b \\ \Delta E_{pg,b) = [(m_1+m_2)gL(1-\cos\theta)]_c - [0]_b \end{cases}$$

→ in b) abbiamo energia cinetica mentre in c) essa si converte in en. potenziale gravitazionale.

$$\Delta E_{c,b) + \Delta E_{pg,b) = 0$$

$$-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_F^2 + (m_1+m_2)gL(1-\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow v_F = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)} = 1,416 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow (Q_c)_b = (Q_F)_b \Rightarrow v = \left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)v_F = 709,416 \text{ m/s}$$

vel. iniziale proiettile

$$a) b) \Rightarrow m_1 a (m_1+m_2) \Rightarrow L_{int} \text{ (energia persa)}$$

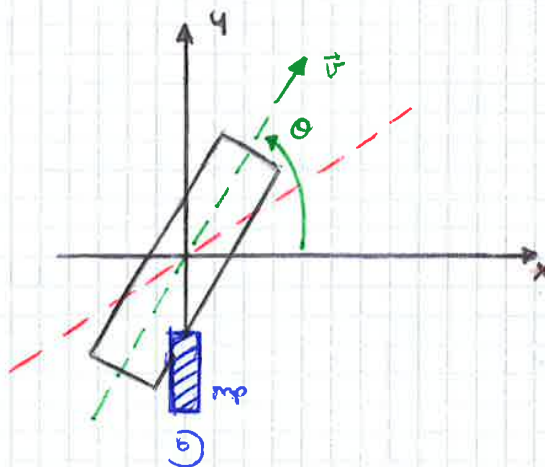
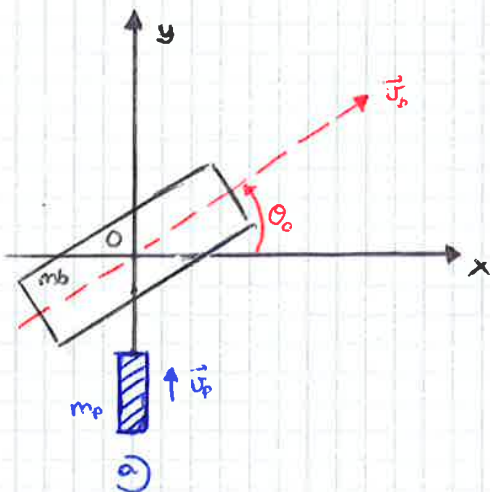
PCE

$$L_{ext} + L_{int} = \Delta E_c + \Delta E_{pg} + \Delta E_{pot}$$

$$L_{int} = [\Delta E_c]_{b) a) = [\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_F^2]_{b) a) - \frac{1}{2}[m_1v^2]_{a) = 15067,9 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \% \text{ En. dissipata} &= \frac{|L_{int}|}{E_{c,a)}} \cdot 100 = \\ &= \frac{|L_{int}|}{\frac{1}{2}m_1v^2} \cdot 100 = 99,79\% \end{aligned}$$

URTO ANELASTICO



$$\begin{aligned} m_p &= 50 \text{ g} & v_p &= 600 \text{ m/s} \\ m_b &= 4 \text{ kg} & v_b &= 12 \text{ m/s} & \theta_0 &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_i \quad \sum_{i=1}^n (\vec{F}_{ext,i})_x &= 0 \Rightarrow (\vec{Q}_a)_x = (\vec{Q}_b)_x \\ \vec{x}_j \quad \sum_{i=1}^n (\vec{F}_{ext,i})_y &= 0 \Rightarrow (\vec{Q}_a)_y = (\vec{Q}_b)_y \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (\vec{Q}_a)_x = m_b \vec{v}_b \cos\theta_0 \\ (\vec{Q}_a)_y = m_b \vec{v}_b \sin\theta_0 + m_p \vec{v}_p \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\vec{Q}_b)_x = (m_b + m_p) \cos\theta \vec{v} \\ (\vec{Q}_b)_y = (m_b + m_p) \sin\theta \vec{v} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_b v_b \cos\theta_0 = (m_b + m_p) \cos\theta v & \text{A} \\ m_b v_b \sin\theta_0 + m_p v_p = (m_b + m_p) \sin\theta v & \text{B} \end{cases}$$

$$\frac{m_b v_b \cos\theta_0}{m_b v_b \sin\theta_0 + m_p v_p} = \frac{(m_b + m_p) \cos\theta v}{(m_b + m_p) \sin\theta v} = 1,299$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{m_b v_b \sin\theta_0 + m_p v_p}{m_b v_b \cos\theta_0}$$

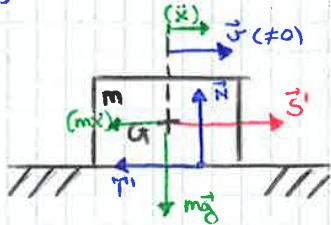
$$[\theta = 52,4^\circ]$$

Da A)

$$\Rightarrow v = \frac{m_b v_b \cos\theta_0}{(m_b + m_p) \cos\theta} = 16,82 \text{ m/s}$$

Nel caso 3) non si ha più aderenza tra cassa e ferroio.

3) da cassa inizia a muoversi e l'attrito diventa "attrito di strisciamento"



$$T' > f_a N ; \vec{v} \neq 0$$

$$\begin{cases} \rightarrow S' = T' & (v = \text{cost}) \\ \uparrow N = mg \end{cases}$$

$S' \rightarrow$ azione motrice
 $T' \rightarrow$ azione resistente

$$(v \neq \text{cost}) \begin{cases} \rightarrow S' - T' - m\ddot{x} = 0 \\ \uparrow N - mg = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{Se } S' > T' \Rightarrow \text{il sistema ACCELERI} \\ \text{Se } S' < T' \Rightarrow \text{il sistema DECELERI} \end{cases}$$

Legge dell'attrito di strisciamento

$$[T' = fN] \quad \text{dove } f = \text{coeff. di attrito di strisciamento}$$

MODELLI PER L'ATTRITO

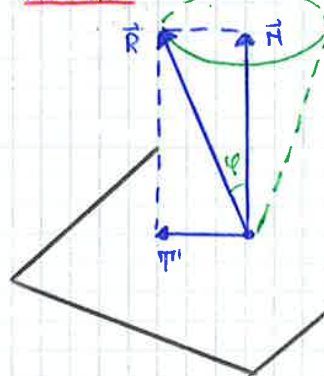
a) MODELLO MATEMATICO

Aderenza: $T' \leq f_a N$

Strisciamento: $\begin{cases} (T' > f_a N) \\ T' = fN \end{cases}$

b) MODELLO GEOMETRICO

ADERENZA

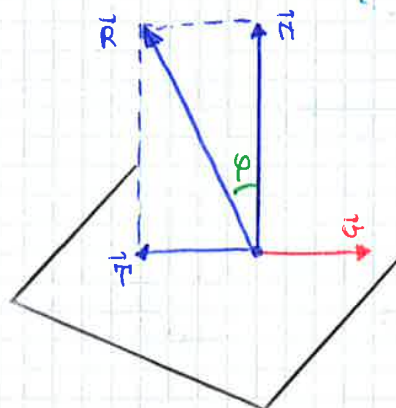


$$\begin{aligned} T' &\leq f_a N \\ f_a &= \tan \varphi_a \end{aligned}$$

$\varphi_a =$ angolo di aderenza $[N, R]$

piano di appoggio della cassa

STRISCIAMENTO



$$\begin{aligned} T' &= fN \\ f &= \tan \varphi \end{aligned}$$

$\varphi =$ angolo attrito di strisciamento $[N, R]$

$v \neq 0$

piano di appoggio della cassa

1° Ip. Ipotesi di puro rotolamento tra ruota e terreno $\Rightarrow$ il punto di contatto tra ruota e terreno è il CV della ruota.

$$\Rightarrow \vec{v}_A = \vec{v}_{CV \text{ ruota}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_{CV \text{ ruota}})$$

$$H \mid \vec{v}_A = \vec{\omega} R$$

$$D \mid \perp \vec{r}_{CV \text{ ruota}}$$

$$V \mid \vec{\omega} \downarrow$$

$$\Rightarrow T \leq f_a N \quad (\text{aderenza?})$$

EQ. EQUILIBRIO

$$\begin{cases} x_i \rightarrow -T - m\ddot{x}_A = 0 & (1) \\ x_j \uparrow N - mg = 0 & (2) \\ G \downarrow + CH - T(R) - I_G \ddot{\omega} = 0 & (3) \end{cases}$$

Ruota con 1 GdL ($\vec{v}_A = \vec{\omega} R$)

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{x}_A = \ddot{\omega} R \\ T \leq f_a N \end{array} \right\} (4)$$

● calcolo T e N valori numerici e poi verifico l'aderenza tramite $T = f_a N$

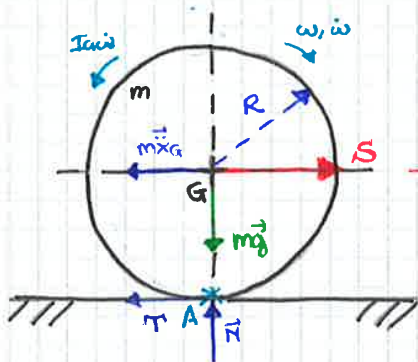
se $T \leq f_a N$: ho risolto e finito il calcolo delle incognite

se $T > f_a N$: non esiste aderenza tra ruota e terreno, la ruota ha 2 GdL

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_A \neq \vec{\omega} R \\ \ddot{x}_A \neq \ddot{\omega} R \\ T = fN \end{array} \right. \text{ strisciamento tra ruota e terreno } (4)$$

vel. lineare e vel. angolare indipendenti

2) RUOTA CARICATA (o ruota trascinata)



S = azione motrice

T si oppone ad S

1° Ip Puro rotolamento $\rightarrow$ aderenza ($\vec{v}_{\text{ruota}} = A$)

$$\begin{cases} x_i \rightarrow S - T - m\ddot{x}_A = 0 & (1) \\ x_j \uparrow N - mg = 0 & (2) \\ G \downarrow + TR - I_G \ddot{\omega} = 0 & (3) \\ \ddot{x}_A = R\ddot{\omega} \quad (T \leq f_a N) & (4) \end{cases}$$

a) Verifico con i valori numerici se $T \leq f_a N$

b) Se $T \leq f_a N$ ho risolto ✓

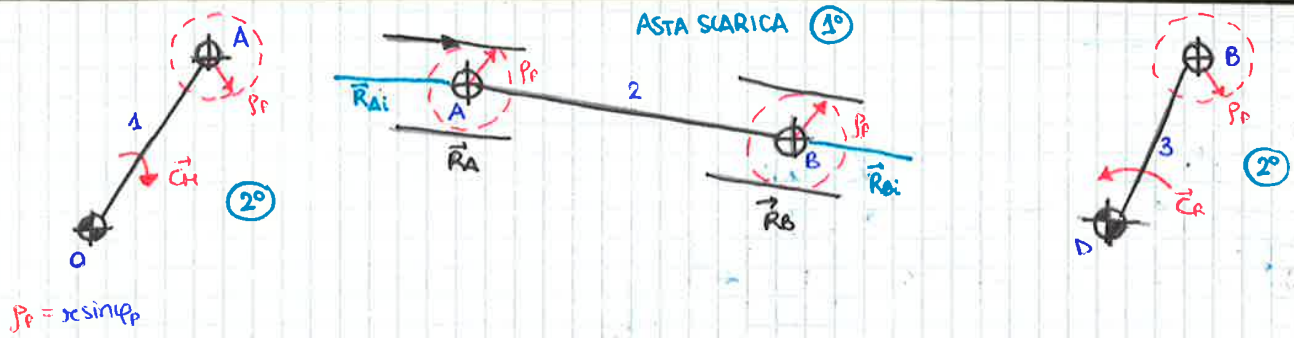
c) se $T > f_a N \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_A \neq R\ddot{\omega} \\ T = fN \end{array} \right. (4) \quad \underline{2 \text{ GdL}}$

strisciamento tra ruota e terreno

$f_a = 0,1$ neve

$f_a = 0,75$ condizioni normali

$f_a > 1$ pneumatici da competizione

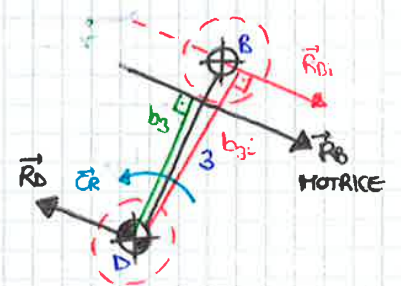
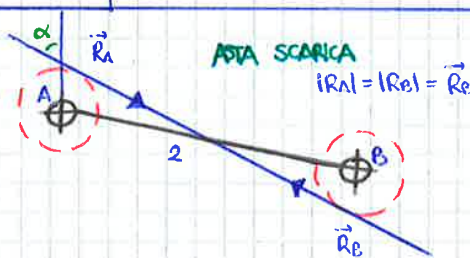
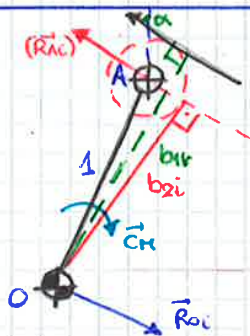
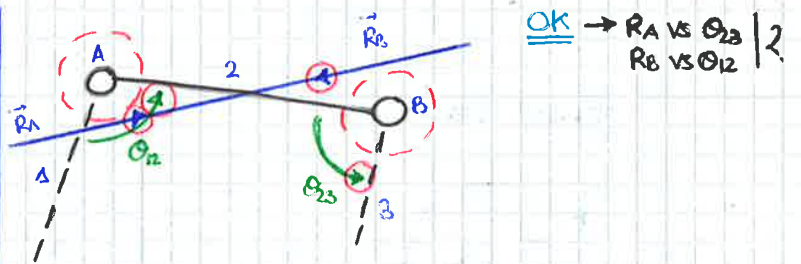
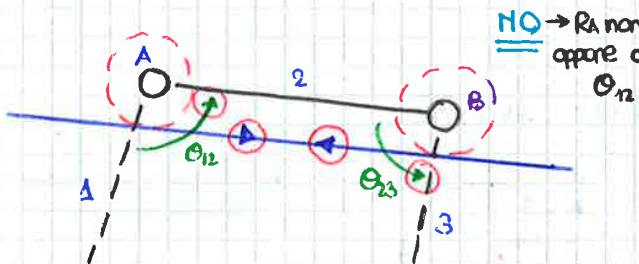
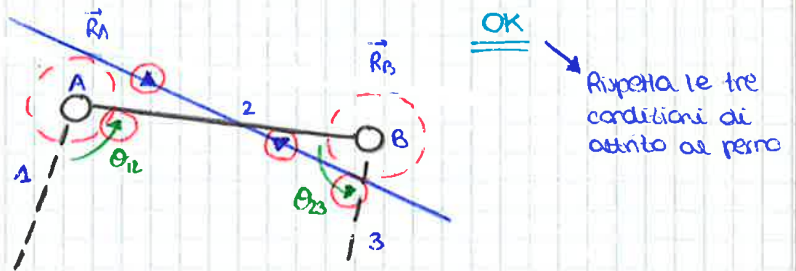
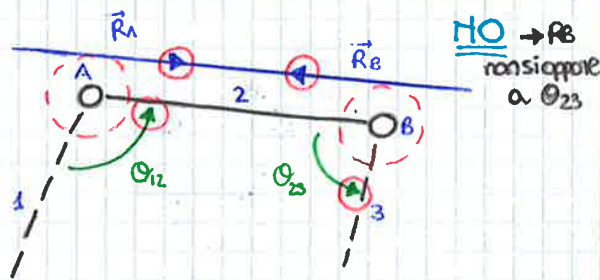


Alligato al perno:

- $\vec{R}_A, \vec{R}_B$ tangenti al c. di attrito al perno
- opposti a $\vec{\omega}$ (come ai ΔO)
- rispettano l'equilibrio del corpo

$\begin{cases} \theta_{12} \text{ aumenta} \\ \theta_{23} \text{ diminuisce} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= R_{A1} \quad (?) \\ &= R_{A2} \end{aligned}$$



$C_{res} = R_A P_F$
 Braccio reale > Braccio ideale ($b_{1r} > b_{2i}$)

$$\begin{cases} \vec{R}_A \parallel \vec{R}_O \\ |\vec{R}_A| = |\vec{R}_O| \end{cases}$$

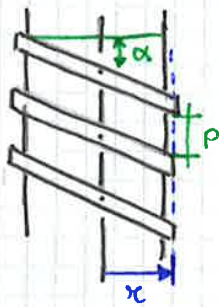
$\Rightarrow C_H = R_{A2} \Rightarrow \vec{R}_A = C_H / b_2$

$b_3 < b_{3i}$ (ideale > reale)

$$\begin{cases} \vec{R}_B \parallel \vec{R}_O \\ |\vec{R}_B| = |\vec{R}_O| \end{cases}$$

$\Rightarrow R_{B3} = C_H$

VITE (profilo rettangolare)



r = raggio medio della vite
 α = angolo di inclinazione del filetto della vite (3°)
 p = passo della vite (distanza tra due filetti immediatamente successivi)

a profilo
trapezio

$$\left[v = \frac{p}{2\pi} \omega \right] \text{ velocità traslazione madre vite}$$

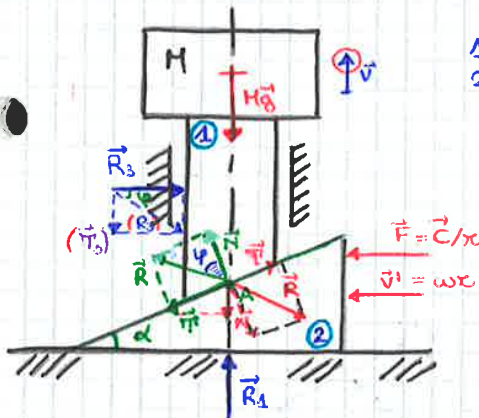
? DCL

? C

? $\vec{v}$ quando si applica $C' = 5 \text{ Nm}$ ($\neq C$)

? η (RENDIMENTO)

Per tracciare il DCL uso i CUNEI EQUIVALENTI



1: vite
2: madre vite

* Se $\vec{v}$ non può andare verso l'alto perché α da una componente concorde a v lungo l'asse della vite, quando invece tale componente deve sempre opporsi alla velocità della vite stessa.

Anche $\vec{R}$ può essere scomposta in una componente normale e una tangenziale

(vincoli senza attrito)

$$\textcircled{1} \uparrow R \cos(\alpha + \varphi) = mg$$

$$\rightarrow R_3 - R \sin(\alpha + \varphi) = 0$$

$$\textcircled{2} \uparrow R_1 - R \cos(\alpha + \varphi) = 0$$

$$\rightarrow R \sin(\alpha + \varphi) = F$$

• Metto in relazione la 1° e l'ultima equazione e ottengo:

$$\frac{R \cos(\alpha + \varphi)}{R \sin(\alpha + \varphi)} = \frac{mg}{F} \rightarrow \left[\frac{F}{mg} = \tan(\alpha + \varphi) \right]$$

$$F = C/x = mg \tan(\alpha + \varphi) \rightarrow C = x mg \tan(\alpha + \varphi) = 2,25 \text{ Nm}$$

$C' = 5 \text{ Nm} > C = 2,25 \text{ Nm} \Rightarrow$ da vite accelera perché la coppia è maggiore.

$$\textcircled{1} \uparrow R \cos(\alpha + \varphi) = Hg + M\dot{v}$$

$$\textcircled{2} \rightarrow R \sin(\alpha + \varphi) = F' = C'/x$$

Rapporto $\Rightarrow \frac{R \cos(\alpha + \varphi)}{R \sin(\alpha + \varphi)} = \frac{Hg + M\dot{v}}{C'/x} \Rightarrow \dot{v} = \frac{C'/x - Hg \tan(\alpha + \varphi)}{M \tan(\alpha + \varphi)} = 11,95 \text{ m/s}^2$
 ↓
 accelerazione

Calcolo del rendimento (η)

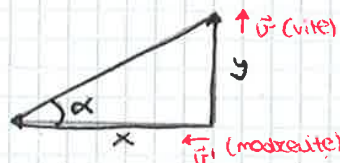
η = rendimento del sistema = $\frac{P_u}{P_e}$, nel nostro caso:

$$\eta = \frac{(Hg)v}{C\omega} = \frac{(Hg)v}{Fv}$$

$$F = C/x = mg \tan(\alpha + \varphi)$$

Dunque il rendimento è:

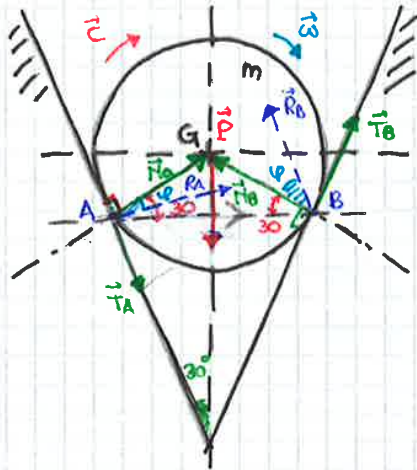
$$\eta = \left[\frac{Hg}{mg \tan(\alpha + \varphi)} \right] \left[\frac{v}{v} \right] = \frac{\tan \alpha}{\tan(\alpha + \varphi)} = 0,34 \text{ (senza attrito nei vincoli)}$$



La velocità della vite e della madre vite non saranno mai uguali perché la loro relazione dipende dall'angolo α .
 $\vec{v} = \vec{v}' + \tan \alpha$

ES 4 no attrito nei vincoli

2



$$\vec{P} = m\vec{g}$$

$$d = 30 \text{ mm}$$

$$\begin{cases} h = 100 \text{ giri/min} \\ \omega = 2\pi h / 60 \end{cases}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$m = 100 \text{ kg}$$

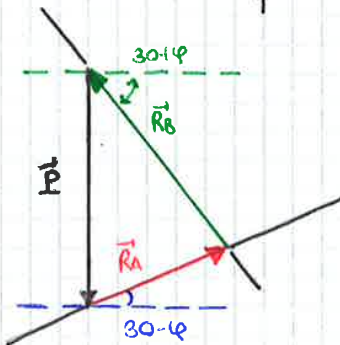
$$\begin{cases} p_i = 0,2 \text{ m (raggio di inerzia)} \\ I_a = m p_i^2 = 4 \text{ kgm}^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = 0,25 \\ f = \tan \varphi \Rightarrow \varphi = 14^\circ \end{cases}$$

? C per $\omega = \text{cost}$

? calore dissipato per attrito in kcal/h

? t^* in cui $\omega \rightarrow 0$ se $C = 0$



$$\begin{cases} +\uparrow P - R_B \sin(30^\circ + \varphi) - R_A \sin(30^\circ - \varphi) = 0 & (1) \\ \rightarrow R_B \cos(30^\circ + \varphi) - R_A \cos(30^\circ - \varphi) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{da } (2) \rightarrow R_B = R_A \frac{\cos(30^\circ - \varphi)}{\cos(30^\circ + \varphi)}$$

$$\rightarrow \text{In } (1) \quad P = R_A [\tan(30^\circ + \varphi) \cos(30^\circ - \varphi) + \sin(30^\circ - \varphi)]$$

$$\rightarrow R_A = 811,8 \text{ N}$$

$$\rightarrow R_B = 1088,88 \text{ N}$$



$$\rightarrow G^+ \quad C = d/2 (T_A + T_B) = d/2 \sin \varphi (R_A + R_B) = 6,908 \text{ Nm} \quad (\omega = \text{cost})$$



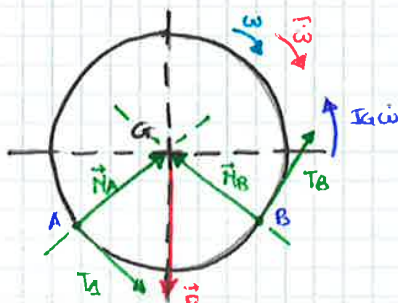
$$P_H = C\omega = C(2\pi h/60) = 72,33 \text{ W}$$

$$P_H = P_{\text{dissipata}} = 72,33 \text{ W}$$

$$\text{Quantità di calore sviluppata per attrito} = P_{\text{dissipata}} \cdot \frac{3600}{(1,186) \cdot 1000} = 62,20 \text{ kcal/h}$$

[kcal/h]
(1 cal = 4,186 J)

? t^* di arresto del rullo se $C = 0$



$$G^+ \quad I_a \dot{\omega} + (T_A + T_B) d/2 = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = - \frac{(T_A + T_B) d/2}{I_a}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega} t$$

$$\begin{cases} 0 = \omega_0 + \dot{\omega} t^* \Rightarrow t^* = - \frac{\omega_0}{\dot{\omega}} = - \frac{(2\pi h/60)}{\dot{\omega}} = +6,06 \text{ s} \\ (\omega = \omega_0) \end{cases}$$

FRENI

nei componenti che utilizzano l'attrito si hanno CONTATTI ESTESI.

I_p
(HABELL)

pressione uniforme (lungo tutta la zona di contatto)

ipotesi dell'usura o di REVE: Il volume di materiale asportato per attrito nell'unità di tempo è proporzionale al lavoro fatto dalle forze di attrito nella stessa unità di tempo.

$$\delta = \frac{dh}{dt}$$

$$dV = \delta dA = K \frac{dL_{attrito}}{dt} = K dT \cdot \frac{ds}{dt} = K dT' v_{rel}$$

Spessore asportato per attrito nell'unità di tempo.

$$\delta dA = K [fdN] v_{rel} = K [fp dA] v_{rel}$$

$$\delta dA = K [fp dA] v_{rel}$$

da pressione è espressa rispetto a δ o v_{rel} , tutti gli altri termini (sono costanti (da si semplifica))

Tipologie di freni: in generale hanno un elemento frenante e un elemento frenato

- 1 - Freni a pattino ad accostamento rigido;
- 2 - Freni a pattino ad accostamento elastico;
- 3 - Freni a ceppo (o a tamburo) ad accostamento rigido;
- 4 - Freni a ceppo (o a tamburo) ad accostamento elastico;
- 5 - Freni a disco ad accostamento rigido;
- 6 - Freni a disco ad accostamento semirigido;
- 7 - Freni a disco ad accostamento elastico;
- 8 - Freni a nastro.

FRENO A PATTINO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO

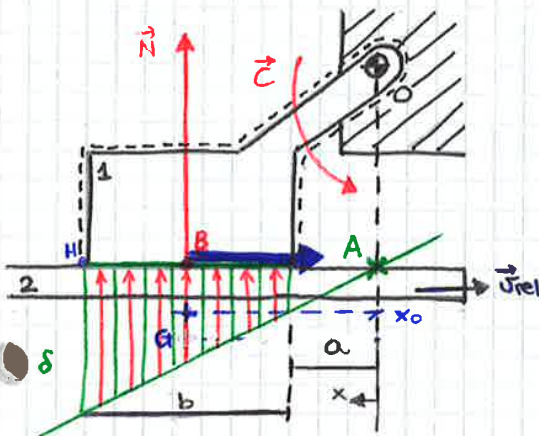


DIAGRAMMA dell'USURA

- 1: pattino
- 2: tamburo

Si trascurano i pesi

$\vec{C}$

- a) ACCOSTAMENTO RIGIDO: Il pattino ha 1 GdL (può ruotare solo intorno ad O)
- b) Se il pattino è ad accostamento rigido è definito il suo moto di accostamento al tamburo.

Ip. usura: $\delta dA = K [fp dA] v_{rel}$

$\downarrow$
 F_{cost}

$\Rightarrow [p = \delta]$ pressione di contatto o di usura
 $\hookrightarrow$ andamento trapezoidale

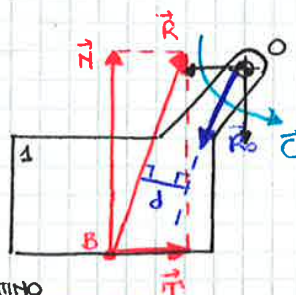
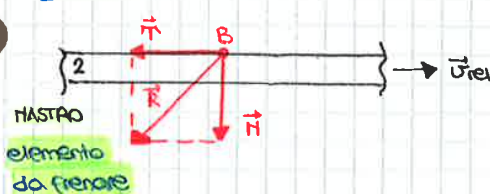
• Nella zona di contatto tra 1 e 2 si scambiano N e T di strisciamento. Ma:

$$N = \int_A p dA, \quad T = \int_A \mu p dA$$

$$p = \delta, \quad \delta = Kx \rightarrow p = Kx \rightarrow N = \int_a^{a+b} Kx dx \cdot 1$$

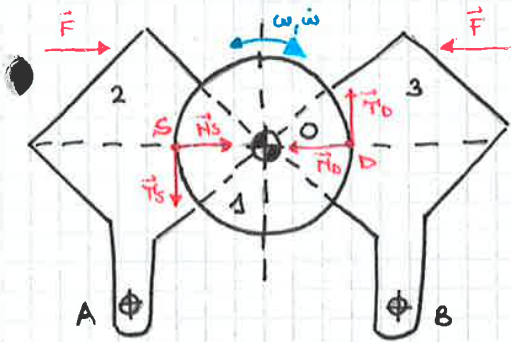
$$Nx_0 = \int_a^{a+b} (Kx dx) \cdot x \Rightarrow x_0 = \frac{2}{3} \frac{(a+b)^3 - a^3}{(a+b)^2 - a^2}$$

D.C.L.



$\vec{R}_0 \parallel \vec{R}, \quad |\vec{R}_0| = |\vec{R}|$
 $\vec{C} = \vec{R} d$
 $d =$ braccio della coppia $\left| \frac{\vec{R}}{\vec{R}_0} \right|$
 $[C = R d]$

b) CEPPI doppi esterni:

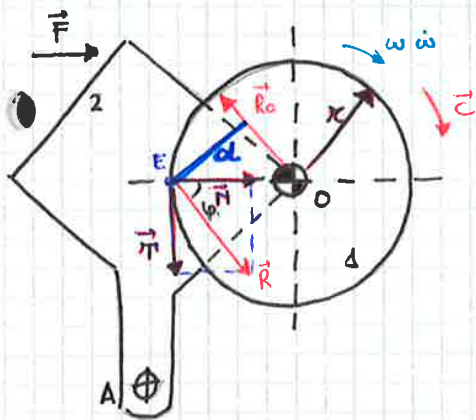


{ 1: tamburo
2,3: ceppi

CEPPI doppi interni:



FRENO A TAMBURO AD ACCOSTAMENTO RIGIDO

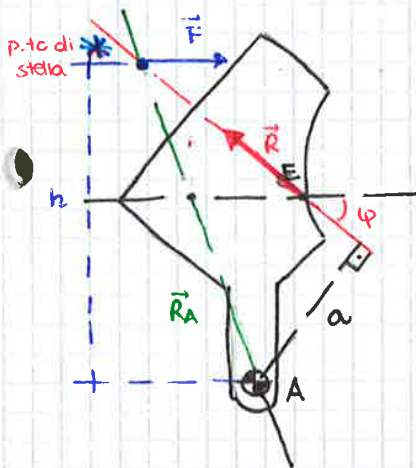


$$\begin{cases} T = Fb \\ F = \tan \varphi \end{cases}$$

TAMBURO { $\vec{R} \parallel \vec{R}_0$
 $|\vec{R}| = |\vec{R}_0|$
 $[C = R_d]$

{ 1: tamburo
2: ceppo

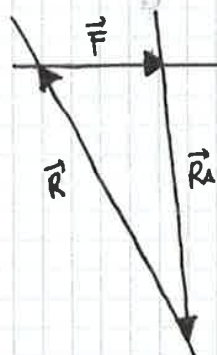
DCL



2: ceppo $\Rightarrow$ ③ $\vec{F}, \vec{R}, \vec{R}_A$

TRIANGOLO DELLE FORZE

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{R}_A = 0$$



$$A) \quad Fh - Ra = 0 \Rightarrow F(h) - [C/d]a = 0$$

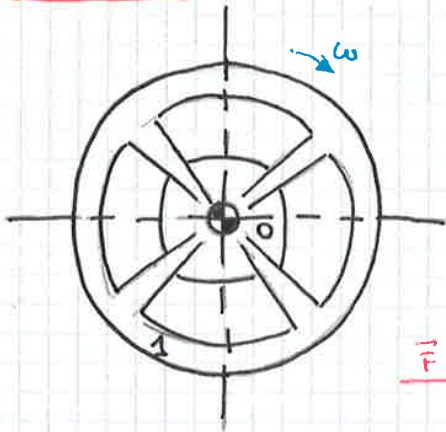
$$\rightarrow N = F = \int_A p dA = \int_{x_i}^{x_e} [k'/x] x' dx \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \Rightarrow [N = k'(x_e - x_i)(\theta_2 - \theta_1) = F]$$

$$M_{frenante} = \int_A (x' d\theta) x = \int_A (f p dA) x = \int_{x_i}^{x_e} x [f k'/x \cdot x dx] \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

$$M_{frenante} = f k' \left[\frac{x^2 - x_i^2}{2} \right] [\theta_2 - \theta_1] = f k' \left[\frac{x_e + x_i}{2} \right] [x_e - x_i] [\theta_2 - \theta_1]$$

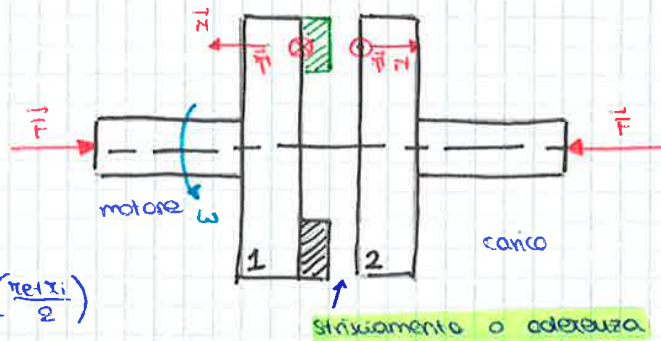
$$\Rightarrow [M_{frenante} = f F \left(\frac{x_e + x_i}{2} \right)]$$

FRIZIONE



$$|\theta_2 - \theta_1| = 2\pi$$

$$\begin{cases} M_{frenante} = f F \frac{x_e + x_i}{2} = M_{frizione} \\ N = k'(x_e - x_i) 2\pi = F \end{cases}$$



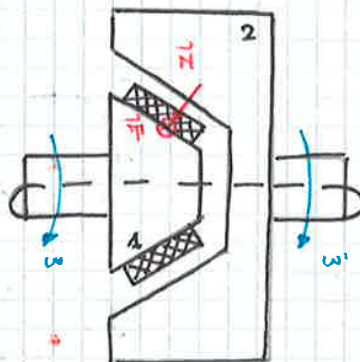
1) FRIZIONE PIANA $M_{friz} = f F \left(\frac{x_e + x_i}{2} \right)$

2) con + dischi in serie ho la FRIZIONE PIANA MULTIPLA

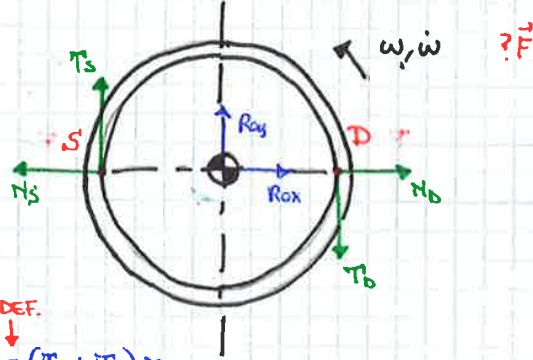
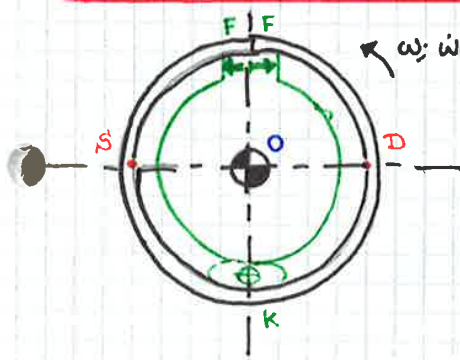
$$\begin{cases} M_{friz\ multipla} = n \left(f F \frac{x_e + x_i}{2} \right) \\ n = \text{no sup. di contatto} \end{cases}$$

3) FRIZIONE CONICA

$$\begin{cases} M_{friz\ conica} = \left(\frac{r}{\sin \alpha} \right) F \left(\frac{x_e + x_i}{2} \right) \\ \alpha = \text{angolo di apertura del cono} \end{cases}$$



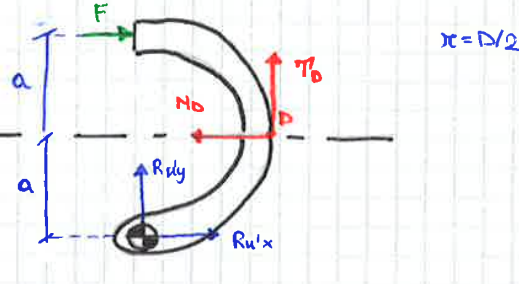
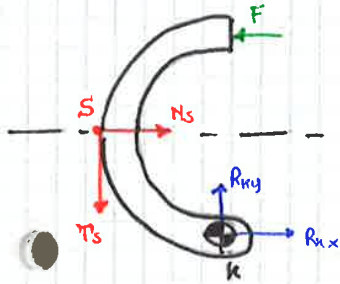
Freno a tamburo a ceppi interni



$$M_{fx} = (T_S + T_D) x$$

$$x = D/2 \quad (D = \Phi \text{ tamburo freno})$$

D.C.L.



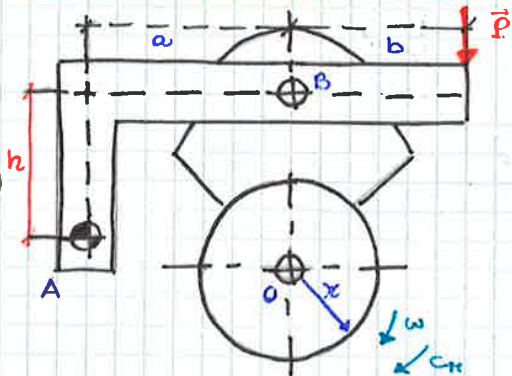
$$S \begin{cases} \sum \vec{K}^+ & F(2a) + T_S(x) - N_S a = 0 \\ & T_S = f N_S \end{cases}$$

$$D \begin{cases} \sum \vec{K}^+ & T_D x + N_D a - F(2a) = 0 \\ & T_D = f N_D \end{cases}$$

$$F = M_{fr} \left[\frac{a^2 - x^2 f^2}{4a^2 f^2} \right]$$

$$F = 6875 \text{ N}$$

Freno a ceppo esterno ad accostamento libero



$$P = 98,1 \text{ N}$$

$$f = 0,4$$

$$a = 15 \text{ cm}$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

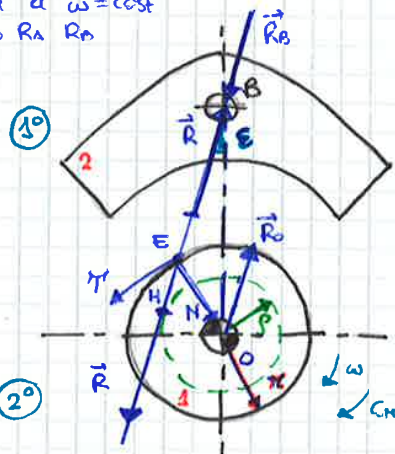
$$d = 22 \text{ cm}$$

$$h = 5 \text{ cm}$$

$$\omega = \text{cost}$$

si trascurano tutti i pesi

$$\begin{cases} \text{? } C_H \text{ a } \omega = \text{cost} \\ \text{? } R_O \text{ } R_A \text{ } R_B \end{cases}$$



c. di attrito del tamburo
 $\Rightarrow \beta = \pi \sin \varphi \Rightarrow \text{x.c. di attrito del tamburo}$

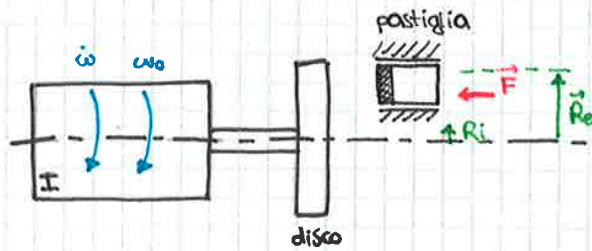
In OSH si ha:

$$\begin{cases} OH = p = R \sin \epsilon \\ BO = h + d/2 = 0,16 \text{ m} \\ \epsilon = \arcsin [p/BO] = 14,8^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = x \sin \varphi = 0,0411 \\ \varphi = \arctg F = 21,8^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum \vec{O}^+ & C_H - R_P = 0 \\ & |\vec{R}| = |\vec{R}_O| \end{cases}$$

Freno a disco ad accostamento rigido



$$M = 100 \text{ kg}$$

$$r_i = 0,3 \text{ m}$$

$$\omega_0 = 2\pi n / 60 = 157,07 \text{ rad/s}$$

$$h = 1500 \text{ giri/min}$$

$$\begin{cases} R_i = 0,15 \text{ m} \\ R_e = 0,20 \text{ m} \\ f = 0,3 \end{cases}$$

Hp. usura:

$$dV = \delta dA = k [f p dA] [\omega x]$$

$\downarrow$ cost $\downarrow$ cost $\downarrow$ cost · istante × istante

$$\Rightarrow p = \frac{k'}{x} \quad R_i \leq x \leq R_e$$

a) $\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega} t$

$$0 = \omega_0 + \dot{\omega} t^* \Rightarrow \dot{\omega} = -15,71 \text{ rad/s}^2$$

$\uparrow$ (note) $\uparrow$ 10s

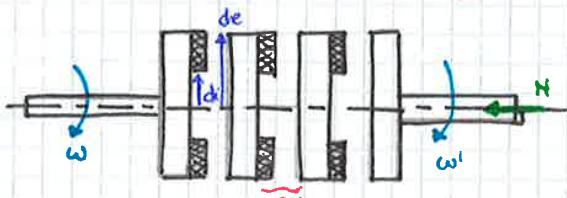


$$I = M r_i^2 = 9 \text{ kg m}^2$$

$$\sum M_{Sz} + I \dot{\omega} = 0 \Rightarrow M_{Sz} = 141,37 \text{ Nm}$$

c) $M_{Sz} = f F \frac{R_e + R_i}{2} \Rightarrow F = \frac{2 M_{Sz}}{f (R_e + R_i)} = 2697,79 \text{ N}$

Frizione piana multipla



$$h = 6 \text{ (sup. di contatto)}$$

$$\begin{cases} d_e = 140 \text{ mm} \\ d_i = 90 \text{ mm} \\ f = 0,3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P = 8 \text{ kW} = 8000 \text{ W} \\ \omega = 2\pi n / 60 = 78,5 \text{ rad/s} \end{cases}$$

? N, ? P_{max}, P_{min}

1) $C_{frizione} = \frac{P}{\omega} = 102 \text{ Nm}$ (coppia trasmessa dalla frizione in condiz. di strisciamento)

2) $C_{frizione} = h f N \left(\frac{R_e + R_i}{2} \right)$

$$N = \frac{C_{frizione}}{h f \left(\frac{R_e + R_i}{2} \right)} = 985,5 \text{ N}$$

$$\Rightarrow N = \int_A p dA = \int_{R_i}^{R_e} \left(\frac{k}{r} \right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta = k 2\pi [R_e - R_i]$$

Hp. usura: $p = \frac{k}{x}$ $dV = \delta dA = k' [f p dA] (\omega x)$

$$\Rightarrow k = \frac{N}{2\pi [R_e - R_i]} = 6277 \text{ N/m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{max} = k / R_i = 139488,8 \text{ N/m}^2 \\ P_{min} = k / R_e = 89674,4 \text{ N/m}^2 \end{cases}$$

FLESSIBILI

- CINGHIE → piano
- FUNI → trapeze
- CATENE → dentate

caratteristiche:

- lavorare solo a trazione
- trasmettono il moto anche su grandi distanze
- il i = rapporto di trasmissione non è costante perché dipende dal tiro imposto
- a causa di cedimenti/assettamenti richiedono sistemi di trascinamento continuo
- trasmettono il moto per aderenza tra flessibile e puleggia

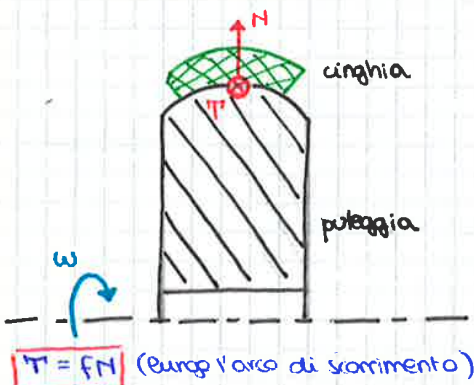
VANTAGGI

fanno da innesto di sicurezza

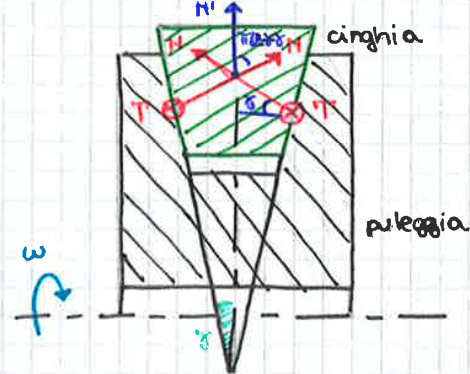
SVANTAGGIO

limite di coppia trasmissibile

CINGHIA PIANA



CINGHIA TRAPEZIA

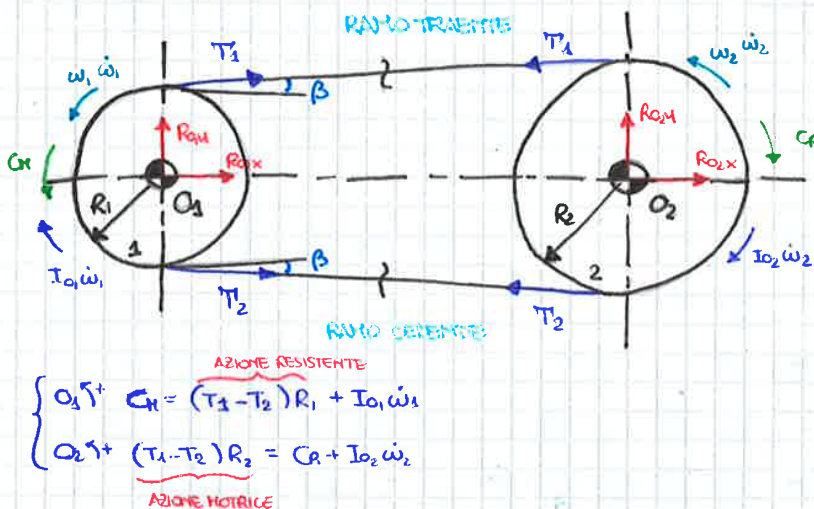


δ = angolo di semiapertura della cinghia

$$\begin{cases} T_{Tot} = 2FN = FN' \\ N' = 2N \cos(\pi/2 - \delta) = 2N \sin \delta \rightarrow N = \frac{N'}{2 \sin \delta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{Tot} = \frac{2FN'}{2 \sin \delta} = \frac{FN'}{\sin \delta}}$$

TRASMISSIONE A CINGHIA

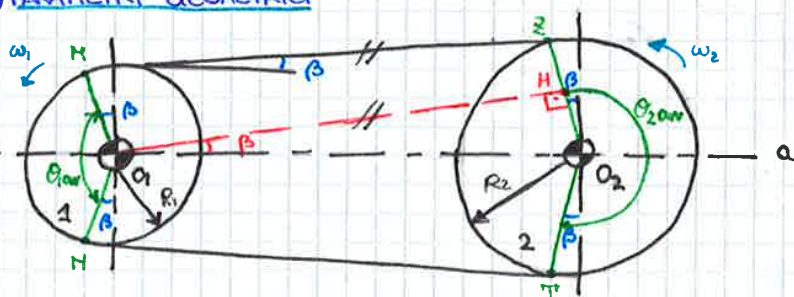


- 1: puleggia motrice
- 2: puleggia condotta

$$\begin{cases} \omega_1 \uparrow \\ T_1 > T_2 \end{cases}$$

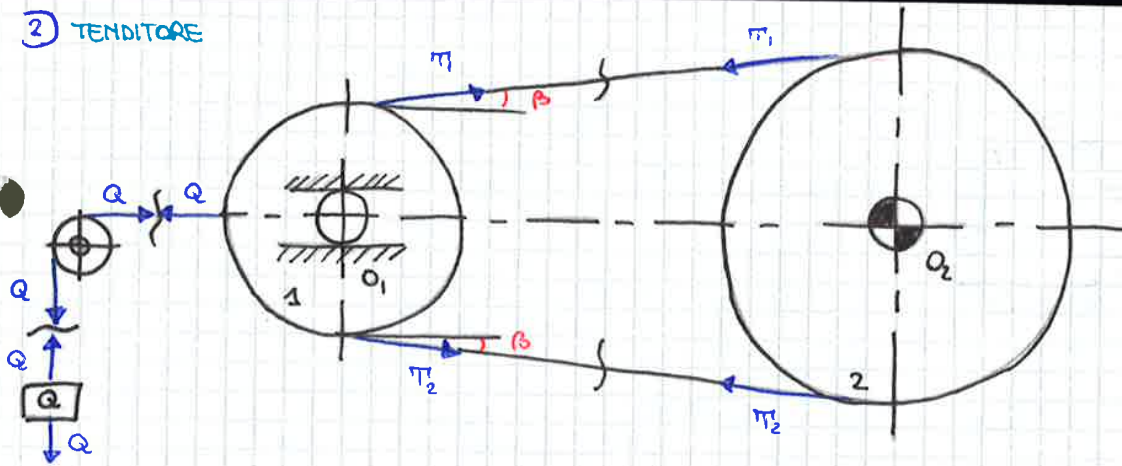
$$(R_1 < R_2)$$

1) PARAMETRI GEOMETRICI



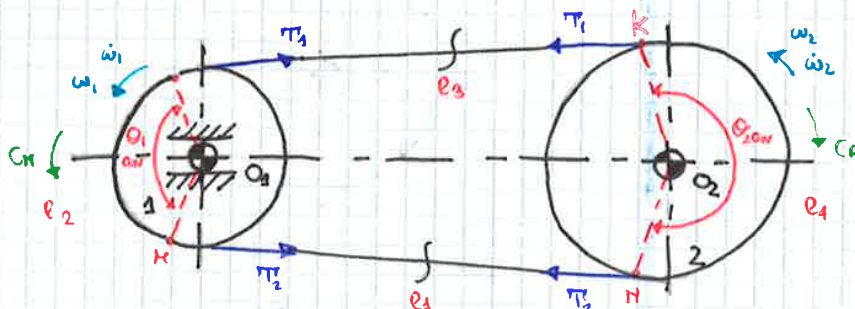
a = interasse
 $R_2 > R_1$

2) TENDITORE



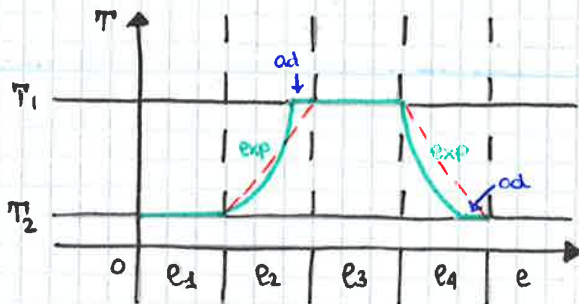
$$\rightarrow (\pi_1 + \pi_2) \cos \beta = Q$$

3) FORZAMENTO INIZIALE



$$\pi_1 > \pi_2$$

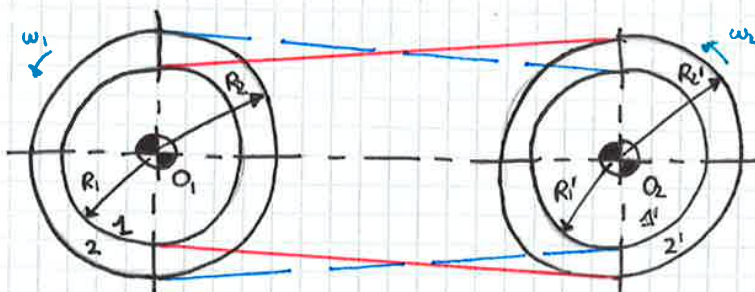
Pretensionamento iniziale = T_0



*Ipotesi di una variazione lineare tra π_1 e π_2 ottengo:

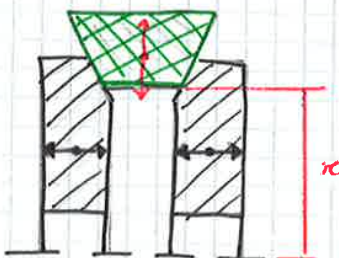
$$T_0 = \frac{\pi_1 + \pi_2}{2}$$

VARIATORE CONTINUO DI VELOCITA'



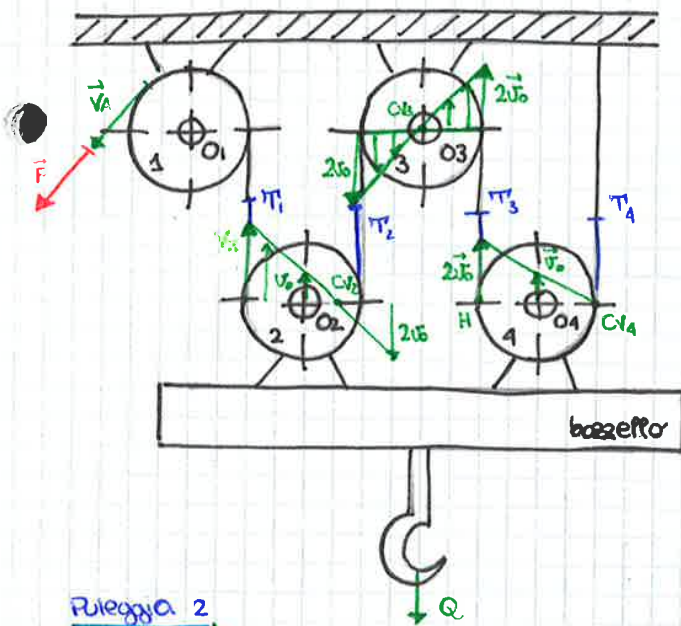
$$R_1' \leq \pi \leq R_2'$$

$$R_1 \leq \pi \leq R_2$$



$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2'}{R_1} = \frac{R_1'}{R_2} \left(\frac{R_u}{R_i} \right)$$

PARANCO DI SOLEVAVENTO



1-3: fisse
2-4: mobili

H.I.P. $\{ \eta_c = \frac{r_p}{r_e}; e_i; e_e \}$

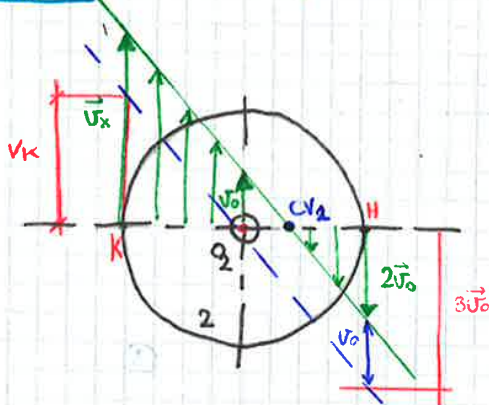
? $\vec{v}_A$
? η_{Tot}

$\vec{v}_A = 4\vec{v}_0$ | $\vec{v}_A = n\vec{v}_0 = v_x$

$n = \text{n° di rami di fune sul bozzello}$

$T_1 = \eta_c^4 F$	$T_n = \eta_c^n F$
$\eta_{Tot} = \frac{Q}{4F}$	$\eta_{Tot} = \frac{Q}{nF}$
$\eta_{Tot} = \frac{\eta_c + \eta_c^2 + \dots + \eta_c^n}{4}$	$\eta_{Tot} = \frac{\eta_c + \eta_c^2 + \dots + \eta_c^n}{n}$

Regola 2



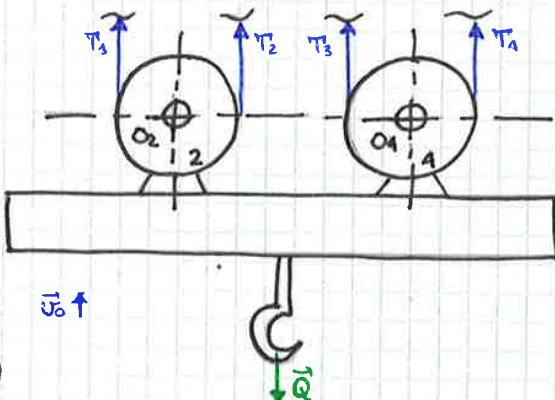
? $\vec{v}_x$

$\vec{v}_x = \vec{v}_H + \vec{v}_0 = 3\vec{v}_0 + \vec{v}_0 = 4\vec{v}_0 = v_A$

$$\left\{ \begin{aligned} \eta_c = \eta_{c1} &= \frac{r_u}{r_e} = \frac{T_1(4v_0)}{F(4v_0)} \Rightarrow T_1 = \eta_{c1} F = \eta_c F \\ \eta_c = \eta_{c2} &= \frac{r_u}{r_e} = \frac{T_2(2v_0)}{T_1(4v_0)} \Rightarrow T_2 = \eta_c T_1 = \eta_c^2 F \\ \eta_c = \eta_{c3} &= \frac{r_u}{r_e} = \frac{T_3(2v_0)}{T_2(2v_0)} \Rightarrow T_3 = \eta_c T_2 = \eta_c^3 F \\ \eta_c = \eta_{c4} &= \frac{r_u}{r_e} = \frac{T_4(v_0)}{T_3(2v_0)} \Rightarrow T_4 = \eta_c T_3 = \eta_c^4 F \end{aligned} \right.$$

$\rightarrow T_n = \eta_c^n F$

EQUILIBRIO BOZZELLO:



+4 $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = Q$

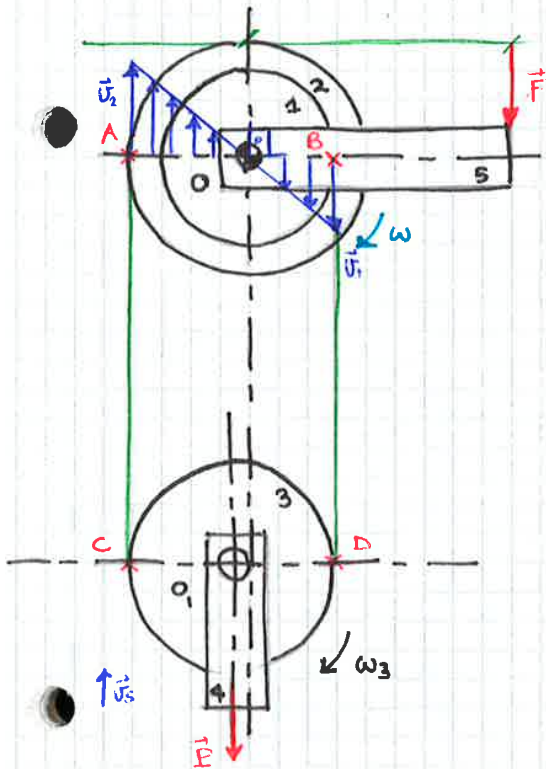
$F(\eta_c + \eta_c^2 + \eta_c^3 + \eta_c^4) = Q$

$\eta_{Tot} = \frac{Q v_0}{F(4v_0)} = \frac{r_u}{r_e}$

$\eta_{Tot} = \frac{Q}{F} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\eta_c + \eta_c^2 + \eta_c^3 + \eta_c^4}{4}$

$\eta_{Tot} = \frac{\eta_c + \eta_c^2 + \dots + \eta_c^n}{n}$ | $\eta_{Tot} = \frac{Q}{nF}$

2) PARANCO DIFFERENZIALE



$$\begin{cases} P = m_p g = 4905 \text{ N} \\ (m_p = 500 \text{ kg}) \end{cases}$$

$$\text{attrito nei perni} \begin{cases} x_p = 0,08 \text{ m} \\ f_p = 0,1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} D = D_2 &= 0,5 \text{ m} \\ d = d_1 &= 0,4 \text{ m} \end{aligned}$$

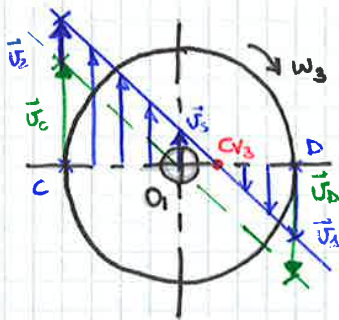
$$(d_3 = \frac{d}{2} + \frac{D}{2} = 0,45 \text{ m})$$

$$\begin{cases} \omega = \frac{2\pi n}{60} = 3,14 \text{ rad/s} \\ n = 30 \text{ giri/min} \end{cases}$$

$$a = 0,5 \text{ m}$$

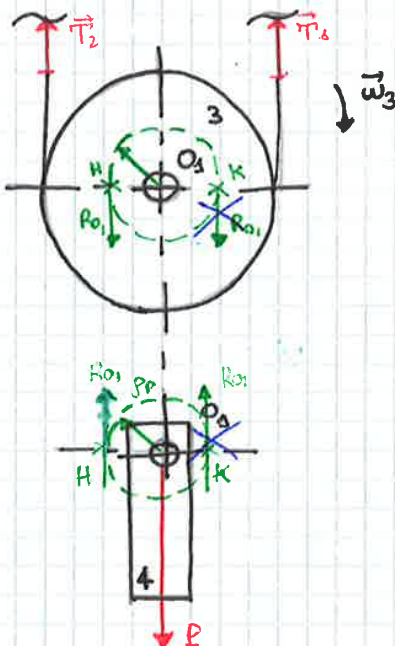
$$? \vec{F} \quad ? \vec{v}_s \quad ? \eta \quad (v_s = \text{cost})$$

$$\begin{cases} v_A = \omega d/2 = 0,628 \text{ m/s} \\ v_2 = \omega D/2 = 0,785 \text{ m/s} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} v_C &= v_D \quad (Cv_3 = 0) \\ \underbrace{v_2 \cdot v_3}_{v_2 \cdot v_3} &= \underbrace{v_4 + v_5}_{v_4 + v_5} \Rightarrow v_3 = \frac{v_2 - v_1}{2} = 0,0785 \text{ m/s} \end{aligned}$$

D.C.L. Ruotella 3 e asta 4 staccate



$$\begin{cases} r_p = x_p \sin \varphi_p = 0,00796 \text{ m} \\ \varphi_p = \arctan r_p = 5,71^\circ \end{cases}$$

* Consideriamo R_{01} in H

$$\begin{cases} + \uparrow T_1 + T_2 \cdot R_{01} = 0 \\ D \nabla \cdot - T_2 d_3 + R_{01} (d_3/2 + r_p) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = 2365 \text{ N} \\ T_2 = 2539 \text{ N} \end{cases}$$

$$+ \uparrow R_{01} = P$$

• Ipotesiamo di avere $\eta_{cinghia} \cong 1 \Rightarrow \eta_{cinghia} = \frac{P_u}{P_e} = \frac{(\pi r_1 - \pi r_2) \frac{d_1}{2} \omega_1}{(\pi r_1 - \pi r_2) \frac{d_2}{2} \omega_2} = \frac{v_1}{v_2}$

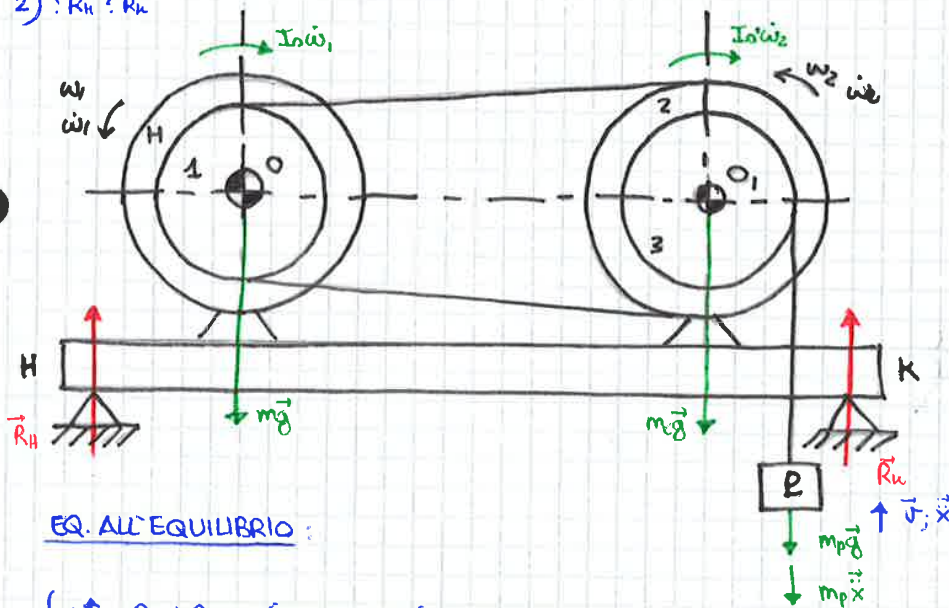
$\Rightarrow v_1 \cong v_2$

$\Rightarrow \omega_1 \frac{d_1}{2} \cong \omega_2 \frac{d_2}{2} \rightarrow \left[\omega_1 \frac{d_1}{2} \cong \omega_2 \frac{d_2}{2} \right] \quad (4)$

• Hp. Adesione tra fune e tamburo in H $\rightarrow v_H = v_{fune} = \omega_2 \frac{d_2}{2}$
 $\rightarrow \left[\dot{x}_H = \dot{x}_{fune} = \dot{\omega}_2 \frac{d_2}{2} = \ddot{x} \right] \quad (5)$

$\rightarrow \begin{cases} \omega_2 = 47,31 \text{ rad/s}^2 \\ \omega_1 = 91,62 \text{ rad/s}^2 \\ \ddot{x} = \omega_2 \frac{d_2}{2} = 9,46 \text{ m/s}^2 \end{cases}$

2) ? R_H ? R_K



EQ. ALL'EQUILIBRIO:

$\begin{cases} +\uparrow R_H + R_K = (m + m_c + m_p)g + m_p \ddot{x} \\ \curvearrowright R_H L - mg(L-b) - m_c g b - m_p(g + \ddot{x})(b - \frac{d_2}{2}) + I_0 \omega_1 + I_0 \omega_2 = 0 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} R_H = 967,78 \text{ N} \\ R_K = 5906,18 \text{ N} \end{cases}$

3) ? $T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$ (cinghia) $\rightarrow T_0 = \text{FORZAMENTO INIZIALE}$

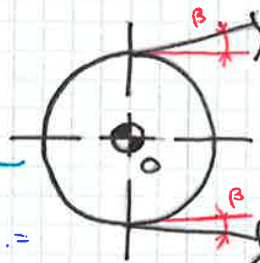
$\beta = \arcsin\left[\frac{R_2 - R_1}{l}\right] = 12,02^\circ$

$\begin{cases} \frac{T_1 - qv^2}{T_2 - qv^2} \cong e^{\mu \theta^*} \\ F' = \frac{F}{\sin \alpha} \end{cases}$

DATO

$\theta^* = \text{angolo di strisc.} = \frac{\theta_{slav}}{2} = 1,36 \text{ rad}$

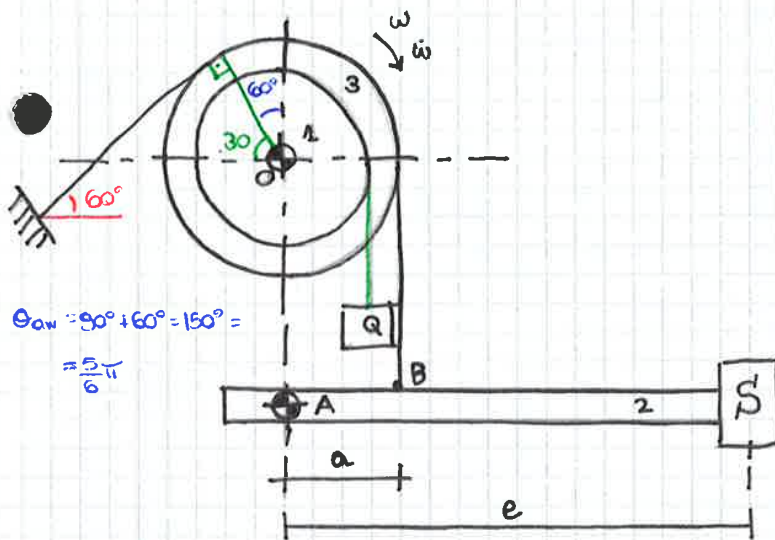
$\theta_{slav} = \pi - 2\beta = 2,72 \text{ rad}$



$\begin{cases} (T_1 - T_2) = (C_H - I_0 \omega_1) \frac{2}{d_1} = 4762 \text{ N} \\ \frac{T_1}{T_2} \cong e^{\mu \theta^*} \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} T_1 = 7322 \text{ N} \\ T_2 = 2560 \text{ N} \end{cases} \rightarrow T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2} = 4941 \text{ N}$

FRENO A NASTRO

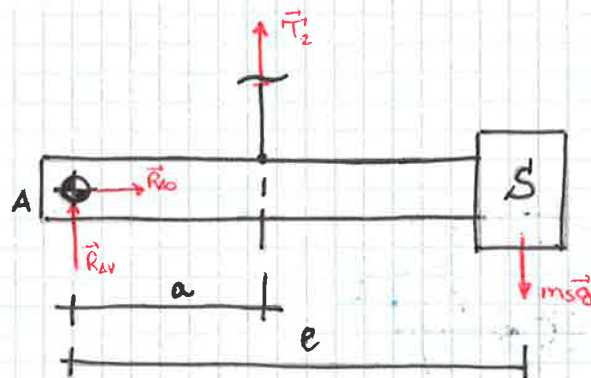
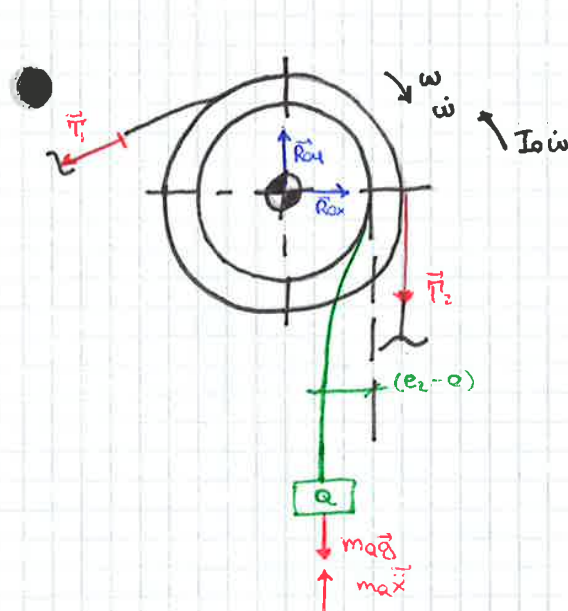


$D_1 = 350 \text{ mm}$
 $m_Q = 420 \text{ kg}$
 $n_0 = 32 \text{ giri/min}$
 $I = 52 \text{ kg/m}^2$
 $e = \cancel{X} = 2 \text{ cm}$

$D_3 = 800 \text{ mm}$
 $m_S = 80 \text{ kg}$
 $[e_2 = 5 \text{ cm}]$
 $f = 0,22$
 $a = 300 \text{ mm}$
 $e = 950 \text{ mm}$

$f a = 0,31$

$? C_{f2}$
 $? t^*$ arresto a partire da n_0



$T_2 a - m_S g e = 0 \quad (1)$

$(T_1 - T_2) \frac{D_3}{2} + I_0 \dot{\omega} - m [\ddot{x} + g] [D_1/2 + e - e_2] = 0 \quad (2)$

$\frac{T_1}{T_2} = e^{f \theta_{av}} \quad (\text{sul nastro}) \quad (3)$

Definisco $C_{f2} = (T_1 - T_2) \frac{D_3}{2} = 714,2 \text{ Nm}$

$\Rightarrow \begin{cases} T_1 = 4420,36 \text{ N} \\ T_2 = 2485,2 \text{ N} \end{cases}$

Il p. aderenza tra fune e tamburo 1

$\Rightarrow \dot{x} = \frac{D_1}{2} \omega$

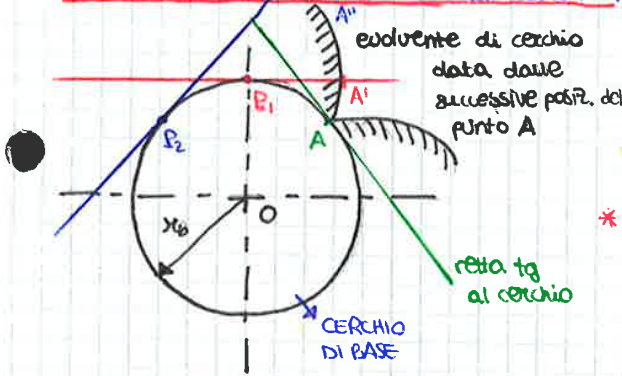
$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{D_1}{2} \dot{\omega} \quad (4)$

$\Rightarrow$ dal sistema di eq. (2) tiravo $\omega = -2,82 \text{ rad/s}^2$

$\Rightarrow$ Formula del moto unif. accelerato

$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega} t \Rightarrow 0 = \omega_0 + \dot{\omega} t^* \Rightarrow t^* = -\frac{\omega_0}{\dot{\omega}} = 1,18 \text{ s}$

COME SI GENERA UN'EVOLENTE DI CERCCHIO.



Si fa rotolare la retta π sul cerchio di raggio r_b senza strisciare e si individuano le successive posizioni del punto A.

A = punto singolare perché il suo raggio di curvatura è nullo

* Da A partono 2 diverse evolventi simmetriche

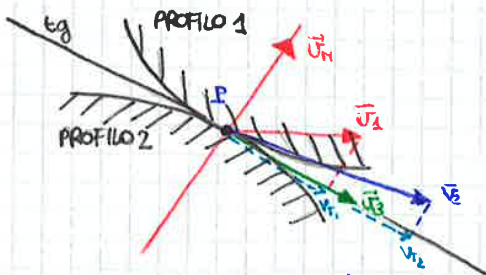
r_b = raggio del cerchio di base

Proprietà dell'ev. di cerchio:

- $P_1A' = P_1A$, $P_2A'' = P_2A$
- La retta tg al cerchio è $\perp$ all'ev. di cerchio

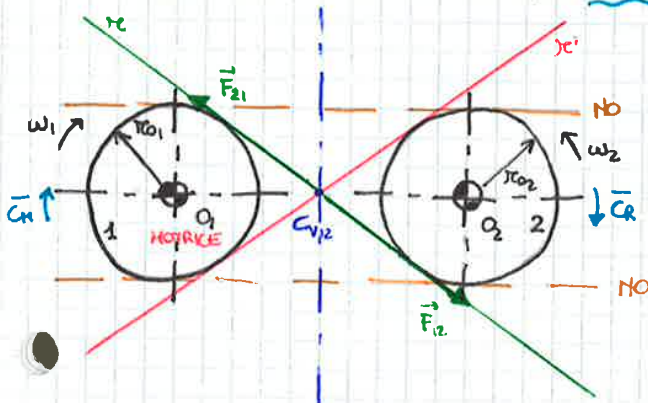
I profili dei denti a contatto si comportano come dei **profili coniugati**, quindi esiste velocità di strisciamento $\neq 0$ tra i due profili ($\vec{U}_S$)

Per evitare fenomeni di interferenza tra i due denti a contatto si impone che la componente normale di velocità è uguale per i due profili coniugati a contatto

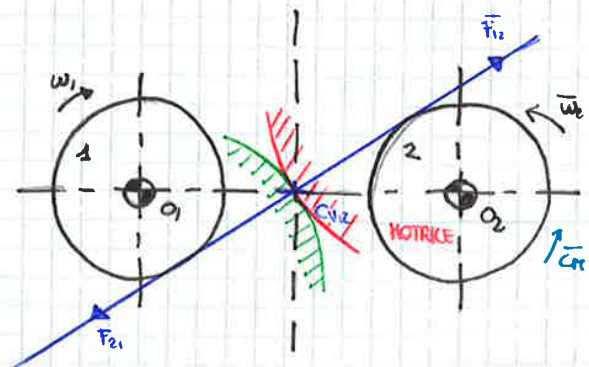
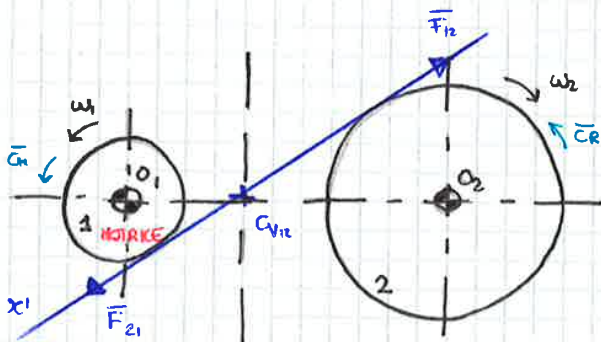
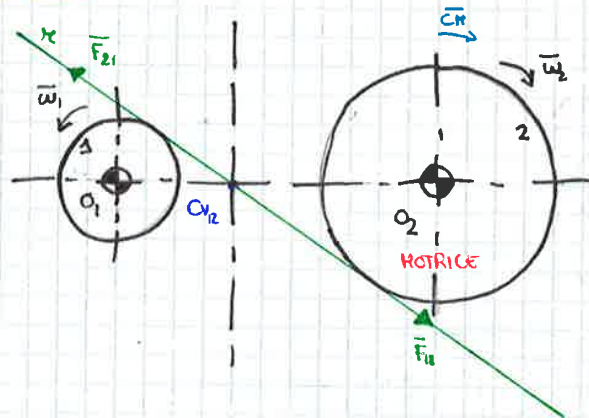


$$[\vec{U}_S = \vec{U}_2 - \vec{U}_1]$$

retta tg ai cerchi di base (π) è detta retta di azione ed è $\perp$ al profilo del dente



C = centro di ist. rotazione del moto relativo tra le due ruote

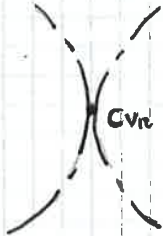


$$\begin{cases} F_t = F_{2t} \cos \alpha = C_H / x_1 & (\text{tg ai c. primitivi}) \\ C_H + C_H - F_t(x_1) = 0 & |\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| \end{cases}$$

$$F_R = F_{2t} \sin \alpha = F_t \operatorname{tg} \alpha$$

RELAZIONI RUOTA 2

$$O_2 \downarrow + C_R - F_{1t} x_{12} = 0 \quad [O_2 \downarrow + C_R - F_{1t} (x_2 \cos \alpha) = 0]$$



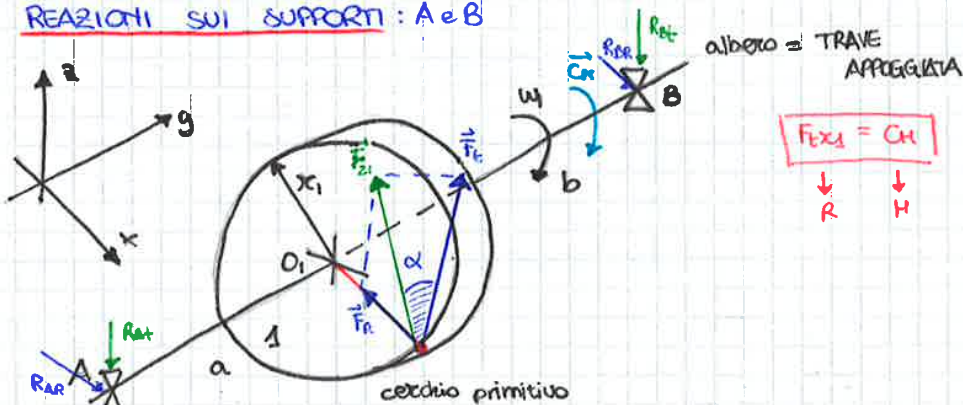
RUOTE ESTERNE

($C_{V12} \Rightarrow$ compreso tra O_1 e O_2)

$\Rightarrow$ ho inversione di velocità

$\Rightarrow \vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ opposte i negativo

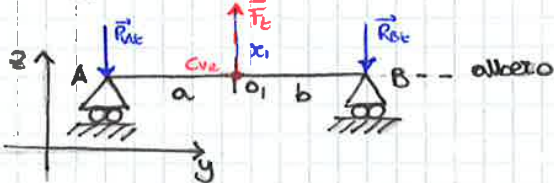
REAZIONI SUI SUPPORTI: A e B



albero = TRAVE APPROPRIATA

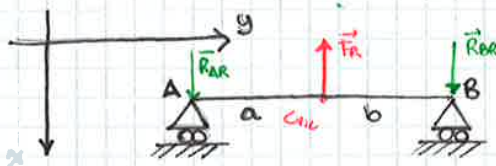
$$F_{ex1} = C_H$$

$\downarrow R \quad \downarrow H$



$$\begin{cases} A \uparrow - R_{ex} (a+b) + F_t a = 0 \\ B \uparrow + R_{ex} (a+b) - F_t b = 0 \end{cases}$$

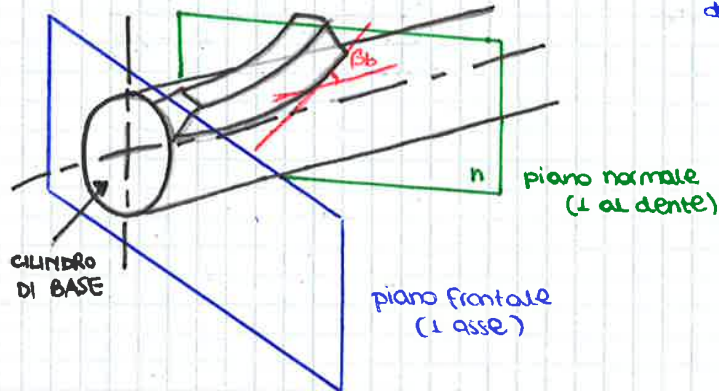
$\Rightarrow R_{ex} = R_{at}$



$$\begin{cases} A \uparrow + F_R(a) - R_{at}(a+b) = 0 \\ B \uparrow + R_{at}(a+b) - F_R(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{R}_{at}, \vec{R}_{ar}$$

$$R_A = \sqrt{R_{at}^2 + R_{ar}^2} \quad R_B = \sqrt{R_{at}^2 + R_{ar}^2}$$

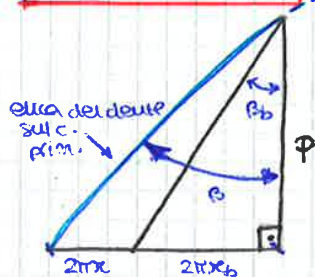
RUOTE CILINDRICHE A DENTI ELICOIDALI



β_b = angolo di inclinazione dell'elica del dente sul cilindro di base

* Il proporzionamento modulare del dente è fatto nel piano normale al dente

$$\begin{cases} p_n = \text{passo normale} = p \cos \beta \\ m_n = \text{modulo normale} = m \cos \beta \\ \beta = \text{angolo di inclinazione dell'elica del dente sul cilindro} \\ \tan \alpha_n = \tan \alpha \cos \beta \end{cases}$$

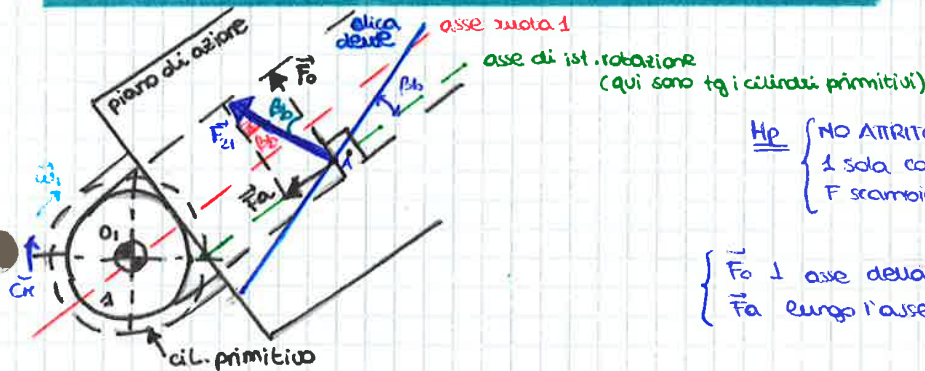


$$p = \frac{2\pi x_b}{\tan \beta_b} = \frac{2\pi x}{\tan \beta}$$

$$x \tan \beta_b = x_b \tan \beta$$

$$[x \tan \beta_b = x \cos \alpha \cdot \tan \beta]$$

FORZE SCAMBIATE TRA LE RUOTE D. CILINDRICHE A DENTI ELICOIDALI



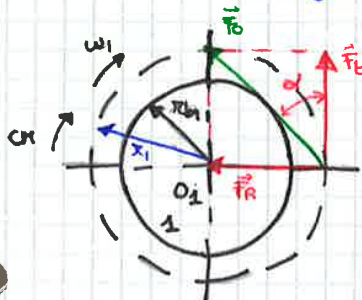
Hp { NO ATRIBITO
1 sola coppia di denti in presa
F scambiate concentrate a metà ruota

{ $F_o \perp$ asse della ruota
 F_a lungo l'asse della ruota

$$F_o = F_t \cos \beta_b ; F_a = F_t \sin \beta_b ; F_a = F_o \tan \beta_b$$

$\vec{F}_t$ = forza totale scambiata tra le due ruote

SEZIONE FRONTALE ($\perp$ asse asse) (in A)
tg a cilindri primitivi



$$\begin{cases} F_t = F_o \cos \alpha & \textcircled{2} \Rightarrow F_o \\ F_r = F_o \sin \alpha & \textcircled{3} \Rightarrow F_r \end{cases}$$

{ F_t = componente tg di forza scambiata tra le ruote
 F_r = componente radiale di forza scambiata tra le ruote

$$O \downarrow + C_n = F_t x_1 = (F_o x_{b1})$$

$$[F_t = \frac{C_n}{x_1}] \textcircled{1}$$

$A = C_{v12}$
— circ. primitiva

$\textcircled{4} F_a = F_o \tan \beta_b \Rightarrow F_a$ componente assiale di forze scambiate

$$3) ? x_2 \quad i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = x_1 i = 175 \text{ mm}$$

$$4) ? a \quad a = O_1 O_2 = x_1 + x_2 = 275 \text{ mm}$$

$$5) ? z_2 \quad i = \frac{z_2}{z_1} \Rightarrow z_2 = z_1 i = 17,5 \Rightarrow 18$$

$$C_H = \frac{W_1}{\omega_1} = \frac{2000}{70} = 29 \text{ Nm}$$

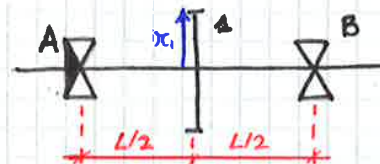
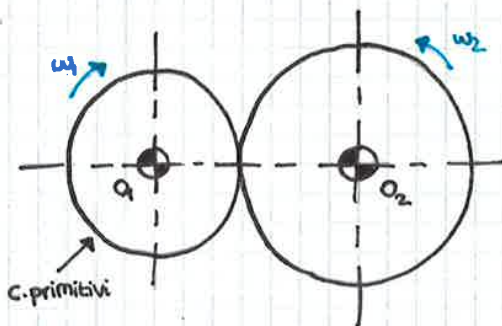
$$O_1 \rightarrow + \quad C_H - F_{21} x_{b1} = 0$$

$$C_H - F_{21} [x_1 \cos \alpha] = 0 \Rightarrow F_{21} = 309 \text{ N}$$

$$\eta = \frac{P_u}{P_e} = \frac{C_H \omega_2}{C_H \omega_1} = \frac{C_H}{C_H} \cdot \frac{1}{i} \approx 1$$

$$\Rightarrow C_R = \eta C_H = 50,75 \text{ Nm}$$

ES.4 $\Rightarrow$ Ruote cilindriche a denti elicoidali



$$\alpha_n = 20^\circ$$

$$m_n = 2,75 \text{ mm}$$

$$i = \omega_1 / \omega_2 = 2$$

$$\beta \approx 12^\circ$$

$$a = O_1 O_2 = 155 \text{ mm}$$

$$L = 16 \text{ mm}$$

$$n_1 = 720 \text{ giri/min}$$

$$? z_1, z_2$$

$$? \beta \text{ esatto}$$

$$? \text{ Reazioni sui supporti se}$$

$$P_{H1} = 1 \text{ CV} = 735 \text{ W}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi (720)}{60} = 75,4 \text{ rad/s}$$

$$1) \begin{cases} i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} = 2 \Rightarrow z_2 = i z_1 \\ a = x_1 + x_2 = \frac{z_1 m}{2} + \frac{z_2 m}{2} = \frac{m_n}{2 \cos \beta_i} [z_1 + z_2] = * \\ \begin{cases} m = \frac{2K}{2} = \frac{m_n}{\cos \beta_i} \\ m_n = m \cos \beta_i \end{cases} \end{cases}$$

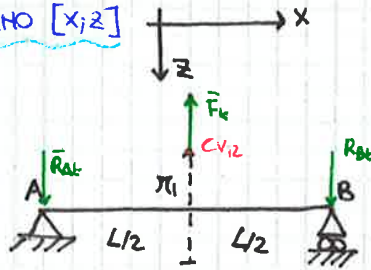
$$\begin{cases} * = \frac{m_n}{2 \cos \beta_i} [z_1 + i z_1] \Rightarrow |z_1 = 36,7 \approx 37| \\ |z_2 = i z_1 = 74| \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_n}{2 \cos \beta_{\text{es}}} [z_1' + i z_1'] \Rightarrow \boxed{\beta_{\text{es}} = 10,04^\circ}$$

$$2) \begin{cases} x_1 = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot \frac{z_1'}{2} = 51,66 \text{ mm} \\ x_2 = \frac{m_n}{\cos \beta} \cdot \frac{z_2'}{2} = 103,33 \text{ mm} \end{cases}$$

$$3) C_H = \frac{P_H}{\omega_1} = \frac{735}{75,4} = 9,75 \text{ Nm}$$

PIANO $[x, z]$

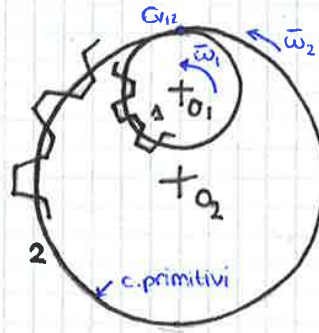
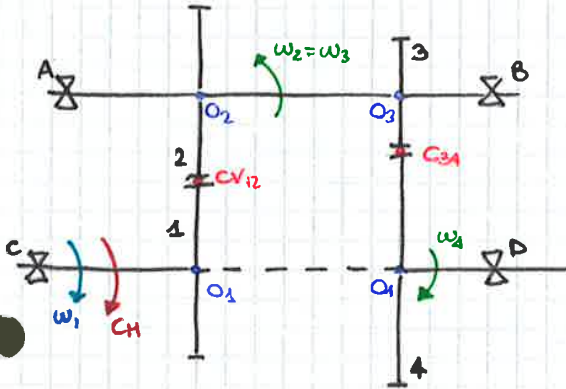


$$\begin{cases} \sum \uparrow F_L(L/2) - R_{At}(L) = 0 \\ \uparrow F_L - R_{At} - R_{Bt} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{Bt} = 94,35 \text{ N}$$

$$\Rightarrow R_{At} = 94,35 \text{ N}$$

ES.3 $\Rightarrow$ ROTISMO ORDINARIO (ruote cilindriche a denti dritti)

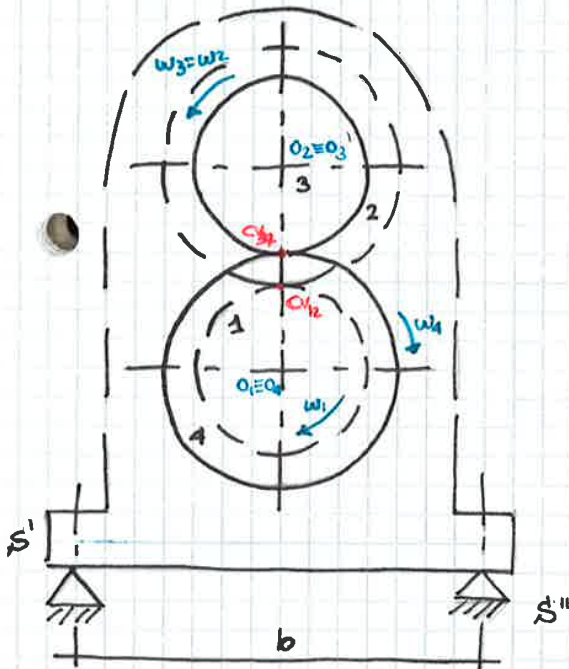


RUOTE INTERNE
i positivo
 ω_1 e ω_2 stesso verso

- In un rotismo ordinario ogni ruota ha 1 solo GdL (rotaz. intorno al proprio asse)
- Ruote esterne: C_{V12} all'interno dell'interasse

Inversione di $\vec{\omega} \Rightarrow i$ negativo

VISTA FRONTALE



DATI

$$\begin{aligned} b &= 0,180 \text{ cm} \\ z_1 &= z_3 = 17 \\ z_2 &= z_4 = 52 \\ C_H &= 10 \text{ Nm} \\ \omega_1 &= 314,16 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= 2,5 \text{ mm} \\ \alpha &= 20^\circ \\ ? r_1, r_2 \\ ? C_{V12} \\ ? R_{S'}, S'' \end{aligned}$$

1) $? r_1, r_2$

$$\begin{cases} m = \frac{2r_1}{z_1} = \frac{2r_2}{z_2} \\ m = \frac{2r_3}{z_3} = \frac{2r_4}{z_4} \end{cases}$$

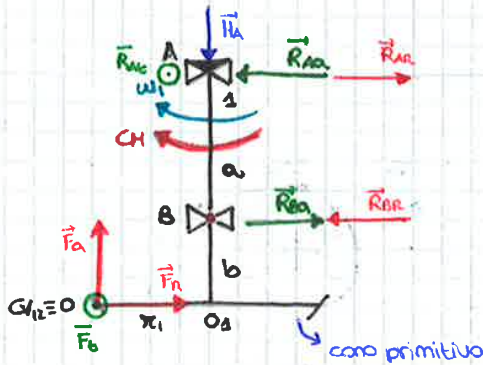
$$r_1 = \frac{m z_1}{2} = 21,25 \text{ mm} = r_3 \quad (z_1 = z_3)$$

$$r_2 = \frac{m z_2}{2} = 65 \text{ mm} = r_4 \quad (z_2 = z_4)$$

2) $i_{Tot} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = (i_{12})(i_{24}) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega_4}\right) = \left(-\frac{r_2}{r_1}\right)\left(-\frac{r_4}{r_3}\right) = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = \left|\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}\right|$

$$= 9,356$$

$$\begin{aligned}
 O_1^+ \quad C_H - F_E x_1 &= 0 \Rightarrow C_H = \frac{F_H}{\omega_1} \\
 \Rightarrow F_E &= C_H / x_1 = \frac{F_H}{\omega_1 x_1} = 1273,88 \text{ N} \\
 \Rightarrow F_{21} &= \frac{F_E}{\cos \alpha} = 1355,61 \text{ N} \\
 \Rightarrow F_0 &= F_{21} \sin \alpha = 463,65 \text{ N} \\
 \Rightarrow F_R &= F_0 \cos \delta_1 = 441,72 \text{ N} \\
 \Rightarrow F_a &= F_0 \sin \delta_1 = 207,31 \text{ N}
 \end{aligned}$$



$$\begin{cases}
 +\uparrow F_a = H_a = 207,31 \text{ N} \\
 R_{1a} = R_{2a} = \frac{F_a x_1}{a} = 103,65 \text{ N}
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 R_{AR} &= \frac{F_R b}{a} = 207,36 \text{ N} & R_{At} &= \frac{F_E b}{a} = 636,91 \text{ N} \\
 R_{BR} &= \frac{R_R(a+b)}{a} = 622,08 \text{ N} & R_{Et} &= \frac{F_E(a+b)}{a} = 1910,82 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$A \begin{cases} H_A = 207,31 \text{ N} \\ R_{ATOT} = 645,33 \text{ N} \end{cases}$$

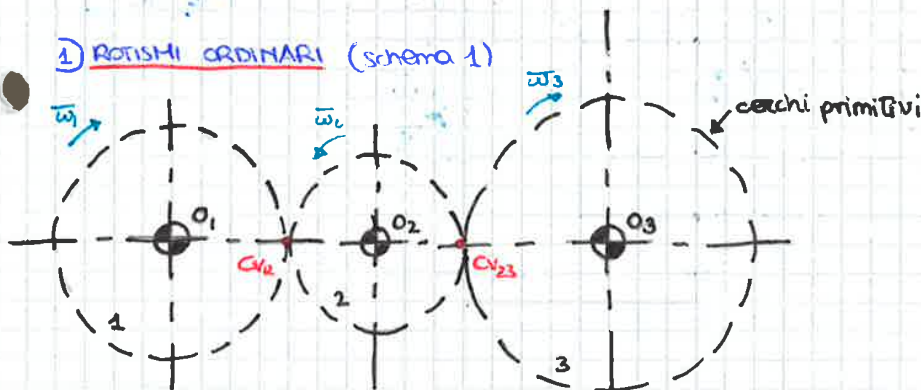
$$B \begin{cases} R_{BTOT} = 1979,89 \text{ N} \end{cases}$$

ROTISMI

Un rotismo è costituito da più coppie di ingranaggi. Esistono due classi di rotismi

- ROTISMI ORDINARI**: gli alberi delle ruote dentate ruotano solo intorno al proprio asse (1GdL)
- ROTISMI EPICICLOIDALI**: almeno 1 albero delle ruote dentate costituenti il rotismo ha sia un moto di rotazione intorno al proprio asse sia un moto di rivoluzione intorno all'asse princ. del rotismo (2GdL)

1) ROTISMI ORDINARI (schema 1)



*Qui: Tutte ruote esterne → inversione delle velocità angolari

$$i_{TOT} = i_{1,3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = (i_{1,2})(i_{2,3}) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right) = \left(-\frac{z_3}{z_1}\right) = \frac{z_3}{z_1}$$

FORMULA DI WILLIS

$$i_{1,2} = i_{101} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = (i_{1,3})(i_{3,2}) = \left(\frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega}\right)\left(\frac{\omega_3 - \Omega}{\omega_2 - \Omega}\right) = \left(-\frac{z_1}{z_2}\right)\left(+\frac{z_2}{z_3}\right)$$

$$\Rightarrow ? \bar{\omega}_3$$

$$i_{1,3} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} = -\frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \omega_3 = \dots$$

1-3 ruote
esterne qui
2-3 ruote
interne qui

$$? \bar{\Omega} \Rightarrow i_{1,2} = i_{101} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = \left(-\frac{z_1}{z_2}\right)$$

$$\Rightarrow (\omega_1 - \Omega)(z_2) = (-z_1)(\omega_2 - \Omega) \Rightarrow \Omega = \frac{z_1\omega_1 + z_2\omega_2}{z_1 + z_2} = \dots$$

sostituiamo
(in questo esemp) $\omega_1 = +50 \text{ rad/s}$
 $\omega_2 = -20 \text{ rad/s}$

FORMULE UTILI

$$m = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda \propto z$$

* In questo caso: $z_2 = z_1 + 2z_3$, $z_2 = z_1 + 2z_3$

$$i_{101} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{z_1}{z_2}$$

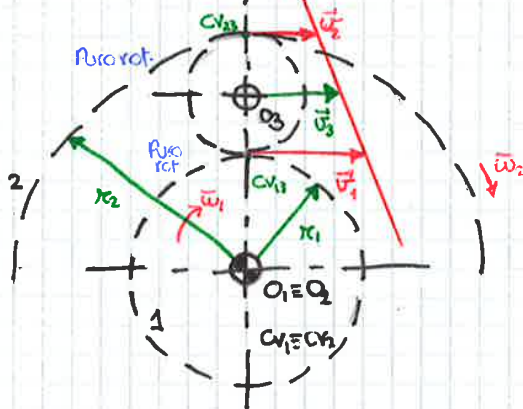
Tutti i tra le ruote
(F. di Willis)
(vel. relative al
p.treno)

$$\begin{cases} i_{1,3} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} = -\frac{z_1}{z_2} \\ i_{2,3} = \frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} = \frac{z_2}{z_3} \end{cases}$$

* Non si può usare la formula di Willis
nel calcolo della i (rapporto di trasmissione)
tra sdase e portatreno, devo servirmi delle
velocità angolari assolute.

$$[i_{1,1} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\Omega - \Omega} = \frac{\omega_1}{\Omega}]$$

• Per calcolare $\bar{\omega}_3$ e $\bar{\Omega}$, invece della formula di Willis, è possibile anche usare il CV del planetario.



$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 r_1 \\ v_2 &= \omega_2 r_2 \end{aligned}$$

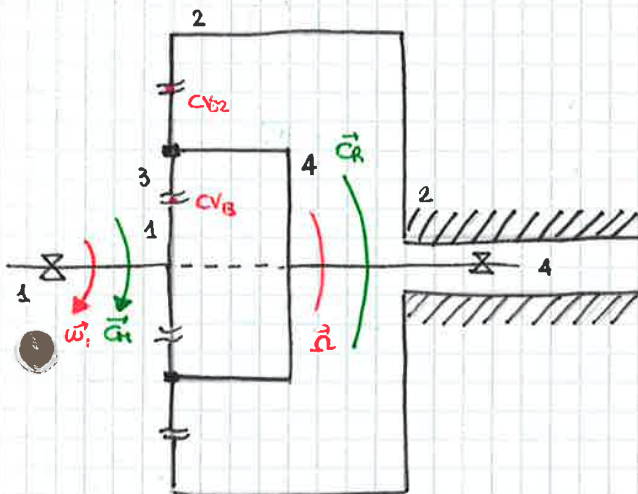
$$\begin{cases} \vec{v}_3 = \vec{v}_{C1} + \omega_1 \vec{r}_1 \wedge (\vec{Cv}_1 - O_1) \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_{C2} + \omega_2 \vec{r}_2 \wedge (\vec{Cv}_2 - O_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_3 = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} \\ v_3 = \Omega (r_1 + r_3) \\ (or) \\ r_2 = r_1 + 2r_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2} = \frac{\Omega (r_1 + r_2)}{2} \\ \Rightarrow \Omega &= \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{r_1 + r_2} \end{aligned}$$



RINVIATORE EPICICLOIDALE DI VELOCITA'



$\omega_2 = 0 \rightarrow$ blocco la ruota 2

se $\omega_2 \neq 0 \Rightarrow$ ROTISMO EPICICLOIDALE SENZA RUOTE

• Dalla geometria: $x_2 = x_1 + 2x_3$

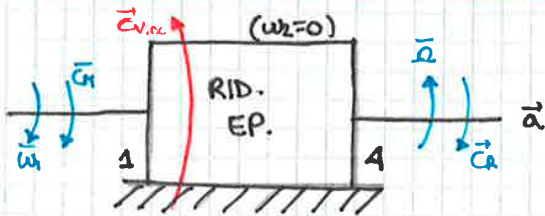
$$\Rightarrow x_3 = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

$$\Rightarrow C_R = 2R \left[x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} \right] = 2R \left[\frac{x_1 + x_2}{2} \right] = R(x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{C_R \Omega}{C_H \omega_1} = \frac{R(x_1 + x_2)}{(R x_1)} \frac{\Omega}{\omega_1} = \left(\frac{x_1 + x_2}{x_1} \right) \cdot \frac{1}{i_{rd}} = 1$$

$$i_{rd} = \frac{z_1 + z_2}{z_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_1} \quad (\omega_2 = 0)$$

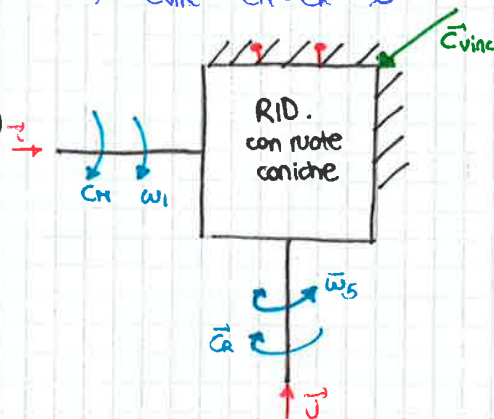
COPIA DI REAZIONE VINCOLARE SUL TELAI



$$\eta = \frac{C_R \Omega}{C_H \omega_1} \cong 1$$

$$i_{xin} = \frac{\omega_1}{\Omega}$$

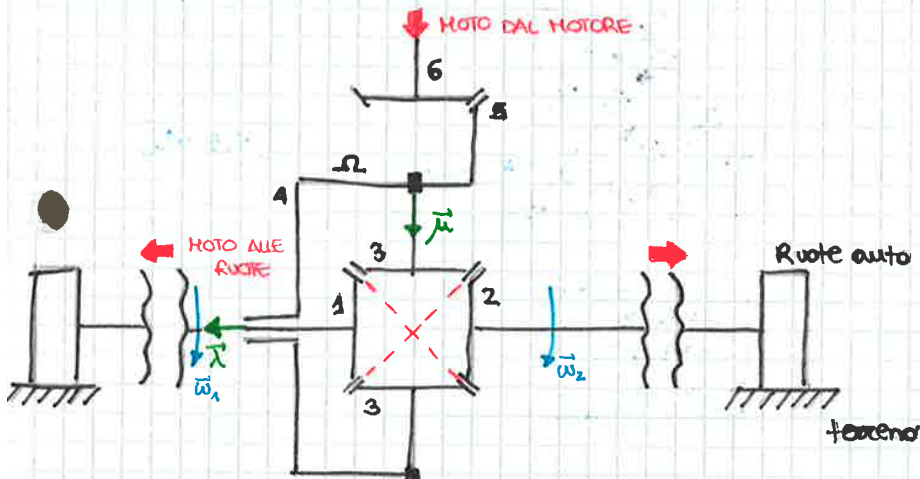
$$a^+ \quad C_{vinc} - C_H - C_R = 0$$



$$RID^+ \quad C_H + C_R + C_{vinc} = 0$$

C_{vinc} = coppia di reazione vincolare scambiata tra riduttore (o rotismo) e telaio.

ROTISMO EPICICLOIDALE A RUOTE CONICHE = Differenziale automobilistico (SIMMETRICO)



- 1-2: solari
- 3: satelliti
- 4: portatreno
- 5-6: coppia conica di ingresso

Rispetto al portatreno ω_1 e ω_2 sono opposte* (vedi $\vec{\omega}_1$)

$$i_{1,2} = i_{p.e.p.} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{z_2}{z_1} = -1$$

($z_1 = z_2$)
x simm)

$$\Rightarrow \left[\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right]$$

a) In rettilineo: $\omega_1 = \omega_2$

$$\Omega = \frac{2\omega_1}{2} = \omega_1 = \omega_2$$

b) In curva:

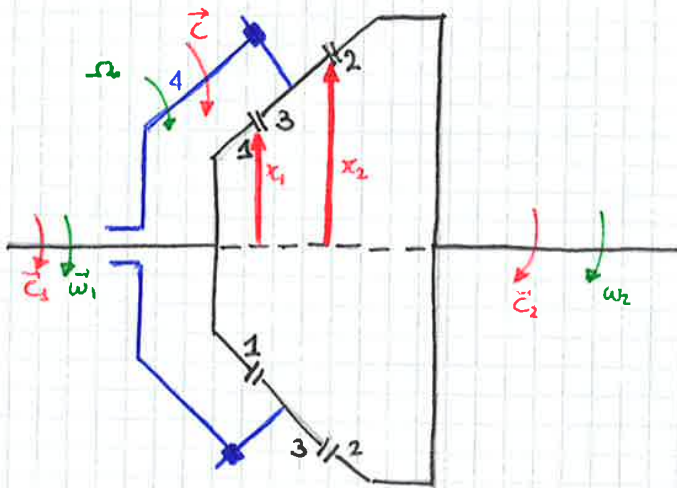


R = raggio di curvatura dell'auto

A = diff. automobile

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \omega_{auto} \vec{u}_1 (C-O) \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \omega_{auto} \vec{u}_2 (H-O) \\ \vec{v}_3 = \vec{v}_0 + \omega_{auto} \vec{u}_3 (A-O) \end{cases}$$

DIFFERENZIALE ASIMMETRICO



1-2: solari
3: satellite
1: portatreno

$$x_1 \neq x_2$$

$$z_1 \neq z_2$$

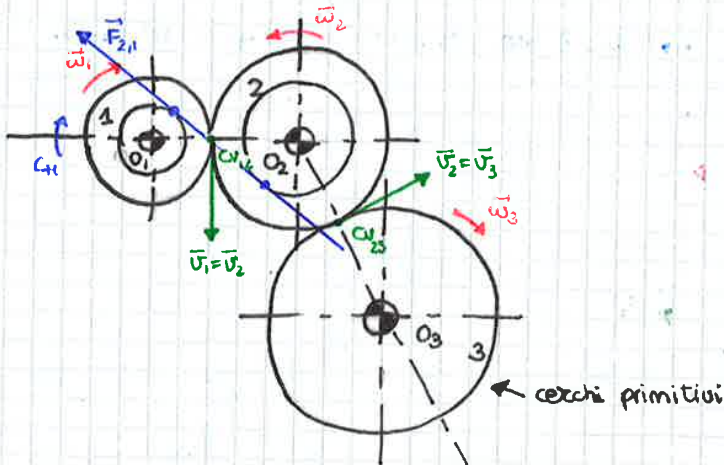
$$\left\{ \begin{array}{l} i_{1,2} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} = -\frac{z_2}{z_1} \Rightarrow \Omega = \frac{z_1 \omega_1 + z_2 \omega_2}{z_1 + z_2} \\ \bar{C}_1 + \bar{C}_2 + \bar{C} = 0 \\ C_1 \omega_1 + C_2 \omega_2 + C \Omega = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

RUOTA OZIOSA

Quella che, inserita tra due ruote in movimento, cambia il senso di rotazione della ruota condotta scorrendo su quella conduttrice.
(senso di rotazione albero conduttore uguale a quello dell'albero conduttore)

ESERCITAZIONE 8

1) ROTISMO ORDINARIO



$$m = 3 \text{ mm}$$

$$\alpha = 20^\circ$$

$$z_1 = 16$$

$$z_2 = 18$$

$$z_3 = 72$$

$$P_H = 3000 \text{ W}$$

$$n_1 = 1125 \text{ giri/min}$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60}$$

? n_2, n_3
? v periferiche ruote 2 e 3
? $\bar{F}_{21}$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_3} = (i_{1,2})(i_{2,3}) = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right)\left(-\frac{z_3}{z_2}\right)$$

$$\Rightarrow \omega_2 \rightarrow n_2 = -\frac{z_1}{z_2} n_1 = -1533,3 \text{ giri/min}$$

$$\Rightarrow \omega_3 \rightarrow n_3 = -\frac{z_2}{z_3} n_2 = 383,3 \text{ giri/min}$$

Sapendo che $m = \frac{2x}{z}$ $\rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{m z_1}{2} = 24 \text{ mm} \\ x_2 = \frac{m z_2}{2} = 27 \text{ mm} \\ x_3 = \frac{m z_3}{2} = 108 \text{ mm} \end{cases}$$

$$v_1 = v_2 = v_3 = \omega_1 x_1 = \omega_2 x_2 = \omega_3 x_3 = \left(\frac{2\pi n_1}{60}\right) x_1 = 4,3 \text{ m/s}$$

[m]

$$C_H = \frac{P_H}{\omega_1} = 16,6 \text{ Nm}$$

$$O_1 \uparrow + C_H - F_{21} x_{b1} = 0$$

$$x_{b1} = x_1 \cos \alpha$$

$$F_{21} = \frac{C_H}{x_1 \cos \alpha} = 736 \text{ N}$$

$$\Rightarrow (i_{1,1} \omega_1) - (i_{1,1}) \Omega = -\Omega$$

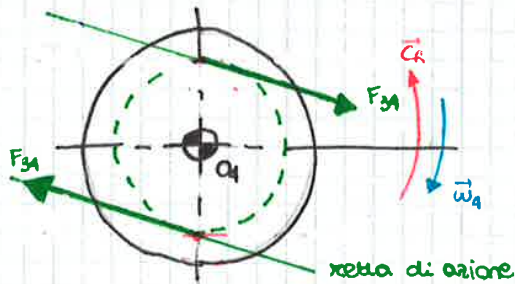
$$\Rightarrow i_{RID} = \frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{i_{1,1}}{i_{1,1} - 1} = -14,15$$

ω_1 e Ω sono discordi

$$\eta_{RID} = \frac{C_R \omega_1}{C_H \Omega} \cong 1 \rightarrow \text{quando non si conosce il rendimento viene approssimato a 1}$$

$$\Rightarrow [C_R = \eta_{RID} C_H = 540,53 \text{ Nm}]$$

$$\Rightarrow C_H = \frac{P_H}{\Omega} = 38,2 \text{ Nm}$$

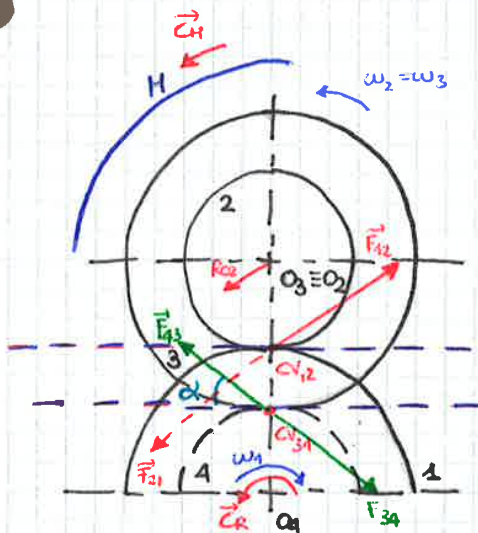


$$O_1 \downarrow + C_R - 2F_{34} x_M = 0$$

$$x_{Mq} = x_1 \cos \alpha$$

$$x_1 = \frac{m z_1}{2} = 0,24 \text{ m}$$

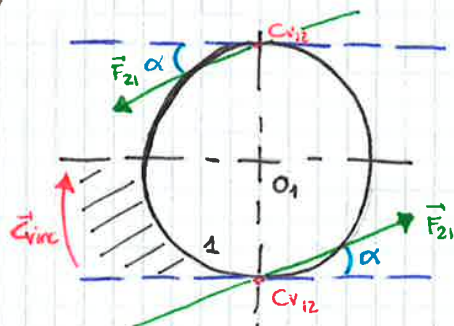
$$\Rightarrow F_{34} = 1198,31 \text{ N}$$



$$|F_{12}| = |R_{02}|$$

$$O_3 \uparrow + F_{12} x_2 \cos \alpha = F_{13} x_3 \cos \alpha$$

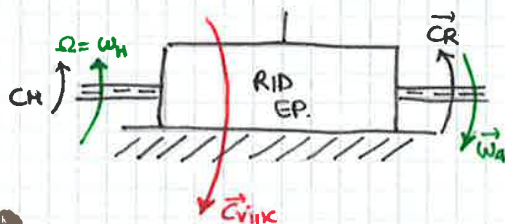
$$\Rightarrow F_{12} = 1268,86 \text{ N}$$



$$O_1 \downarrow + C_{vinc} = 2F_{21} (x_1 \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow C_{vinc} = 518,28 \text{ Nm}$$

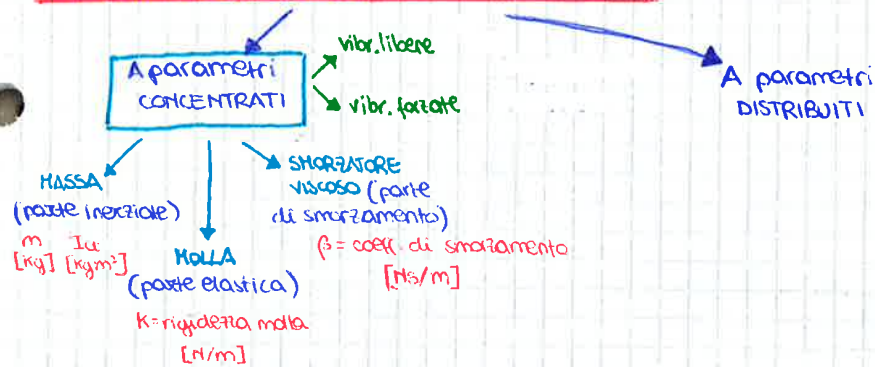
$$x_1 = \frac{m z_1}{2} = 242,5 \text{ mm}$$



$$a) + C_{vinc} = C_H + C_R = 518,73 \text{ Nm}$$

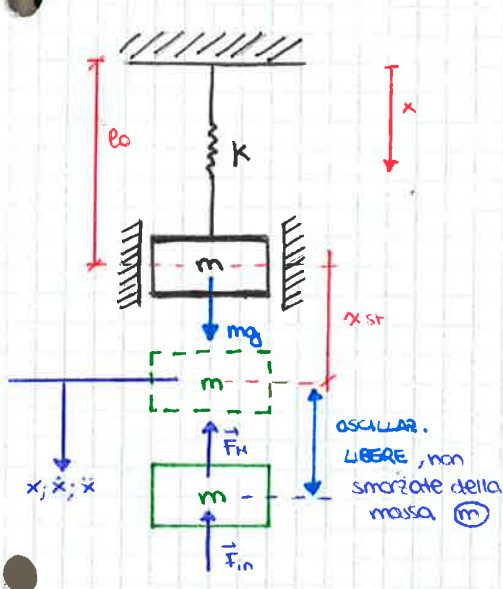
VIBRAZIONI $\Rightarrow$ LIBRO DI FERRARESI

2 Tipi di modelli per lo studio delle vibrazioni

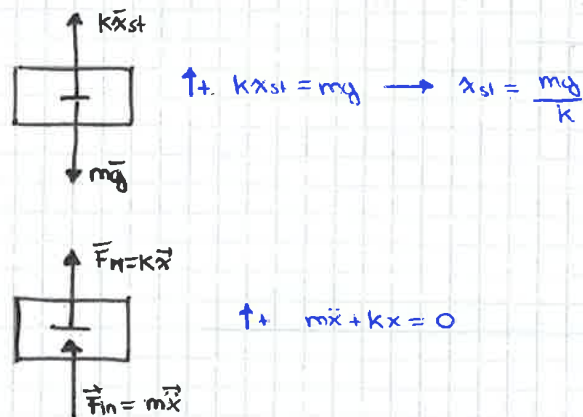


- Sistemi vibranti a 1 GdL
- A parametri concentrati
- Lineari (piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio stabile)
- vib. smorzate
- vib. libere o forzate

1) VIBRAZIONI LIBERE NON SMORZATE (caso ideale)



x_0 = lunghezza libera della molla di rigidità k



$\uparrow + m\ddot{x} + kx = 0$ **EQUAZIONE STANDARD**
• Dividiamo tutto per il coeff. dell'accelerazione...

$\uparrow + \ddot{x} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0$ **EQUAZIONE CANONICA**

$\uparrow + \ddot{x} + (\omega_n^2)x = 0$ **EQUAZIONE GENERALIZZATA**

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow$ Pulsazione naturale del sistema NON smorzato [rad/s]

ad essa è legata la frequenza propria di oscillazione libera del sistema NON smorzato.

? $x_g(t)$ = integrale generale dell'omogenea associata

$x_g(t) \rightarrow e^{\lambda t}$

Sostituisco in $\ddot{x} + (\omega_n^2)x = 0$

$\Rightarrow e^{\lambda t} [\lambda^2 + \omega_n^2] = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_n$

$\Rightarrow [x_g(t) = ae^{i\omega_n t} + be^{-i\omega_n t}]$ (a, b costanti ricavabili dalle C.I.)

$\Rightarrow [e^{\pm i\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm i \sin \omega_n t]$

$\Rightarrow x_g(t) = a [\cos \omega_n t + i \sin \omega_n t] + b [\cos \omega_n t - i \sin \omega_n t]$

$= 0 \rightarrow$ oscillazioni libere, i.e. non ha una forzante il sistema.