NUMERO: 1651A - ANNO: 2015

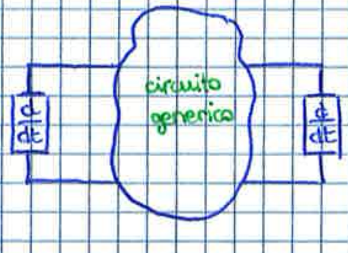
# A P P U N T I

STUDENTE: Salis

MATERIA: Elettrotecnica + Eserc. Prof.Canavero

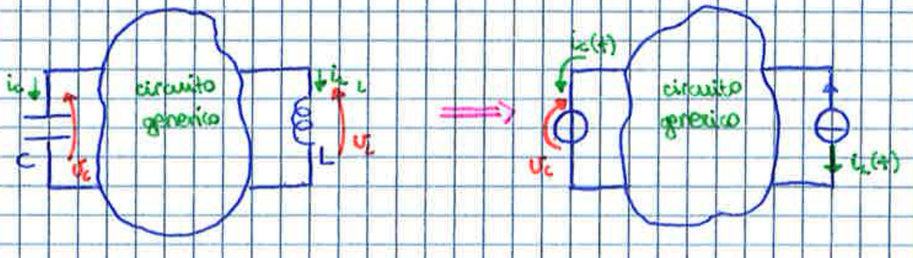
# CIRCUITI CON DUE ELEMENTI DIFFERENZIALI

Manteniamo i generatori indipendenti costanti (ipotesi)




Su ogni el. differenziale, la variabile non continua è detta ormai **variabile complementare**

sottocaso a) 1 induttore + 1 condensatore




Supponiamo che $v_c(t)$ e $i_L(t)$ siano già risolte (come fatto fin'ora)
Esprimo la corrente $i_c(t)$ come la sovrapposizione degli effetti di quel c.to, faccio lo stesso per $v_L(t)$

$$i_c(t) = \alpha_c v_c + \alpha_L i_L + \underbrace{\beta_1 E_1 + \beta_2 E_2 + \ldots + \eta_1 A_1 + \eta_2 A_2 + \ldots}_{\text{contributo gen. interni} = I_S}$$

$$v_L(t) = K_c v_c + K_L i_L + \underbrace{h_1 E_1 + h_2 E_2 + \ldots + e_1 A_1 + e_2 A_2 + \ldots}_{\text{contributo gen. interni} = E_S}$$

- Poiché $i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt}$ avremo:

$$C \frac{dv_c}{dt} = \alpha_c v_c + \alpha_L i_L + I_S$$

- Poiché $v_L(t) = L \, di_L/dt$ avremo:

$$L \frac{di_L}{dt} = K_c v_c + K_L i_L + E_S$$

Dividiamo la I eq. per C e la II per L:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_c}{dt} = \dfrac{\alpha_c v_c + \alpha_L i_L + I_S}{C} \\[2ex] \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{K_c v_c + K_L i_L + E_S}{L} \end{cases}$$

Abbiamo un sistema di 2 eq. differenziali del I ordine a coeff. costanti non omogenee. Esse sono scritte rispetto alle variabili di stato. Parliamo di **SISTEMA DI STATO DEL CIRCUITO**

Scritto in forma matriciale:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} \qquad u = \begin{bmatrix} I_S/C \\ E_S/L \end{bmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\hat{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_c/C & \alpha_L/C \\ K_c/L & K_L/L \end{bmatrix}}_{A} \hat{x} + u$$

$\hat{x}$ → vettore di stato

$u$ → vettore di ingresso

A = matrice dei coeff. del sistema di stato.

## Regola

In generale, un circuito con due elementi differenziali avrà un'equazione del tipo:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \underline{x} + \underline{U}_0}$$

Dunque abbiamo:

$$\boxed{\frac{d^2x_{1,2}}{dt^2} - T_A \frac{dx_{1,2}}{dt} + \Delta_A x_{1,2} = Q} \xrightarrow{\text{oppure}} \boxed{\frac{d^2x_{1,2}}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx_{1,2}}{dt} + \omega_0^2 x_{1,2} = Q}$$

* Tornando al nostro esercizio otteniamo:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \left(\frac{1}{CR}+\frac{R}{L}\right)\frac{dv_C}{dt} + \left(\frac{1}{CL}+\frac{1}{CL}\right)v_C = \frac{R}{L}\frac{E_0}{CR}$$

SOLUZIONE EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL II ORDINE

- Equazione caratteristica $\quad p = \frac{d}{dt}$

$$(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 p^0)x_{1,2} = 0 \Longrightarrow p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2 = 0$$

$$p = -\alpha \pm \underbrace{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}_{\text{se} > 0} < \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}$$ radici reali e distinte

$$\boxed{x_{1,2}(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + K_Q}$$ SOL. GENERALE eq. diff. II ordine

note le condizioni iniziali $x_{1,2}(0)$ & $\left.\frac{dx_{1,2}}{dt}\right|_0$

- L'eq. caratteristica dell'esercizio è $p^2 + \left(\frac{1}{CR}+\frac{R}{L}\right)p + \frac{2}{CL} = 0$, calcoliamo $p$:

$$p = \frac{-\left(\frac{1}{CR}+\frac{R}{L}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{CR}+\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{8}{CL}}}{2} < \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}$$

$$v_C(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + K_Q \;*$$

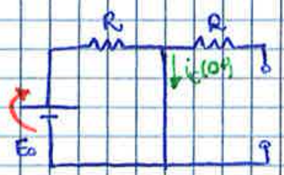
$v_C(0) = v_C(0^-)$ per $t<0$ il circuito è inerte, dunque $v_C(0^-) = 0$

$$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{0^+} = \left.\frac{i_C}{C}\right|_{0^+} = \frac{E_0}{CR}$$

Per $t<0$ dal circuito $v_C(0^-) = 0$, $i_L(0^-) = 0$

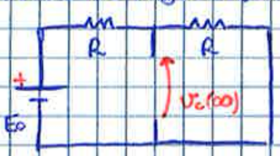
NON CONTINUA

- Circuito in $t = 0^+$




$i_C(0^+) = \frac{E_0}{R}$, andando a sostituire

- Soluzione a regime (≡ tutto costante)




$$v_C(\infty) = \frac{E_0}{2} = K_Q$$

Impongo $t=0$ nella mia soluzione *

$$\underbrace{v_C(0)}_{0} = K_1 e^0 + K_2 e^0 + K_Q \longrightarrow K_1 + K_2 + \frac{E_0}{2} = 0$$

calcolo la derivata

$$\frac{dv_C}{dt} = K_1 p_1 e^{p_1 t} + K_2 p_2 e^{p_2 t} + 0$$

Impongo ora $t=0$ e ottengo $\frac{dv_C}{dt}(t=0) = K_1 p_1 e^0 + K_2 p_2 e^0 = \frac{E_0}{CR}$

SISTEMA $\begin{cases} \left(K_1 + K_2 + \frac{E_0}{2} = 0\right) p_1 \\ K_1 p_1 + K_2 p_2 - \frac{E_0}{CR} = 0 \end{cases} \longrightarrow p_1 K_2 - K_2 p_2 + \frac{E_0}{2}p_1 + \frac{E_0}{CR} = 0 \longrightarrow K_2 = \frac{-E_0\left(\frac{p_1}{2} + \frac{1}{CR}\right)}{p_1 - p_2}$

ES.


1) Ricaviamo il sistema di equazioni di stato

$$x = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

$i_C = i_L \longrightarrow C\frac{dv_C}{dt} = i_L \longrightarrow \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} i_L$

$v_L = E_0 - v_C - Ri_L \longrightarrow L\frac{di_L}{dt} = E_0 - v_C - Ri_L \longrightarrow \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}(E_0 - v_C - Ri_L)$

In forma matriciale:

$$\frac{d}{dt}x = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{E_0}{L} \end{bmatrix}}_{U_0}$$

2) Costruisco l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\boxed{\frac{d^2 v_C}{dt^2} - T\frac{dv_C}{dt} + \Delta v_C = Q_0}$$

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\alpha}\frac{dv_C}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} v_C = 0$$

3) Soluzione dell'equazione differenziale

$$\boxed{v_C(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + W}$$

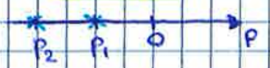
CALCOLO P $\quad p^2 + \frac{R}{L}p^1 + \frac{1}{CL}p^0 = 0 \longrightarrow p = \frac{-R/L \pm \sqrt{R^2/L^2 - 4/CL}}{2}$

$p_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} - 4/LC}$ *

$p_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{1}{2}\sqrt{R^2/L^2 - 4/LC}$ *

* se $\left(\frac{R}{L}\right)^2 > \frac{4}{LC} \rightsquigarrow p_1 < 0 \quad (\alpha^2 > \omega_0^2)$

$p_2 < p_1$




Posso riscrivere le due soluzioni come

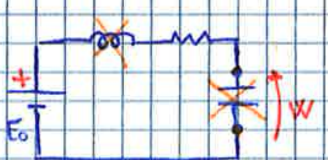
$p_1 = -\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2} = -\eta_1, \ \eta_1 > 0$

$p_2 = -\alpha - \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2} = -\eta_2, \ \eta_2 > 0$

SOLUZIONE

$v_C(t) = K_1 e^{-\eta_1 t} + K_2 e^{-\eta_2 t} + W$

- W è il termine a regime (tutto costante), $t \to \infty$



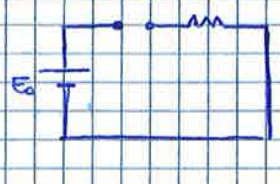

condensatore — c.to aperto
induttore — corto c.to

$W = E_0$

- condizione iniziale: per $t = 0^-$ → circuito inerte

$i_L(0^-) = 0, \ v_C(0^-) = 0 = v_C(0^+)$

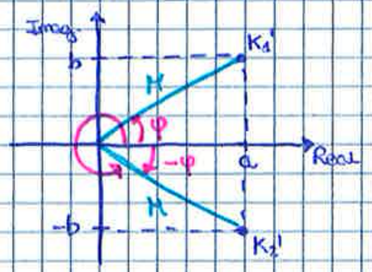
In $t = 0^+$ il c.to è:




$C\frac{dv_C}{dt}\Big|_{0^+} = i_C(0^+), \ i_C(0^+) = 0$, dunque anche $\frac{dv_C}{dt}\Big|_{0^+} = 0$

$K_1' = a + jb$ (forma cartesiana)
$= He^{j\varphi}$ (forma polare)

$K_2' = a - jb$ (forma cartesiana)
$= He^{-j\varphi}$ (forma polare)




l'angolo $\varphi$ è anche detto fase

RELAZIONE DI EULERO
$$\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} = \cos(x)$$

$$v_C(t) = \underbrace{He^{j\varphi}}_{K_1'} e^{(-\alpha+j\beta)t} + \underbrace{He^{-j\varphi}}_{K_2'} e^{(-\alpha-j\beta)t} + E_0$$

$$= He^{j\varphi}e^{-\alpha t}e^{j\beta t} + He^{-j\varphi}e^{-\alpha t}e^{-j\beta t} + E_0$$

$$= He^{-\alpha t}2\left[\frac{e^{j(\varphi+\beta t)} + e^{-j(\varphi+\beta t)}}{2}\right] + E_0$$

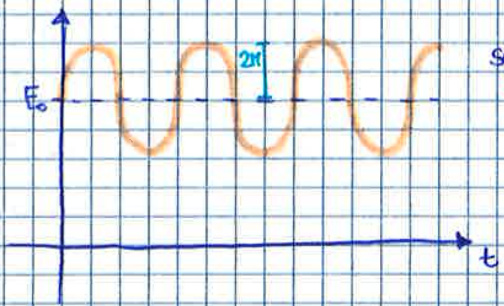
$$= 2He^{-\alpha t}\cdot\cos(\beta t+\varphi) + E_0 \quad \text{per } t \geq 0$$

* Caso particolare $\alpha = 0$ (1)

$p_1 = +j\beta$

$p_2 = -j\beta$

$\Rightarrow v_C(t) = 2M\cos(\beta t+\varphi) + E_0$




Soluzione oscillante non smorzata

* Caso particolare $\beta = 0$ (2) (se $\alpha = \omega_0 \rightarrow \beta = \sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} = 0$)

$K_1'$ e $K_2' \rightarrow \infty$ Parliamo di caso di risonanza

caso di soluzioni coincidenti, $p_1 = p_2 = -\alpha$

$$v_C(t) = (\underset{\downarrow\, pE_0}{H_1}t + \underset{\downarrow\, -E_0}{H_2})e^{pt} + \underset{\downarrow\, E_0}{Q_0}$$

Troviamo $H_1$ e $H_2$ imponendo le condizioni iniziali:

$v_C(0^+) = H_2 + E_0 = 0 \longrightarrow H_2 = -E_0$

$\frac{dv_C}{dt} = H_1(e^{pt} + tpe^{pt}) + H_2pe^{pt}$

$\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{0^+} = H_1(1+0) + H_2p = 0 \longrightarrow H_1 = -pH_2 \longrightarrow H_1 = pE_0$

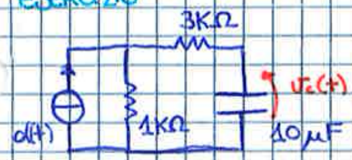
SOLUZIONE

$v_C(t) = (-\alpha tE_0 - E_0)e^{-\alpha t} + E_0$, per $t \geq 0$

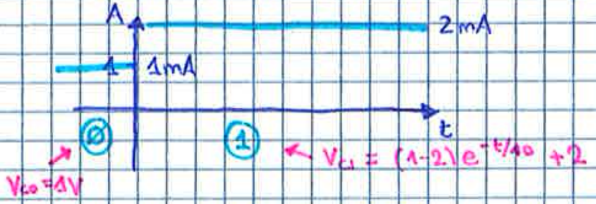
$= -E_0(\alpha t + 1)e^{-\alpha t} + E_0$

# ESERCITAZIONE 27-11-13

ESERCIZIO




$a(t) = 1 + u(t)$ mA



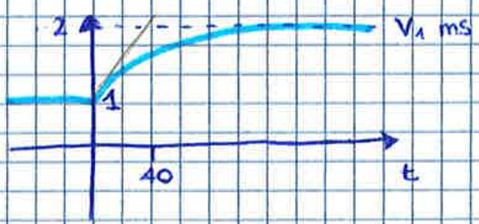

Ø $V_0$


$V_0 = 1V$

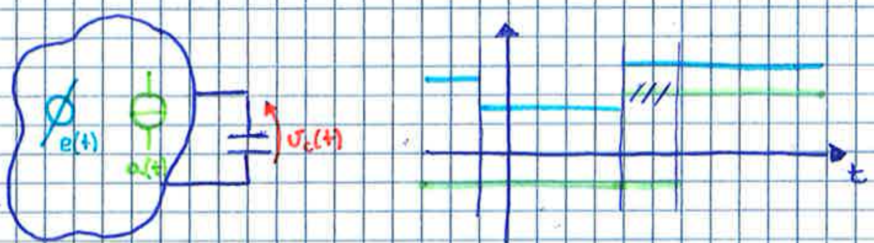
1 $v_{c1}(0) = V_0 = 1V$

$V_1 = 2V$

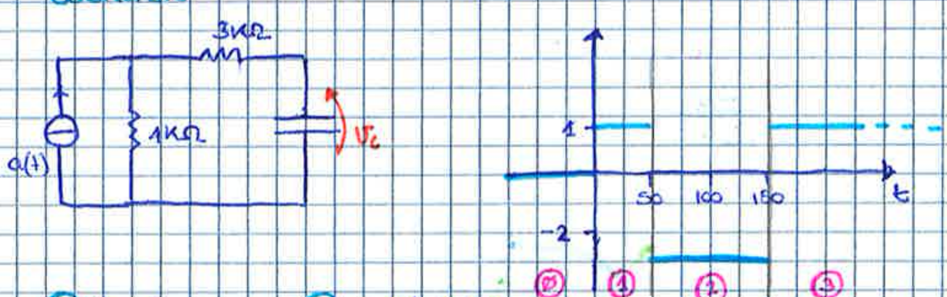
$\tau = CR_{eq}$ $\quad R_{eq} = R_1 + R_2 = 4k\Omega \longrightarrow \tau = C \cdot 4k\Omega = 40$ ms




Supponiamo di avere:




ESERCIZIO




Ø $V_0 = 0$ $\quad$ 3 $v_{c3}(150) = v_{c2}(150)$

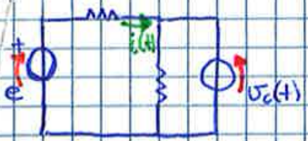
1 $v_{c1}(0) = 0$ $\quad$ $V_3 = 1V$

$V_1 = 1V$

$\tau = 40$ ms

2 $v_{c2}(50) = v_{c1}(50) =$

$V_2 = -2V$

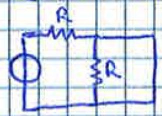



$i(t) = \frac{e - v_c}{R}$

- Otteniamo i(t) tramite via diretta

⓪ $I_0 = 0$

① $i_1(0^+) = 1 mA$




$I_1 = 0.5 mA$ (condensatore = corto c.to)

② $i_2(5^+) = -2.5 mA$

$I_2 = -1 mA$

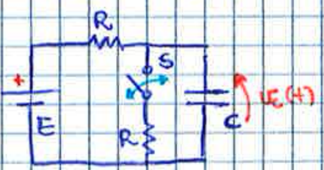
SOLUZIONE

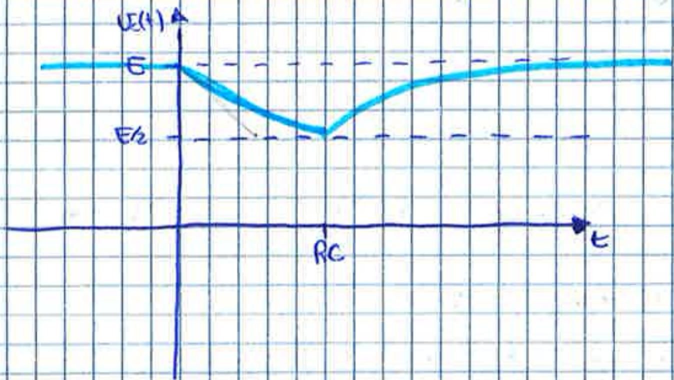
$$i(t) = \begin{cases} 0 \\ (1-1/2)e^{-t} + \frac{1}{2} \quad mA, ms \\ (-2.5+1)e^{-(t-5)} - 1 \quad mA, ms \end{cases}$$

Verifica del diagramma

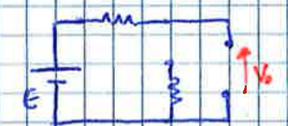
ESERCIZIO

Calcolare e diagrammare $v_c(t)$, S si chiude in $t=0$ e si riapre in $T=RC$



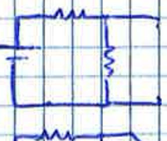

⓪ $V_0 = E$

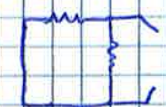



① $v_1(0) = V_0 = E$

$V_1 = E/2$

$\tau_1 = \frac{R}{2}C$





② $v_2(RC) = v_1(RC)$

$V_2 = E$

$$v_c(t) = \begin{cases} v_0 = E \\ v_1 = \left(E - \frac{E}{2}\right)e^{-2t/RC} + \frac{E}{2} \\ v_2 = (v_1(RC) - E)\, e^{-\frac{t+RC}{RC}} + E \end{cases}$$

## SOLUZIONE PERMANENTE soggetta a generatori sinusoidali

$$v_{sp}(t) = W_M \cos(\omega t + \varphi) = W_M \left( \frac{e^{j\varphi} e^{j\omega t} + e^{-j\varphi} e^{-j\omega t}}{2} \right)$$

$W_M$ → Ampiezza Reale

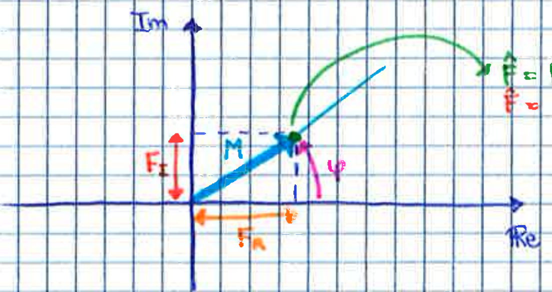
$\omega$ → Pulsazione del generatore quantità nota

$\varphi$ → Fase (angolo)

Le due quantità da calcolare sono la fase e l'ampiezza, che abbiamo visto combinate nella formula precedente in FORMA POLARE ($W_M e^{j\varphi}$)

* Ad ogni espressione sinusoidale associamo un numero complesso in cui l'ampiezza dell'oscillazione è il **MODULO** e la fase dell'oscillazione diventa l'**ANGOLO** del numero complesso.
Tale numero complesso prende il nome di FASORE

$$\boxed{\hat{V}_{sp} = W_M e^{j\varphi}}$$




$\hat{F} = M e^{j\varphi}$ scrittura POLARE

$\hat{F} = F_R + j F_I$ scrittura CARTESIANA

$$\begin{cases} F_R = M \cos\varphi \\ F_I = M \sin\varphi \end{cases}$$ Passaggio da polare a cartesiano

$$\begin{cases} M = \sqrt{F_R^2 + F_I^2} \\ tg\,\varphi = F_I / F_R \end{cases}$$ Passaggio da cartesiano a polare

$Z_1 = a + jb = m e^{j\alpha}$ ; $Z_2 = c + jd = \kappa e^{j\beta}$ , vediamo le OPERAZIONI CON I NUM. COMPLESSI

**ADDIZIONE** → Usare la rappresentazione cartesiana (lo stesso vale per la sottrazione)

$$Z_1 \pm Z_2 = a + jb \pm c + jd = (a \pm c) + j(b \pm d) = m e^{j\alpha} \pm \kappa e^{j\beta}$$

**PRODOTTO** → Usare la rappresentazione polare

$$Z_1 \cdot Z_2 = (a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc - bd = (ac - bd) + j(ad + bc)$$

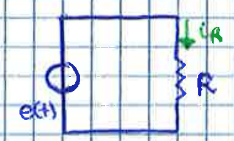
$$= m e^{j\alpha} \cdot \kappa e^{j\beta} = m\kappa\, e^{j(\alpha+\beta)}$$

**DIVISIONE** → Usare la rappresentazione polare

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} \frac{(c - jd)}{(c - jd)} = \ldots$$

$$= \frac{m e^{j\alpha}}{\kappa e^{j\beta}} = \frac{m}{\kappa} e^{j(\alpha - \beta)}$$

### ESEMPIO




$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \theta)$$

$$i_R = \frac{e(t)}{R} = \frac{E_M}{R} \cos(\omega t + \theta)$$

$\hat{E} = E_M e^{j\theta}$ → FASORE di E

$i_R$ sarà certamente della forma $i_R(t) = W_M \cos(\omega t + \alpha)$

$\hat{I}_R = W_M e^{j\alpha}$ → FASORE di $i_R$

Dall'eq. di funzionamento del resistore so che $i_R = \frac{e}{R} = \frac{E_M}{R} \cos(\omega t + \theta)$

→ $\hat{I}_R = \frac{E_M}{R} e^{j\theta}$

Associo un fasore

$$\hat{I}_c = -CE_M\omega\, e^{j(\theta - \pi/2)} = -CE_M\omega\, e^{j\theta} \underbrace{e^{-j\pi/2}}_{= -j} = j\omega C \underbrace{E_M e^{j\theta}}_{= \hat{E}}$$

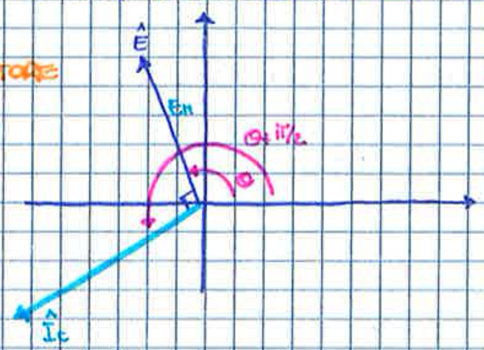
Ottengo $\hat{I}_c = j\omega C \hat{E}$

Ancora una volta l'equazione di funzionamento (del condensatore) è un'equazione algebrica con numeri complessi

$$\hat{I}_c = (j\omega C)\,\hat{E} \qquad \text{CONDENSATORE}$$

$(j\omega C) \to \omega C e^{j\pi/2}$

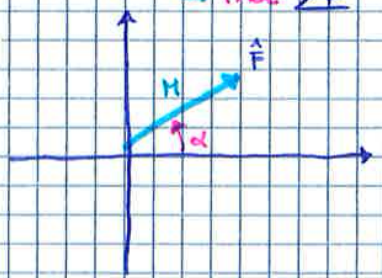
$\hat{E} \to E_M e^{j\theta}$



* $\hat{I}_c$ è in anticipo di 90 gradi rispetto alla tensione.
(Dunque $\hat{E}$ è in ritardo di 90°)

RIASSUMENDO:

$\hat{F} = Me^{j\alpha}$ — $M \to$ MODULO, $\alpha \to$ FASE $\angle \hat{F}$



* Nel passaggio da generatore a fasore corrispondente si perde un'informazione, ovvero il valore della PULSAZIONE (da annotare).

$$v(t) = V_M \cos(\omega t + \theta) = V_M \underbrace{\frac{e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}}{2}}_{\text{FORMULA DI EULERO}} = \underbrace{\frac{V_M}{2} e^{j\theta}}_{\text{fasore}} e^{j\omega t} + \underbrace{\frac{V_M}{2} e^{-j\theta}}_{\text{fasore coniugato}} e^{-j\omega t} =$$

$$= \frac{\hat{V}}{2} e^{j\omega t} + \frac{\hat{V}^*}{2} e^{-j\omega t}$$

Consideriamo il nodo seguente:

Sappiamo che vale la KCL

$i_1 + i_2 + i_3 = 0$

Le correnti possono essere scritte in forma sinusoidale.

$i_1 = I_{M1} \cos(\omega t + \theta_1) \longrightarrow \hat{I}_1 = I_{M1} e^{j\theta_1}$

$i_2 = I_{M2} \cos(\omega t + \theta_2) \longrightarrow \hat{I}_2 = I_{M2} e^{j\theta_2}$

$i_3 = I_{M3} \cos(\omega t + \theta_3) \longrightarrow \hat{I}_3 = I_{M3} e^{j\theta_3}$

Sostituiamo le espressioni sinusoidali nella KCL e ad ognuna di queste sostituisco il fasore

$$\frac{\hat{I}_1}{2} e^{j\omega t} + \frac{\hat{I}_1^*}{2} e^{-j\omega t} + \frac{\hat{I}_2}{2} e^{j\omega t} + \frac{\hat{I}_2^*}{2} e^{-j\omega t} + \frac{\hat{I}_3}{2} e^{j\omega t} + \frac{\hat{I}_3^*}{2} e^{-j\omega t} = 0$$

$$e^{j\omega t} \underbrace{(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3)}_{=0} + e^{-j\omega t} \underbrace{(\hat{I}_1^* + \hat{I}_2^* + \hat{I}_3^*)}_{=0} = 0$$

$(\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3)^* = (0)^* \longrightarrow \hat{I}_1^* + \hat{I}_2^* + \hat{I}_3^* = 0$ (1ª espressione, basta la condizione 1 perché la 2ª è implicita nella prima)

È sufficiente che $\hat{I}_1 + \hat{I}_2 + \hat{I}_3 = 0$

Notiamo che nel nostro c.to R e L sono in serie.

* Il coefficiente dell'induttore si somma a R; è un coefficiente immaginario che però in pratica svolge la stessa funzione di una resistenza.

* Il fasore ha le stesse dimensioni della variabile elettrica che esprime. La controprova è che R resta tale, si misura in $\Omega$, dunque dovremo avere per forza la tensione in volt e la corrente in Ampere.

* $(R + \omega j L)$ ha dimensioni di Ohm ($\Omega$) ma è un numero complesso. Non è propriamente una resistenza, viene indicata con Z ed è chiamata impedenza. È un coefficiente complesso, NON un fasore.

Z può essere scritto come:

$$\left[ Z = \underbrace{R}_{\text{RESISTENZA}} + j\underbrace{X}_{\text{REATTANZA}} \right] \quad \text{(forma cartesiana)}$$

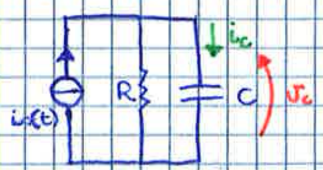
REATTANZA coeff. immaginario

$$\left[ Z = |Z| e^{j\angle} = |Z| e^{j\varphi} \right] \quad \text{(forma polare)}$$

* Il coeff. $j\omega L$ dell'induttore è come se fosse una impedenza avente solo la parte immaginaria, dunque possiamo scrivere $X = \omega L$.
Tale coefficiente ha dimensioni di Ohm ($\Omega$)

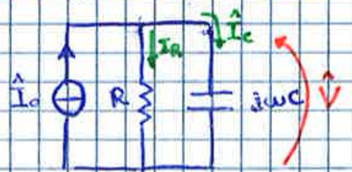
* Il coefficiente $j\omega C$ del condensatore ha invece dimensioni di siemens (S)

ESEMPIO




$$i_0(t) = I_M \cos(\omega t + \beta)$$

1) Trasformo il c-to con i fasori e risolvo




$$\hat{I}_0 = I_M e^{j\beta} \quad (\omega)$$

Applico la KCL:

$$\hat{I}_0 = \hat{I}_R + \hat{I}_C$$

$$\hat{I}_0 = \frac{\hat{V}}{R} + j\omega C \hat{V} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)\hat{V}$$

$$\hat{V} = \frac{\hat{I}_0}{\frac{1}{R} + j\omega C} \qquad \text{circuito in //}$$

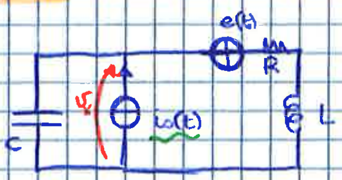
* Indichiamo il coefficiente di proporzionalità $\frac{1}{R} + j\omega C$ con la lettera Y e lo chiamiamo ammettenza. Si misura in siemens (S)

Y può essere scritto come:

$$\left[ Y = \underbrace{G}_{\text{CONDUTTANZA}} + j\underbrace{B}_{\text{SUSCETTANZA}} \right] \quad \text{(forma cartesiana)}$$

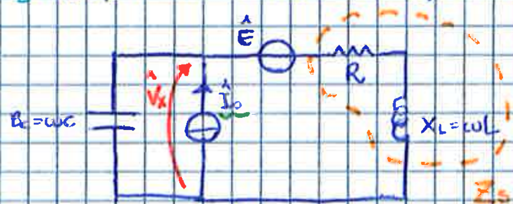
$$\left[ Y = |Y| e^{j\angle} \right] \quad \text{(forma polare)}$$

**ESEMPIO**




$$\begin{cases} e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha) \\ i_o(t) = I_M \cos(\omega t + \beta) \end{cases}$$

1) Trasformo il circuito con i fasori




$\hat{I}_o = I_M e^{j\beta}$

$\hat{E} = E_M e^{j\alpha}$

$Z_c = jX_c \quad (X_c = -\frac{1}{\omega C})$

$Z_s = R + jX_L$

2) Risolvo il circuito

Applico Millmann:

$$\hat{V}_x = \frac{-\frac{\hat{E}}{Z_s} + \hat{I}_o}{\frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_s}} = \frac{-\frac{E_M e^{j\alpha}}{R + j\omega L} + I_M e^{j\beta}}{\frac{1}{j\left(-\frac{1}{\omega C}\right)} + \frac{1}{R + j\omega L}}$$

Dopo i passaggi troviamo $\hat{V}_x$ in forma polare, $\hat{V}_x = m e^{j\eta}$

Passo a $v_x(t)$

$v_x(t) = m \cos(\omega t + \eta)$

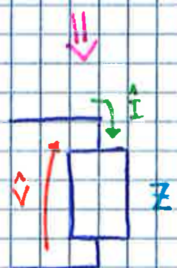
## Potenza nei circuiti con generatori sinusoidali


PASSAGGIO AI FASORI:

$i(t) = I_M \cos(\omega t + \alpha) \longrightarrow \hat{I} = I_M e^{j\alpha} = |I| e^{j\angle I}$

$v(t) = V_M \cos(\omega t + \beta) \longrightarrow \hat{V} = V_M e^{j\beta} = |V| e^{j\angle V}$

* $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$




$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = \frac{M e^{j\angle V}}{|I| e^{j\angle I}} = \underbrace{\frac{|V|}{|I|}}_{|Z|} e^{j\overbrace{(\angle V - \angle I)}^{\angle Z = \varphi}}$$

* Il $\cos\varphi$ è chiamato FATTORE DI POTENZA

Per definizione la potenza è data da $p = v \cdot i$

Possiamo scrivere:

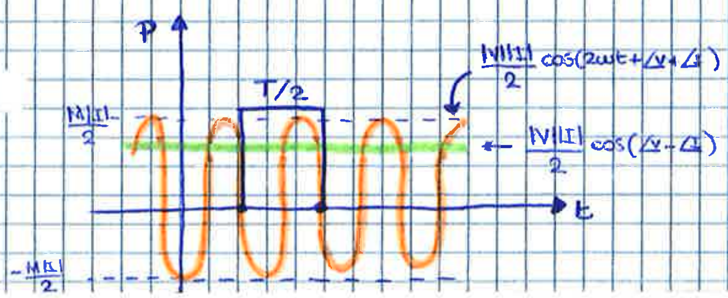
POTENZA ISTANTANEA

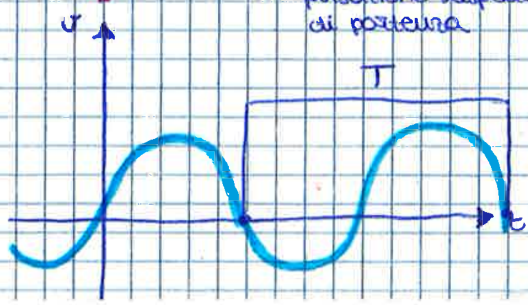
$$p = \underbrace{|V| \cos(\omega t + \angle V)}_{v} \cdot \underbrace{|I| \cos(\omega t + \angle I)}_{i} = |V| \cdot |I| \cos(\omega t + \angle V) \cos(\omega t + \angle I) = (\text{applichiamo } *)$$

$$= |V||I| \; \frac{1}{2} \left\{ \cos(\omega t + \angle V + \omega t + \angle I) + \cos(\cancel{\omega t} + \angle V - \cancel{\omega t} - \angle I) \right\} =$$

$$\left[ = \frac{|V||I|}{2} \cos(2\omega t + \angle V + \angle I) + \frac{|V||I|}{2} \cos(\angle V - \angle I) \right]$$

* La potenza oscilla con doppia pulsazione rispetto alla v / i di partenza



$s_{1,2}: \; s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0$

$s^2 + 2s + 16 = 0 \longrightarrow s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-16} = -1 \pm j\sqrt{15}$

Quindi abbiamo:

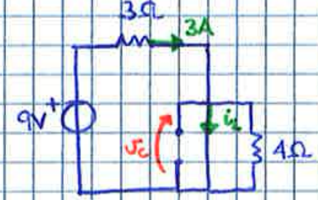
$v(t) = A_1 e^{s_0 t} + A_2 e^{s_0^* t}$ dove $s_0 = -1 + j\sqrt{15}$

Calcoliamo $A_1$ e $A_2$:

$A_{1,2}: \; A_1 + A_2 = v(0^+)^* = 0$

$s_0 A_1 + s_0^* A_2 = \frac{\delta v(0^+)}{\delta t} = \frac{1}{C} i_c(0^+) = -24 \text{ V/s}$

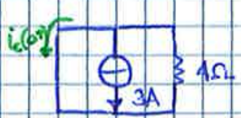
- $t = 0^-$




$i_L(0^-) = 3A$

$v_c(0^-) = 0^*$

- $t = 0^+$




$i_c(0^+) = -3A$

Soluzione

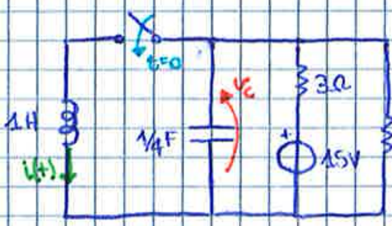
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ s_0 & s_0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s_0^* - s_0} \begin{bmatrix} s_0^* & -1 \\ s_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2j\,\text{Im}\{s_0\}} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -24 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-2j\sqrt{15}} \, 24 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ V}$$

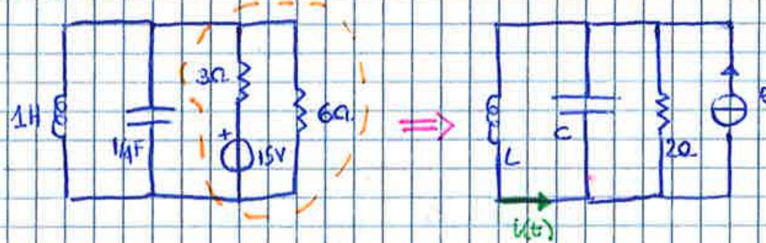
$$v(t) = \frac{24}{\sqrt{15}} \frac{1}{-2j} e^{-t+j\sqrt{15}t} - \frac{24}{\sqrt{15}} \frac{1}{-2j} e^{-t-j\sqrt{15}t} = \frac{24}{\sqrt{15}} e^{-t} \underbrace{\left( \frac{e^{j\sqrt{15}t}}{-2j} - \frac{e^{-j\sqrt{15}t}}{+2j} \right)}_{\sin(\sqrt{15}t)}$$

portando fuori il segno ⊖

## ESERCIZIO




- $t > 0$




$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + K$

$s_{1,2}: \; s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC} = 0 \longrightarrow s^2 + 2s + 4 = 0 \longrightarrow s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3} \text{ rad/s}$

Soluzione

$$i(t) = -\frac{4}{L} t e^{-\frac{1}{\sqrt{L10^{-3}}} t}$$

$$\frac{\delta i}{\delta t} = -\frac{4}{L}\left(e^{-\frac{1}{\sqrt{\ }}t} + t\left(-\frac{1}{\sqrt{L10^{-3}}}\right) e^{-\frac{1}{\sqrt{\ }}t}\right) = 0 \quad \text{per } t = 4 \cdot 10^{-3}$$

$$\longrightarrow 1 + 4 \cdot 10^{-3} \frac{-1}{\sqrt{L10^{-3}}} = 0 \longrightarrow L = 16\,mH$$

Ricaviamo R dalla 1° condizione.

ESERCIZIO

Razionalizzazione numeri complessi

$$z_1 = \frac{3-j2}{-1+j} \frac{(-1+j)}{(-1-j)} = \frac{(3-j2)(-1-j)}{2}$$

ESERCIZIO

$$x(t) = \mathrm{Re}\{\hat{x} e^{j\omega t}\}$$

| $x(t)$ | $\hat{x}$ |
|---|---|
| $\cos(\omega t)$ | $1$ |
| $\sin(\omega t)$ | $-j$ |

$$\hat{W}_1 = 4 + j5 \longrightarrow w_1(t) = 4\cos(\omega t) - 5\sin(\omega t)$$

$$\hat{W}_2 = 3e^{j\pi/6} \longrightarrow w_2(t) = \mathrm{Re}\{3e^{j\pi/6} \cdot e^{j\omega t}\} = 3\,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega t + \pi/6)}\} = 3\cos(\omega t + \pi/6)$$

ESERCIZIO $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$

$$w(t) = 3\sin(\omega t + \pi/4) + \cos(\omega t)$$

$$w(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\omega t) = 3\cos(\omega t - \pi/4) + \cos(\omega t)$$

$$\hat{W} = 3e^{j\pi/4} + 1$$

Se abbiamo un bipolo di soli induttori $Z_L = \mathrm{Im}$, $\varphi = (\angle V - \angle I) = \pi/2$
In questo caso $p_R = 0$, mentre $p_Q$ esiste e le sue oscillazioni hanno ampiezza massima pari a $\frac{|V||I|}{2}$
Lo stesso vale per un bipolo di soli condensatori (solo con il segno − davanti a $\frac{|V||I|}{2}$)
$p_Q$ viene definita POTENZA REATTIVA (2)

Nell'espressione di $\frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}^*$ si ha

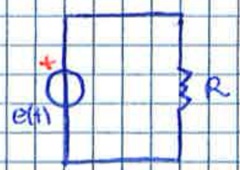
$P = \frac{1}{2}|V||I|\cos(\angle V - \angle I)$ potenza attiva media

$Q = \frac{1}{2}|V||I|\sin(\angle V - \angle I)$ potenza reattiva

Si ha dunque $\left[ S = P + jQ \right] = \frac{1}{2}VI^*$

* P e Q sono entrambe potenze. Ha la consuetudine è di misurare P in W (Watt), S in VA (Voltampere) e Q in VAr (Voltampere reattivi), solo per distinguerle.

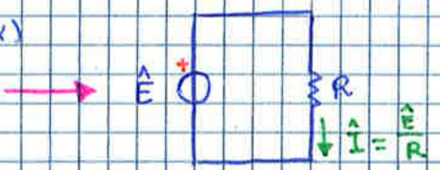
- Supponiamo di avere il seguente circuito



$e(t) = E_M \cos(\omega t + \alpha)$

$\hat{E} = E_M e^{j\alpha}$

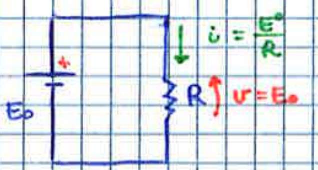
FASORI



Potenza media $P = \frac{|E||I|}{2}\cos\varphi = \frac{|E|^2}{2R}$ ($\cos\varphi = 1$)

Potenza reattiva $Q = 0$

- Consideriamo un altro circuito



la potenza sarà:

$p = vi = \frac{E_0^2}{R}$

$P = p$ per avere lo stesso effetto, dunque:

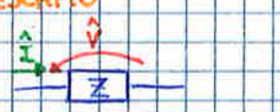
$\frac{|\hat{E}|^2}{2R} = \frac{|E_0|^2}{R} \longrightarrow \frac{|\hat{E}|^2}{2} = |E_0|^2 \longrightarrow \left[ |\hat{E}| = \sqrt{2}\, E_0 \right]$ otteniamo un altro modo per definire il fasore.

Invece di definire il fasore a partire dal valore massimo per oscillazione ($E_M$), posso anche definirlo a partire dal valore della batteria che dà lo stesso effetto:

$\left[ E_0 = \frac{E_M}{\sqrt{2}} = 0.707\, E_M \right]$ Tale valore viene chiamato VALORE EFFICACE

$P = \frac{|V||I|}{2}\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}\,V_{eff} \cdot \sqrt{2}\,I_{eff}}{2}\cos\varphi = V_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi$ * sparisce il fattore $\frac{1}{2}$ se usiamo i valori efficaci

ESEMPIO



$\hat{V} = Z\hat{I}$ ; $Z = R + jX$

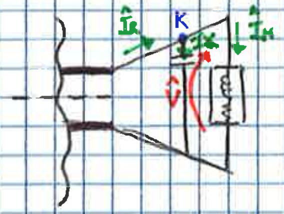
potenza complessa $S = \frac{1}{2}\hat{V}\hat{I}^* = \frac{1}{2}Z\hat{I}\hat{I}^* = \frac{1}{2}Z|I|^2 = \underbrace{\frac{1}{2}R|I|^2}_{P} + j\underbrace{\frac{1}{2}X|I|^2}_{Q}$

## CASI PARTICOLARI

a) $Z = R + j0 \longrightarrow P = \frac{1}{2}R|I|^2 \quad Q = 0$ RESISTORE

b) $Z = j\omega L \longrightarrow P = 0 \quad Q = \frac{1}{2}\underbrace{\omega L}_{X_L}|I|^2$ INDUTTORE

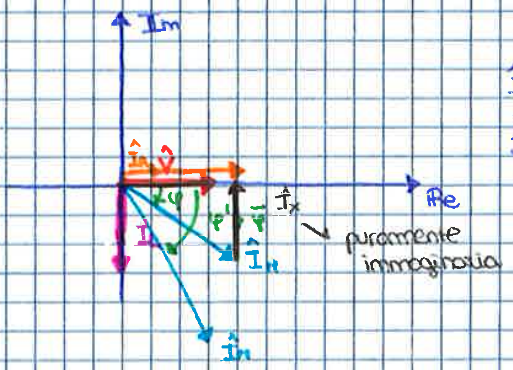
* considero sempre il motore:




$\hat{V} = \overline{V_{eff}}\sqrt{2}$

Poniamo la fase = 0

$$\hat{I}_M = \frac{\overline{V_{eff}}\sqrt{2}}{|Z|} e^{-j\varphi} = \frac{\overline{V_{eff}}\sqrt{2}}{|Z|} \cos\varphi - j \frac{\overline{V_{eff}}\sqrt{2}}{|Z|} \sin\varphi$$




$\hat{I}_R$, $\hat{I}_L$, stessa ampiezza,
la corrente non varia in modulo
$\hat{I}_M$ sarà + grande o più piccolo a seconda del valore di $\varphi$.

REGOLA
Un motore fatto di solo R ha la minima corrente $|I|_{min}$ (non esiste)
Il motore crea degli sprechi di energia, dispersa in forma di energia termica, nel momento in cui è collegato a una presa di corrente.

Posso ricevere max una corrente $\hat{I}_R$ ma il motore necessita di una corrente $\hat{I}_M$ per funzionare
Provo a ridurre la corrente $I_M$ alla sola parte reale.

KCL in k: $I_R = I_x + I_M$

(la tensione reale e corrente immaginaria)
Pongo un condensatore in parallelo attraversato da una corrente $\hat{I}_x$ che compensa la corrente $\hat{I}_M$ e permette di far funzionare il motore. Parliamo di CONDENSATORE DI RIFASAMENTO
(è già presente ad esempio negli elettrodomestici)

* la corrente $\hat{I}_x$ in modulo varrà:

$$|I_x| = |I_M| \sin\overline{\varphi} = \frac{2\overline{P}}{\sqrt{2}\,\overline{V_{eff}}\cos\varphi} \cdot \sin\overline{\varphi}$$

$$\hat{V} = \overline{V_{eff}}\sqrt{2}\, e^{j0} = \frac{1}{j\omega C}\hat{I}_x$$

consideriamone il modulo:

$$\overline{V_{eff}}\sqrt{2} = \frac{1}{\omega C}|I_x|$$

Avremo che:

$$C = \frac{|I_x|}{\omega \overline{V_{eff}}\sqrt{2}} = \frac{2\overline{P}\sin\varphi}{2\,\overline{V_{eff}}^2\,\omega\cos\varphi} \doteq \left[\frac{\overline{P}\cdot tg\overline{\varphi}}{\overline{V_{eff}}^2\,\overline{\omega}}\right]$$

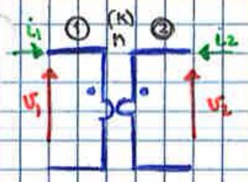
FORMULA PER IL CALCOLO DELLA CAPACITÀ DI RIFASAMENTO

$\tan\overline{\varphi} = \tan\angle\overline{Z} - \tan\varphi_m$

$\varphi_m$ = fase che si vuole raggiungere

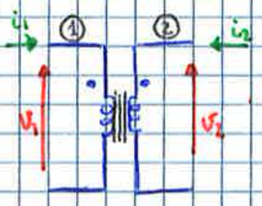
Parliamo di trasformatore ideale perché trasforma le tensioni e le correnti e nella dimostrazione si pone $\mu \to \infty$, per questo è ideale.

SIMBOLO




Il costruttore deve indicarmi il verso della corrente nelle due spire. (dove entra → puntino)

Altro simbolo:




*Dove valgono le relazioni:

$$\begin{cases} v_2 = n v_1 \\ i_2 = -\frac{1}{n} v_1 \end{cases}$$

Equazioni di funzionamento del trasformatore

Ora esaminiamo la potenza, per definizione si ha:

$p_1 = v_1 i_1$ ↓ potenza ass. dal primario

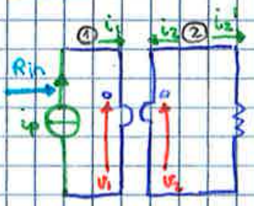
$p_2 = v_2 i_2$ ↓ potenza ass. dal secondario

Sfruttando la relazione tra le correnti:

$$p_2 = n v_1 \left(-\frac{1}{n} i_1\right) = -v_1 i_1 = -p_1$$

*$p_2$ genera la stessa potenza del primario (da cui viene assorbita). Infatti $p_2$ ha lo stesso valore di $p_1$ cambiato di segno. Naturalmente è un comportamento ideale.

**ESEMPIO**




Per calcolare la resistenza equivalente collego un generatore $i_p$ di prova all'avvolgimento primario.

È chiaro che $i_1 = i_p$

Posso scrivere la corrente $i_2$ come $i_2 = -\frac{1}{n} i_p$, dunque $i_2' = \frac{1}{n} i_p$ (cambiata di verso)

$i_2'$ va a finire in R e mi dà una tensione che è pari a $v_2$, dunque:

$v_2 = R i_2' = R/n \, i_p$

$v_1$ è pari a: $v_1 = v_2/n \to v_1 = \frac{R}{n^2} i_p$

La tensione equivalente dovrà essere $R_{in} = \frac{v_1}{i_p} \to \boxed{R_{eq} = \frac{R}{n^2}}$ RESISTENZA

REGOLA

La resistenza equivalente vista dall'avvolgimento primario è data dal rapporto tra la resistenza collegata all'avvolgimento secondario e il quadrato del rapporto spire. (se ho un circuito come quello considerato).

*In regime sinusoidale uso i fasori e avrò:

$$\begin{cases} \hat{V}_2 = n \hat{V}_1 \\ \hat{I}_2 = -\frac{1}{n} \hat{I}_1 \end{cases}$$

*Le relazioni tra tensioni e correnti si mantengono invariate

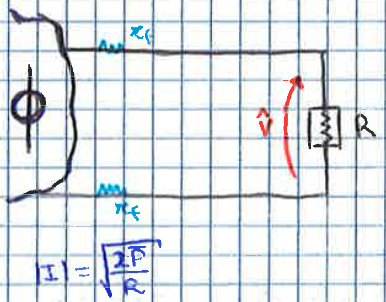
$$\hat{I} = \hat{I}_2 - n\hat{I}_2$$

$$\hat{E}_s = Z_s(\hat{I}_2 - m\hat{I}_2) + \frac{\hat{E}_T}{m}$$

KVL esterno:

$$\hat{E} = Z_S(\hat{I}_2 - m\hat{I}_2) + Z_K\hat{I}_2 + \hat{E}_T + Z_H\hat{I}_2$$

Da qui ricavo $\hat{I}_2 = \dfrac{\hat{E} - \hat{E}_T}{Z_S - nZ_S + Z_K + Z_H}$ e vado a sostituirla nell'espressione per calcolare $\hat{E}$



$\cos\varphi = 1$ (resistenza)

targa $\begin{cases} \bar{P} \\ \bar{P} \\ V_{eff} \end{cases}$

$$\bar{P} = \frac{1}{2}|V||I|\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,V_{eff} \cdot \frac{|V|}{R} = \frac{(\sqrt{2}\,V_{eff})^2}{R} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}|I|R|I| = \frac{R}{2}|I|^2$$

$$|I| = \sqrt{\frac{2\bar{P}}{R}}$$

- Poiché i due fili sono molto lunghi devo considerare che abbiamo una piccola resistenza

$\left[P_{d\ell} = \frac{1}{2}x_f|I|^2\right]$ → POTENZA COMPLESSIVA PERSA (generata dal gen. ma "persa x la strada")

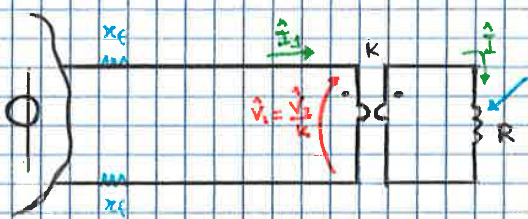
$$P_{dp} = \frac{x_f\,2}{R}\bar{P}$$

$[P_{gen} = \bar{P} + P_{d\ell}]$

$\begin{cases} R \approx \text{decina di } \Omega \\ x_f \approx 1/2\ \Omega \end{cases}$

* la potenza persa è pari al 10%, che viene prodotto in più. Questo non è possibile dunque x il trasporto dell'en. elettrica viene utilizzato un altro sistema

## TRASPORTO DI ENERGIA ELETTRICA



pot. assorbita nominale $\bar{P}$

$\hat{V}_2 = \sqrt{2}\,V_{eff}$

Dunque $|I| = \sqrt{\dfrac{2\bar{P}}{R}}$

$|\hat{I}_1| = K\hat{I}$

$$P_{d\ell} = 2\frac{1}{2}x_f|I_1|^2 = x_f|I_1|^2 = x_f(K\hat{I})^2 = x_f K^2\left(\sqrt{\frac{2\bar{P}}{R}}\right)^2 = \frac{x_f K^2 2\bar{P}}{R}$$

* con il trasformatore ho:

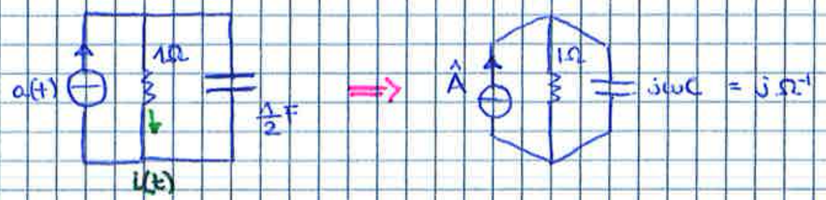
$$P_{d\ell} = \frac{x_f K 2}{R}\bar{P}$$

se prendo $K \ll 1$ il coeff. diventa molto piccolo e si riduce la percentuale di potenza persa, tutto dipende dal valore di $K$ scelto.

Alta tensione sulle linee di alimentazione

## ESERCIZIO

Calcolare la risposta stazionaria della corrente i(t)




$\hat{A} = 2e^{j\pi/2} = 2j\,A$

$G = 1\,\Omega^{-1}$

- Analisi del cto trasformato

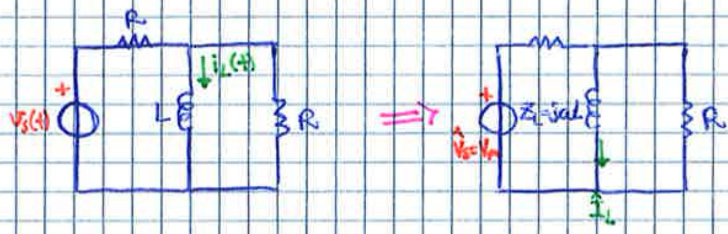
$$\hat{I} = \hat{A}\,\frac{G}{G+Y_c} = 2j\,\frac{1}{1+j}\ A$$

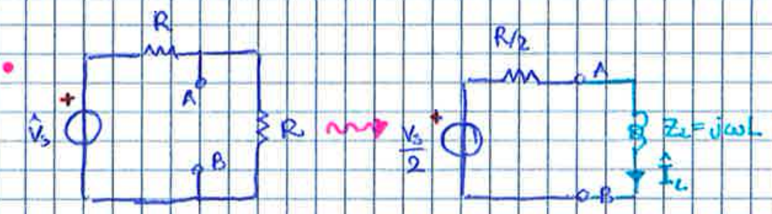
- Calcoliamo i(t)

$$\hat{I} = 2j\cdot\frac{1}{2}(1-j) = (j+1)\ A$$

$$i(t) = \cos(2t) - \sin(2t)\quad A,s$$

## ESERCIZIO 8.26




- 

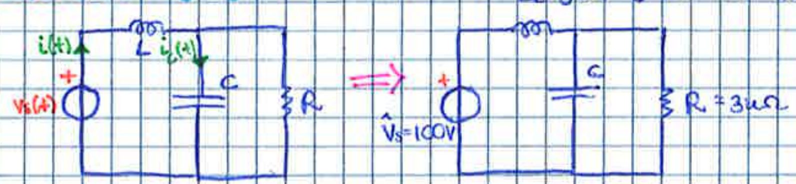

$$\hat{I}_L = \frac{V_m}{2}\,\frac{1}{R/2 + j\omega L}$$

- $$\hat{I}_L = \frac{V_m}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{4}+(\omega L)^2}}\,e^{-j\,\mathrm{arctg}\frac{\omega L 2}{R}}$$

$$i_L(t) = \frac{V_M}{2\sqrt{\ \ }}\cos(\omega t - \mathrm{arctg}(\ ))$$

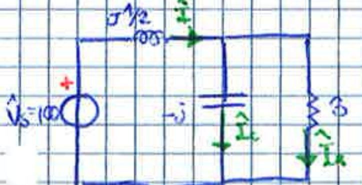
## ESERCIZIO 8.25

$Z_L = j\omega L = j\cdot 2\,10^3\cdot 250\,10^{-3} = j500\ \Omega$




$Y_c = j\omega C = j2\,10^3\,\frac{1}{2}\,10^{-6} = j\,10^{-3}\ \Omega^{-1}$

$Z_c = -j\,10^3\ \Omega$




- $Z = j\frac{1}{2} + \frac{-j3}{3-j}$

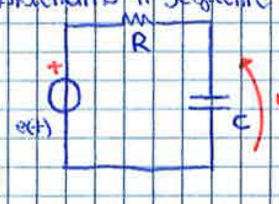
$\hat{I} = \frac{100}{Z}$

$\hat{I}_c = \hat{I}\cdot 3/_{3-j}$ $\quad \hat{I}_3 = \hat{I} - \hat{I}_c$

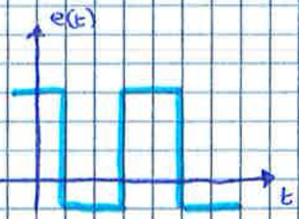
- $i_L(t)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 116

Consideriamo il seguente circuito

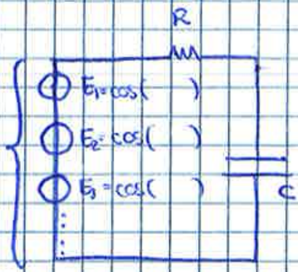



$v_u = v_u^{(1)}(t) + v_u^{(2)}(t) + \dots + v_u^{(N)}(t)$



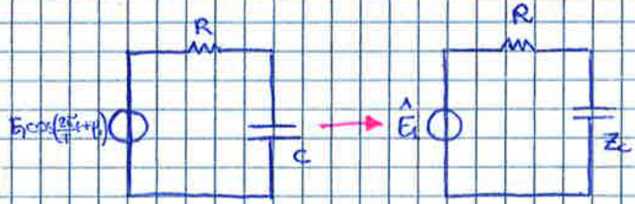

$\xRightarrow{F} \quad e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}t + \varphi_k\right) \approx \sum_{k=1}^{N}$

N




Applico la SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

- 1° contributo → generatore 1



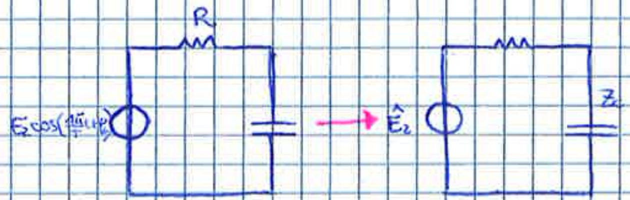

$\hat{E}_1 = E_1 e^{j\varphi_1}$

$Z_c = \frac{1}{j\omega C}$

$\left(\omega = 2\pi/T\right)$

$\hat{V}_u^{(1)} = \hat{E}_1 \frac{Z_c}{R+Z_c} = V_n^{(1)} e^{j\alpha_1} \longrightarrow v_u^{(1)}(t) = V_n^{(1)}\cos(\omega t + \alpha_1)$

- 2° contributo → generatore 2




$\hat{E}_2 = E_2 e^{j\varphi_2}$

$Z_c' = 1/j\omega C$

$\left(\omega = 2\cdot\frac{2\pi}{T}\right)$

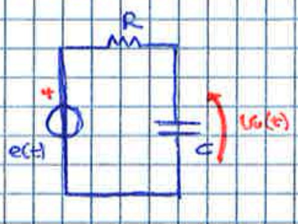
$\hat{V}_u^{(2)} = \hat{E}_2 \frac{Z_c'}{R+Z_c'} = V_n^{(2)} e^{j\alpha_2} \longrightarrow v_u^{(2)}(t) = V_n^{(2)}\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{T}t+\alpha_2\right)$

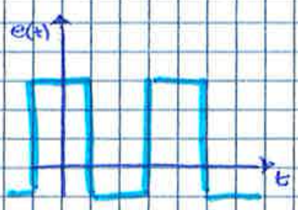
Proseguo fino ad arrivare al contributo N.

Si desume che $\hat{V}_n^{(k)} = \hat{E}_k \frac{Z_c|_{\omega_k}}{R+Z_c|_{\omega_k}} \longrightarrow \frac{\hat{V}_n^{(k)}}{\hat{E}_k} = \frac{Z_c}{R+Z_c}$

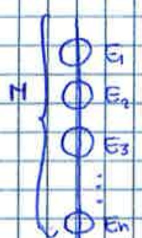
FUNZIONE DI TRASFERIMENTO H
dipende solo dal circuito
(ed è legata al valore di ω)
È sempre una quantità complessa
$H = |H|e^{j\measuredangle}$ forma polare

ESEMPIO

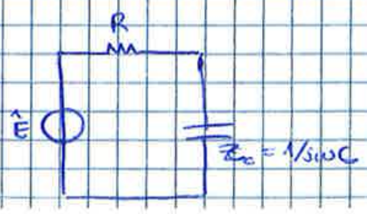


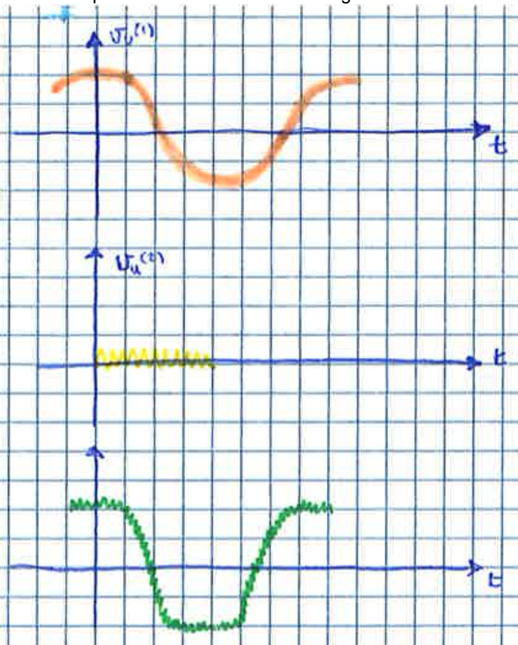




$\xRightarrow{F}$ N



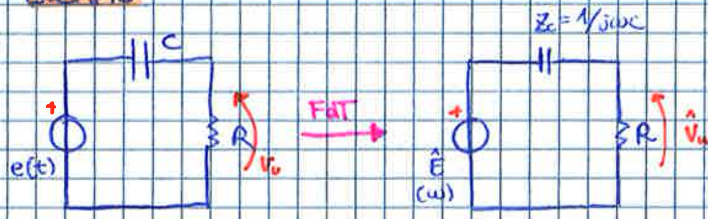

A noi è sufficiente risolvere un c.to per la funzione di trasferimento per un generico valore di ω. (lo tengo come parametro).






Sul ricevitore
$v_u^{(1)} + v_u^{(2)}$

**ESEMPIO**




$H = \frac{\hat{V}}{\hat{E}}$ $\qquad$ $\hat{V} = \hat{E}\left(\frac{R}{R+Z_c}\right) \rightarrow H$

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega CR}{j\omega CR + 1} \longrightarrow H(f) = \frac{j2\pi fCR}{j2\pi fCR+1}$$

poiché $\omega = 2\pi f$

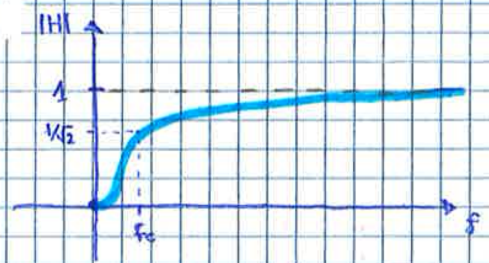
definisco $f_c = \frac{1}{2\pi CR}$

$$\rightarrow \left[ H(f) = \frac{jf}{jf + \frac{1}{2\pi CR}} = \frac{jf}{jf + f_c} = \frac{jf/f_c}{1 + jf/f_c} \right]$$

$$|H| = \frac{|jf/f_c|}{|1 + jf/f_c|} = \frac{f/f_c}{\sqrt{1 + (f/f_c)^2}}$$

$$\left[ \angle H = \angle jf/f_c - \angle 1+jf/f_c = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{f/f_c}{1}\right) \right]$$

Grafico:




**FILTRO PASSA-ALTO** fa passare solo le frequenze molto alte, tendenti a ∞.

* Aumentando il numero di elementi collegati in serie al generatore si fa in modo che la transizione tra i due valori limite sia molto rapida.

Vediamo ora il caso del FILTRO PASSA ALTO

$H = \frac{j f/f_c}{1+j f/f_c}$ per cui $|H| = \frac{f/f_c}{\sqrt{1+(f/f_c)^2}}$

Si ha:

$$|H|_{dB} = 20\log\frac{f/f_c}{\sqrt{1+(f/f_c)^2}} = 20\log(f/f_c) - 10\log(1+(f/f_c)^2)$$

- Studiamo il caso di $f \ll f_c$

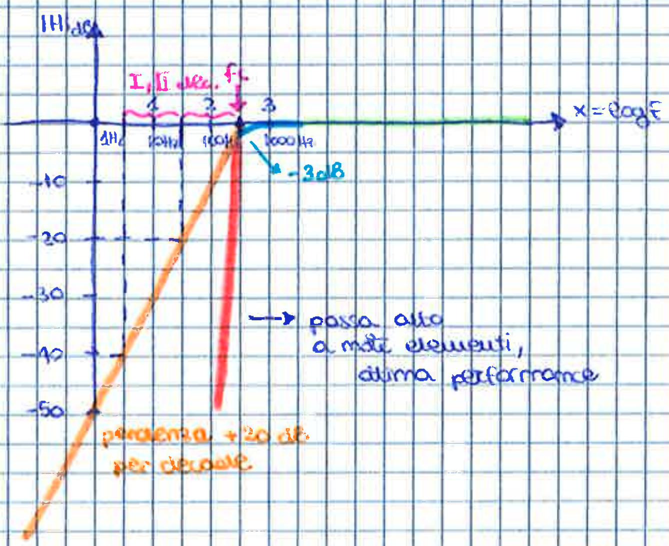
$$|H|_{dB} \simeq 20\underbrace{\log f}_{x} - 20\log f_c$$

→ ottengo l'equazione di una retta.

- Studiamo il caso $f \gg f_c$

$|H|_{dB} \simeq 0$

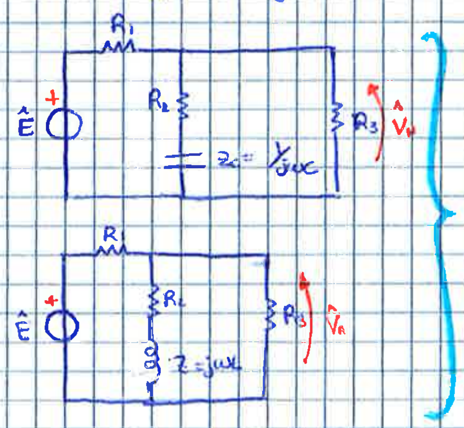
Tracciamo il grafico




Anche nel caso 2 approssimiamo il grafico a due semirette. Questa è la tipica curva del passa-alto

Le curve rappresentate in questo modo si chiamano diagrammi di Bode

Consideriamo il seguente circuito




$$H = \frac{\hat V_u}{\hat E} = a\,\frac{1+jf/f_z}{1+jf/f_p}$$

$$|H|_{dB} = 20\log|H| = 20\log a + 20\log\sqrt{1+(f/f_z)^2} - 20\log\sqrt{1+(f/f_p)^2}$$

- Supponiamo che $f_z \ll f_p$ → Ancora del tipo PASSA ALTO $(a<1)$

Se $f \ll f_z$ $\quad |H|_{dB} \simeq 20\log a$

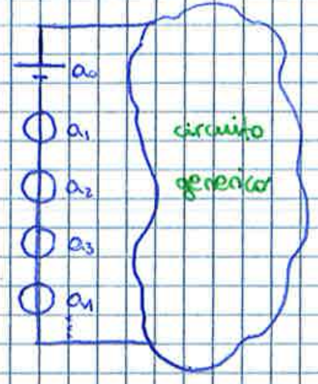
Se $f_z < f < f_p$ $\quad |H|_{dB} \simeq 20\log a + 20\log f/f_z = 20\log a + 20\underbrace{\log f}_{x} - 20\log f_z$

↳ equazione di una retta

Se $f > f_p$ $\quad |H|_{dB} \simeq 20\log a + 20\log f/f_z - 20\log f/f_p =$

$= 20\log a + 20\cancel{\log f} - 20\log f_z - 20\cancel{\log f} + 20\log f_p = 20\log a - 20\log f_z + 20\log f_p$

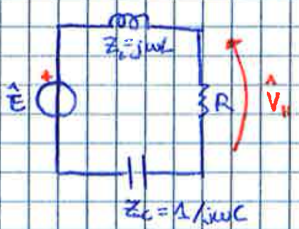
* Il caso più generale di una serie di Fourier è:




Applico sempre la sovrapposizione degli effetti ma considero anche il contributo della batteria, $a_0$, che è un generatore costante.

- Pertanto e induttore diventa un cortocircuito e il condensatore un circuito aperto.

* Supponiamo di avere un circuito del tipo:




$$H = \frac{\hat{V}_u}{\hat{E}}$$

$$Z_s = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j(\omega L - 1/\omega C)$$

Per avere parte immaginaria nulla, deve essere $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, pertanto $Z_s = R$
Esiste un solo valore di $\omega$ ($\omega_0$) che soddisfa tale condizione

$\left|\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}\right|$ Tale valore è detto pulsazione di risonanza del c.to

Avendo $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$, detta frequenza di risonanza

Posso scrivere $Z_s$ come:

$$Z_s = R\left[1 + j\left(\frac{\omega L C}{R C} - \frac{L}{L}\frac{1}{\omega C R}\right)\right] = R\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\underbrace{\omega_0^2 RC}_{\omega_0 RC\,\omega_0}} - \frac{\overbrace{\omega_0^2 L}^{\omega_0 L \omega_0}}{\omega R}\right)\right] = *$$

Confronto $\frac{1}{RC\omega_0}$ con $\frac{L\omega_0}{R}$

Risostituendo ottengo $\frac{\sqrt{LC}}{RC}$ e $\frac{L}{R\sqrt{LC}}$ $\longrightarrow$ $\frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$ e $\frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$, due termini uguali

Se pongo $Q_s = \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}}$ vado a sostituire

Dunque posso scrivere l'impedenza come:

$$* = R\left[1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}Q_s - \frac{\omega_0}{\omega}\frac{1}{Q_s}\right)\right] = R\left[1 + jQ_s\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]$$

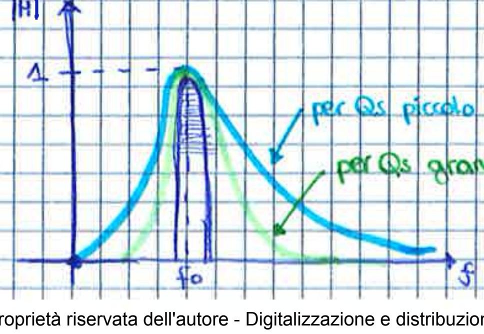
Tornando al circuito ho:

$$\hat{V}_u = \hat{E}\,\frac{R}{Z_s}$$

Pertanto $H = \frac{\hat{V}}{\hat{E}} = \frac{R}{Z_s} = \frac{1}{1 + jQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}$, ponendo $\omega = f$ e $\omega_0 = f_0$ si ha $|H|$:

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q_s^2\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2}}$$

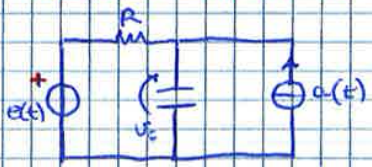
$$\angle H = \angle 1 - \operatorname{arctg}\frac{Q_s(f/f_0 - f_0/f)}{1} = -\operatorname{arctg} Q_s(f/f_0 - f_0/f)$$




Quando $Q_s$ è grande, solo in $f_0$ e nel suo intorno il modulo di H è vicino al valore 1, dunque la funzione trasferisce qualcosa solo per quell'intorno perché poi tende subito a 0.
Parliamo di filtro passa-banda
Il telefonino funziona tramite questo filtro così come la radio e la televisione.

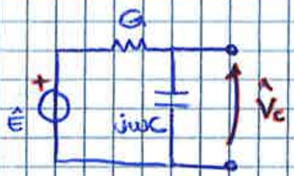
# ESERCITAZIONE 10-01-14

## FUNZIONI TRASFERIMENTO




$H(j\omega) \triangleq \frac{\hat{V}}{\hat{E}}$

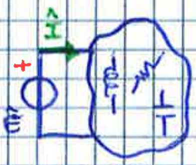
1) Circuito nel dominio dei fasori
- non si calcola $\hat{E}$
- si spegne a




2) Si risolve per l'uscita

$$\hat{V}_c = \underbrace{\frac{G}{G+j\omega C}}_{H(j\omega)} \hat{E}$$

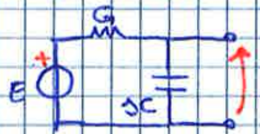
$$\hat{W} = H(j\omega)\,\hat{Q}$$




$H(j\omega) = \frac{\hat{I}}{\hat{E}} = Y(j\omega)$

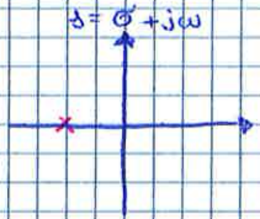
## RISPOSTE IN FREQUENZA

$[s = j\omega]$ otteniamo:



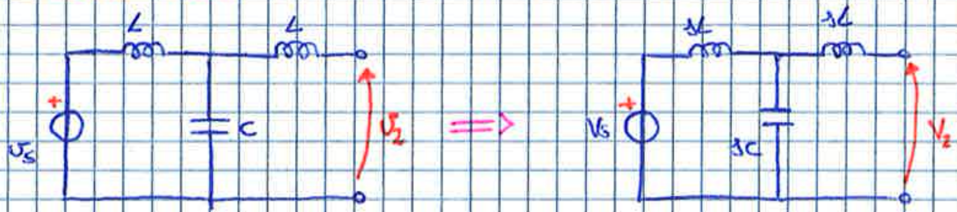

$$V_c = \underbrace{\frac{G}{G+sC}}_{H(s)} E$$

- Funzioni razionali reali
- Caratterizzate da poli, zeri




$G + sC = 0 \rightarrow s = -\frac{G}{C} = -\frac{1}{RC}$

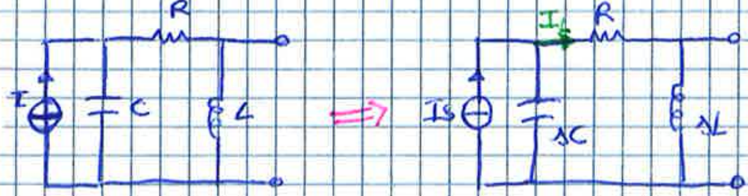
### ESERCIZIO 11.8




$$V_2 = V_s \frac{1/sC}{\frac{1}{sC} + sL}$$

$$H(s) = \frac{1}{s^2LC+1} \qquad s \rightarrow j\omega \qquad H(j\omega) = 1/(-\omega^2LC+1)$$

### ESERCIZIO 11.7




$$I_L = I_s \frac{1/sC}{\frac{1}{sC}+R+sL} = I_s \frac{1}{s^2LC+sRC+1}$$

$$V_2 = sL\,I_L = \underbrace{\frac{sL}{s^2LC+sRC+1}}_{H(s)} \cdot I_s$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega L}{-\omega^2LC+j\omega RC+1}$$

# Diagrammi del Modulo della Risposta in Frequenza

Secondo Bode

$y = \left(|H(j\omega)|\right)_{dB} = 20 \log_{10}\left(|H(j\omega)|\right)$

$x = \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

ES. Diagrammare secondo Bode il modulo della risp in fr. della funzione

$H(s) = \frac{s+1}{(s+10)(s+100)}$

zeri: $-1$
poli: $-10, -100$

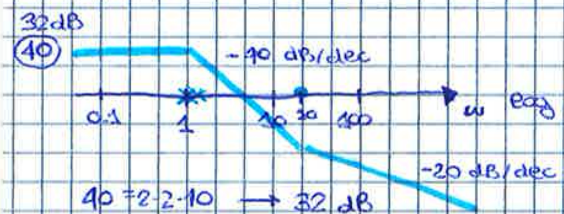
punti caratteristici
$\omega = 1$
$10, 100$


$\lim_{\omega \to 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \to 0} \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega+10||j\omega+100|} = \frac{1}{1000}$

EXEMPIO Draw the Bode mag. plot of $H(s) = -\frac{2(s+20)}{(s+1)^2}$

zeri: $-20$
poli: $-1, -1$

Punti caratteristici
$\omega = 20$ rad/sec
$\omega = 1, 1$



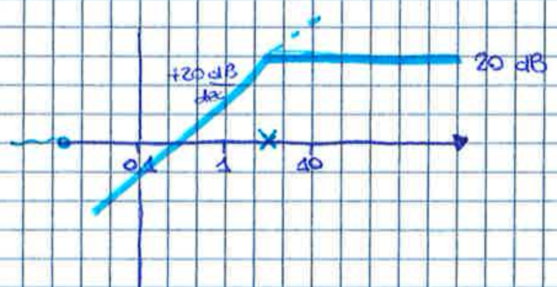

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 10 \longrightarrow 32\ dB$

$\uparrow$ 6dB $\uparrow$ 20 dB

EXEMPIO Draw the Bode mag. plot of $H(s) = \frac{10s}{(s+3)}$

zeri: $\varnothing$
poli: $-3$

Punti caratteristici
?
$\omega = 3$ rad/s



Quindi se si ha un filo conduttore, per quanto riguarda la corrente è sempre necessario specificare non solo il valore in modulo ma anche in verso.


Abbiamo due casi possibili

$$\begin{cases} i > 0 & \text{se le cariche vanno nel verso stabilito} \\ i < 0 & \text{se le cariche vanno nel verso opposto a quello stabilito} \end{cases}$$

Si tenga presente che

$$\xrightarrow{i} \;\equiv\; \xleftarrow{-i}$$

**Valore istantaneo della corrente elettrica**

Si ottiene considerando un intervallo $\Delta t \to 0$

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \boxed{\frac{dq}{dt}}$$

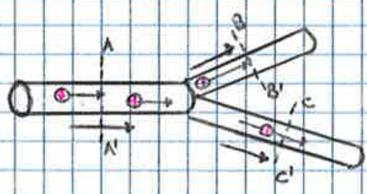
⇝ Possiamo definire la corrente istantanea come la derivata della quantità di carica rispetto al tempo.

Viceversa, volendo calcolare il valore della carica, ricorriamo all'operazione inversa

$$\left[ q = \int_{t_0}^{t} i \, dt' \right]$$

⇝ dunque la carica può essere definita come l'integrale della corrente elettrica rispetto al tempo

**Principio della conservazione delle cariche** (cariche, $\Delta t$)




In AA' misuro $\frac{\Delta q_A}{\Delta t} = i_A$

In BB' misuro $\frac{\Delta q_B}{\Delta t} = i_B$

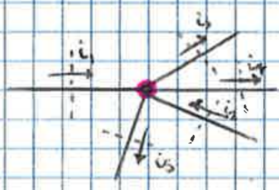
In CC' misuro $\frac{\Delta q_C}{\Delta t} = i_C$

$$\underbrace{\Delta q_A = \Delta q_B + \Delta q_C}_{\text{CONSERV. CARICHE}} \rightsquigarrow \frac{\Delta q_A}{\Delta t} = \frac{\Delta q_B + \Delta q_C}{\Delta t} \rightsquigarrow \boxed{i_A = i_B + i_C}$$

Legge delle correnti di Kirchhoff basata sulla conservazione delle cariche

Tale legge è chiamata anche **KCL** (Kirchhoff current law)

Più in generale essa può essere applicata se si ha un punto di saldatura di due o più conduttori, chiamato **nodo**

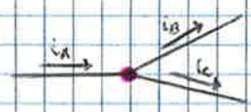


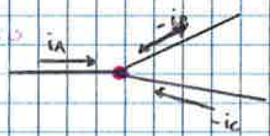

È convenzione che la freccia diretta verso il nodo indichi la direzione entrante.

- La quantità di corrente entrante deve essere uguale alla quantità di corrente uscente

$$\left[ \underbrace{i_1 + i_2}_{\text{entrante}} = \underbrace{i_3 + i_4 + i_5}_{\text{uscente}} \right]$$

$$i_A = i_B + i_C \rightsquigarrow i_A - i_B - i_C = 0 \rightsquigarrow \left[ i_A + (-i_B) + (-i_C) = 0 \right]$$

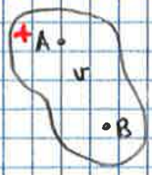


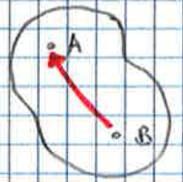

Si può dire anche che:

* la somma delle correnti con verso entrante nel nodo è posta a zero. (considerare correnti tutte con verso entrante, oppure tutte uscenti)

Metodi utilizzati




Segno + vicino al punto di partenza




Freccia orientata verso il punto iniziale

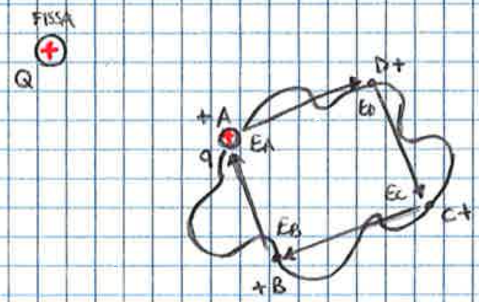
Un altro metodo è quello di indicare la tensione come $v_{AB}$, dove il primo termine (A) è il punto di partenza.

Anche qui abbiamo due casi possibili

$v>0$ se l'energia potenziale in A è maggiore dell'energia potenziale in B $(E_A > E_B)$

$v<0$ se l'energia potenziale in A è minore dell'energia potenziale in B $(E_A < E_B)$

Consideriamo ora il caso in cui la carica Q è fissa in un punto mentre l'altra carica, respinta, compie un percorso tale da tornare al punto di partenza.




| | | |
|---|---|---|
| Tensione | A → B | $v_{AB} = \frac{E_A - E_B}{q}$ |
| Tensione | B → C | $v_{BC} = \frac{E_B - E_C}{q}$ |
| Tensione | C → D | $v_{CD} = \frac{E_C - E_D}{q}$ |
| Tensione | D → A | $v_{DA} = \frac{E_D - E_A}{q}$ |

$$[v_{AB} + v_{BC} + v_{CD} + v_{DA}] = \frac{E_A - E_B}{q} + \frac{E_B - E_C}{q} + \frac{E_C - E_D}{q} + \frac{E_D - E_A}{q} = 0$$

→ Legge delle tensioni di Kirchhoff (KVL)

- La somma delle tensioni parziali su un percorso chiuso deve essere uguale a zero

$\sum_q v_q = 0$ Sempre scegliendo come primo termine il punto di partenza, in accordo con il senso di rotazione.

→ KVL I forma

KVL II forma $\sum_n v_n = \sum_m v_m$

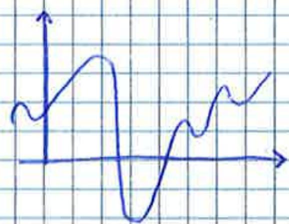
$\sum_n v_n$: tensioni in senso orario sul percorso

$\sum_m v_m$: tensioni in senso antiorario

VARIABILI

Simboli minuscoli: grandezze che variano nel tempo

ESEMPIO $i(t)$ $v(t)$



Simboli maiuscoli → variabili costanti nel tempo

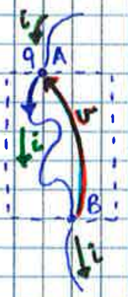
→ quantità complesse

KCL $\underset{\text{uscente}}{i_A} = \underset{\text{entrante}}{i_B}$

* Si ha che ogni bipolo è attraversato da una sola corrente

**Tripolo** ~ elemento elettrico con tre terminali (qui non c'è alcuna semplificazione)


* Se in un bipolo scelgo A come punto di partenza, esso è rappresentato chiaramente da una sola tensione



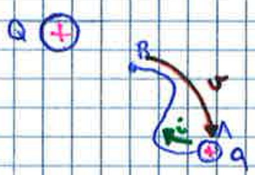
$p = vi$

In questo tipo di sistema corrente e tensione sono positive, di conseguenza anche la potenza è positiva e questo è il caso in cui l'energia elettrica è utilizzata per fare qualcosa. Parliamo di **bipolo utilizzatore (o bipolo carico)**

↳ principalmente convertita in movimento (energia cinetica) **ENERGIA ASSORBITA**

**Convenzione coordinata di tensione e corrente (o convenzione degli utilizzatori)**
Freccia della tensione che punta su un terminale e corrente che entra dallo stesso terminale (da utilizzare sempre)

* Essa fa sì che se la potenza è positiva, l'elemento è realmente un utilizzatore.



Stavolta il movimento da A a B non è spontaneo (stesso segno, dovrebbe allontanarsi). Dunque la sposto io in B e utilizzo dell'energia per dare movimento alla carica, le fornisco energia per cui avrò $E_B > E_A$

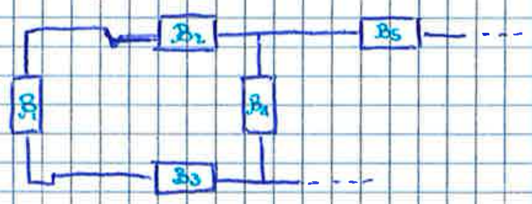
1° conseguenza → la tensione sarà negativa $v = \frac{E_A - E_B}{q} < 0$

2° conseguenza → se $i > 0$ e $v < 0$, allora $p < 0$

Questo è il caso di un **bipolo generatore** (ESEMPIO - dinamo della bicicletta)
- batteria

**ENERGIA EROGATA**

Sappiamo che anche in un sistema elettrico isolato energia e potenza si conservano → **conservazione dell'energia**, basta considerare un intero sistema el. x considerarlo isolato



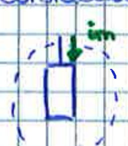
Su qualsiasi sistema elettrico isolato abbiamo:

$\boxed{\sum_k p_k = 0}$ **Teorema di Tellegen**

* la somma delle potenze dei singoli el. elettrici deve essere pari a zero.

- Dobbiamo avere per forza sia utilizzatori che almeno un generatore, altrimenti il bilancio delle potenze non si può fare, non sarebbe nullo.

Consideriamo il caso di un elemento con un solo terminale, parliamo di **monopolo**



KCL: $i_m = 0$

* Qualsiasi elemento elettrico che abbia un solo terminale ha corrente $i = 0$

1° conseguenza → anche la potenza è zero

Dal punto di vista elettrico non ha alcun interesse. ("paradosso")

Se prendo il percorso chiuso seguente

① → $B_5$ → ③ → $B_1$ → ② → $B_1$ → ①

$\underbrace{v_5 + v_1}_{\text{orario}} = \underbrace{v_1}_{\text{antiorario}}$

Provo a combinare questa equazione con l'eq. 1°+3° ottengo $\boxed{v_2 + v_3 + v_1 = 0}$

* Combinando l'eq del percorso chiuso esterno con un'eq. di maglia ottengo un'equazione dipendente

**REGOLA** ~ Un circuito con N nodi e ℓ rami ha un numero di equazioni KVL indipendenti uguale al numero di maglie M (esclusa la maglia esterna)

Ottengo 2 KCL e 3 KVL, in tutto 5 equazioni; ma le incognite sono 10 dunque non sono ancora in grado di risolvere il circuito.

# DEFINIZIONE DEI BIPOLI

- Generatore ideale di tensione

Il ⊕ indica il polo dal quale partono le cariche (indicatore di segno x la tensione)
Definisco tensione e corrente

**Equazione di funzionamento dell'elemento (o equazione caratteristica)**

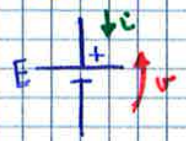
$[v = e]$
↓
fornita dal costruttore come il +

La tensione che c'è sul bipolo è uguale alla tensione data dal costruttore. Essa non è necessariamente un numero, ma può essere anche una funzione del tempo

* È detto ideale perché il valore della corrente non è importante, il bipolo funziona indipendentemente dai i. $\forall i$

Caso semplificato → e costante nel tempo ~ E

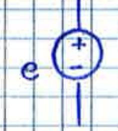
BATTERIA → diversa rappresentazione con E



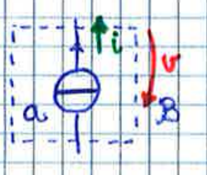
Equazione → $[v = E]$, $\forall i$

**N.B.** Simbolo circolare → generatore

Simbolo alternativo



- Generatore ideale di corrente



La freccia indica il verso della corrente (data dal costruttore)

**Equazione di funzionamento dell'elemento**

$[i = a]$ $\forall v$
↓
fornita dal costr.

La corrente i è uguale ad a, fornita dal costruttore. Anch'essa può essere un numero o una funzione. * Qui il funzionamento non dipende dalla tensione, il suo valore è irrilevante

Caso semplificato → a costante nel tempo A

CARICABATTERIA ~ oggetto + vicino a un gen. di corrente (non abbiamo veri esempi nella realtà)

$$\left[G = \frac{i}{v}\right]$$

Unità di misura

$[G] = \frac{A}{V}$ - siemens, S

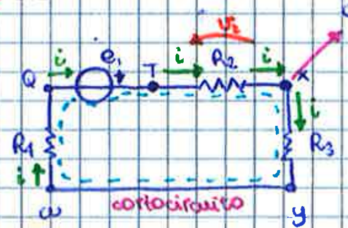
La potenza (sempre assorbita) risulta essere

$[p = vi = Gv^2]$, sapendo che $i = Gv$

↳ $G > 0$, ed è perché deriva da $1/R$ e $R$ a sua volta è $> 0$

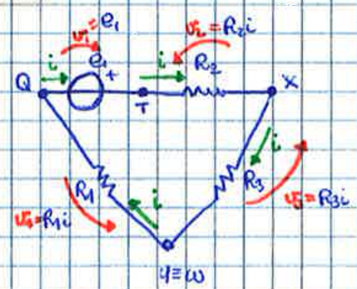
Se $G = 0 \Rightarrow i = 0$, $\forall v$ non passa corrente circuito aperto 

**Circuito:**




connessione tra bipolo 2 e bipolo 3 (NODO) → possiamo applicare la KCL

È un circuito con un'unica maglia KVL

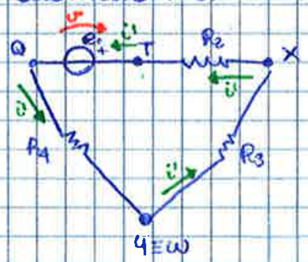


Il cortocircuito è solamente un artificio grafico, può essere eliminato.

*Nel caso del generatore non è importante che $v$ e $i$ non rispettino la convenzione degli utilizzatori perché sappiamo che per il generatore di tensione il valore della corrente è irrilevante.

*Bipoli collegati in modo da essere attraversati dalla stessa corrente, si dice che sono collegati in serie

Osserviamo lo stesso circuito stavolta partendo dal generatore



Cambiando direzione cambiano anche i segni, quindi darò avere

$i' = -i$

Applico la KVL:

$v_1 = v_2 + v_3 + v_4 \longrightarrow e_1 = R_2 i + R_3 i + R_4 i$, l'unica incognita è $i \longrightarrow i = \frac{e_1}{R_2 + R_3 + R_4}$

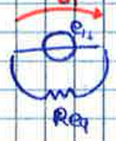
$$v_1 = \underbrace{(R_2 + R_3 + R_4)}_{\text{coeff. di prop.}\ R_{eq}} i$$

↓

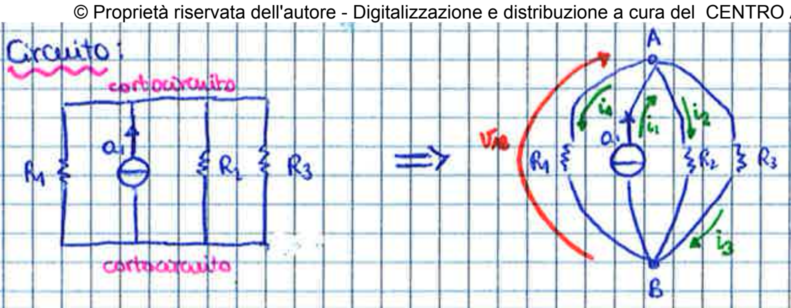
eq. di un resistore

- la tensione $v_1$ del generatore è proporzionale alla corrente $i$ che attraversa il circuito

Possiamo scrivere semplicemente



Circuito:




$i_1 = G_1 v_{AB}$ $\quad (G_1 = 1/R_1)$

$i_1 = a_1$

$i_2 = G_2 v_{AB}$ $\quad (G_2 = 1/R_2)$

$i_3 = G_3 v_{AB}$ $\quad (G_3 = 1/R_3)$

* Un circuito con tutti i bipoli collegati fra gli stessi due punti, cioè con la stessa tensione su tutti i bipoli, si dice collegato in parallelo (//)

Applico la KCL al nodo A:

$$i_1 = i_1 + i_2 + i_3 \longrightarrow a_1 = G_1 v_{AB} + G_2 v_{AB} + G_3 v_{AB} \longrightarrow a_1 = \underbrace{(G_1 + G_2 + G_3)}_{\text{conduttanza equiv. } G_{eq}} v_{AB}$$

Regola (circuito // — condizione di applicabilità)

Su un circuito // posso ricavarmi una conduttanza equivalente data dalla somma delle singole conduttanze, che equivale a dire che la resistenza eq. inversa di + resistori in // è data dalla somma dei reciproci delle singole resistenze.

$$\left[G_{eq} = \Sigma_k G_k = \Sigma_k \frac{1}{R_k}\right]$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \longrightarrow R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Caso particolare: Solo due resistori in parallelo posso trovare il resistore equivalente moltiplicandoli e poi dividendolo x la somma

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2} \rightsquigarrow \left[R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right]$$

Ricavo ora gli altri risultati:

- $v_{AB} = \frac{a_1}{G_{eq}}$
- $i_1 = G_1 v_{AB} = G_1 \frac{a_1}{G_{eq}} = a_1 \frac{G_1}{G_{eq}}$
- $i_2 = G_2 v_{AB} = a_1 \frac{G_2}{G_{eq}}$

Regola (circuito // con un generatore di corrente)

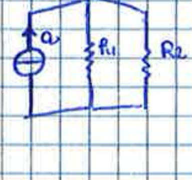
In questo caso la corrente in ognuno dei resistori è uguale a

$$\left[i_k = a \frac{G_k}{\underset{G_k + G_J}{\underset{\shortparallel}{G_{eq}}}}\right] \quad \text{oppure} \quad \left[i_k = a \frac{R_J}{\underset{R_k + R_J}{\underset{\shortparallel}{R_{eq}}}}\right]$$

Parliamo di regola del partitore di corrente

corrente di verso opposto rispetto al generatore di corrente

Caso particolare: partitore di corrente su due soli resistori

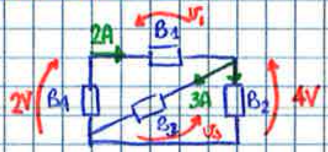



$$\begin{cases} i_1 = a \dfrac{1/R_1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = a \dfrac{1/R_1}{\frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}} = a \dfrac{1}{\cancel{R_1}} \dfrac{\cancel{R_1} R_2}{R_1 + R_2} \\[2ex] i_2 = a \dfrac{1/R_2}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}} = a \dfrac{1/R_2}{\frac{R_1 + R_2}{R_2 R_1}} = a \dfrac{1}{\cancel{R_2}} \dfrac{\cancel{R_2} R_1}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

G-B-A-G

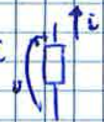
$-4 - v_1 - v_3 = 0 \longrightarrow v_3 = 2V$

## ESERCIZIO 1.7




- Potenza fornita ad ogni elemento (assorbita) → utilizzatore
- Potenza fornita da ogni elemento (erogata)

$p^a = vi$  (U)

$p^e = vi$  (G)

$\left[p^a = -p^e\right]$

KVL: $v_3 - 4 = 0 \Rightarrow v_3 = 4V$

KVL: $v_3 + v_4 - 2 = 0 \Rightarrow v_4 = -2V$

KCL: $i_2 = 2 - 3 = -1A$

$p_1^a = 2 \cdot (-2) = -4W$

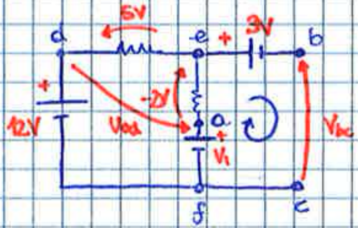
$p_2^a = 4 \cdot (-1) = -4W$

$p_3^a = 3 \cdot 4 = 12\,W$ ~ unico utilizzatore ($p^a$ positiva) gli altri sono generatori

$p_4^a = -(2)(2) = -4W$

Notiamo che la somma delle potenze del circuito è pari a zero, essendo esso un sistema isolato, non avvengono scambi di energia con l'esterno ed essa si mantiene costante

## ESERCIZIO 2.3




$V_1$, $V_{ad}$, $V_{bc}$ ?

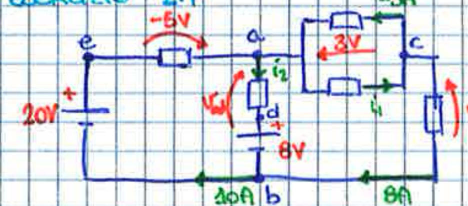
KVL: $12 - 5 - (-2) - V_1 = 0 \Longrightarrow V_1 = 9V$

KVL: $-5 - (-2) - V_{ad} = 0 \Longrightarrow V_{ad} = -3V$ (percorso sup.)

$V_{ad} - V_1 + 12 = 0 \Longrightarrow V_{ad} = -3V$ (percorso inf)

KVL: $V_{bc} = V_1 + (-2) - 3 = 4V$

## ESERCIZIO 2.4




$i_1 = -3 + 8 = 5A$

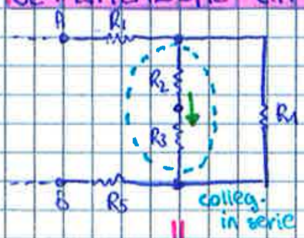
$i_2 = 10 - 8 = 2A$

KVL: $20 + (-5) - V_{ad} - 8 = 0 \Longrightarrow V_{ad} = 7V$

KVL: $20 + (-5) - 3 - V_x = 0 \Longrightarrow V_x = 12V$

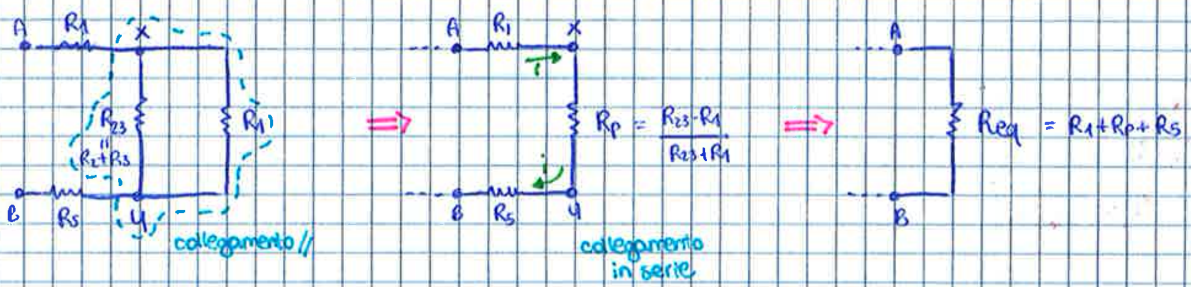
(R) $V_x = -3 + V_{ad} + 8 = 12V$

## SEMPLIFICAZIONE C.TI CON GLI EQUIVALENTI

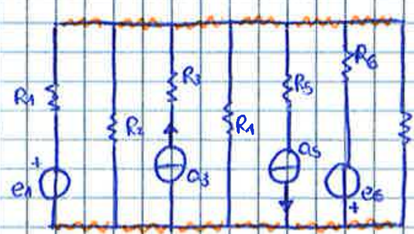


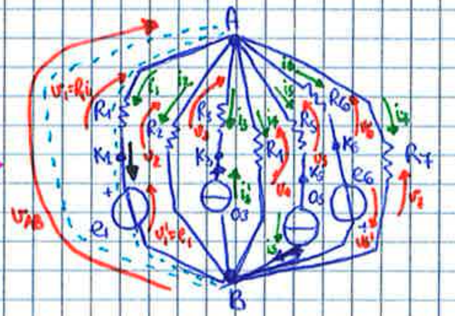

Abbiamo resistori collegati in modo diverso (sia in // che in serie)
In questi casi semplifichiamo per gradi

È sempre consigliato partire dai punti + lontani possibile dal punto di partenza




### ESEMPIO




È una struttura mista serie e //

- Ramo 3 = la KCL dice che la corrente entrante in un nodo deve essere = a quella uscente
$i_3' + i_3 = 0 \rightarrow i_3 = -a_3$
$a_3$ sono vincolata

- Ramo 5 : $i_5 = a_5$

- Applico il **KVL** sul percorso chiuso da A a B e viceversa (Ramo 1)
$(A \rightarrow R_1 \rightarrow e_1 \rightarrow B \rightarrow A)$
$v_{AB} = v_1 + v_1' = R_1 i_1 + e_1$

- Applico il **KVL** su percorso chiuso (Ramo 2)
$v_{AB} = v_2 = R_2 i_2$

- Non posso scrivere un equazione sul Ramo 3 perché non ho una relazione tra corrente e tensione nel gen.

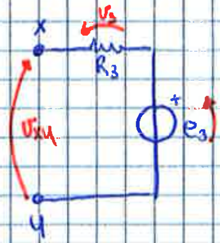
- Applico la **KVL** su percorso chiuso (Ramo 4)
$v_{AB} = v_4 = R_4 i_4$

- Salto anche il Ramo 5

- Applico la **KVL** su percorso chiuso (Ramo 6)
$v_{AB} + v_6' = v_6 \rightarrow v_{AB} + e_6 = R_6 i_6$

- Applico la **KVL** su percorso chiuso (Ramo 7)
$v_{AB} = v_7 = R_7 i_7$

Consideriamo lo stesso circuito supponendo però di dover trovare la tensione $v_3$

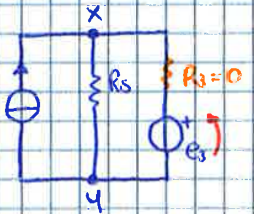



• Applico la KVL nel percorso chiuso

$$v_{xy} = v_3 + e_3 \longrightarrow v_3 = v_{xy} - e_3$$

ottenuto con Millman thm

**ESEMPIO**

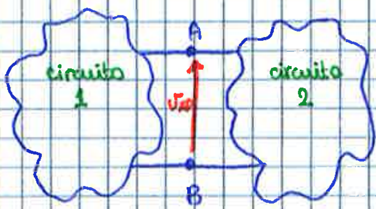



$v_{xy} = e_3$ (tensione dell'unico gen di tensione presente)

↳ essendo collegato in // impone la sua tensione anche agli altri rami.

*Il generatore di corrente domina sempre sugli altri elementi collegati ad esso in serie, impone sempre la sua corrente e annulla l'effetto degli altri. (per questo con Millman non si considerano le resistenze ad essi collegate)

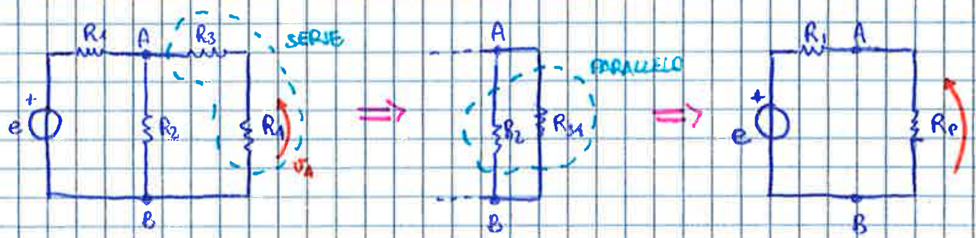
Consideriamo un generico circuito costituito da due parti principali:




*Nel momento in cui ho una tensione nota ($v_{AB}$) posso sostituirla con un generatore di tensione concorde a $v_{AB}$ avente la stessa tensione.

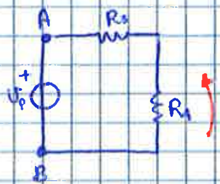
Parliamo in questo caso di principio di sostituzione!

**ESEMPIO**



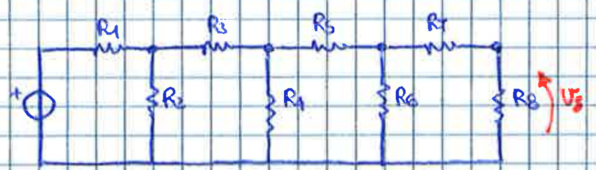

$$v_p = e\frac{R_p}{R_1+R_p}$$

Regola del partitore di tensione




$$v_4 = v_p \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4}$$

Applico di nuovo la regola del partitore - è come se avessi un generatore indipendente di tensione $v_p$




Rete a scala

Applico lo stesso sistema usato nell'esempio precedente.

Ci serviamo delle prime due equazioni

$$\begin{cases} i_1 = G_b v_b + G_c v_c \longrightarrow i_1 = G_b v_b + G_c(v_b - v_a) \\ i_2 = G_a v_a - G_c v_c \longrightarrow i_2 = G_a v_a - G_c(v_b - v_a) \end{cases}$$

Sul perimetro del triangolo applichiamo il KVL

$$v_a + v_c = v_b \longrightarrow v_c = v_b - v_a$$

$$\begin{cases} i_1 = v_b(G_b + G_c) + v_a(-G_c) \\ i_2 = v_b(-G_c) + v_a(G_a + G_c) \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b + G_c & -G_c \\ -G_c & G_a + G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_b \\ v_a \end{bmatrix} \begin{matrix} v_{13} \\ v_{23} \end{matrix}$$

Forma matriciale

Osserviamo le due equazioni matriciali ottenute

$$\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$ Stella (Y)

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b + G_c & -G_c \\ -G_c & G_a + G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix}$$ Triangolo (Δ)

- Per inversione passo da una equazione all'altra (ottenuta dalla 2°)

$$\begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b + G_c & -G_c \\ -G_c & G_a + G_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

- Confronto quest'ultima eq. con eq 1°, esse sono equivalenti se:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_3 & R_3 \\ R_3 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_b G_c & -G_c \\ -G_c & G_a + G_c \end{bmatrix}^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\det[\,]} \begin{bmatrix} G_a + G_c & G_c \\ G_c & G_b + G_c \end{bmatrix} = \frac{1}{(G_b + G_c)(G_a + G_c) - G_c^2} \begin{bmatrix} G_a + G_c & G_c \\ G_c & G_b + G_c \end{bmatrix}$$

- Procedo ora eguagliando i termini

Termini 1,1 : $R_1 + R_3 = \dfrac{G_a + G_c}{\underbrace{G_a G_b + G_b G_c + G_a G_c}_{\text{det. ridotto}}}$

Termini 1,2 : $\boxed{R_3 = \dfrac{G_c}{G_a G_b + G_b G_c + G_a G_c}}$ ⟶ abbiamo $R_3$ in funzione di tutte le conduttanze

Termini 2,1 : // // // (come 1,2)

Termini 2,2 : $R_2 + R_3 = \dfrac{G_b + G_c}{G_a G_b + G_b G_c + G_a G_c}$

- Calcoliamo $R_1$:

$$R_1 = \frac{G_a + G_c}{G_a G_b + G_b G_c + G_a G_c} - R_3 \longrightarrow R_1 = \frac{G_a + \cancel{G_c} - \cancel{G_c}}{G_a G_b + G_b G_c + G_c G_a} = \boxed{\frac{G_a}{G_a G_b + G_b G_c + G_c G_a}} \longrightarrow G_a$$

$G_a$ = conduttanza opposta al nodo 1 nel triangolo

- Calcoliamo $R_2$:

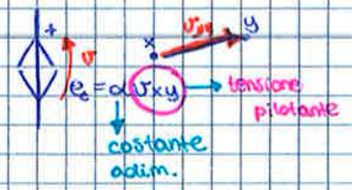
$$R_2 = \frac{G_b + G_c}{G_a G_b + G_c G_b + G_c G_a} - R_3 \longrightarrow R_2 = \frac{G_b + \cancel{G_c} - \cancel{G_c}}{G_a G_b + G_c G_b + G_c G_a} = \boxed{\frac{G_b}{G_a G_b + G_b G_c + G_c G_a}} \longrightarrow G_b$$

$G_b$ = conduttanza opposta al nodo 2 nel triangolo

# Generatori controllati (pilotati)

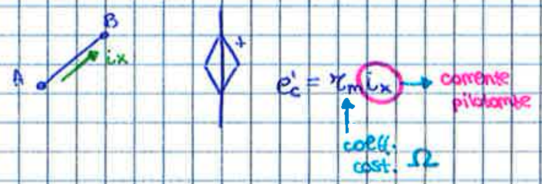
Sono dei generatori che producono una tensione o una corrente ma in maniera controllata da qualche altro elemento nel circuito. Sono anche chiamati generatori **dipendenti**, in contrapposizione ai gen. ideali che sono anche definiti **indipendenti**

**Generatori controllati di tensione** (o da una tensione che si trova in un altro punto del circuito...



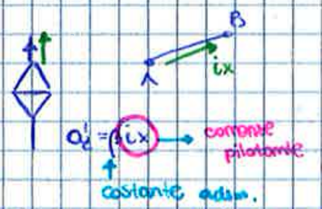

Equazione di funzionamento $[v = e_c]$

... oppure da una corrente che si muove nel circuito)



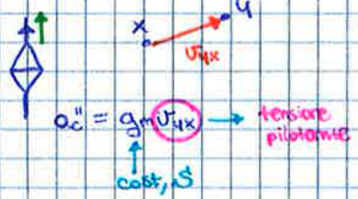

Equazione di funzionamento $[v = e_c']$

**Generatori controllati di corrente** (o da una corrente che si trova nel circuito...



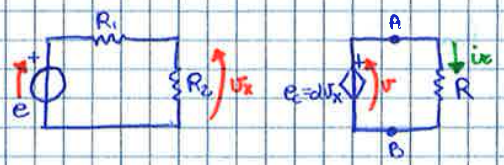

Equazione di funzionamento $[i = a_c']$

... oppure da una tensione tra due punti del circuito)




Equazione di funzionamento $[i = a_c'']$

**ESEMPIO** - Abbiamo due diversi circuiti




$v_x = e \frac{R_2}{R_1+R_2}$ (regola del partitore)

$e_c = \alpha e \frac{R_2}{R_1+R_2}$

$\leadsto i_R = \frac{v}{R} = \frac{e_c}{R} = \left| \alpha e \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1}{R} \right|$

* Abbiamo seguito queste fasi:

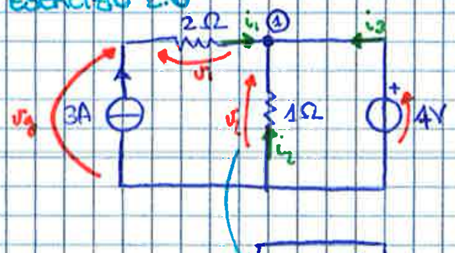
1) Trovare la quantità pilotante *
2) Il generatore pilotato diventa indipendente
3) Trovare l'incognita richiesta

Regola (metodo di soluzione di circuiti con generatori pilotati)

* { gen. dipendente come se fosse indipendente
soluzione

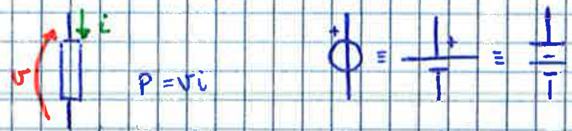
# ESERCITAZIONE 16-10-13

## ESERCIZIO 2.6




$\boxed{v_2 = -R_2 i_2}$

Potenza fornita ai bipoli ≡ potenza assorbita




Applico le KVL:

1° maglia $\quad v_g - v_1 - v_2 = 0 \longrightarrow$ $v_1 = 2 i_1$

2° maglia $\quad v_2 - 4V = 0 \longrightarrow$ $v_2 = -1 \cdot i_2$

Applico la KCL al nodo 1

$i_1 + i_2 + i_3 = 0$

otteniamo:

$v_2 = 4V$

$i_1 = 3A$

$v_1 = 6V$

$i_2 = -4A$

$v_g = v_1 + v_2 = 10\,V$

$i_3 = -i_1 - i_2 = 1A$

- Calcolo potenza assorbita

$P^a_{3A} = -3 \cdot v_g = -3 \cdot 10 = -30\,W$

$P^a_{2\Omega} = v_1 \cdot i_1 = 6 \cdot 3 = 18\,W$

$P^a_{1\Omega} = -v_2 i_2 = -4 \cdot (-4) = 16\,W$

$P^a_{4V} = -4 \cdot 1 = -4\,W$

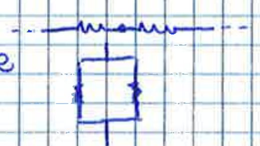
$P^a_{1\Omega} = -v_2 i_2 = R_2 i_2^2 = \frac{v_2^2}{R_2}$

$\boxed{v_2 = -R_2 i_2}$

* La somma di tutte le potenze è pari a zero

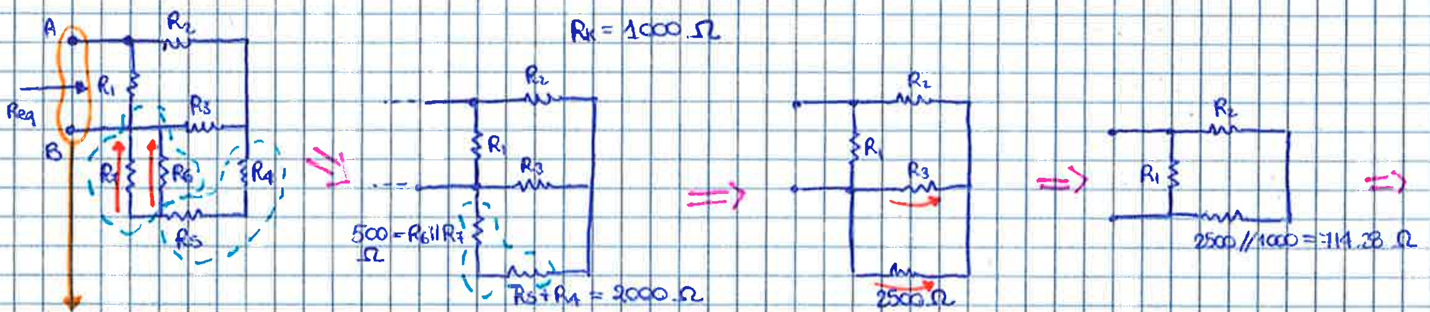
$[\Sigma P_n^a = 0]$ Teorema di Tellegen

Resistori in serie : stessa corrente
Resistori in parallelo : stessa tensione

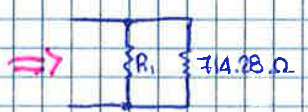


## ESERCIZIO 2.8

$R_K = 1000\,\Omega$



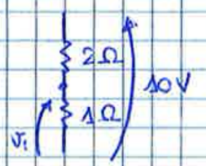

da non considerare aperti! $R_1$ e $R_2$ non sono dunque in serie




$\rightsquigarrow R_{eq} = 1000 // 714.28 = 684,58\,\Omega$

## ESERCIZIO 2.15


$v_{AB}$?




$v_1 = \frac{1}{1+2} \cdot 10 = \frac{10}{3}$

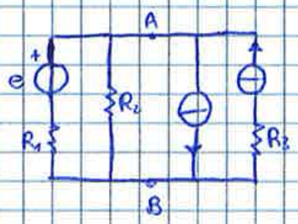
$v_2 = \frac{2}{1+2} \cdot 10 = \frac{20}{3}$

Applico la KVL:

$v_{AB} = v_1 - v_2 = \frac{10}{3} - \frac{20}{3} = -\frac{10}{3}\ V$

Rami posti in parallelo costituiti da:
- gen. tensione con serie resistori non nulli
- gen. corrente con in serie resistori
- resistori

## ESERCIZIO 2.17




$R_1 = \frac{1}{2}\ \Omega$

$R_2 = \frac{1}{3}\ \Omega$

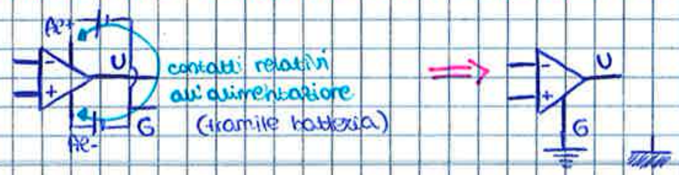
$R_3 = 1\ \Omega$

$i_1 = 7A$

$i_2 = 2A$

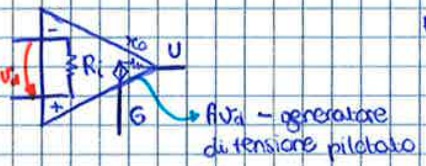
$e = 10\ V$

# Comportamento di un sistema elettronico integrato: Amplificatore Operazionale (OP AMP)



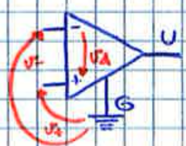

È un elemento a 4 terminali, dunque un quadripolo

Facendo un'analisi interna più dettagliata:




$R_i$ = valore di resistenza molto grande ($> 10^5\ \Omega$)

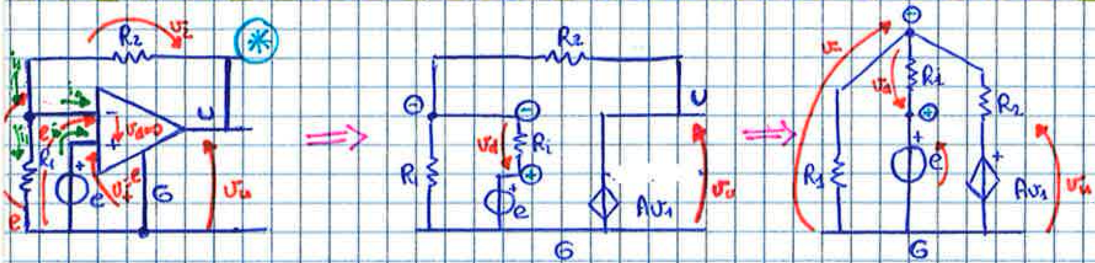
$A$ ~ coefficiente molto grande ($> 10^5$)
$r_o$ ~ resistenza molto piccola, trascurabile ($r_o \sim \Omega$)




Applico il KVL sul percorso chiuso $G \to \ominus \to \oplus \to G$:

$v_- + v_d = v_+ \longrightarrow \boxed{v_d = v_+ - v_-}$ differenza tra la tensione del terminale + e quella del terminale –

$v_d$ = tensione differenziale




Risolvo il circuito con generatore pilotato

1) Trovare la quantità pilotante ($v_d$)

Applico Millman per trovare $v_-$

$$v_- = \frac{\frac{e}{R_i} + \frac{Av_d}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2}} = \frac{eG_i + Av_dG_2}{G_1 + G_i + G_2}$$

Percorso chiuso $G \to \ominus \to \oplus \to G$

$$v_- + v_d = e \longrightarrow v_d = e - v_- \longrightarrow v_d = e - \frac{eG_i + Av_dG_2}{G_1 + G_i + G_2} \longrightarrow v_d(G_1 + G_i + G_2) = e(G_1 + G_i + G_2) - eG_i - Av_dG_2$$

$$v_d(G_1 + G_i + G_2 + AG_2) = e(G_1 + G_2) \longrightarrow v_d = \frac{e(G_1 + G_2)}{G_1 + G_i + G_2(1 + A)}$$

3) Trovare l'incognita

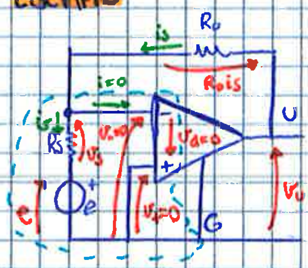
$$v_u = Av_d = \frac{A\,e(G_1 + G_2)}{G_1 + \underbrace{G_i}_{0} + G_2(1 + A)}$$

Sappiamo che $G_i = \frac{1}{R_i} \to 0$, A è molto grande

$$\simeq \frac{\cancel{A}\,e(G_1 + G_2)}{G_2\cancel{A}} = \frac{e(G_1 + G_2)}{G_2} = e\left(\frac{G_1}{G_2} + 1\right) = \boxed{e\underbrace{\left(\frac{R_2}{R_1} + 1\right)}_{>1} = v_u}$$

* Il vantaggio del circuito inseguitore di tensione è proprio che non mi fa da partitore di tensione e dunque non mi riduce la tensione presentata al circuito di utilizzo.

**ESEMPIO**




Generatore collegato al terminale ⊖

Se considero il percorso chiuso, devo avere $e + v_S = 0 \longrightarrow e + R_s i_s = 0 \longrightarrow i_s = -\frac{e}{R_s}$

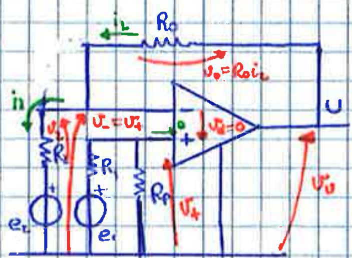
Se considero il nodo ⊖ ho $i_s + i = i_s \rightarrow i_s = i_s \quad (i = 0)$

Considero il percorso esterno e ho $v_U = R_0 i_s \longrightarrow \boxed{v_U = -e\frac{R_0}{R_s}}$

In questo caso parliamo di amplificatore invertente (cambia il segno)

* Lo chiamiamo amplificatore ma può fungere anche da ATTENUATORE

**ESEMPIO**




Generatore collegato al terminale ⊖ e 1 al terminale ⊕

$v_+ = e_1 \frac{R_p}{R_1 + R_p}$

KVL

$e_2 + \underbrace{v}_{R_2 i_2} = v_- \longrightarrow i_2 = \left(e_1 \frac{R_p}{R_1+R_p} - e_2\right)\frac{1}{R_2}$

Applico il KVL esternamente:

$v_U = R_0 i_2 + v_+ \longrightarrow v_U = \frac{R_0}{R_2}\left(e_1 \frac{R_p}{R_p+R_1} - e_2\right) + e_1 \frac{R_p}{R_1+R_p} \longrightarrow v_U = e_1 \underbrace{\frac{R_p}{R_1+R_p}\left(\frac{R_0}{R_2}+1\right)}_{\alpha} + e_2 \underbrace{\left(-\frac{R_0}{R_2}\right)}_{\beta}$

Ottengo un'equazione del tipo $v_U = \alpha e_1 + \beta e_2$ (lineare rispetto ai due generatori)

$\alpha > 0$ attaccato al terminale positivo

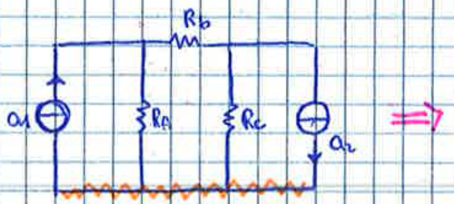
$\beta < 0$ attaccato al term. negativo

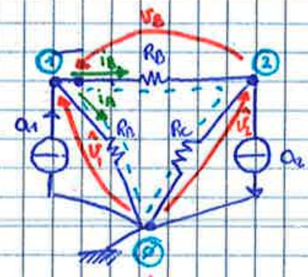
Caso particolare (rapporti di resistenze uguali)

$\frac{R_p}{R_1} = K = \frac{R_0}{R_2}$, l'equazione diventa $v_U = e \frac{R_p}{R_1\left(1+\frac{R_p}{R_1}\right)}(\cancel{1+K}) - e_2 K \longrightarrow v_U = K(e_1 - e_2)$

Uscita ∝ alla differenza dei generatori.
Per questo motivo parliamo di amplificatore differenziale

# ESEMPIO




Posto da un circuito con N nodi, so che posso scrivere N-1 equazioni di KCL

nodo di riferimento

Prendo le tensioni tra ogni nodo e quello di riferimento, $\hat{v}_1$ e $\hat{v}_2$. Definisco queste tensioni $\hat{v}_n$, tensioni nodali


Su N nodi ho N-1 tensioni.

Applico il KCL al nodo 1, mi servono le correnti

$$i_A = \frac{\hat{v}_1}{R_A} \qquad i_B = \frac{v_B}{R_B}$$

se considero il percorso chiuso e applico il KVL trovo $v_B$

$$\hat{v}_1 = \hat{v}_2 + v_B \longrightarrow v_B = \hat{v}_1 - \hat{v}_2$$

Torno al nodo 1:

$$a_1 = i_A + i_B \longrightarrow a_1 = \frac{\hat{v}_1}{R_A} + \frac{v_B}{R_B} \longrightarrow a_1 = \frac{\hat{v}_1}{R_A} + \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{R_B}$$

Applico ora il KCL sul nodo 2

$$i_C = \frac{\hat{v}_2}{R_C} \qquad i_B' = -i_B$$

$$a_2 + i_C + i_B' = 0 \longrightarrow a_2 + \frac{\hat{v}_2}{R_C} - \frac{\hat{v}_1 - \hat{v}_2}{R_B} = 0 \longrightarrow a_2 + \frac{\hat{v}_2}{R_C} - \frac{\hat{v}_1}{R_B} + \frac{\hat{v}_2}{R_B} = 0$$

Ho ottenuto le equazioni:

1) $\frac{\hat{v}_1}{R_A} + \frac{\hat{v}_1}{R_B} - \frac{\hat{v}_2}{R_B} = a_1 \longrightarrow \hat{v}_1\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}\right) + \hat{v}_2\left(-\frac{1}{R_B}\right) = a_1$

2) $-\frac{\hat{v}_1}{R_B} + \frac{\hat{v}_2}{R_C} + \frac{\hat{v}_2}{R_B} = a_2 \longrightarrow \hat{v}_1\left(-\frac{1}{R_B}\right) + \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_B}\right) = -a_2$

le tensioni nodali (N-1) sono le INCOGNITE del mio circuito in un sistema di equazioni KCL su N-1 nodi.

**Regola** (ipotesi - circuito con N nodi su cui definisco N-1 tensioni nodali $\hat{v}_n$)

Tale circuito avrà (N-1) equazioni nella forma

$$\left[ (n)\ \ \hat{v}_n \left(\Sigma \frac{1}{R_K}\right) + \hat{v}_j \left(-\Sigma \frac{1}{R_q}\right) + \ldots = \sum_m \pm a_m \right]$$

K = resistori collegati al nodo n

q = resistori collegati tra nodo n e nodo j

tanti termini così quanti sono gli altri nodi, n escluso

gen. di corrente collegati a n

entrante +
uscente −

Parliamo di metodo delle equazioni ai nodi o metodo nodale.

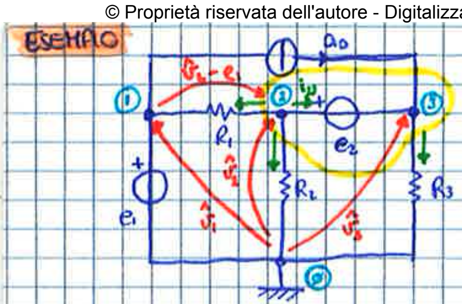
- In notazione con matrice e vettori

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B} & -\frac{1}{R_B} \\ -\frac{1}{R_B} & \frac{1}{R_C}+\frac{1}{R_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

(N-1)x(N-1) matrice di coeff. — vettore incogn. — vettore term. noti

Metodo automatico nodale

ESEMPIO




$N = 4$ nodi

$\hat{v}_1 = e_1$ (gen $e_1$ tra ① e rif) $\longrightarrow K$

Ho $N - 1 - \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{K}$ equazioni

Applico le KCL ai nodi ② e ③

② $\dfrac{\hat{v}_2 - e_1}{R_1} + \dfrac{\hat{v}_2}{R_2} + i_{23} = 0$

③ $a_0 + i_{23} = \dfrac{\hat{v}_3}{R_3}$

Applico la KVL nel percorso chiuso ② → ③ → ⓪ → ②

$\hat{v}_2 = e_2 + \hat{v}_3$

- Ho ottenuto 3 equazioni, combino le prime due (calcolo $i_{23}$ dalla 2° eq. e sostituisco nella prima)

$$\frac{\hat{v}_2 - e_1}{R_1} + \frac{\hat{v}_2}{R_2} + \frac{\hat{v}_3}{R_3} - a_0 = 0 \longrightarrow \begin{cases} \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \hat{v}_3\left(\frac{1}{R_3}\right) = \frac{e_1}{R_1} + a_0 \\ \hat{v}_2 - \hat{v}_3 = e_2 \end{cases}$$

$$\hat{v}_2 = e_2 + \hat{v}_3 \longrightarrow$$

In forma di matrice:

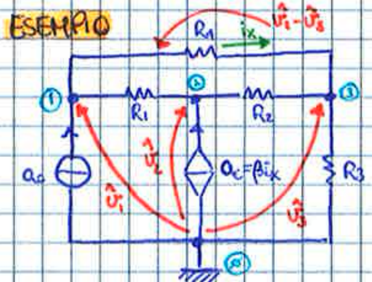
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + \frac{e_1}{R_1} \\ e_2 \end{bmatrix}$$

la matrice cambia

* Il gen. di tensione collegato a cavallo tra due nodi non abbassa la dim. della matrice ma cambia quest'ultima.

*la superficie considerata si definisce supernodo

ESEMPIO




a) come se $a_c$ fosse indipendente

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_4} \\ -\frac{1}{R_1} - \frac{\beta}{R_4} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{\beta}{R_4} - \frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +a_0 \\ 0 \ \cancel{+a_c} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\beta i_x = \beta \dfrac{\hat{v}_1 - \hat{v}_3}{R_4}$

Ma $a_c$ non è indipendente, mi serve $i_x$:

$i_x = \dfrac{\hat{v}_1 - \hat{v}_3}{R_4}$

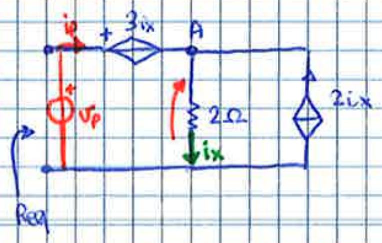
Risolvo il sistema

$$\begin{cases} v_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4}\right) - \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_1}\right) - v_3\left(\frac{1}{R_4}\right) = a_0 \\ -\frac{1}{R_1}\hat{v}_1 + \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) - \hat{v}_3\left(\frac{1}{R_2}\right) = \beta\frac{\hat{v}_1}{R_4} - \beta\frac{\hat{v}_3}{R_4} \\ \hat{v}_1\left(-\frac{1}{R_4}\right) - \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_2}\right) + \hat{v}_3\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = 0 \end{cases}$$

Riportando le incognite a sinistra

$$\longrightarrow \hat{v}_1\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{\beta}{R_4}\right) + \hat{v}_2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{\beta}{R_4} - \frac{1}{R_2}\right)\hat{v}_3 = 0$$

## ESERCIZIO 3.8



$v_1 = v_p - 3i_x$

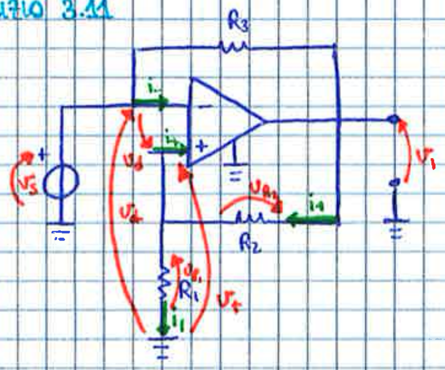
$i_x = \frac{v_1}{2} = \frac{v_p - 3i_x}{2} \longrightarrow i_x = \frac{v_p}{5}$

Applico KCL al nodo A:

$i_p + 2i_x = i_x \longrightarrow i_p = -i_x \longrightarrow i_p = -\frac{v_p}{5}$

$R_{eq} = \frac{v_p}{i_p} = -5\,\Omega$

## ESERCIZIO 3.11



$i_- = 0$

$i_+ = 0$

$v_+ = v_-$ ovvero $v_d = 0 = v_+ - v_-$

$v_- = v_s = v_+$

$R_1 = 3\,\Omega$

$R_2 = R_3 = 9\,\Omega$

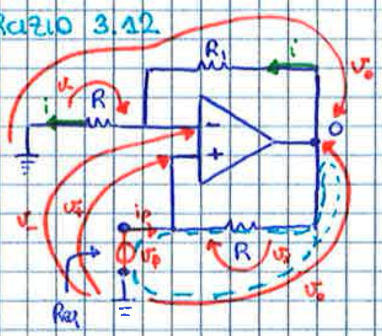
$v_s = 3V$

Legge di Ohm $i_1 = \frac{v_+}{R_1} = \frac{v_s}{R_1} = \frac{3V}{3\Omega} = 1A$

Applico KVL

$v_{R_1} + v_{R_2} - v_u = 0 \longrightarrow v_u = 12V = v_s + R_2 i_1$

## ESERCIZIO 3.12



$v_+ = v_p = v_-$

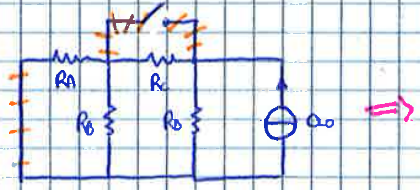
OHM: $i = \frac{v_-}{R} = \frac{v_p}{R}$

$v_o = Ri + R_1 i_1 = (R + R_1)\frac{v_p}{R}$

$v_x = v_p - v_o$

$i_p = \frac{(v_p - v_o)}{R} = \frac{\cancel{v_p} - \cancel{v_p} - \frac{R_1}{R}v_p}{R} = -\frac{R_1}{R^2}v_p$

- $\hat{v}_3''$ devo mettere $e_0 = 0$, $a_1 = 0$ → circuito aperto

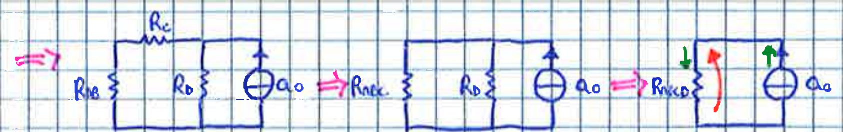


→ eq. di funzionamento $v = e$

per $e = 0$

⟹ corto circuito

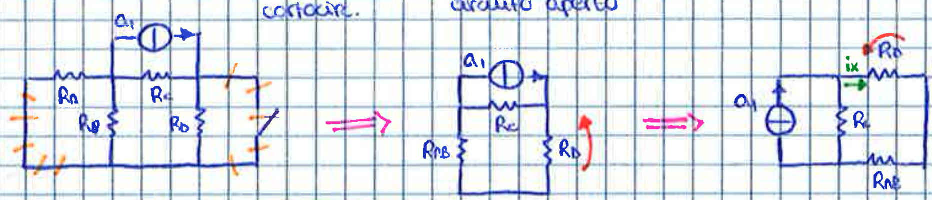
⟹



$\hat{v}_3'' = a_0 \, R_{ABC//D} \rightarrow H_0$

- $\hat{v}_3'''$ devo mettere $e_0 = 0$ e $a_0 = 0$

$e_0 = 0$ → cortocirc. ; $a_0 = 0$ → circuito aperto



Regola partitore di corrente

$$i_x = a_1 \frac{R_c}{R_c + R_D + R_{AB}}$$

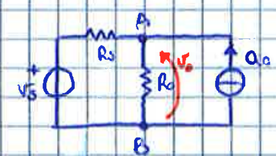
$$\hat{v}_3''' = R_D \, i_x = a_1 \frac{R_D R_c}{R_c + R_D + R_{AB}} \rightarrow H_1$$

Vado a sostituire in $\hat{v}_3$:

$$\hat{v}_3 = e_0 \frac{R_{B//CD}}{R_A + R_{B//CD}} \cdot \frac{R_D}{R_c + R_D} + a_0 \, R_{ABC//D} + a_1 \frac{R_D R_c}{R_c + R_D + R_{AB}}$$

Altro metodo simile a quello nodale, metodo automatico delle maglie (vedi libro)

**ESEMPIO**

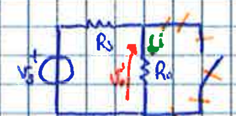


$H = 2$ ~ numero di generatori indipendenti

$$v_0 = \underbrace{v_S K_1}_{v_0'} + \underbrace{a_0 H_0}_{v_0''}$$

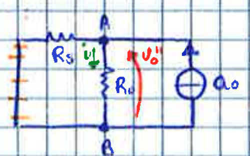
Soluzione con il metodo di sovrapposizione degli effetti:

- $v_0'$, pongo $a_0 = 0$



$$v_0' = v_S \frac{R_0}{R_S + R_0} \rightarrow K_1$$

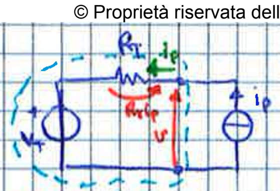
- $v_0''$, pongo $v_S = 0$



$$i_x = a_0 \frac{R_S}{R_S + R_0} \rightsquigarrow v_0'' = i_x R_0 = a_0 \frac{R_S R_0}{R_S + R_0} \rightarrow H_0$$

Ho che:

$$v_0 = v_S \frac{R_0}{R_S + R_0} + a_0 \frac{R_S R_0}{R_S + R_0}$$



Applico la KVL al percorso chiuso:

$v = v_T + R_T i_p$

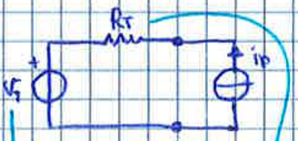
L'equazione di Thevenin dice:

$v = v_{a_1} + (-Q)(-i) \longrightarrow v = v_{a_1} + R_T \cdot i_p$

Confrontando le due eq. ottenute noto che ottengo lo stesso valore di tensione

## CONCLUSIONE DI THEVENIN

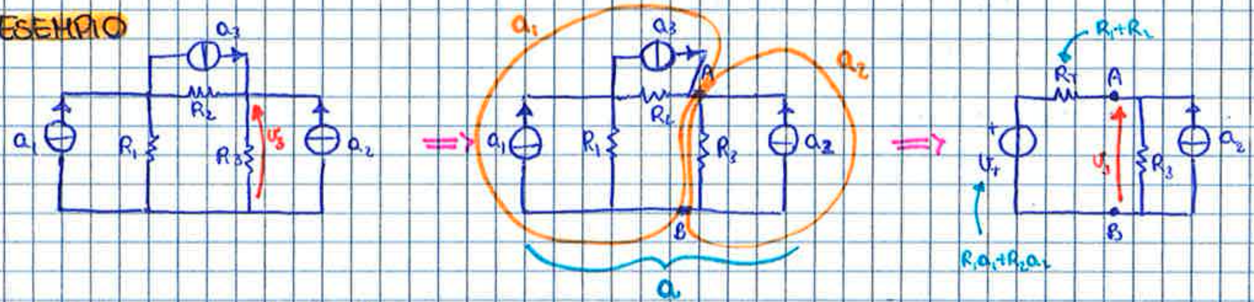
Ogni sottocircuito (parte in cui il circuito di partenza è scomponibile) è equivalente ad una struttura del tipo:



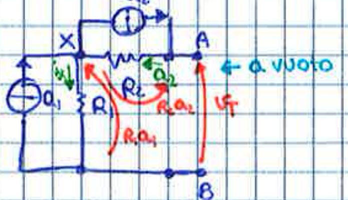
tensione a vuoto contenente tutti i contributi del sottocircuito

Resistenza del sottoc.to a generatori spenti

**ESEMPIO**



Lavoriamo con il sottocircuito $a_1$



Ricaviamo $v_T$ e $R_T$

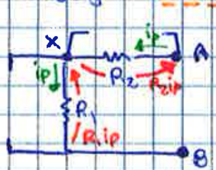
Applico il KCL al nodo x:

$a_1 + \cancel{a_2 (R)} = \cancel{a_2 (gen)} + i_x \longrightarrow i_x = a_1$

Si ha che: (KVL al percorso chiuso)

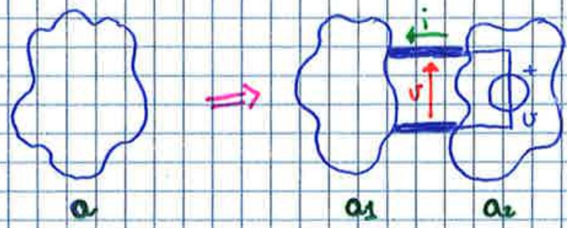
$v_T = R_1 a_1 + R_2 a_2$

Ridisegno il sottocircuito $a_1$ ma con generatori spenti



$R_T = \underbrace{R_1 + R_2}_{\text{collegati in serie}}$

$v_{AB} = R_1 i_p + R_2 i_p = (R_1 + R_2) i_p = R_T i_p$




SOSTITUZIONE con un gen. di tensione e vado a calcolarmi la corrente (contrario di Thevenin)

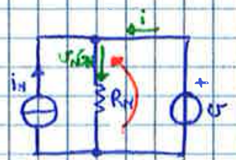
La corrente i sarà pari a:

$$\left[ i = i_{a_1} + Wv \right]$$

$W$ → deve avere dim. di conduttanza, S

$i_{a_1}$ → contributo dovuto ai gen. interni con cortocirc.to all'uscita
corrente di cortocircuito

$Wv$ → contributo del sottocircuito con generatori spenti



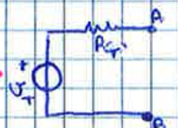

Applico la KCL

$$i_N + i = vG_N \longrightarrow i = \underbrace{-i_N}_{i_{a_1}} + \underbrace{vG_N}_{W}$$

Posso dire che questo circuito è EQUIVALENTE ad $a_1$

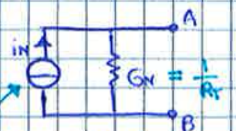
Parliamo di Teorema di Norton

$a_1$ →




equivalente Thevenin

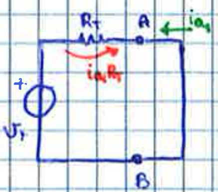
Applico e equivalente Norton →




$-i_{a_1} = v_T/R_T$

equivalente Norton

Calcolo $i_N$:



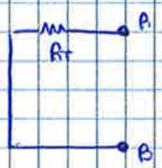

$$v_T + R_T i_{a_1} = 0$$

$$i_{a_1} = \frac{-v_T}{R_T} \longrightarrow i_N = \frac{v_T}{R_T} \longrightarrow R_T = \frac{v_T}{i_N}$$

$v_T$ → Tensione a vuoto di Thevenin

$i_N$ → corrente di cortoc.to di Norton

Calcolo $G_N$:




$$G_N = \frac{1}{R_T}$$

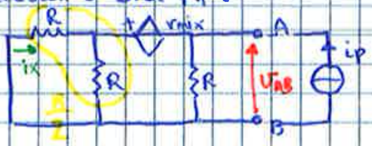
$$v_{xy} = \frac{\frac{e}{R} + \frac{r_m}{R^2}(e - v_{xy})}{3/R} = \frac{e}{3} + \frac{r_m}{3R}(e - v_{xy}) \longrightarrow v_{xy}\left(1 + \frac{r_m}{3R}\right) = \frac{e}{3} + \frac{e\,r_m}{3R} \longrightarrow v_{xy} = e\left(\frac{1}{3} + \frac{r_m}{3R}\right)\left(\frac{3R}{3R+ \dots}\right.$$

Applico il **KVL** a destra:

$$v_{xy} = r_m i_x + v_T \longrightarrow v_{xy} = r_m \frac{e - v_{xy}}{R} + v_T \longrightarrow v_T = v_{xy} - \frac{r_m e}{R} + v_{xy}\frac{r_m}{R}$$

si può sostituire $v_{xy}$, ho trovato $v_T$

calcoliamo ora $R_T$:




$$v_{AB} = \underbrace{R_T}_{\text{coeff.}} i_p$$

Millman:

$$v_{AB} = \frac{-e_c/(R/2) + i_p}{\frac{1}{R/2} + \frac{1}{R}} \longrightarrow v_{AB} = \frac{-2e_c/R + i_p}{3/R}$$

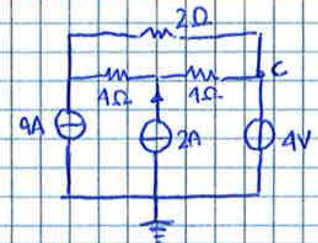
Applico la **KVL** al percorso chiuso

$$v_{AB} + r_m i_x + R i_x = 0 \longrightarrow i_x = \frac{-v_{AB}}{R + r_m}$$

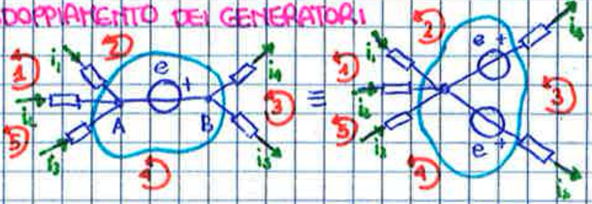
sostituisco e ottengo:

$$v_{AB} = \frac{\frac{2 r_m v_{AB}}{R(R+r_m)} + i_p}{3/R} = \frac{R}{3}\left(\frac{r_m 2}{R(R+r_m)} v_{AB} + i_p\right) \longrightarrow v_{AB}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r_m}{R+r_m}\right) = \frac{R}{3} i_p \longrightarrow v_{AB} = \underbrace{\frac{R}{3\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r_m}{R+r_m}\right)}}_{\text{contributo di Thevenin}} i_p$$

## ESERCIZIO 4.7

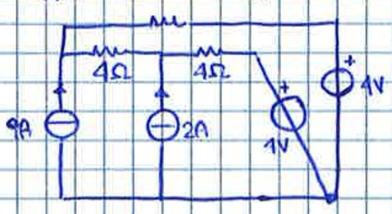


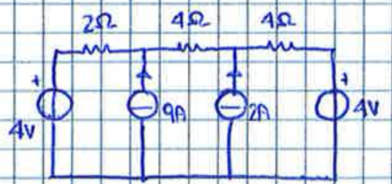

**SDOPPIAMENTO DEI GENERATORI**

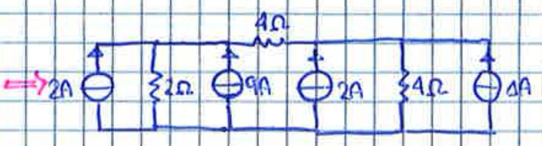


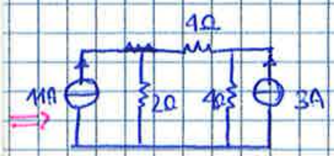

Le KCL e le KVL nelle zone evidenziate coincidono, perciò queste due reti sono equivalenti x ciò che sta all'esterno
È un sistema utile che permette di passare a Norton o Thevenin

Applichiamo lo sdoppiamento di generatori



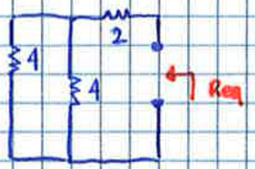




Sistema di equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{v_A - v_B}{4} + \dfrac{v_A}{2} = 11 \\ \dfrac{v_B - v_A}{4} + \dfrac{v_B}{4} = 3 \end{cases}$$

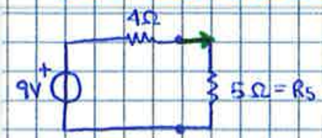
$v_A = 20\,V$

$v_B = 16\,V$



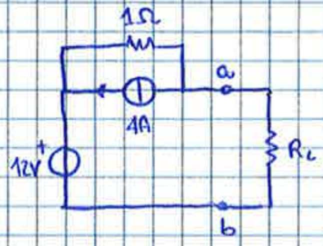

$R_{eq} = 2 + 4//4 = 2+2 = 4\,\Omega$

EQUIVALENTE THEVENIN



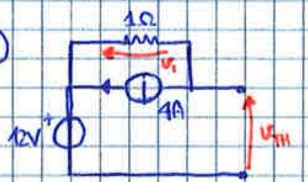

$i_1 = \frac{9}{4+5} = 1A$

ESERCIZIO 5.11



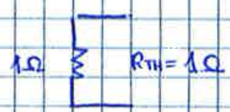

1) Thevenin a–b
2) Norton a–b
3) $p^a_{R_L}$

1)

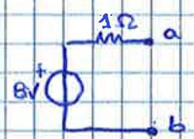



KVL $\quad v_{TH} = 12 - v_1 = 12 - 4 = 8V$

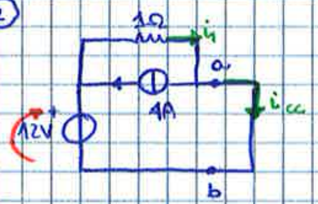
$v_1 = 1\Omega \cdot 4A = 4V$




EQUIVALENTE THEVENIN



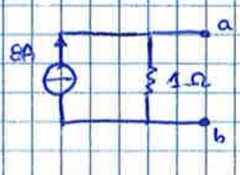

2)



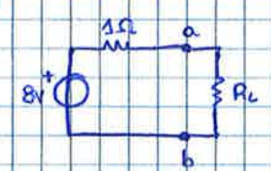

$i_1 = \frac{12V}{1\Omega} = 12A$

$i_{cc} = i_1 - 4A = 12 - 4 = 8A$

EQUIVALENTE NORTON



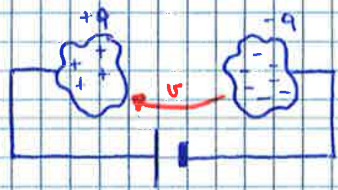

Usiamo il modello Thevenin per calcolare la potenza




$i = \frac{8}{1+R_L} \qquad p^a_{R_L} = i^2 R_L = \frac{64}{(1+R_L)^2} \cdot R_L = p^e_{alim.}$

# CONDENSATORE

Dal punto di vista fisico è costituito da due pezzi di metallo posti a una certa distanza d, se li collego ad una batteria si genera una tensione (ddp) che porta ad un accumulo di cariche + su un pezzo e cariche − sull'altro (= in modulo)



$q \propto v$

Maggiore la ddp, maggiore la carica che va ad accumularsi sui due pezzi metallici.
Matematicamente tale relazione di prop. è esprimibile come:

$$[q = Cv]$$

→ capacità: coeff. di proporzionalità tra carica e tensione

Unità di misura della capacità

$$[C] = \frac{C}{V} = F, \text{ Farad}$$

Il condensatore è definito da tensione e CARICA, non intensità di corrente.
Ma sappiamo che, per definizione:

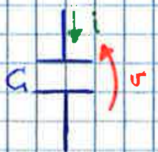
$$\left[i = \frac{dq}{dt}\right]$$ (derivata della carica rispetto al tempo)

Sostituisco nell'espressione:

$$\frac{d}{dt}(q = C \cdot v) \longrightarrow \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \longrightarrow \left[i = C\frac{dv}{dt}\right]$$

equazione di funzionamento del condensatore che esprime la corrente

Abbiamo per la prima volta un eq. di funzionamento con una derivata, pertanto il condensatore è un elemento differenziale e il suo simbolo è:

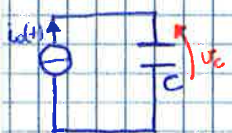


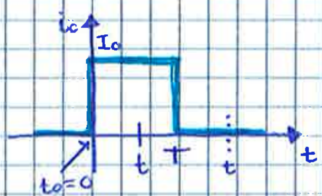
$C > 0$ se prendo la convenzione degli utilizzatori

$$i\,dt' = C\,dv \longrightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i\,dt' \longrightarrow v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt' \longrightarrow \left[v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t')\,dt'\right]$$

eq. di funzionamento del condensatore che esprime la tensione

## ESEMPIO





$$v(t) = \underbrace{v(t_0)}_{0} + \frac{1}{C}\int_{t_0=0}^{t} i_0(t')\,dt'$$

- Per $t < T$ abbiamo $I_0 = \text{const}$, dunque

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I_0\,dt' \longrightarrow v(t) = \frac{I_0}{C}\cdot t'\Big|_0^t = \frac{I_0}{C}t$$

- Per $t > T$ la corrente è pari a 0, dunque otteniamo:

$$v(t) = \frac{1}{C}\left[\int_0^T I_0(t')\,dt' + \underbrace{\int_T^t i_0(t')\,dt'}_{=0}\right] \longrightarrow v(t) = \frac{1}{C}\int_0^T I_0\,dt' = \frac{I_0}{C}\cdot t'\Big|_0^T = \frac{I_0}{C}T$$