



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1648A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Salis

MATERIA: Analisi Matematica II + Eserc. Prof.Lancellotti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Richiami di topologia di \mathbb{R}^n

Premessa Se A, B sono due insiemi, $f: A \rightarrow B$ è una funzione che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B . A è il dominio di $f \rightarrow A = \text{dom}(f)$
 B è il codominio di f

ESEMPIO

• $f: [1, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ $[1, 7] = \text{dom}(f)$

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Allora $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

\mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale di dimensione n su \mathbb{R} . (somma di vettori, include il vettore nullo)
 $+$, $0_{\mathbb{R}^n}$, prodotto tra vettore e scalare, $1 \in \mathbb{R}$ (elemento neutro)

BASE CANONICA

$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$

$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$

\vdots

$e_i = (0, \dots, 0, \overset{i-1}{\underset{i+1}{1}}, 0, \dots, 0)$

\vdots

$e_n = (0, \dots, 0, 1)$

l'insieme (e_1, \dots, e_n) è detta base canonica di \mathbb{R}^n

Se $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ allora può essere scritto come combinazione lineare di vettori

$$v = (v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, v_n) = v_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + v_n(0, \dots, 0, 1) = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$$

PRODOTTO SCALARE

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \rightarrow$ produce un numero reale

NORMA (MODULO) \rightarrow Rappresenta la distanza di x da $0_{\mathbb{R}^n}$

$\|x\|$ con $x = (x_1, \dots, x_n)$

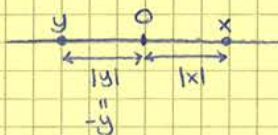
$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

$\|x\| = \|x - 0\|$

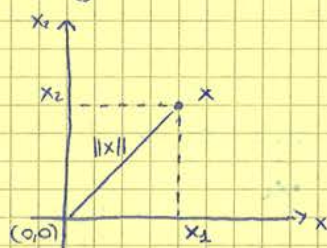
$\hookrightarrow 0_{\mathbb{R}^n}$ (vettore nullo)

ESEMPIO

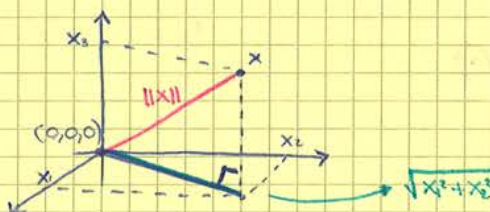
• $n=1 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \Rightarrow \|x\| = |x| = \sqrt{x^2} \Rightarrow$



• $n=2 \Rightarrow x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$



• $n=3 \Rightarrow x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$



- Diciamo che x_0 è un punto di accumulazione per Ω se $\forall \epsilon > 0$ si ha che $[\Omega \cap B_\epsilon(x_0)] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, cioè in ogni intorno di x_0 ci sono punti di Ω diversi da x_0 . In tal caso non è detto che x_0 appartenga a Ω .

ESEMPIO

• $\Omega = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \}$



- Diciamo che x_0 è un punto di frontiera per Ω se $\forall \epsilon > 0$ si ha che $\Omega \cap B_\epsilon(x_0) \neq \emptyset$ e $\mathcal{C}\Omega \cap B_\epsilon(x_0) \neq \emptyset$

dove $\mathcal{C}\Omega$ è il complementare di Ω , ovvero $\mathcal{C}\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$

- L'insieme dei punti di frontiera di Ω è detto frontiera di Ω o bordo di Ω e si denota con $\text{Fr}(\Omega)$ oppure $\partial\Omega$. Non è detto che un punto di frontiera appartenga a Ω .

ESEMPIO



x_0 è di frontiera per Ω
 x_1 è di frontiera per Ω
 x_2 non è di frontiera per Ω
 x_3 non è di frontiera per Ω
 la frontiera in questo caso è data dal "contorno" di Ω

Evidentemente $\partial\Omega = \mathcal{S}(\mathcal{C}\Omega)$

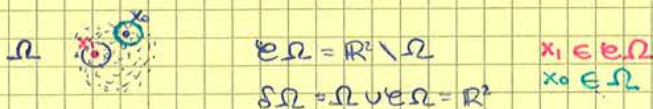
- Si chiama chiusura di Ω l'insieme $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Può succedere che Ω coincida con $\bar{\Omega}$.

ESEMPIO



ESEMPIO \rightarrow caso in cui il concetto di bordo non è applicabile

$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q} \}$



Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che Ω è aperto se ogni punto di Ω è interno a Ω , cioè se $\text{int}(\Omega) = \Omega$

- Diciamo che Ω è chiuso se $\mathcal{C}\Omega$ è aperto
 - Diciamo che Ω è limitato se $\exists x > 0$ tale che $\Omega \subseteq B_x(0)$
 - Diciamo che Ω è compatto se Ω è chiuso e limitato
- Per convenzione \emptyset e \mathbb{R}^m sono contemporaneamente aperti e chiusi.

*osserviamo che

Ω chiuso $\iff \partial\Omega \subseteq \Omega$

Ω aperto $\iff \partial\Omega \notin \Omega$, i.e. $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$

$df(x_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineare
 nome $x \mapsto df(x_0)(x)$

Prop. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione. Valgono i seguenti fatti

- 1) Se f è differenziabile in x_0 , allora f è continua in x_0
- 2) Se f è differenziabile in x_0 , allora $\forall v \in \mathbb{R}^n \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ e vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = df(x_0)(v)$$

In particolare se $v = e_i$ allora $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ e si ha che $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i) \right]$ (non viceversa)

Quindi se $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, cioè $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$, allora

$$df(x_0)(v) = df(x_0)(v_1 e_1 + \dots + v_n e_n) = df(x_0)(v_1 e_1) + \dots + df(x_0)(v_n e_n) = v_1 df(x_0)(e_1) + \dots + v_n df(x_0)(e_n)$$

$$= v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \quad \text{con } v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$$

LINEARE

$L(a+b) = L(a) + L(b)$

$L(\lambda a) = \lambda L(a)$

• CASO $m=1$, cioè $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. In tal caso:

$$df(x_0)(v) = \nabla f(x_0) \cdot v, \quad \text{dove } \nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

- 3) Se f ammette tutte le derivate parziali in Ω e queste derivate sono continue in x_0 , allora f è differenziabile in x_0 .

* Osservazione Se f è differenziabile in $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, allora $\exists df(x_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ applicazione lineare. Rispetto alle basi canoniche di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m a $df(x_0)$ si associa una matrice detta Jacobiana di f in x_0 denotata con $J_f(x_0)$ siffatta:

$$J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow \forall x \in \Omega \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

$f_1, \dots, f_m: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (componenti di f)

Quindi se $v = (v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ allora $df(x_0)(v) = J_f(x_0)v = \begin{pmatrix} \dots \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
 $\in \mathbb{R}^m$

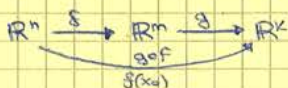
* Osservazione Se $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo aperto e se $f: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ è derivabile in $x_0 \in I$, allora f è differenziabile in x_0 e si ha che

$$\forall x \in \mathbb{R}: df(x_0)(x) = f'(x_0)x$$

DIFFERENZIALE DELLA FUNZIONE COMPUSA

Supponiamo che f sia differenziabile in x_0 e g sia diff. in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è differenziabile in x_0 e si ha che

$$d(g \circ f)(x_0)(x) = dg(f(x_0))(df(x_0)(x)), \quad \forall x$$

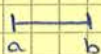


La matrice Jacobiana di $g \circ f$ in x_0 è

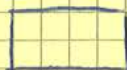
$$\left[J_{g \circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0) \right]$$

Integrali Multipli

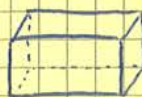
• $n=1$ (una variabile)



• $n=2$ (2 var)



• $n=3$ (3 var)



Teoria della misura ~ distingue gli insiemi misurabili (di cui si può calcolare l'integrale, dunque si può associare una misura) da quelli non misurabili (e dunque non integrabili)

* Teoria di integrazione multipla:

TEORIA DI RIEMANN (teoria della misura di Peano - Jordan)

TEORIA DI LEBESGUE (omonima teoria della misura)

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Notazione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, limitato non vuoto

Diciamo che Ω è misurabile (in \mathbb{R}^n) se a Ω si può associare una misura che nel caso $n=2$ è la classica area e nel caso $n=3$ è il classico volume.

Si denota con $m_n(\Omega)$ o $m(\Omega) \sim$ misura n -dimensionale o, semplicemente, misura di Ω

Evidentemente $m(\Omega) \in [0, +\infty)$

Se $n=2$ si parla di area di Ω .

Se $n=3$ si parla di volume di Ω .

Se $n \geq 4$ si può parlare anche di volume n -dimensionale di Ω .

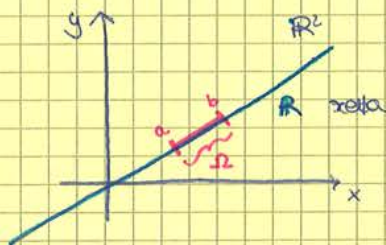
Se $n=1$ si parla di lunghezza di Ω .

Poniamo $m(\emptyset) = 0$

* Osservazioni 1) Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ è misurabile, con $1 \leq k < n$, allora $m_n(\Omega) = 0$
(\mathbb{R}^k sottospazio di \mathbb{R}^n)

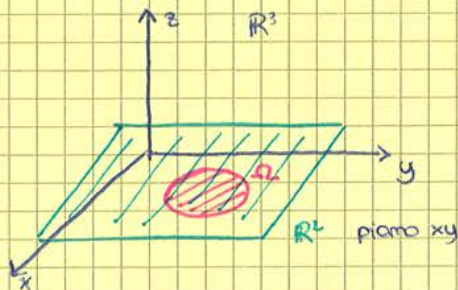
ESEMPLO

$n=2, k=1$



$m_2(\Omega) = \text{area}(\Omega) = 0$

$n=3, k=2$



$m_3(\Omega) = \text{volume}(\Omega) = 0$

2) Se Ω misurabile è il sostegno di una curva parametrica regolare, allora $m_n(\Omega) = 0 \forall n \geq 2$

CURVA PARAMETRICA
 È una funzione continua $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$
 con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo non vuoto
 Il sostegno di Ω è $\gamma(I)$, cioè
 l'immagine di γ (linea in \mathbb{R}^n)

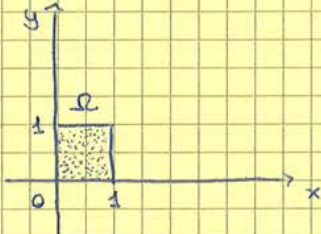
Def Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile.
 Diciamo che Ω è trascurabile (in \mathbb{R}^n) se $m_n(\Omega) = 0$

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato.
 Allora Ω è misurabile \Leftrightarrow il bordo di Ω è trascurabile

ESEMPIO (di insieme non misurabile)

$$\Omega = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$$

" "
 $[0, 1] \times [0, 1]$



$$\partial\Omega = [0, 1]^2 \Rightarrow m_2(\partial\Omega) = \text{area}([0, 1]^2) = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \Omega \text{ non è misurabile}$$

INTEGRALE MULTIPO

Notazione Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e limitata.
 Si chiama integrale (multiplo) di Riemann di f su Ω il numero reale che si denota con uno dei seguenti simboli:

$$\int_{\Omega} f \quad \left| \quad \int_{\Omega} f(x) dx \quad \left| \quad \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n \quad \left| \quad \int \dots \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \right. \right.$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ n volte

Se $n=2$ si scrive anche

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \rightarrow \text{integrale doppio}$$

Se $n=3$ si scrive anche

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \rightarrow \text{integrale triplo}$$

Ω in tutti questi casi è definito dominio di integrazione

<p>N.B.</p> <p>$\int_{\Omega} f$ è sbagliato (manca il dominio)</p> <p>$\int_{\Omega} f$ è giusto</p>	<p>$\int_{\Omega} f(x)$ sbagliato (manca il differenziale)</p> <p>$\int_{\Omega} f(x) dx$ giusto</p>
--	--

* Geometricamente

• ANAUSI I ($n=1$)



$$\int_a^b f(x) dx = \text{area}(T_f)$$

$T_f =$ trapezoido di f

In generale, se $f \geq 0$ su Ω , allora $\int_{\Omega} f$ è il volume $(n+1)$ -dimensionale di T_f , cioè è $m_{n+1}(T_f)$, dove T_f è il trapezoido di f definito da

$$T_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, 0 \leq x_{n+1} \leq f(x)\}$$

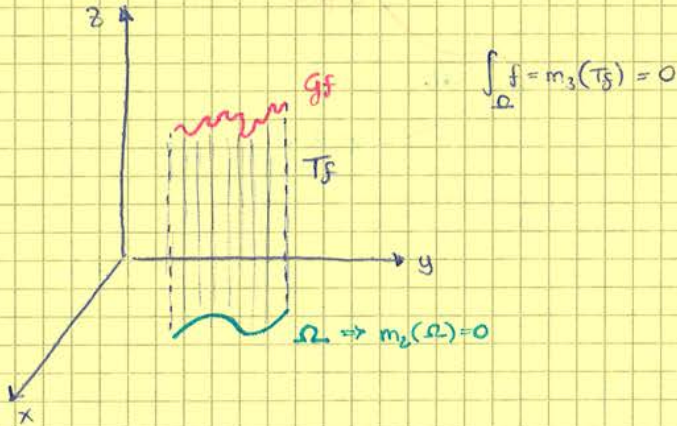
Consideriamo la proprietà a)

$$\int_a^b f(x) dx$$

d'appartenenza dei punti a e b all'intervallo su cui si calcola l'integrale non comporta alcuna variazione nel valore dell'area. Questo perché la lunghezza di uno (e dunque anche due) punti è trascurabile (zero).

Tale proprietà è sintetizzata in ANALISI I

- Vediamo ora un caso nello spazio:

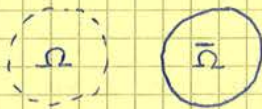


* Osservazione a) + b) => Se Ω è un aperto misurabile, allora

$$\int_{\Omega} f = \int_{\bar{\Omega}} f, \text{ dove } \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \text{ è la chiusura di } \Omega$$

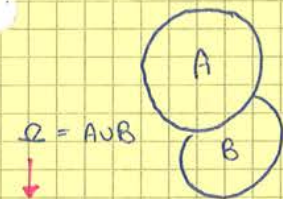
$$\text{Infatti } \int_{\Omega} f = \int_{\Omega \cup \partial\Omega} f \stackrel{b)}{=} \int_{\Omega} f + \int_{\partial\Omega} f \stackrel{a)}{=} \int_{\bar{\Omega}} f$$

$\Omega \text{ aperto} \Rightarrow \Omega \cap \partial\Omega = \emptyset \Rightarrow m(\Omega \cap \partial\Omega) = 0$



L'integrale sui due insiemi è lo stesso, il bordo non conta perché è un insieme di misura nulla.

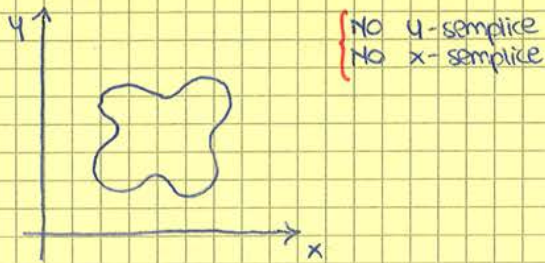
- Supponiamo di avere:



non ci viene data esplicitamente questa informazione, la troviamo e possiamo scrivere

$$\Omega = A \cup B \Rightarrow \int_{\Omega} = \int_A + \int_B$$





Teorema (di integrazione su insiemi x-sempllice e y-sempllice) - THM DI RIDUZIONE PER GLI INTEGRALI DOPPI

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme y-sempllice $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ dove $\alpha, \beta: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue tali che $\alpha(x) \leq \beta(x) \forall x \in [a,b]$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua, allora

$$\int_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

Bisogna di fatto calcolare due integrali in una variabile. Calcolo prima l'integrale interno dove considero y la variabile e x costante. Tale integrale ~~era~~ porterà a una Funzione F(x) non dipendente da y.

Se Ω è l'insieme x-sempllice $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ dove $\gamma, \delta: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue tali che $\gamma(y) \leq \delta(y) \forall y \in [c,d]$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

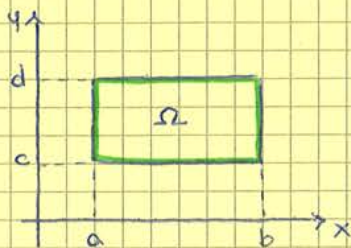
$$\int_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

Come prima calcoliamo l'integrale interno ma stavolta consideriamo come parametro la y. Otteniamo G(y) non dipendente da x.

* Osservazione Se Ω è un rettangolo con lati // agli assi cartesiani (coordinate), cioè se $\Omega = [a,b] \times [c,d]$ e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ con $f_1: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$, continue allora

$$\int_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_{\Omega} f_1(x)f_2(y) dx dy = \left(\int_a^b f_1(x) dx \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right)$$

Prodotto degli int. delle singole funz. sui singoli intervalli.

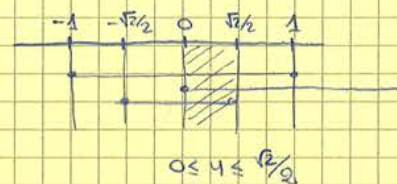


ESERCIZIO

• Calcolare $\int_{\Omega} (x+y) dx dy$ dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{2}/2, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$

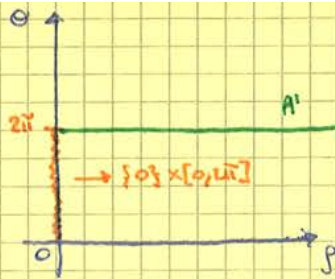
x-sempllice - verificiamo che $\forall y \in [0, \sqrt{2}/2]$ sia $y \leq \sqrt{1-y^2}$

$$\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ y < 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ y \geq 0 \\ y^2 \leq 1-y^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ y \geq 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



È x-sempllice, quindi

$$\int_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y) dx \right] dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\frac{1}{2} x^2 + xy \right]_y^{\sqrt{1-y^2}} dy =$$



Se $\Phi(\rho, \theta) = \Phi(\rho, 2\pi)$

se $\theta = 2\pi \Rightarrow A' = [0, +\infty) \times \{2\pi\}$ è tale che $m(A') = 0$

2) **Coordinate ellittiche**

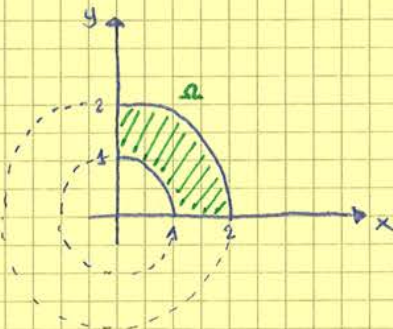
Siano $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $a, b > 0$, $\Phi: [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(\rho, \theta) = (x_0 + a\rho \cos \theta, y_0 + b\rho \sin \theta)$

$$J_{\Phi}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow |\det J_{\Phi}(\rho, \theta)| = |ab\rho \cos^2 \theta + ab\rho \sin^2 \theta| = |ab\rho(\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta})| = |ab\rho| = ab\rho$$

Valgono anche qui le osservazioni precedenti

ESEMPIO

Calcolare $\int_{\Omega} \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy$, dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$



Passiamo in coord. polari nel piano centrate in (0,0)

$$\Phi: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

con $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

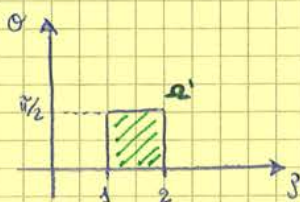
$|\det \dots| = \rho$

$$\int_{\Omega} \frac{xy}{x^2+y^2} dx dy = \int_{\Omega'} \frac{\rho \cos \theta \rho \sin \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \rho d\rho d\theta = \int_{\Omega'} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_{\Omega'} \cos \theta \sin \theta d\rho d\theta = *$$

con $\Omega' \subseteq [0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ tale che $\Phi(\Omega') = \Omega$

$$(x,y) \in \Omega \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \leq 4 \\ \rho \cos \theta \geq 0 \\ \rho \sin \theta \geq 0 \\ \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 4 \\ \cos \theta \geq 0 \\ \sin \theta \geq 0 \\ \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ \cos \theta \geq 0 \\ \sin \theta \geq 0 \\ \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases} \rightsquigarrow \Omega' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$



Calcolo degli integrali tripli

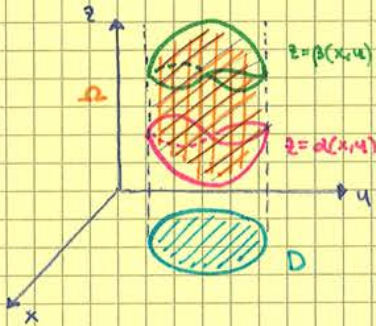
Integrazione per fili // ad un asse (perché preso un punto $P \in D$, la sua proiez. attraversa Ω in un segmento)

- consideriamo l'asse z

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$, dove $\alpha, \beta: D \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue su $D \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto.
 Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x, y)}^{\beta(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

Prima integrale interno $\rightsquigarrow F(x, y) \rightsquigarrow$ integrale doppio su D



- consideriamo l'asse y

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, \alpha(x, z) \leq y \leq \beta(x, z)\}$, dove $\alpha, \beta: D \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue su $D \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto.
 Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x, z)}^{\beta(x, z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

- consideriamo l'asse x

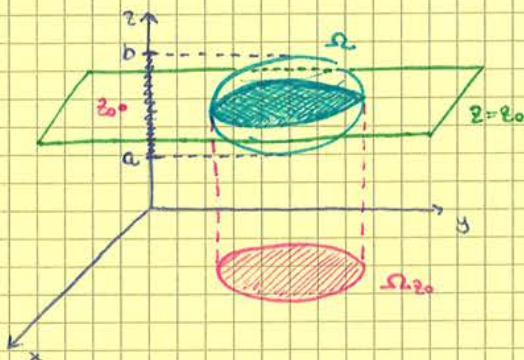
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e insieme $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, \alpha(y, z) \leq x \leq \beta(y, z)\}$, dove $\alpha, \beta: D \rightarrow \mathbb{R}$ sono continue su $D \subseteq \mathbb{R}^2$ compatto.
 Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_D \left[\int_{\alpha(y, z)}^{\beta(y, z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

Integrazione per strati // ad un piano

Def siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato e $z_0 \in \mathbb{R}$. Poniamo

$$\Omega_{z_0} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z_0) \in \Omega\}$$



ESEMPIO

Calcolare $\int_{\Omega} (x^2+y^2)z \, dx \, dy \, dz$, dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$

- Int. per fili $g(\text{others}) \leq \text{var} \leq h(\text{others})$, others $\in D \subseteq \mathbb{R}^2$
- Int. per strati $a \leq \text{var} \leq b$, others $\in \Omega_{\text{var}} \subseteq \mathbb{R}^2$

Scriviamo in modo tale da avere uno dei due casi.

$$\begin{cases} -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \\ 0 \leq z \end{cases} \rightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

Possiamo integrare per fili, ma ci serve $D = \text{dominio di } x \text{ e } y$.

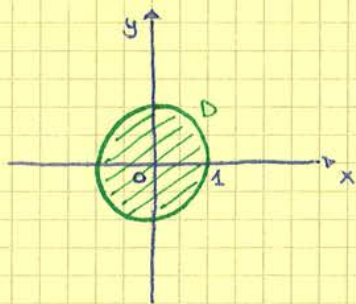
$$1-x^2-y^2 \geq 0 \rightarrow x^2+y^2 \leq 1, \text{ dunque}$$

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}, (x,y) \in D\}, \text{ dove}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

Integrando per fili // all'asse z si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz &= \int_{\Omega} (x^2+y^2)z \, dx \, dy \, dz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2)z \, dz \right] dx \, dy = \\ &= \int_D (x^2+y^2) \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx \, dy = \frac{1}{2} \int_D (x^2+y^2)(1-x^2-y^2) dx \, dy = * \end{aligned}$$

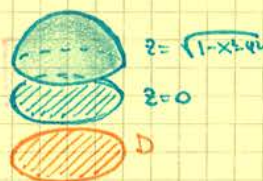
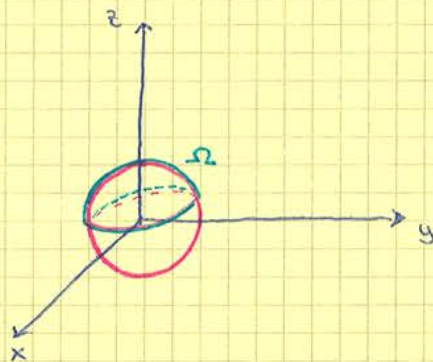


Passiamo in **COORDINATE POLARI** (centrate in 0)

$$\Phi: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, |\det J_{\Phi}(\rho, \theta)| = \rho$$

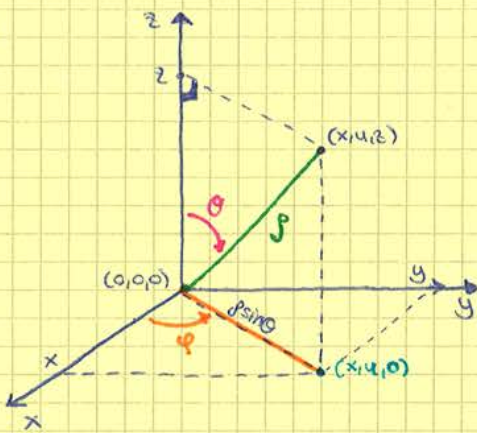
$$\begin{cases} \rho \in [0, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \rightarrow D' = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

$$* = \frac{1}{2} \int_{D'} \rho^2 (1-\rho^2) \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (\rho^3 - \rho^5) \, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \rho^4 - \frac{1}{6} \rho^6 \right]_0^1 2\pi = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{12}$$



Coordinate notevoli nello spazio:

1) **COORDINATE POLARI NELLO SPAZIO (SFERICHE)**



θ = colatitude (misurata dall'asse z)
 φ = longitudine
 ρ = distanza da O

$$\Phi: [0, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta)$$

$$J_{\Phi}(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$



$$|\det J_{\Phi}(\rho, \theta, \varphi)| = |\cos \theta (\rho^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi) + \rho \sin \theta (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \theta \sin^2 \varphi)| =$$

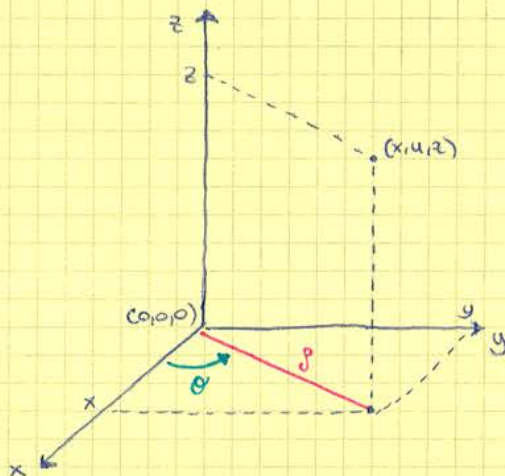
$$= |\rho^2 \sin \theta \cos^2 \theta + \rho^2 \sin \theta \sin^2 \theta| = |\rho^2 \sin \theta| = \rho^2 \sin \theta$$

\downarrow
 $\sin \theta > 0$

2) **COORDINATE CILINDRICHE con asse // all'asse z**

$$\Phi: [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$



$$J_{\Phi}(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det J_{\Phi}(\rho, \theta, z)| = |\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta| = \rho$$

*Osservazione Integrazzando una funzione utilizzando il cambiamento di variabili in coordinate cilindriche con asse // ad uno degli assi cartesiani equivale a integrare per fili paralleli a quell'asse e poi passare in coordinate polari nel piano ortogonale a quell'asse.

* Osservazione

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Diciamo che Ω è simmetrico rispetto al piano xy se $\forall (x, y, z) \in \Omega$ anche $(x, y, -z) \in \Omega$
 Diciamo che Ω è simmetrico rispetto al piano xz se $\forall (x, y, z) \in \Omega$ anche $(x, -y, z) \in \Omega$
 Diciamo che Ω è simmetrico rispetto al piano yz se $\forall (x, y, z) \in \Omega$ anche $(-x, y, z) \in \Omega$

Si hanno 6 casi:

1) Se Ω è simmetrico rispetto al piano xy e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\forall (x, y, z) \in \Omega, f(x, y, -z) = f(x, y, z)$, allora

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 2 \int_{\Omega'} f(x, y, z) dx dy dz, \text{ dove } \Omega' = \{(x, y, z) \in \Omega : z \geq 0\} \text{ (oppure } z \leq 0)$$

2) Se Ω è simmetrico rispetto al piano xy e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $\forall (x, y, z) \in \Omega, f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ allora

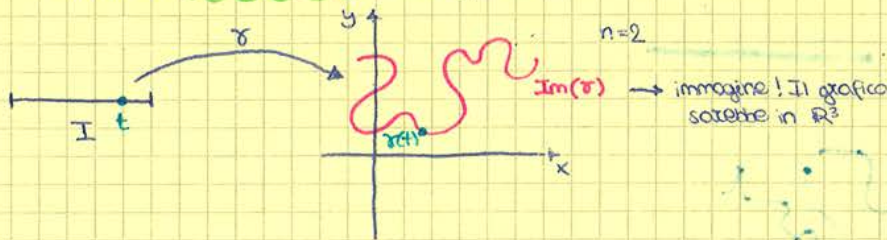
$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$$

Otteniamo analogamente gli altri 4 casi rispetto ai piani xz e yz. $\rightarrow *$

RICHIAMI SULLE CURVE PARAMETRICHE

Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo qualunque. Si chiama curva parametrica una funzione $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua.
 Si chiama sostegno di γ l'immagine di γ



* Diciamo che γ è semplice se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ implica $t_1 = t_2$ oppure che t_1 e t_2 sono gli estremi dell'intervallo I , se I contiene i suoi estremi (intervallo all'interno dell'intervallo)

* Se Ω è semplice allora induce sul suo sostegno un verso di percorrenza.

Def. Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva parametrica.
 Diciamo che γ è chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

ESEMPIO $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

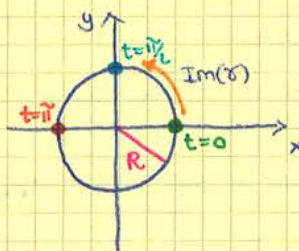
$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$, con $R > 0 \rightsquigarrow \gamma$ è chiusa.

Infatti $\gamma(0) = (R, 0)$, $\gamma(2\pi) = (R, 0)$

$(x, y) = \gamma(t) = (R \cos t, R \sin t) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t = R^2$$



ESEMPIO

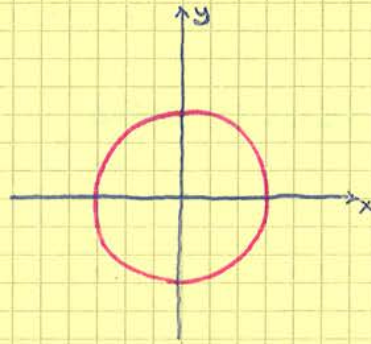
$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$\eta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \eta(\theta) = (R\cos(2\pi\theta), R\sin(2\pi\theta))$

γ e η sono equivalenti. Infatti

$\eta(\theta) = \gamma(2\pi\theta)$

$\alpha(\theta) = 2\pi\theta \rightarrow \alpha'(\theta) = 2\pi$



→* 3) Se Ω è simmetrico rispetto al piano xz e $\forall (x, y, z) \in \Omega$ si ha $f(x, -y, z) = f(x, y, z)$, allora

$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 2 \int_{\Omega'} f(x, y, z) dx dy dz$ con $\Omega' = \{(x, y, z) \in \Omega : y \geq 0\}$ (oppure $y \leq 0$)

4) Se Ω è simmetrico rispetto al piano xz e $\forall (x, y, z) \in \Omega$ si ha $f(x, -y, z) = -f(x, y, z)$, allora

$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$

5) Se Ω è simmetrico rispetto al piano yz e $\forall (x, y, z) \in \Omega$ si ha $f(-x, y, z) = f(x, y, z)$, allora

$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 2 \int_{\Omega'} f(x, y, z) dx dy dz$ con $\Omega' = \{(x, y, z) \in \Omega : x \geq 0\}$ (oppure $x \leq 0$)

6) Se Ω è simmetrico rispetto a yz e $\forall (x, y, z) \in \Omega$ si ha $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$, allora

$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$

Prop. Siano $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli, $\gamma: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\eta: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ due curve parametriche e $\alpha: J \rightarrow J$ una funzione biettiva di classe C^1 con $\alpha'(x_0) < 0 \forall x_0 \in J$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$. Allora si ha che

1) γ e η hanno lo stesso sostegno

2) γ è semplice $\Leftrightarrow \eta$ è semplice

3) γ è derivabile $\Leftrightarrow \eta$ è derivabile e si ha che $\forall x_0 \in J: \eta'(x_0) = (\gamma \circ \alpha)'(x_0) = \gamma'(\alpha(x_0)) \alpha'(x_0)$.

In particolare γ è regolare $\Leftrightarrow \eta$ è regolare

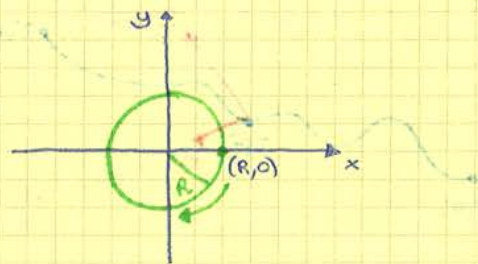
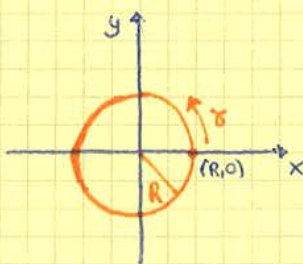
4) γ e η inducono versi di percorrenza opposti sul loro comune sostegno

↳ unico cambiamento dovuto al segno della derivata

ESEMPIO $R > 0$

$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$\eta: [-2\pi, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \eta(t) = (R\cos(-t), R\sin(-t))$



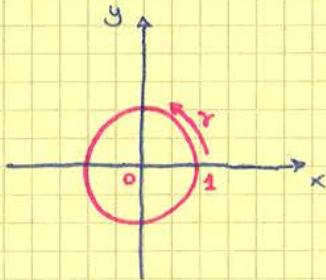
Supponiamo che $\|\gamma'(t)\| = 1 \quad \forall t \rightsquigarrow$ **VERSORE**

$$v(t) = [F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] \cdot \gamma'(t)$$

$$\|v(t)\| = \|[F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)] \cdot \gamma'(t)\| = |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)| \cdot \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{=1} = |F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)|$$

ESEMPIO

Calcolare l'integrale di linea di $F(x,y) = (y, x^2+y^2)$ lungo la curva γ che parametrizza la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 indicando sul di essa un verso di percorrenza antiorario.



$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = *$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = (\sin t, \cos^2 t + \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t) = (\sin t, 1) \cdot (-\sin t, \cos t) = (-\sin^2 t, \cos t)$$

$$* = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t, \cos t) dt = \left[-\frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) + \sin t \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi = -\pi$$

Teorema (di dipendenza dell'integrale di linea dal verso indotto dalla parametrizzazione sulla curva)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ e $\eta: [c,d] \rightarrow \Omega$ due curve parametriche semplici e regolari. Si ha che:

1) se γ e η sono equivalenti, allora $\left[\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\eta} F \cdot dP \right]$

2) Se esiste $\alpha: [c,d] \rightarrow [a,b]$ biettiva di classe C^1 con $\alpha'(t) < 0 \quad \forall t \in [c,d]$ tale che $\eta = \gamma \circ \alpha$, allora

$$\left[\int_{\gamma} F \cdot dP = - \int_{\eta} F \cdot dP \right]$$

*** DIMOSTRAZIONE**

$$2) \int_{\eta} F \cdot dP = \int_c^d F(\eta(\tau)) \cdot \eta'(\tau) d\tau =$$

$$\eta(\tau) = (\gamma \circ \alpha)(\tau) = \gamma(\alpha(\tau)) \rightarrow \eta'(\tau) = (\gamma \circ \alpha)'(\tau) = \gamma'(\alpha(\tau)) \alpha'(\tau)$$

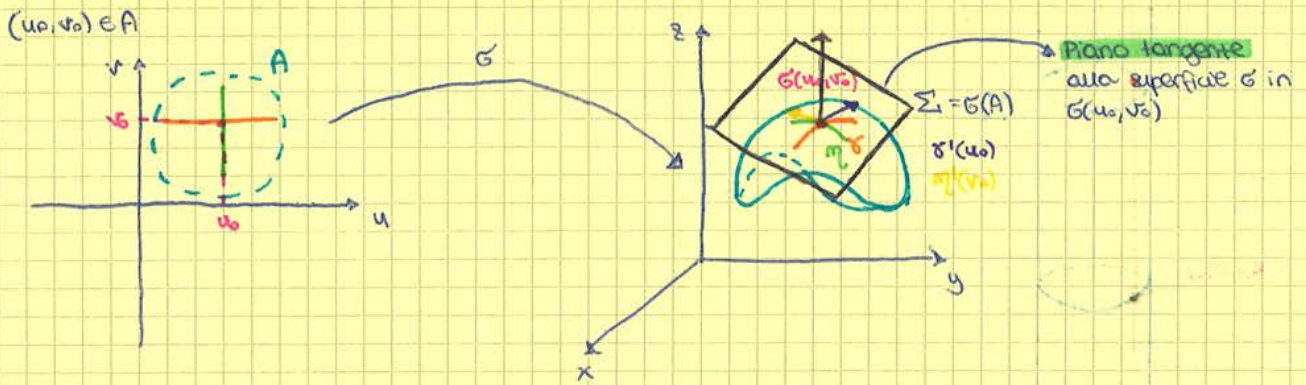
$$= \int_c^d F(\gamma(\alpha(\tau))) \cdot \gamma'(\alpha(\tau)) \cdot \alpha'(\tau) d\tau = \int_b^a F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = - \int_{\gamma} F \cdot dP$$

$t = \alpha(\tau)$
 $dt = \alpha'(\tau) d\tau$

α biettiva $\Rightarrow \alpha$ è suriettiva $\Rightarrow \alpha([c,d]) = [a,b]$

$\alpha' < 0 \Rightarrow \alpha$ è strettamente decrescente $\Rightarrow \alpha([c,d]) = [a,b] \Rightarrow \alpha(c) = b$ e $\alpha(d) = a$, dunque

1) per esercizio



$$\left. \begin{aligned} \sigma(u) &= \sigma(u, v_0) \\ \eta(v) &= \sigma(u_0, v) \end{aligned} \right\} \text{curve parametriche}$$

$$\begin{aligned} \sigma'(u) &= \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v_0) \\ \eta'(v) &= \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'(u_0) &= \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \eta'(v_0) &= \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

$$\sigma(u_0) = \sigma(u_0, v_0) = \eta(v_0)$$

Si chiama vettore normale al piano tangente a σ in $\sigma(u_0, v_0)$ (oppure vettore normale alla superficie Σ in $\sigma(u_0, v_0)$) il vettore $N(u_0, v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$

↳ **PRODOTTO VETTORIALE**
(o esterno)

Si chiama versore normale alla superficie Σ in $\sigma(u_0, v_0)$ il vettore $n(u_0, v_0) = \frac{N(u_0, v_0)}{\|N(u_0, v_0)\|}$

Si dice che σ individua sul suo sostegno un orientamento detto anche verso di attraversamento.

Def. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti connessi per archi, $\sigma: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tau: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ due superfici parametriche semplici e regolari. Diciamo che σ e τ sono equivalenti se \exists una funzione $\alpha: B \rightarrow A$ biettiva, di classe C^1 con $\det J_\alpha(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in B$ tale che $\tau = \sigma \circ \alpha$

Prop. Se σ e τ sono equivalenti, allora hanno lo stesso sostegno e inducono su di esso lo stesso verso di attraversamento.

Prop. Sono σ, τ e α come nella def. precedente, tranne che per il segno del $\det J_\alpha(x, y)$ e supponiamo che $\forall (x, y) \in B, \det J_\alpha(x, y) < 0$. Allora σ e τ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso versi di attraversamento opposti.

ESEMPIO

Siano $R > 0$ e $\sigma: \mathbb{R} \times (0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)$.
 σ è di classe C^1

$$J_\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} 0 & -R \sin v \\ 0 & R \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rango } 2 \rightsquigarrow \sigma \text{ è regolare}$$

Il sostegno di σ è $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \sigma(u, v), u \in \mathbb{R}, v \in (0, 2\pi]\}$

$$(x, y, z) = \sigma(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)$$

$$\begin{cases} x = R \cos v \\ y = R \sin v \\ z = u \end{cases} \quad x^2 + y^2 = R^2 \rightsquigarrow \text{cilindro retto con asse} \\ \text{coincidente con l'asse } z \quad \begin{matrix} v \neq 0, 2\pi \text{ (non abbiamo tutto il cilindro} \\ \text{manca un punto)} \\ x \neq R, y \neq 0 \end{matrix}$$

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = R^2\} \setminus \{(R, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

ESEMPIO

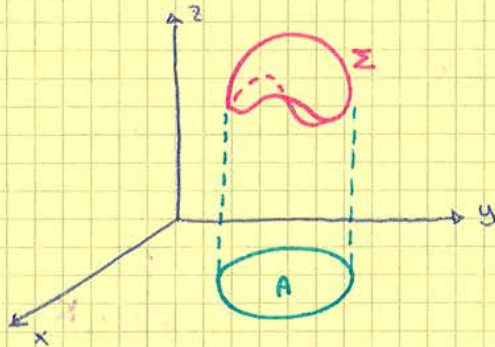
Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e $G: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $G(x,y) = (x,y, f(x,y))$

G è di classe C^1

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \rightarrow \text{ha rango } 2 \rightsquigarrow G \text{ è regolare}$$

Il sostegno di G è $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, z = f(x,y)\}$

$(x,y,z) = (x,y, f(x,y)) \Rightarrow \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, z = f(x,y)\} = G_A$ (grafico della funzione f)



Integrali di Superficie

Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ un compatto tale che ∂K sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $G: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regolare, $\Sigma = G(K)$ il sostegno di G e $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si chiama integrale di superficie (o integrale superficiale) di f su G (o su Σ) il numero reale

$$\int_G f = \int_K f(G(u,v)) \|N(u,v)\| du dv, \text{ dove } N(u,v) = \frac{\partial G}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial G}{\partial v}(u,v)$$

Se $f=1$, allora $\int_G 1 = A_\Sigma$ che è l'area della superficie Σ

* Osservazione Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ un compatto tale che ∂K sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K, z = g(x,y)\}$$

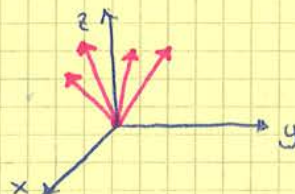
Allora Σ è il grafico della funzione g ristretta all'insieme K , cioè $\Sigma = G_A$. In tal caso una parametrizzazione di Σ è $G: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$G(x,y) = (x,y, g(x,y))$$

Il vettore normale $N(x,y)$ è $N(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial G_3}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial G_1}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y) & \frac{\partial G_3}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ 0 & 1 & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)\hat{i} + \left(-\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)\hat{j} + (1)\hat{k} =$$

$$= \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right)$$



Sarà sicuramente un vettore che punta verso l'alto, essendo la 3° componente positiva (z).

$$= \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \pi \left[\frac{1}{5} \rho^5 \right]_0^1 = \frac{2}{5} \sqrt{2} \pi$$



Teorema (di indipendenza dell'integrale di superficie dalla parametrizzazione)

Siano $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\tau: K' \rightarrow \mathbb{R}^3$ due calotte regolari equivalenti, $\Sigma = \sigma(K) = \tau(K')$ il sostegno di σ e τ e $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, allora si ha che:

$$\int_{\sigma} f = \int_{\tau} f$$

* Osservazione Se σ e τ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso versi di attraversamento opposti, allora risulta ancora che

$$\int_{\sigma} f = \int_{\tau} f \quad \text{perché il verso di percorrenza dipende da } N(x,y) \text{ di cui noi consideriamo la norma, che è uguale per } +N \text{ e } -N.$$

Flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ un compatto tale che $\sigma(K)$ sia il sostegno di una curva chiusa parametrizzata semplicemente e regolare a tratti, $\sigma: K \rightarrow \Omega$ una calotta regolare e $\Sigma = \sigma(K)$ il sostegno di σ . Si chiama flusso del campo F attraverso Σ (oppure Σ) il numero reale:

$$\int_{\sigma} F \cdot n, \int_{\Sigma} F \cdot n, \int_{\sigma} F \cdot n d\sigma, \int_{\Sigma} F \cdot n d\sigma$$

$$\int_{\sigma} F \cdot n = \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v) du dv, \quad \text{dove } N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

Se $\Sigma = \partial D$, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che $\text{int}(D) \neq \emptyset$, allora si parla di flusso entrante / uscente da Σ o da ∂D .

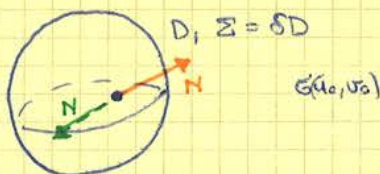
* Osservazione N è entrante o uscente?



$\Sigma = \partial D$

Si considera un punto $(u_0, v_0) \in \text{int}(K)$, cioè interno a K . Si calcolano $G(u_0, v_0)$ e $N(u_0, v_0)$. Abbiamo tre modi per rispondere alla domanda.

I) Metodo grafico



II) Metodo vettoriale

Da utilizzare se D è convesso, cioè se ogni coppia di punti distinti di D è collegabile con un segmento tutto contenuto in D , si procede nel seguente modo:

$$F(G_1(x,y)) \cdot N_1(x,y) = F(x,y,1) \cdot (0,0,1) = (x^2, y^2, 1) \cdot (0,0,1) = 1$$

Σ_2 è il grafico di $g_2(x,y) = x^2 + y^2 \quad \forall (x,y) \in K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\Sigma_2 = G_2(K_2), \quad G_2: K_2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad G_2(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$$



$$\int_{\Sigma_2} F \cdot d\sigma = \int_{K_2} F(G_2(x,y)) \cdot N_2(x,y) \, dx \, dy = *$$

$$N(x,y) = \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial G_2}{\partial y}(x,y) = (-2x, -2y, 1) \text{ è entrante in } D \text{ (usando il metodo grafico)}$$

Servendoci del metodo vettoriale:

$$[(x,y,z) - G_2(0,0)] \cdot N(0,0) = [(x,y,z) - (0,0,0)] \cdot (0,0,1) = (x,y,z) \cdot (0,0,1) = z$$

$(x,y,z) \in \delta D, (x,y,z) \in \Sigma_2 \rightarrow z = x^2 + y^2$ è un numero > 0 , dunque il vettore è entrante

$$N_2(x,y) = -N(x,y) = (2x, 2y, -1)$$

$$F(G_2(x,y)) \cdot N_2(x,y) = F(x,y, x^2 + y^2) \cdot (2x, 2y, -1) = (x^2, y^2, x^2 + y^2) \cdot (2x, 2y, -1) = 2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2$$

$$= \int_{K_2} (2x^3 + 2y^3 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \underbrace{\int_{K_2} 2x^3 \, dx \, dy}_0 + \underbrace{\int_{K_2} 2y^3 \, dx \, dy}_0 - \int_{K_2} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = - \int_{K_2} (x^2 + y^2) \, dx \, dy =$$

Passiamo in **COORDINATE POLARI** nel piano

$$\Phi: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad |\det J_\Phi(\rho, \theta)| = \rho$$

$$K_2' = [0,1] \times [0,2\pi]$$

$$= - \left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = -2\pi \left[\frac{1}{4} \rho^4 \right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}$$

conclusione:

$$\int_{\delta D} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} F \cdot n \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} F \cdot n \, d\sigma = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Teorema (dipendenza del flusso dal verso di attraversamento)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, $\sigma: K \rightarrow \Omega$ e $\tau: K' \rightarrow \Omega$ due carte regolari. Allora si ha che:

1) Se σ e τ sono equivalenti, allora $\left[\int_{\sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\tau} F \cdot n \, d\sigma \right]$

2) Se σ e τ hanno lo stesso sostegno ma inducono su di esso versi di attraversamento opposti, allora $\left[\int_{\sigma} F \cdot n \, d\sigma = - \int_{\tau} F \cdot n \, d\sigma \right]$

COROLLARIO

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato tale che ∂A sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti che induce su di essa un verso di percorrenza antiorario e $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale di classe C^1 s.t. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$

Allora $m(A) = \oint_{\partial A} F \cdot dP$

$F(x,y) = (0,x)$, $G(x,y) = (-y,0)$, $H(x,y) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$ sono alcuni campi che verificano la suddetta condizione.

ESEMPIO

Calcolare l'area della zona di piano delimitata dalla curva $\gamma(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t, t + t^3)$, $0 \leq t \leq 1$

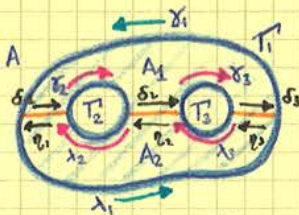


$m(A) = \int_A 1 \, dx dy = \oint_{\partial} F \cdot dP$, dove $F(x,y) = (-y, 0)$

$m(A) = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$

$F(\gamma(t)) = \gamma'(t) = (t^3 - t)(3t^2 - 6t + 2)$

* Osservazione da formula del teorema di Green vale anche se ∂A è l'unione di un numero finito di sostegni a 2 a 2 disgiunti di curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti che inducono su di essa un orientamento positivo.



$\partial A = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

le tre curve sono orientate in modo positivo

Ma il teorema richiede una sola curva parametrica per cui disegniamo una linea che intersechi i 3 insiemi

$A = A_1 \cup A_2$, $m(A_1 \cap A_2) = 0$

$\iint_A = \iint_{A_1} + \iint_{A_2} = \oint_{\partial A_1} F \cdot dP + \oint_{\partial A_2} F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} =$

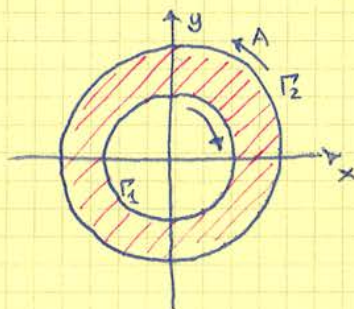
Applichiamo il Teorema di Green al campo F separatamente su A_1 e su A_2

$= \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP + \int_{\Gamma_3} F \cdot dP = \int_{\partial A} F \cdot dP$

ESEMPIO

Calcolare l'integrale di linea di $F(x,y) = (x^2y, y)$ lungo il bordo di

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ orientato positivamente



1° modo $\oint F \cdot dP = \int_{\Gamma_1} F \cdot dP + \int_{\Gamma_2} F \cdot dP$

2° modo - Applico il thm di Green

$\oint F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \int_A (0 - 3x^2y^2) dx dy =$

$= -3 \int_A x^2y^2 dx dy =$

COORDINATE POLARI

ENUNCIATO

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 , $F = (f_1, f_2, f_3)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto limitato connesso per archi, s.t. ∂A sia l'unione di un numero finito di sostegni a 2 a 2 disgiunti di curve parametriche chiuse, semplici e regolari a tratti, $K = \bar{A}$ e $G: K \rightarrow \Omega$ una calotta regolare con $\delta\sigma$ orientato positivamente.
 Allora si ha che:

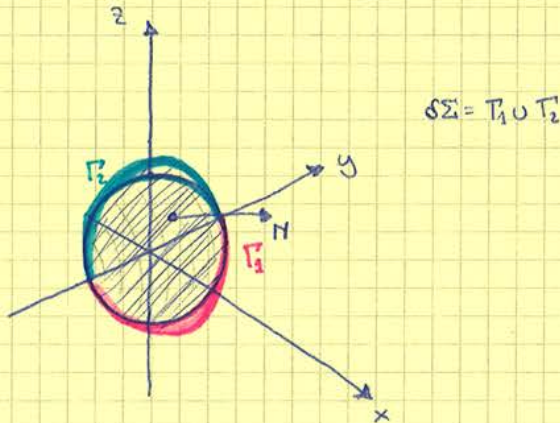
$$\oint_{\delta\sigma} F \cdot dP = \int_{\sigma} \text{rot } F \cdot n \, d\sigma, \text{ dove } \text{rot } F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ è il rotore di } F, \text{ definito da:}$$

$$\forall (x, y, z) \in \Omega$$

$$\text{rot } F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) & f_2(x, y, z) & f_3(x, y, z) \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

ESEMPIO

Calcolare l'integrale di linea di $F(x, y, z) = (x, y, z)$ lungo il bordo di $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0\}$ orientato positivamente rispetto al vettore normale uscente dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.



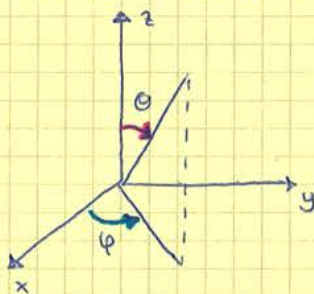
1° Modo $\oint_{\delta\Sigma} F \cdot dP = \int_{T_1} F \cdot dP + \int_{T_2} F \cdot dP$

2° Modo Per il thm di Stokes $\oint_{\delta\Sigma} F \cdot dP = \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot n \, d\sigma = *$

$$\text{rot } F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (1, 0, 0)$$

$\Sigma \rightarrow G \rightarrow N$

sia $G: K \rightarrow \mathbb{R}^3$, $G(\theta, \varphi) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$



θ : colitudine
 φ : longitudine
 $K = [0, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$

$\Sigma = G(K)$

$$N_{\neq}(\theta, \varphi) = \frac{\partial G}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \wedge \frac{\partial G}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$= (\sin^2\theta \cos\varphi, \sin^2\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\theta \cos^2\varphi + \cos\theta \sin\theta \sin^2\varphi) =$

$= (\sin^2\theta \cos\varphi, \sin^2\theta \sin\varphi, \cos\theta \sin\theta) \Rightarrow N_{\neq}$ è uscente dalla sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \rightarrow N(\theta, \varphi) = N_{\neq}(\theta, \varphi)$

Campi vettoriali conservativi

Consideriamo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Def. Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Diciamo che F è conservativo se esiste una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\forall x \in \Omega: \nabla f(x) = F(x)$. In tal caso f è detto un potenziale di F su Ω .
 In particolare, se $F = (f_1, \dots, f_n)$, $\nabla f(x) = F(x) \iff \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \iff$

$$\iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = f_n(x) \end{cases}$$

ESEMPIO

- $F(x,y) = (0,0)$ è conservativo, infatti un potenziale è $f(x,y) = 0$, essendo $\nabla f(x,y) = (0,0) = F(x,y)$
- $F(x,y) = (x,y)$ è conservativo, infatti un potenziale è $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, essendo $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (x,y) = F(x,y)$

Altri esempi partendo da $f(x,y)$ per ricavare $F(x,y)$.

* Osservazione Se f è un potenziale di F , allora $\forall c \in \mathbb{R}$ anche $f+c$ è un potenziale di F .
 Infatti

$$\nabla(f+c)(x) = \nabla f(x) + \underbrace{\nabla c(x)}_{\equiv 0} = \nabla f(x) = F(x)$$

Se F è conservativo, allora F ha infiniti potenziali

Def Siano $0 < a < b \leq +\infty$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a < \|x\| < b\}$ e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale. Diciamo che F è un campo radiale se F è della forma $F(x) = \varphi(\|x\|)x$, dove $\varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione

ESEMPIO

• $F(x,y) = (x,y) = 1 \cdot (x,y)$
 $\hookrightarrow \varphi(\|(x,y)\|) = 1$

• $F(x,y) = (0,0) = 0 \cdot (x,y)$
 $\hookrightarrow \varphi(\|(x,y)\|) = 0$

• Il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta nell'origine $(0,0,0)$ è $F: \mathbb{R}^3 \setminus \{0,0,0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x,y,z)$$

$\begin{aligned} \varphi(\|(x,y,z)\|) &= -\frac{1}{\|(x,y,z)\|^3} \xrightarrow{\|(x,y,z)\|=t} \varphi(t) = -\frac{1}{t^3} \\ \|(x,y,z)\| &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} = (x^2+y^2+z^2)^{1/2} \end{aligned}$

* Osservazione Se $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ è radiale e continua, allora F è conservativo

* DIMOSTRAZIONE

F radiale $\implies F(x) = \varphi(\|x\|) \cdot x$ dove $\varphi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione.
 Per ipotesi F è continua $\implies \varphi$ continua \implies anche la funzione $\{t \mapsto t\varphi(t)\}$ è continua.
 Per il Fundamental Int. Calculus thm questa funzione ammette primitive su (a,b) .
 Sia $\Phi: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva, quindi $\forall t \in (a,b): \Phi'(t) = t\varphi(t)$
 Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione
 $f(x) = \Phi(\|x\|)$

* Osservazione se Ω non è connesso per archi allora può non essere vero che $f-g$ è costante

ESEMPIO

$f(x,y) = \arctg(x,y)$
 $g(x,y) = -\arctg\frac{1}{xy}$

\Rightarrow sono due potenziali di $F(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}\right)$ su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy=0\}$

$f(x,y) - g(x,y) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } xy > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } xy < 0 \end{cases}$

perché $\arctg(t) + \arctg(1/t) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } t > 0 \\ -\pi/2 & \text{se } t < 0 \end{cases}$

Teorema (Integrali di linea di un campo conservativo)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo e conservativo, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ un potenziale di F su Ω e $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$ una curva parametrica semplice e regolare a tratti. Allora

$\int_{\gamma} F \cdot dP = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Inoltre se γ è chiusa, allora $\oint_{\gamma} F \cdot dP = 0$

* **DIMOSTRAZIONE**

Conformemente alla definizione di curva regolare a tratti esistono $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$ tali che γ è derivabile con derivata continua e non nulla in ogni $t \neq t_k$ e in t_k esistono le derivate laterali, $k = 0, \dots, m$

$\int_{\gamma} F \cdot dP = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt =$

Sia $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione $\varphi(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$
 φ è continua, φ è derivabile dove γ è derivabile, in ogni punto $t \neq t_k$ con derivata

$\varphi'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \rightarrow$ esattamente la funzione che stiamo integrando.

$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$\int_{\gamma} F \cdot dP = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt = \sum_{k=1}^m [\varphi(t)]_{t_{k-1}}^{t_k} = \sum_{k=1}^m [\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] = (\varphi(t_1) - \varphi(t_0)) + (\varphi(t_2) - \varphi(t_1)) + \dots + (\varphi(t_{m-1}) - \varphi(t_{m-2})) + (\varphi(t_m) - \varphi(t_{m-1})) = \varphi(t_m) - \varphi(t_0) = \varphi(b) - \varphi(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

c.v.d.

* Osservazione Ne segue che $\int_{\gamma} F \cdot dP$ non dipende dal percorso ma solo dai punti iniziale e finale, se F è un campo vettoriale conservativo.



$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$

Teorema (di equivalenza)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso per archi e $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo. Allora sono fatti equivalenti:

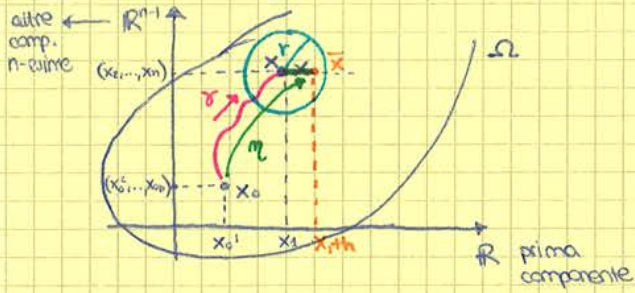
- 1) F è conservativo
- 2) Per ogni coppia di curve parametriche semplici e regolari a tratti $\gamma_1: [a,b] \rightarrow \Omega$ e $\gamma_2: [c,d] \rightarrow \Omega$ tali che $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ si ha che $\int_{\gamma_1} F \cdot dP = \int_{\gamma_2} F \cdot dP$
- 3) Per ogni curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti si ha che $\oint_{\gamma} F \cdot dP = 0$ con $\gamma: [a,b] \rightarrow \Omega$

Per definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h e_1) - f(x)}{h} \in \mathbb{R} \text{ dove } e_1 = (1, 0, \dots, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

Sia $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$



$$\Omega \text{ aperto } \left. \vphantom{\Omega} \right\} \Rightarrow \exists r > 0 : B_r(x) \subseteq \Omega$$

Sia $0 < h < r$ e consideriamo $\bar{x} = (x_1+h, x_2, \dots, x_n) \in B_r(x)$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h} \quad \text{con } f(x) = \int_{\gamma} F \cdot dP \quad \text{e} \quad f(\bar{x}) = \int_{\eta} F \cdot dP$$

dove $\eta : [a, b+h] \rightarrow \Omega$

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ (x_1+t, x_2, \dots, x_n) & \text{se } b < t \leq b+h \end{cases}$$

$$x_1 = a+b < a+t \leq a+b+h = x_1+h \Rightarrow a = x_1 - b$$

$$\eta(a) = \gamma(a) = x_0, \quad \eta(b+h) = \bar{x}$$

$$\text{Calcoliamo il rapp. incrementale } \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_{\eta} F \cdot dP - \int_{\gamma} F \cdot dP \right) = \frac{1}{h} \left(\int_a^b F(\eta(t)) \cdot \eta'(t) dt + \right.$$

$$\left. + \int_b^{b+h} F(\eta(t)) \cdot \eta'(t) dt - \int_{\gamma} F \cdot dP \right) = \frac{1}{h} \left(\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \int_b^{b+h} F(x_1+t-b, x_2, \dots, x_n) \cdot (1, 0, \dots, 0) dt - \int_{\gamma} F \cdot dP \right) =$$

$$= \frac{1}{h} \left(\int_{\gamma} F \cdot dP + \int_b^{b+h} f_1(x_1+t-b, x_2, \dots, x_n) dt + \int_{\gamma} F \cdot dP \right) = \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f_1(x_1+t-b, x_2, \dots, x_n) dt =$$

$$\uparrow F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

↑ cambio variabile
 $s = t - b$
 $ds = dt$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h f_1(x_1+s, x_2, \dots, x_n) ds$$

calcoliamo il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^h f_1(x_1+s, x_2, \dots, x_n) ds}{h} = \frac{0}{0} \text{ forma indeterminata} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_1(x_1+h, x_2, \dots, x_n)}{1} =$$

↓ de l'Hopital

$$= f_1(x)$$

↓ f_1 è continua,
l'alg. tende a x

Analogamente:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{h} = f_1(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1(x) \text{ poichè i limiti a destra e a sinistra coincidono}$$

Allo stesso modo si dimostra che $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x)$

Abbiamo che f_j continua $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}$ continua $\Rightarrow f$ è differenziabile in Ω

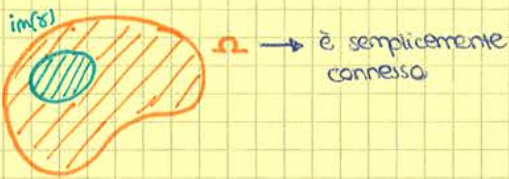
$$\text{Inoltre } \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) = F(x)$$

Quando f è un potenziale di F su $\Omega \Rightarrow F$ è conservativo $\Rightarrow \oint \dots$ c.v.d.

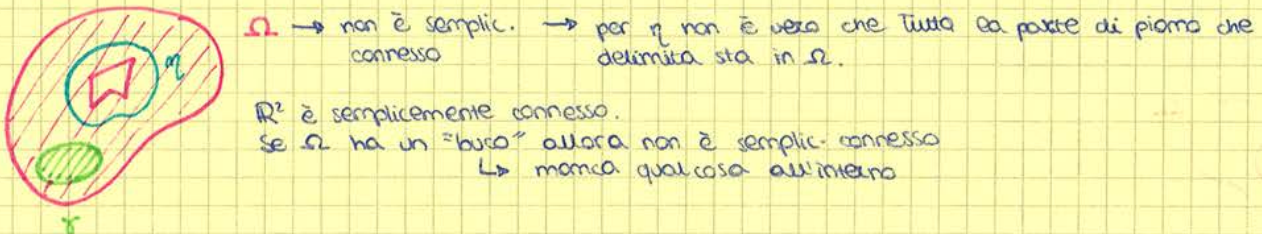
Per il Teorema di equivalenza F non è conservativo.

• chiusa e semplice

Def Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto connesso per archi. Diciamo che Ω è semplicemente connesso se γ curva parametrica γ' avente sostegno in Ω si ha che la parte di piano racchiusa nel sostegno di γ è contenuta in Ω .



ESEMPIO



Def Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto connesso per archi. Diciamo che Ω è semplicemente connesso se per ogni curva parametrica γ chiusa, semplice e regolare a tratti avente sostegno in Ω , esiste una calotta regolare σ il cui bordo è il sostegno di γ ed è tale che il sostegno di σ è contenuto in Ω .



$\Sigma = G(\gamma) \subseteq \Omega$

non è una linea piana, la troviamo nello spazio, dunque diciamo che deve esistere una calotta regolare tale che il suo bordo

$G\gamma = im(\gamma)$

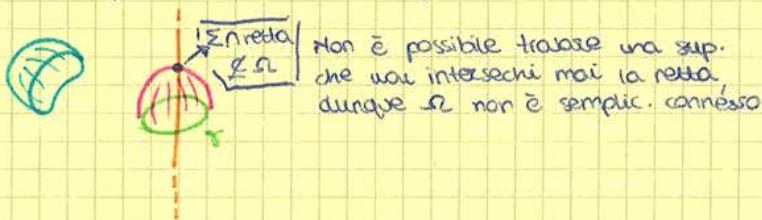
ESEMPIO

\mathbb{R}^3 è semplicemente connesso

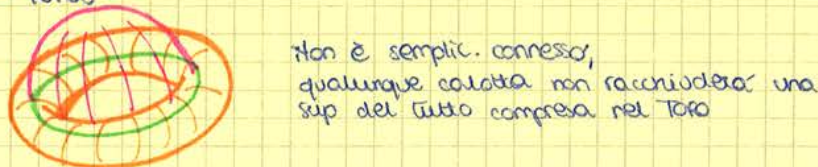
• $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{sfera}$ \rightarrow Ω è semplicemente connesso pur avendo un buco



• $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{retta}$ (buco "illimitato")



• Torus



• $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \text{semicoro}$ \rightarrow è semplic. connesso



ESEMPIO

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$G(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2} \right) \quad \text{dove } (G) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ non è semplic. connesso}$$

G è conservativo, infatti un potenziale di G su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è $g(x,y) = \log(x^2+y^2)$
 Ne segue che l'ipotesi di semplic. connesso è sufficiente ma non necessaria.

Determinare i potenziali di un campo conservativo.

Metodo delle integrazioni indefinite

Per semplicità consid. $n=2$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto connesso per archi, $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ continuo e conservativo, $F = (f_1, f_2)$

Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è un potenziale di F su Ω allora f è differenziabile in Ω e $\nabla f(x,y) = F(x,y)$, cioè

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) \Rightarrow f(x,y) = \int f_1(x,y) dx = F_1(x,y)$$

F_1 è una primitiva di f_1 rispetto a x, dove $k(y)$ è una funzione di y cost. rispetto a x.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) + k'(y) = f_2(x,y) \Rightarrow k'(y) = f_2(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \Rightarrow k(y) = \int f_2(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) dy = F_2(x,y) + c \in \mathbb{R}$$

F_2 è una primitiva rispetto a y

Ne segue che $f(x,y) = F_1(x,y) + F_2(x,y) + c$, $c \in \mathbb{R}$

Richiami sui limiti di successione

Def Una successione reale è una funzione reale definita su un sottoinsieme illimitato superiormente di \mathbb{N} . Si denota con (a_n) o $\{a_n\}$

Def Siamo (a_n) una successione reale e $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Diciamo che l è il limite di (a_n) per n che tende a $+\infty$ se per ogni intorno I_l di l esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_0$ si ha che $a_n \in I_l$. In tal caso scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \text{oppure} \quad \lim_n a_n = l$$

• Se $l \in \mathbb{R}$, allora $I_l = (l - \epsilon, l + \epsilon)$, con $\epsilon > 0$

$$\lim_n a_n = l \iff \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \text{ si ha } |a_n - l| < \epsilon$$

• Se $l = +\infty$ ($-\infty$), allora $I_l = [b, +\infty)$ ($I_l = (-\infty, b]$), $b \in \mathbb{R}$

$$\lim_n a_n = +\infty \text{ ($-\infty$)} \iff \forall b \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \text{ si ha } a_n > b \text{ ($a_n < b$)}$$

• Se $\lim_n a_n = l \in \mathbb{R}$ diciamo che (a_n) è convergente a l (oppure (a_n) converge a l)

• Se $\lim_n a_n = +\infty$ ($-\infty$) diciamo che (a_n) diverge positivamente (diverge negativamente)

• Se $\nexists \lim_n a_n$ diciamo che (a_n) è indeterminata.

Non sono sottosuccessioni di (a_n)

$$f_n = a_{7-n} \rightarrow \varphi(n) = 7-n \text{ strett. decrescente}$$

$$g_n = a_{e_n} \rightarrow \varphi(n) = e_n \notin \mathbb{N}$$

Prop. Sia (a_n) una successione reale.

Supponiamo che esista $\lim_n a_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Allora per ogni sottosuccessione (a_{n_k}) di (a_n) si ha che

$$\lim_k a_{n_k} = l$$

* Osservazione Se esistono (a_{n_k}) e (a_{m_h}) sottosuccessioni di (a_n) tali che $\lim_k a_{n_k} = l_1$ e $\lim_h a_{m_h} = l_2$ con $l_1 \neq l_2$, allora $\lim_n a_n \nexists$

ESEMPIO

$d_n = (-1)^n$, consideriamo due sottosuccessioni

$$\text{Sia } b_n = d_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \Rightarrow \lim_n b_n = 1$$

$$c_n = d_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \Rightarrow \lim_n c_n = -1$$

Per l'oss. precedente $\lim_n d_n \nexists \Rightarrow (d_n)$ è indeterminata

Teorema (di Bolzano - Weierstrass)

Sia (a_n) una successione reale limitata ($\exists M > 0$ s.t. $|a_n| < M$)
Allora esiste almeno una sottosuccessione (a_{n_k}) di (a_n) convergente.

Criterio del rapporto per le successioni (Thue)

Sia (a_n) una successione tale che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista il $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l, l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Allora si ha che:

- 1) Se $l < 1$, allora $\lim_n a_n = 0$
- 2) Se $l > 1$, allora $\lim_n a_n = +\infty$

* Osservazione Se $l = 1$, allora non si può concludere nulla (NSPCN)

ESEMPIO $\lim_n a_n/n! = 0$

Thue (Criterio della radice per le successioni)

Sia (a_n) una successione tale che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che esista il $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora si ha che

- 1) Se $l < 1$, allora $\lim_n a_n = 0$
- 2) Se $l > 1$, allora $\lim_n a_n = +\infty$

* Osservazione Sia (a_n) una successione tale che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$

Di qui $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = l = 1$

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\} \rightsquigarrow \left. \begin{array}{l} \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \\ \nexists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{array} \right\} \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

Si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

Se $a > 1 \Rightarrow \lim_n a^{n+1} = +\infty \Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n \left(\frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} \right) = +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ diverge positivamente

Se $a \leq -1$

Consideriamo prima $a = -1 \Rightarrow S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} = \frac{1+(-1)^n}{2}$

Sappiamo che $\lim_n (-1)^n \nexists \Rightarrow \nexists \lim_n S_n$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ è indeterminata

Consideriamo $a < -1 \Rightarrow \lim_n a^{n+1} \nexists$

$\nexists \lim_n S_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n$ è indeterminata

ESEMPIO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

\downarrow
 $a = \frac{1}{2} \rightarrow |\frac{1}{2}| < 1$

2) Serie armonica (generalizzata se $p \neq 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} : \begin{cases} \text{converge se } p > 1 \\ \text{diverge positivamente se } p \leq 1 \end{cases}$$

3) Serie telescopiche

Sono della forma $\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = \underbrace{(a_1 - a_0)}_{k=0} + \underbrace{(a_2 - a_1)}_{k=1} + \underbrace{(a_3 - a_2)}_{k=2} + \dots + \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{k=n-1} + \underbrace{(a_{n+1} - a_n)}_{k=n} = -a_0 + a_{n+1} = a_{n+1} - a_0$$

$\Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n (a_{n+1} - a_0)$

ESEMPIO - Serie di Mengoli

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$ è una serie telescopica.

\downarrow
 $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$ La serie di Mengoli converge a 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

VARIANTE delle serie telescopiche

Si $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+p} - a_n)$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+p} - a_k) = \underbrace{(a_p - a_0)}_{k=0} + \underbrace{(a_{p+1} - a_1)}_{k=1} + \underbrace{(a_{p+2} - a_2)}_{k=2} + \dots + \underbrace{(a_{n+p} - a_n)}_{k=n-1} + \underbrace{(a_{n+p+1} - a_{n+1})}_{k=n} = -a_0 - a_1 - a_2 - \dots - a_{p-1} + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$$

$$S_n = \underbrace{(a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p})}_{p \text{ termini}} - \underbrace{(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1})}_{p \text{ termini}}$$

Teorema (Condizione Necessaria) ma non sufficiente!

Sia (a_n) una successione reale. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_n a_n = 0$

* DIMOSTRAZIONE

$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Se $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \lim_n S_n = S \in \mathbb{R}$

$S_n = S_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1}$ (S_{n-1}) è una sottosuccessione di (S_n)
Per le prop. delle successioni

$\lim_n S_{n-1} = S$

$\lim_n a_n = \lim_n (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$ c.v.d.
 \downarrow \downarrow
 S S

* Osservazione: $\sum a_n$ converge $\Rightarrow \lim_n a_n = 0$ (\Leftarrow)

$\lim_n a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ non converge

ESEMPIO

$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$a_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$\lim_n a_n = \lim_n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0 \Rightarrow$ vale la c.N., $S_n = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \log\left(\frac{k+1}{k}\right) =$

$= \sum_{k=1}^n [\log(k+1) - \log(k)] = \log 2 - \log 1 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \dots + \log(n+1) - \log(n) = \log(n+1)$

$\Rightarrow \lim_n S_n = \lim_n \log(n+1) = +\infty$

$\Rightarrow \sum a_n = \sum \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge positivamente

Ne segue che la condiz. nec. non è sufficiente

Per le serie a termini positivi

Prop. Sia (a_n) una successione tale che $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora la serie di (a_n) converge o diverge positivamente a seconda che la successione delle somme parziali (S_n) della serie sia limitata o illimitata superiormente.

* DIMOSTRAZIONE

$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$

$\forall n \geq 0 \quad S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \rightarrow S_{n+1} \geq S_n \Rightarrow (S_n)$ è monotona crescente

Per il teorema sulle successioni monotone $\exists \lim_n S_n = \sup_n S_n$

Se (S_n) è limitata, allora $\sup_n S_n = S \in \mathbb{R}$,

quindi $\lim_n S_n = \sup_n S_n = S$

$\Rightarrow \sum a_n$ converge

Se (S_n) è illimitata allora $\sup_n S_n = +\infty$, quindi $\lim_n S_n = \sup_n S_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n$ diverge positivamente

* Osservazione Prop + C.N.

$\left. \begin{array}{l} a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_n a_n \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum a_n$ diverge

Teorema (Criterio del confronto asintotico)

Siano (a_n) e (b_n) due successioni tali che $a_n > 0$ e $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0, +\infty)$$

Valgono i seguenti fatti

- 1) Se $\ell > 0$, allora $\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow \sum b_n$ converge. (idem se diverge)
- 2) Se $\ell = 0$ e $\sum b_n$ converge, allora anche $\sum a_n$ converge
- 3) Se $\ell = 0$ e $\sum a_n$ diverge, allora anche $\sum b_n$ diverge

→ dobbiamo pensare due esempi tendenti a $0 \rightarrow a_n, b_n$ due infinitesimi dello stesso ordine (avranno lo stesso comportamento - prop. 1), a_n di ordine superiore (prop. 2), a_n di ordine inferiore (prop. 3)

* Teorema riscritto con $\sim, o()$

- 1) $a_n > 0, b_n > 0, \forall n, a_n \sim b_n, n \rightarrow +\infty, \ell \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere
- 2) $a_n > 0, b_n > 0, \forall n, a_n = o(b_n), n \rightarrow +\infty, \ell = 0, \sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
- 3) $a_n > 0, b_n > 0, \forall n, a_n = o(b_n), n \rightarrow +\infty, \sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

CASI SCOPERTI

4) $a_n, b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
 $a_n = o(b_n), \sum b_n$ diverge $\Rightarrow \sum a_n$ NSPCN

5) $a_n > 0, b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
 $a_n = o(b_n), \sum a_n$ converge $\Rightarrow \sum b_n$ NSPCN

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-n+1} > 0$$

$\forall n > 1, n^2-n+1 \leq n^2 \Rightarrow \forall n > 1: \frac{1}{n^2-n+1} \geq \frac{1}{n^2} > 0$ il criterio del confronto non è applicabile
 crit. conf. asintotico

$$\frac{1}{n^2-n+1} \sim \frac{1}{n^2}, n \rightarrow \infty, \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge} \Rightarrow \text{x il crit. conf. asintotico } \sum \frac{1}{n^2-n+1} \text{ converge}$$

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5n+3} > 0$$

$\forall n > 1: 5n+3 \geq 5n \geq n \rightarrow \forall n > 1, \frac{1}{5n+3} \leq \frac{1}{n}$ Ho criterio del confronto

$$\frac{1}{5n+3} \sim \frac{1}{5n} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n}, n \rightarrow +\infty$$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge \Rightarrow Per l'algebra delle serie anche $\sum \frac{1}{5} \frac{1}{n}$ diverge

(oss. $\sum a_n$ div. $\Rightarrow \forall \lambda \neq 0 \sum \lambda a_n$ diverge)

Per il crit. del confronto asintotico $\sum \frac{1}{5n+3}$ diverge

* OSSERVAZIONE $f \geq 0 \Rightarrow a_n \geq 0$
 $f \searrow \Rightarrow (a_n) \searrow$

ESEMPIO

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ (serie armonica generalizzata)

$a_n = \frac{1}{n^p} \geq 0$

Sia $p > 0 \rightarrow (a_n)$ decrescente, $f(x) = \frac{1}{x^p} \Rightarrow f \searrow$ e $a_n = \frac{1}{n^p} = f(n)$

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$

{ conv se $p > 1$
 div. se $p \leq 1$

Sia $p \leq 0 \Rightarrow \lim_n \frac{1}{n^p} \begin{cases} p=0 & \lim=1 \\ p < 0 & +\infty \end{cases}$ non vale la C.M., $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge

* OSSERVAZIONE (serie a termini negativi)

Sia (a_n) una successione tale che $a_n \leq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Si ha $a_n = -(-a_n)$ con $-a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

Per stabilire il carattere di $\sum a_n$ si studia il carattere di $\sum (-a_n)$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} (-a_n)$ converge a $S \geq 0$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a $-S \leq 0$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} (-a_n)$ diverge positivamente, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge negativamente.

Infatti, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} [-(-a_n)] = - \sum_{n=0}^{+\infty} (-a_n)$

↓
 x l'algebra delle serie

Per le serie a termini di segno variabile.

Teorema (Criterio della convergenza assoluta)

Sia a_n una successione reale, se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge e

si ha che $|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$

DIMOSTRAZIONE

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq |a_n|, -a_n \leq |a_n| \Rightarrow a \leq |a_n| + a_n \leq 2|a_n|, \forall n \in \mathbb{N}$

Se $\sum |a_n|$ converge assolutamente, allora $\sum |a_n|$ converge.

Per l'algebra delle serie anche $\sum 2|a_n|$ converge.

Per il criterio del confronto a termo due:

$\sum (|a_n| + a_n)$ converge

$\forall n \in \mathbb{N}: a_n = (|a_n| + a_n) - |a_n|$

Per l'algebra delle serie $\sum a_n$ converge.

Sia $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ e $\sigma_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$, Per la disuguaglianza triangolare del modulo si ha due:

$|S_n| = |a_0 + a_1 + \dots + a_n| \leq |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| = \sigma_n$

Poiché $\sum a_n$ e $\sum |a_n|$ convergono, allora $\lim_n S_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_n \sigma_n \in \mathbb{R}$

Per il I teorema del confronto sui limiti $\lim_n |S_n| \leq \lim_n \sigma_n$
 Ne segue che

$|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n| = |\lim_n S_n| = \lim_n |S_n| \leq \lim_n \sigma_n = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ c.v.d.

↓
 |·| è continua

Teorema (di Mertens)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ due serie reali convergenti rispettivamente ad A e B. Supponiamo che almeno una delle due serie converga assolutamente.
Allora la serie prodotto di Cauchy delle serie di a_n e b_n converge ad AB, cioè se $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$, $\forall n \geq 0$, allora

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) \right]$$

* OSSERVAZIONE Siano $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono ma non assolutamente

$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ è a termini di segno alterno, quindi variabile.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{1/2}}$$

Il termine $\frac{1}{(n+1)^{1/2}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$, per $n \rightarrow \infty$

Sappiamo che $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge. Per il criterio del confronto $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ diverge \Rightarrow

$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ non conv. assolutamente \Rightarrow non si può applicare il criterio della conv. ass.

ci serviamo del criterio di Leibniz:

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ ✓

2) p_n è decrescente?

$$p_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}} = p_n \quad \checkmark$$

\Rightarrow Per il crit. di Leibniz $\sum (-1)^n p_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge

Mostriamo che $\sum c_n$ non converge, dove $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$
Si ha che:

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

$$|c_n| = \left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \right| = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)}$$

$\forall 0 \leq k \leq n$

$$\underbrace{(k+1)}_{\geq 1} \underbrace{(n-k+1)}_{\geq 1} \leq (n+1)^2 \Rightarrow \sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{1}{(n+1)}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{1}{n+1} (n+1) = 1$$

* CONCLUSIONE:

$\forall n \in \mathbb{N} : |c_n| \geq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \neq 0 \Rightarrow$ non vale la C.N., dunque $\sum c_n$ non converge.

Serie complesse

Def. Sia (z_n) una successione in \mathbb{C} . Si chiama serie di (z_n) la scrittura formale $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ oppure $\sum z_n$. Poniamo $S_0 = z_0$

$\forall n \geq 1 : S_n = \sum_{k=0}^n z_k$, S_n è detta somma parziale n-esima della serie di z_n .

• Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge, se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{C}$ e in tal caso S è detto somma della serie e si pone

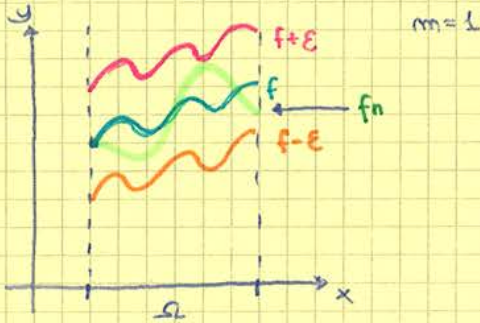
$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

• Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ non converge se $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ in \mathbb{C}

* OSSERVAZIONE $f_n \rightarrow f$ uniformemente in $\Omega \Rightarrow \lim \|f_n - f\|_\infty = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \forall x \in \Omega |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Per (a) * $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

Cioè $-\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon$, ovvero $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$

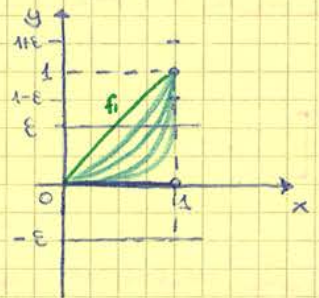


ESEMPIO

$f_n(x) = x^n \quad \forall x \in [0, 1]$

limite puntuale

$\forall x \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} \text{se } x=0 & \lim_n = 0 \\ \text{se } x=1 & \lim_n = 1 \\ \text{se } 0 < x < 1 & \lim_n = 0 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$



f è discontinua

$f_n \rightarrow f$ unif. in $[0, 1]$?

Cioè $\lim \|f_n - f\|_\infty = 0$, dove $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)|$?

$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 \leq x < 1 & x^n \\ x = 1 & 0 \end{cases}$

$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} x^n = 1$

$\lim_n \|f_n - f\| = \lim_n 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow f_n$ non converge uniformemente a f su $[0, 1]$

$\forall n$ il grafico di f_n non è contenuto nella striscia $f - \varepsilon, f + \varepsilon$

VARIANTE

$f_n(x) = x^n, \forall x \in [0, a], \quad 0 < a < 1$

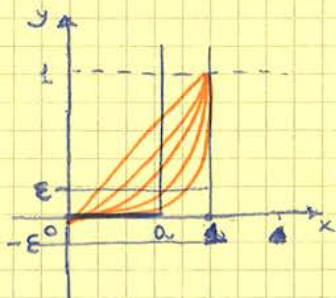
limite puntuale

$\forall x \in [0, a] \quad \lim_n f_n(x) = \lim_n x^n = 0 = g(x)$

$f_n \rightarrow g$ unif. f in $[0, a]$?

Cioè $\lim_n \|f_n - g\|_\infty = 0$? dove $\|f_n - g\|_\infty = \sup_{x \in [0, a]} |f_n(x) - g(x)| = \max_{x \in [0, a]} |f_n(x) - g(x)| = \max_{x \in [0, a]} x^n = a^n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g\|_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \Rightarrow f_n$ converge a g unif. in $[0, a]$



$\forall n > 6$
 f_n stanno in $g - \varepsilon, g + \varepsilon$

ESISTONO
ALTRI TIPI
DI CONV. IN
CERTI AMBITI

Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente (o normalmente) in Ω se converge in \mathbb{R} la serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty}, \text{ dove } \|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)|$$

* OSSERVAZIONE $\sum f_n(x)$ converge unif. in Ω a $f \implies \sum f_n(x)$ converge puntualmente in Ω a f .

Inoltre anche f è limitata.

* OSSERVAZIONE Se $f_n(x) = a_n, \forall x \in \Omega$, cioè $f_n(x)$ è una serie numerica, allora i 4 tipi di conv. si riducono a due:

- 1 convergenza uniforme \equiv convergenza
- 2 convergenza totale \equiv convergenza assoluta

DIMOSTRAZIONE 1) Infatti, $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^n a_k = S_n \rightarrow$ somma parziale di una serie numerica $\in \mathbb{R}$, costante, non dipende da $x, \forall x \in \Omega$.

$$\implies \lim_n S_n(x) = \lim_n S_n = f \in \mathbb{R} \text{ costante } \forall x \in \Omega$$

$$\implies \|S_n - f\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |S_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \Omega} |S_n - f| = |S_n - f|$$

$$\lim_n \|S_n - f\|_{\infty} = 0 \iff \lim_n |S_n - f| = 0 \iff \lim_n S_n = f$$

conv. UNIF CONVERGENZA

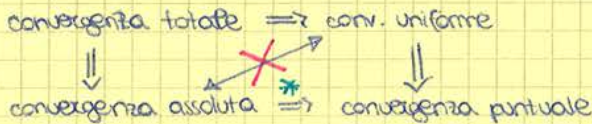
$$2) \|f_n\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f_n(x)| = \sup_{x \in \Omega} |a_n| = |a_n|$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

conv. TOTALE conv. ASSOLUTA

Teorema (legame tra i quattro tipi di conv.)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e (f_n) una succ. di funzioni limitate da Ω in \mathbb{R} . Allora valgono le seguenti implicazioni tra i 4 tipi di conv. della serie di f_n :



* Questa vale anche nel caso di funzioni illimitate.

\rightarrow conseq. diretta della Prop. (Continuità del lim. uniforme di funzioni continue)

Prop. (Continuità della somma di una serie di funzioni continue convergente uniformemente)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto, (f_n) una successione di funzioni continue e limitate da Ω in \mathbb{R} e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converga uniformemente a f in Ω . Allora f è continua.

* OSSERVAZIONE $\left. \begin{matrix} f_n \text{ continua} \\ f_n \text{ discontinua} \end{matrix} \right\} \implies \sum f_n(x) \text{ NON conv. unif. a } f$
 $\sum f_n(x) = f(x)$

ESEMPIO (di serie due conv. unif. ma non assolutamente)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge } \implies \text{converge unif.} \\ \text{NON converge ass.}$$

ESEMPIO (di serie due converge assolutamente ma non uniformemente)

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\operatorname{arctg}((n+1)x) - \operatorname{arctg}(nx)], \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{SERIE TELESCOPICA}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n [\operatorname{arctg}((k+1)x) - \operatorname{arctg}(kx)] = \operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}2x - \operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}3x - \operatorname{arctg}2x + \dots \\ + \operatorname{arctg}((n+1)x) - \operatorname{arctg}(nx) = \operatorname{arctg}((n+1)x) \implies \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_n S_n(x) = \lim_n \operatorname{arctg}((n+1)x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\pi/2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$= f(x)$, f è discontinua

$f_n(x) = \operatorname{arctg}((n+1)x) - \operatorname{arctg}(nx)$ è continua $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{Per l'oss. precedente } \sum f_n(x) \text{ non conv. unif. a } f \text{ su } \mathbb{R}$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ converge a $l \in \mathbb{R}$ e si ha due $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. In particolare $\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) \right]$

Dim. Tramite il teorema sullo scambio di ordine nei limiti applicato alla serie delle somme parziali.

SERIE DI POTENZE →

Teorema (di derivazione termine a termine per le serie di potenze)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze avente raggio di convergenza $R \in (0, +\infty]$. Allora la serie di potenze

$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ha raggio di convergenza R e si ha che $\forall x \in (-R, R)$

$$\left[D \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} D(a_n x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right] \quad (n=0 \Rightarrow D(a_0) = 0)$$

* OSSERVAZIONE Ne segue che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è di classe C^∞ se $R \in (0, +\infty]$

Teorema (di integrazione termine a termine per le serie di potenze)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze avente raggio di convergenza $R \in (0, +\infty]$. Allora la serie di potenze

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ ha raggio di convergenza R e per ogni x appartenente all'insieme di convergenza puntuale si ha che:

$$\left[\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n t^n dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} \right]$$

Serie di Taylor

Def. Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, $x_0 \in I$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ su I . Si chiama serie di Taylor di f centrata in x_0 la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{f^{(n)}(x_0)}_{a_n} (x-x_0)^n$$

dove $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ e $\forall n \geq 1: f^{(n)}(x_0) = D^n f(x_0)$

Se $x_0 = 0$ è anche detta serie di Maclaurin della funzione f

ANALISI I

Formula di Taylor con il resto di Peano

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

$$f = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

\downarrow $\alpha! = 1, 1 = 1$ $R_n, f, x_0(x) \rightarrow$ è la somma parziale n -esima della serie di Taylor di f centrata in x_0

* Supponiamo che

\sum di Taylor converga in ogni x con $|x-x_0| < 1$

Domanda: converge a f ? cioè per $n \rightarrow +\infty$ risulta $((x-x_0)^n \rightarrow 0)$

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x-x_0)^k$? NO, per dimostrarlo ci servono di un esempio.

ESEMPLO

Infatti $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \rightarrow$ non è analitica in 0.

risulta che $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$

Si osserva che f è C^∞ su \mathbb{R}

$$f'(x) = e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-1/x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2} \cdot 2t^3 = 0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\downarrow$$

$$t = 1/x$$

SVILUPPI IN SERIE NOTEVOLI DI McLAURIN (vedere dal libro)

1) $f(x) = e^x$ è e^0 su \mathbb{R} $[e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n] \forall x \in \mathbb{R}$
 $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow \forall \delta > 0, \forall x \in (-\delta, \delta) |f^{(n)}(x)| = |e^x| = e^x < e^\delta \rightarrow$ *f analitica in 0*
 $x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ \downarrow
 $-\delta < x < \delta$
 ↖ serie esponenziale

$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} = 1/e$

$x=2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2)^n = e^2$

2) $f(x) = \left[\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right] \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \left[\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right]$

3) $f(x) = \left[\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right] \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \left[\log(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]$

4) $f(x) = \left[\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right] \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} x^{n+1}$

5) $f(x) = \left[\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \right], \forall x \in \mathbb{R}$

6) $f(x) = \left[\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right] \forall x \in (-1, 1]$

$x=1 \Rightarrow \log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$

7) $f(x) = \left[\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right], \forall x \in [-1, 1]$ wrt $\sin x$ there's no factorial.

8) Sia $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \left[(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right] :$

dove $\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} & \text{se } n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ 1 & \text{se } n=0 \end{cases}$

$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in (-1, 1) \text{ se } \alpha \leq -1 \\ \forall x \in (-1, 1] \text{ se } -1 < \alpha < 0 \\ \forall x \in [-1, 1] \text{ se } \alpha \geq 0, \alpha \notin \mathbb{N} \\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ se } \alpha \in \mathbb{N} \end{array} \right.$

Def. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e integrabile in $[-\pi, \pi]$

Si chiama serie di Fourier di f la serie di funzioni

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, dove a_0, a_n e $b_n \in \mathbb{R}$, sono detti coefficienti di Fourier di f , e sono definiti dalle seguenti uguaglianze

• $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ e $\forall n \geq 1$

• $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$

• $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$

$\cos(nx), \sin(nx)$ hanno entrambi periodo minimo $\frac{2\pi}{n}$

Se f ha periodo $T > 0$ allora $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ ha periodo 2π

Def. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$ e integrabile in $[0, T]$

Si chiama serie di Fourier di f la serie di funzioni

$a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right))$

dove a_0, a_n e b_n sono i coeff. di Fourier di f definiti da:

• $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx$

e $\forall n \geq 1$: • $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$

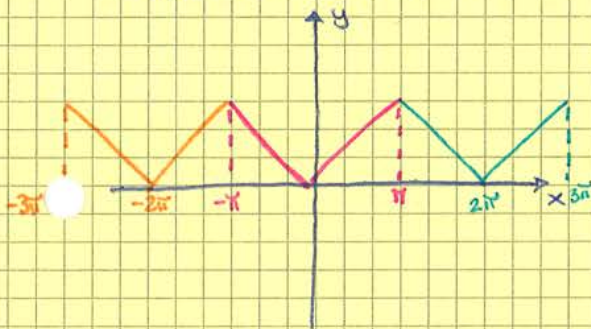
• $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) dx$

* Osservazione

Se f ha periodo 2π ed è pari, allora $f(x)\sin(nx)$ è dispari $\Rightarrow b_n = 0 \forall n \geq 1$
 Se f è dispari, allora $a_0 = 0$ e $f(x)\cos(nx)$ è dispari $\Rightarrow a_n = 0 \forall n \geq 1$ e dunque $a_n = 0 \forall n \geq 0$

ESEMPIO

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione ottenuta prolungando per periodicità a tutto \mathbb{R} la funzione $g(x) = |x|$, definita $\forall x \in [-\pi, \pi]$



g pari $\Rightarrow f$ pari $\Rightarrow b_n = 0 \forall n \geq 1$

La serie di Fourier di f è $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$

dove

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} |x| dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$

$\forall n \geq 1$: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx =$

integrando per parti

$= \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{1}{n} x \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \right) = -\frac{2}{\pi n} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi n^2} [\cos(n\pi) - 1] = -\frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]$

$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 2m \\ -\frac{4}{\pi (2m+1)^2} & \text{se } n = 2m+1 \end{cases} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

La serie di Fourier di f è

$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos[(2m+1)x]$

* Osservazione Domanda:

- 1) Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge?
- 2) Per tali $x \in \mathbb{R}$ converge uniformemente?
- 3) Per tali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge a $f(x)$?

Prop. Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e continua a tratti in $[-\pi, \pi]$ e $P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ il polinomio trigonometrico di grado n associato ad f . Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - 2\pi a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)$$

***osservazione** Tra tutti i polinomi trigonometrici di grado n , risulta che P_n è quello che approssima meglio in norma quadratica (o in media) la funzione f , cioè

$$Q_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)), \quad a_0, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, \text{ allora}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - Q_n(x)|^2 dx$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx} \quad \text{NORMA QUADRATICA di } f$$

Teorema (convergenza quadratica)

Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e continua a tratti in $[-\pi, \pi]$ e $P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ il polinomio trigonometrico di grado n associato a f .

Allora la serie di Fourier di f converge quadraticamente (o in media) a f , cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - P_n(x)|^2 dx = 0$$

Inoltre si ha che:

$$\left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right]$$

IDENTITÀ DI PARSEVAL

conseg. prop. precedente e conv. quadratica

***osservazione** Se f è continua a tratti $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ converge \Rightarrow per la c.n. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = 0$
 $\Rightarrow \lim_n a_n = 0, \lim_n b_n = 0$

Dividendo per 2π l'id. di Parseval diventa
 Abbiamo una sorta di sovrapp. degli effetti, l'eu. totale è data dalla somma dei singoli contributi di tutte le armoniche.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

ENERGIA DEL SEGNALE

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|^2 dx$$

armonica n-esima

Se f è periodica di periodo T e continua a tratti in $[0, T]$, allora:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(x)|^2 dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

Teorema (convergenza puntuale)

Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π e continua a tratti in $[-\pi, \pi]$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esistano in \mathbb{R} i seguenti limiti.

$$f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0^-}, \text{ dove } f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

↑ PSEUDO DERIVATA sinistra di $f(x)$

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0^+}, \text{ dove } f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

↑ PSEUDO DERIVATA destra di $f(x)$

Allora la serie di Fourier calcolata in x_0 converge a $\frac{1}{2}(f(x_0^-) + f(x_0^+))$

Inoltre, se f è ovunque continua in x_0 , allora la serie di Fourier di f calcolata in x_0 converge a $f(x_0)$ (essendo in questo caso $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$)

(destra)

***osservazione** se f ammette derivata sinistra in x_0 , cioè esiste $D^-f(x_0)$ ($D^-(f(x_0))$), allora $f'(x_0^-) = D^-f(x_0)$ e $f'(x_0^+) = D^+(f(x_0))$
 se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$

→ Serie di potenze

Introduciamo le serie di potenze reali.

Def. Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e (a_n) una successione di numeri reali. Si chiama serie di potenze centrata in x_0 la serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \text{ con la convenzione che } 0^0 = 1$$

Si chiama raggio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ l'entità

$$R = \sup \left\{ t \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ è convergente} \right\}$$

Con il cambiamento di variabile $t = x - x_0$ la serie di potenze centrata in x_0 diventa una serie di potenze centrata in 0. Infatti,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

Poiché la serie di potenze converge certamente in $x=x_0$, ovvero in $t=0$, si ha che $R \in [0, +\infty]$. Per semplicità espositiva, nel seguito considereremo serie di potenze centrate in 0.

Teorema (sull'insieme di convergenza)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in [0, +\infty]$ il suo raggio di convergenza. Valgono i seguenti fatti:

- i) se $R=0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge solo in $x=0$;
- ii) se $0 < R < +\infty$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente nell'intervallo $(-R, R)$ e uniformemente in ogni intervallo $[-k, k]$, con $0 < k < R$;
- iii) se $R = +\infty$, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente in \mathbb{R} e uniformemente in ogni intervallo $[k, k]$, con $k > 0$.

Teorema (di Abel)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze e $R \in (0, +\infty)$ il suo raggio di convergenza.

Se la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge anche in $x=R$ (risp. $x=-R$), allora converge uniformemente in ogni intervallo $[-k, R]$ (risp. $[-R, k]$) con $0 < k < R$.

In particolare, se converge in $x = \pm R$, allora converge uniformemente in $[-R, R]$.

ESEMPIO

Consideriamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Determiniamo il raggio di convergenza. Al momento non abbiamo strumenti per determinare il raggio di convergenza e quindi dobbiamo ricorrere alla definizione.

Sia $x \in \mathbb{R}$. Si ha che

$$\left| \frac{x^n}{n} \right| \leq |x|^n$$

Poiché la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} |x|^n$ converge se e solo se $|x| < 1$, per il criterio del confronto la serie di potenze converge in ogni x con $|x| < 1$. Consideriamo ora x con $|x| > 1$. Si ha che

$$x=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \text{diverge}$$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \text{converge}$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 1 \\ -\infty & \text{se } x < -1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ non converge}$$

Quindi $\left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ è convergente} \right\} = [-1, 1)$

Ne segue che il raggio di convergenza è $R = \sup(-1, 1) = 1$. La serie di potenze converge assolutamente in $(-1, 1)$ e per il teorema di Abel converge uniformemente in $[-k, k]$, per ogni $0 < k < 1$.

*** Osservazione** Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze, $I \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme di convergenza puntuale della serie e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ la somma della serie. Allora f è continua.

Teorema (della radice o di Cauchy-Hadamard)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze. Supponiamo che esista $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \in [0, +\infty]$.

Allora il raggio di convergenza della serie di potenze è

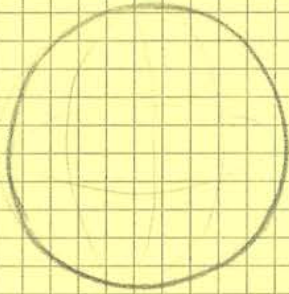
Teorema (Prodotto di Cauchy di serie di potenze)

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ due serie di potenze con raggi di convergenza rispettivamente R_1 e R_2 . Allora il prodotto di Cauchy delle serie, cioè la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, dove $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ ha raggio di convergenza $R \geq \min\{R_1, R_2\}$. Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ si ha che

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) \right]$$

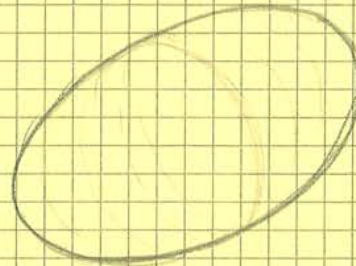
SUPERFICI NOTEVOLI

STERA



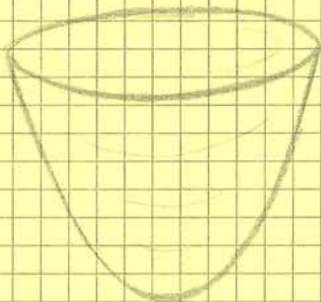
$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ELISSOIDE



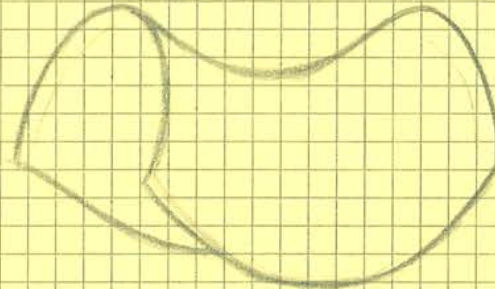
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

PARABOLOIDE



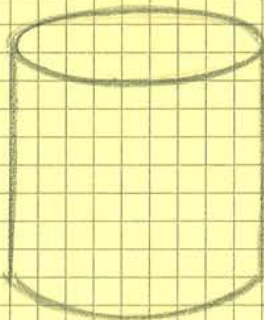
$$z = x^2 + y^2$$

PARABOLOIDE IPERBOLICO



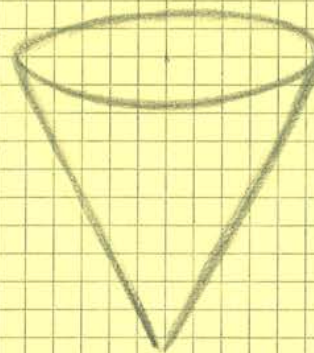
$$z = x^2 - y^2$$

CILINDRO



$$x^2 + y^2 = 1$$

SEMI CONO



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

INTEGRALI DI LINEA (CURVINEI II SPECIE)

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\gamma} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Da risolvere con la definizione se viene data la parametrizzazione della curva, altrimenti si applica il **TEOREMA DI GREEN** (solo nel caso di una curva chiusa)

$$\oint_{\partial A} F \cdot dP = \iint_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx dy \quad \text{in } \mathbb{R}^2$$

oppure il **TEOREMA DI STOKES** (curva chiusa)

$$\oint_{\partial G} F \cdot dP = \int_G \text{rot } F \cdot n \, dG = \int_K \text{rot } F(\zeta(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx dy \quad \text{in } \mathbb{R}^3$$

INTEGRALI DI SUPERFICIE

$$\int_{\Sigma} f = \int_K f(\zeta(x,y)) \cdot \|N(x,y)\| \, dx dy$$

Se $f=1$ si ha $\int_{\Sigma} 1 = A_{\Sigma}$

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

$$\int_{\Sigma} F \cdot n = \int_K F(\zeta(u,v)) \cdot N(u,v) \, du dv$$

Da risolvere con la definizione in casi semplici, altrimenti si applica il

TEOREMA DI GAUSS (flusso attraverso sup. chiusa)

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, dG = \int_D \text{div } F(x,y,z) \, dx dy dz$$

- * Gauss - testo breve
- Stokes - testo lungo

* Applicazione del teorema di Stokes

CALCOLARE L'INTEGRALE DI LINEA... → Calcolo il ROTORE $\int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot n \, dG$
 CALCOLARE IL FLUSSO DEL ROTORE... → Calcolo $\oint_{\partial \Sigma} F \cdot dP$ tramite definizione
 $\int_{\gamma} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

Esercitazione 1

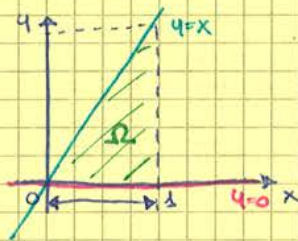
1) Calcolare $\int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

Sembra y-semplce \rightarrow lo è.

$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2 + y^2) dy \right] dx \quad \text{Partiamo dall'integrale interno ...}$$

$$\int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} + x^2 y \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{3} x^3 \right) dx = \int_0^1 \frac{4}{3} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Potremmo a risolvere lo stesso esercizio disegnando Ω

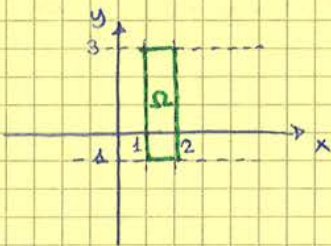


Si tratta di un insieme sia y-semplce sia x-semplce

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq x \leq 1 \end{aligned} \Rightarrow \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$$

scritto in questo modo è x-semplce

2) Calcolare $\int_{\Omega} (x^2 - xe^y) dx dy$, dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 3\}$



$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (x^2 - xe^y) dx dy &= \int_{\Omega} x^2 dx dy - \int_{\Omega} xe^y dx dy = \left(\int_1^2 x^2 dx \right) \left(\int_{-1}^3 1 dy \right) - \left(\int_1^2 x dx \right) \left(\int_{-1}^3 e^y dy \right) = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 [4] - \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 [e^y]_{-1}^3 = \frac{7}{3} \cdot 4 - \frac{3}{2} (e^3 - e^{-1}) = \frac{28}{3} - \frac{3}{2} (e^3 - e^{-1}) \end{aligned}$$

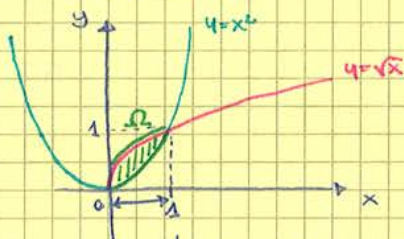
3) Calcolare $\int_{\Omega} xy dx dy$, dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

Sembra y-semplce, dobbiamo verificare se x sta in un intervallo.

$$x^2 \leq \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x^3 - 1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x-1)(x^2+x+1) \leq 0 \end{cases} \rightarrow 0 \leq x \leq 1$$

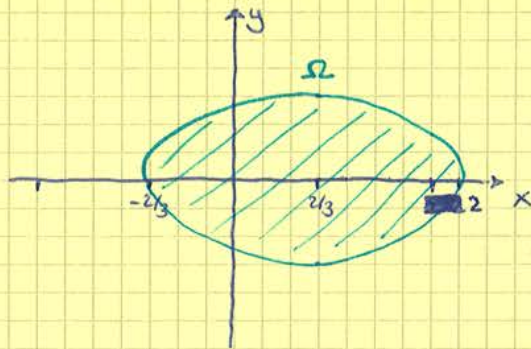
$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ possiamo dire che è y-semplce.

In alternativa



Notiamo che è sia x-semplce sia y-semplce

\hookrightarrow trovato imponendo $x^2 = \sqrt{x}$ (intersezione)



$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \leq 1 \right\}$$

$$\int_{\Omega} (4 + 4x - 3x^2 - 4y^2) dx dy = \int_{\Omega} \left[\frac{16}{3} - 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 4y^2 \right] dx dy =$$

Passiamo in COORDINATE ELLITTICHE centrate in $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ con $a = \frac{4}{3}$, $b = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

$$\Phi: \begin{cases} x = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \rho \cos \theta \\ y = \frac{2}{3}\sqrt{3} \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad |\det J_{\Phi}(\rho, \theta)| = \frac{8}{9}\sqrt{3} \rho = ab\rho$$

$$\int_{\Omega'} \left[\frac{16}{3} - \frac{16}{3} \rho^2 \cos^2 \theta - \frac{16}{3} \rho^2 \sin^2 \theta \right] \frac{8}{9}\sqrt{3} \rho d\rho d\theta = \int_{\Omega'} \frac{16}{3} (1 - \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta) \frac{8}{9}\sqrt{3} \rho d\rho d\theta =$$

$$= \frac{128}{27}\sqrt{3} \int_{\Omega'} (1 - \rho^2) \rho d\rho d\theta = *$$

$$(x, y) \in \Omega' \iff \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} \leq 1 \longrightarrow \frac{\left(\frac{4}{3} \rho \cos \theta\right)^2}{\frac{16}{9}} + \frac{\left(\frac{2}{3}\sqrt{3} \rho \sin \theta\right)^2}{\frac{4}{3}} \leq 1 \longrightarrow \rho^2 \leq 1 \longrightarrow 0 \leq \rho \leq 1$$

$$\Omega' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$* \frac{128}{27}\sqrt{3} \left(\int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) = \frac{128}{27}\sqrt{3} \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1 2\pi = \frac{128}{27}\sqrt{3} \frac{1}{4} 2\pi = \frac{64}{27}\sqrt{3} \pi$$

3) Calcolare $\int_{\Omega} x y^2 z^3 dx dy dz$ dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2, 2 \leq z \leq 3\}$

$$\int_{\Omega} x y^2 z^3 dx dy dz = \left(\int_0^1 x dx \right) \left(\int_1^2 y^2 dy \right) \left(\int_2^3 z^3 dz \right) = \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_1^2 \left[\frac{1}{4} z^4 \right]_2^3 = \frac{455}{24}$$

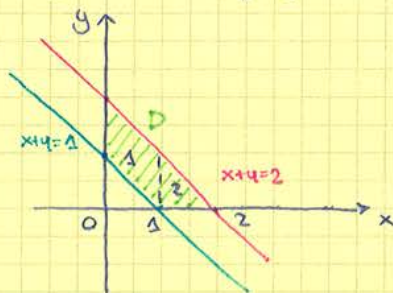
4) Calcolare il volume di $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2x, 1 \leq x+y \leq 2, x > 0, y > 0\}$

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx dy dz$$

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 2x\} \quad \text{dove } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x+y \leq 2, x > 0, y > 0\}$$

Integrando per fili // all'asse z si ha

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} 1 dx dy dz = \int_D \left[\int_0^{2x} 1 dz \right] dx dy = \int_D 2x dx dy$$



D è y-semplike

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq 2-x\}$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x\}$$

2) Calcolare $\int_{\Omega} \frac{x}{x^2+z^2} dx dy dz$, dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+z^2 \leq 2x, 0 \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2}\}$

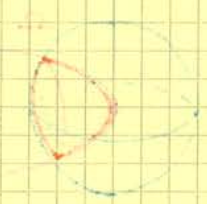
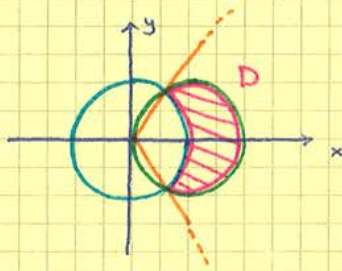
Integrazione per fili // all'asse y:

$D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+z^2 \leq 2x\}$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D, 0 \leq y \leq \sqrt{x^2+z^2}\}$

$\int_{\Omega} \frac{x}{x^2+z^2} dx dy dz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{x^2+z^2}} \frac{x}{x^2+z^2} dy \right] dx dz = \int_D \left[y \frac{x}{x^2+z^2} \right]_0^{\sqrt{x^2+z^2}} dx dz = \int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}} dx dz = *$

$x^2+z^2 - 2x = 0 \rightarrow (x-1)^2+z^2 \leq 1$



Passiamo in coordinate POLARI centrate in (0,0)

$\Phi: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rho \geq 0, -\pi \leq \theta \leq \pi, |\det J_{\Phi}(\rho, \theta)| = \rho$

$* = \int_D \frac{\rho \cos \theta}{\rho} \rho d\rho d\theta = \int_D \rho \cos \theta d\rho d\theta = *$

$(x,z) \in D \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 2\rho \cos \theta \\ \rho \geq 0 \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho \geq 1 \\ \rho \leq 2 \cos \theta \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \cos \theta \\ -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

$1 \leq 2 \cos \theta \rightarrow \cos \theta \geq \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

$D' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 1 \leq \rho \leq 2 \cos \theta\}$

$* = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[\int_1^{2 \cos \theta} \rho \cos \theta d\rho \right] d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left[\frac{1}{2} \rho^2 \cos \theta \right]_1^{2 \cos \theta} d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2 \cos^3 \theta - \frac{1}{2} \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 4(1 - \sin^2 \theta) - \cos \theta d\theta =$

$= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 3 \cos \theta [-4 \cos \theta \sin^2 \theta] d\theta = \frac{1}{2} \left[3 \sin \theta - \frac{4}{3} \sin^3 \theta \right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \sqrt{3} - \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \sqrt{3} - \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \right] =$

$= \frac{1}{2} [3\sqrt{3} - \sqrt{3}] = \sqrt{3}$

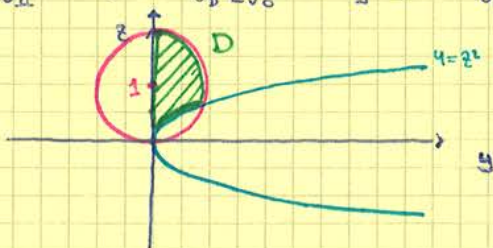
3) Calcolare $\int_{\Omega} x dx dy dz$ dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < z^2, z^2 - 2z + y^2 < 0, 0 < x < \sqrt{yz}\}$

Integrazione per fili // all'asse x

$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < z^2, z^2 - 2z + y^2 < 0, z > 0\}$

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D, 0 < x < \sqrt{yz}\}$

$\int_{\Omega} x dx dy dz = \int_D \left[\int_0^{\sqrt{yz}} x dx \right] dy dz = \int_D \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sqrt{yz}} dy dz = \int_D \frac{1}{2} yz dy dz = *$



D è z-semplice

$\sqrt{y} < z < 1 + \sqrt{1-y}$

$D = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, \sqrt{y} < z < 1 + \sqrt{1-y}\}$

ESERCITAZIONE 4

Parametrizzazione di ellissi

1) Senso antiorario

$$(x_0, y_0), a, b > 0$$

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t)$$

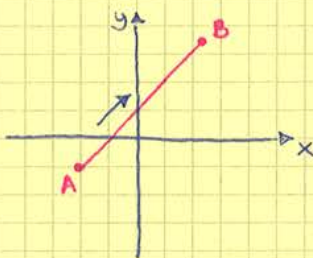
2) Senso orario

$$\eta: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\eta(t) = (x_0 + a \cos t, y_0 - b \sin t)$$

Parametrizzazione di un segmento nel piano

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ da A a B



$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A))$$

$$\gamma(0) = (x_A, y_A) \rightarrow \text{il punto iniziale è A}$$

$$\gamma(1) = (x_B, y_B) \rightarrow \text{il punto finale è B}$$

$$(x, y) = \gamma(t) \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Supponiamo che $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$

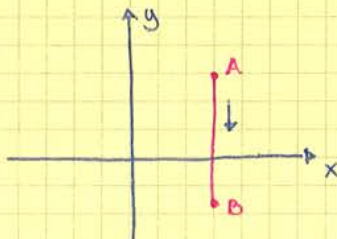
$$\begin{cases} t = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \\ t = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \end{cases} \Rightarrow \left[\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \right]$$

Supponiamo che $x_A \leq x_B$ e $y_A \leq y_B$

$$0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \begin{aligned} x_A + t(x_B - x_A) &\geq x_A + 0 = x_A && \Rightarrow x_A \leq x_A + t(x_B - x_A) \leq x_B \\ x_A + t(x_B - x_A) &\leq x_A + 1(x_B - x_A) = x_B \end{aligned}$$

Analogamente $y_A \leq y_A + t(y_B - y_A) \leq y_B$

Se $x_A = x_B$ e $y_A \neq y_B$ avremo $\gamma(t) = (x_A, y_A + t(y_B - y_A))$



Parametrizzazione di un segmento nello spazio

$A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$, da A a B

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(t) = (x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A), z_A + t(z_B - z_A))$$

$$* = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -8 \cos t \sin^2 t + 8 \cos t \, dt = \left[-\frac{8}{3} \sin^3 t + 8 \sin t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{32}{3}$$

$$\gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma_2(t) = (0, 2-4t) \quad \gamma_2(0) = (0, 2) = A \quad \gamma_2(1) = (0, -2) = B$$

$$\int_{\gamma_2} F \cdot dP = \int_0^1 F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt = *$$

$$F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) = F(0, 2-4t) \cdot (0, -4) = (0, (2-4t)^2) \cdot (0, -4) = -4(2-4t)^2$$

$$* = \int_0^1 -4(2-4t)^2 \, dt = \left[-\frac{1}{3}(2-4t)^3 \right]_0^1 = -\frac{16}{3}$$

Conclusione:

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \int_{\gamma_1} F \cdot dP + \int_{\gamma_2} F \cdot dP = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3}$$

* Alternativa: calcolo con il teorema di Green

$$\int_{\gamma} F \cdot dP = \oint_{\partial A} F \cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \quad F = (f_1, f_2)$$

$$= \int_A (2x - x) \, dx dy = \int_A x \, dx dy = \int_{A'} \rho^2 \cos \theta \, d\rho d\theta = * \quad \text{con } A' = [0, 2] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

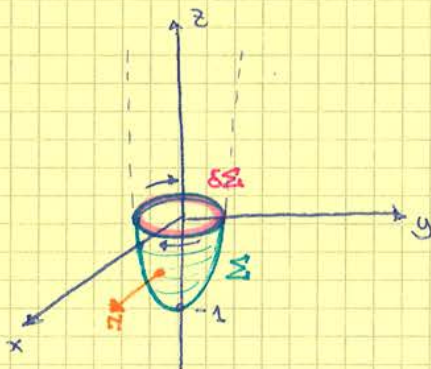
↑
COORD. POLARI

$$\text{dove } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$$

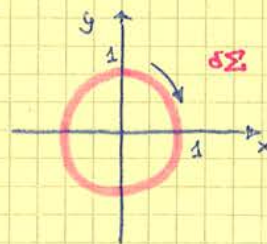
$$* = \left(\int_0^2 \rho^2 \, d\rho \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \right) = \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^2 \left[+\sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8}{3} [2] = \frac{16}{3}$$

4) Calcolare l'integrale di linea di $F(x, y, z) = (y, -x, z^2)$ lungo il bordo della superficie

$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 - 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$ orientata positivamente rispetto al vettore normale uscente dal paraboloido $z = x^2 + y^2 - 1$.



$$\partial \Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$



$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$$

$$\int_{\partial \Sigma} F \cdot dP = \int_{\gamma} F \cdot dP = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = *$$

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = F(\cos t, -\sin t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) = (-\sin t, -\cos t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t, 0) = 1$$

$$* = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

2) Calcolare $\int_{\Sigma} \frac{1}{z^2} d\sigma$, dove $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \leq z \leq 2\}$

$\Sigma \rightarrow \sigma \rightarrow N$

Σ è il grafico di $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\Sigma = G(K)$, $G: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è

$G(x,y) = (x,y,g(x,y)) = (x,y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$

$1 \leq z \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 1$

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2+y^2 \leq 1\}$

$N(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(\frac{2x}{2(x^2+y^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 1\right)$

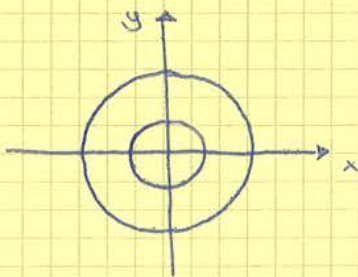
$\|N(x,y)\| = \sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^3} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^3} + 1} = \sqrt{\frac{1}{(x^2+y^2)^2} + 1} = \sqrt{\frac{1+(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2}$

$f(x,y,z) = \frac{1}{z^2}$

$\int_{\Sigma} \frac{1}{z^2} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(G(x,y)) \cdot \|N(x,y)\| dx dy = \int_K f(x,y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) \cdot \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{x^2+y^2} dx dy =$

$= \int_K (x^2+y^2)^2 \cdot \frac{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}{(x^2+y^2)^2} dx dy = \int_K (x^2+y^2) \sqrt{1+(x^2+y^2)^2} dx dy = *$

↓ passiamo in coord. POLARI



$* = \int_{K'} \rho^3 \sqrt{1+\rho^4} d\rho d\theta =$ dove $K' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < \rho < 1, 0 < \theta < 2\pi\}$

$= \left(\int_{1/2}^1 \rho^3 (1+\rho^4)^{1/2} d\rho\right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) = 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1+\rho^4)^{3/2}\right]_{1/2}^1 = \frac{\pi}{3} (2\sqrt{2} - \frac{17}{16} \frac{\sqrt{17}}{4}) = \frac{\pi}{3} (2\sqrt{2} - \frac{17}{64} \sqrt{17})$

3) Calcolare $\int_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}} d\sigma$, dove $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \log(x^2+y^2), 1 \leq (x^2+y^2) \leq e^2\}$

Σ è il grafico della funzione $g(x,y) = \log(x^2+y^2)$, $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ dove

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq e^2\}$

$\Sigma = G(K)$, $G: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ è $G(x,y) = (x,y, \log(x^2+y^2))$

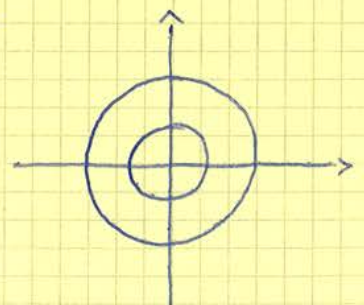
$N(x,y) = \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{-2x}{x^2+y^2}, \frac{-2y}{x^2+y^2}, 1\right)$

$\|N(x,y)\| = \sqrt{\frac{4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + 1} = \sqrt{\frac{4+x^2+y^2}{x^2+y^2}} =$

$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$

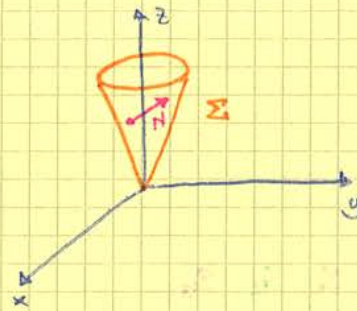
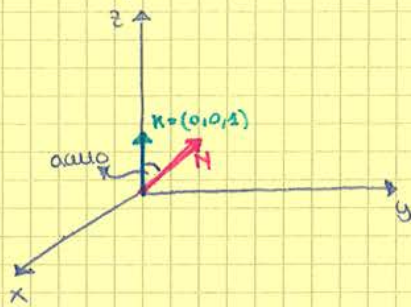
$\int_{\Sigma} \frac{z}{\sqrt{4+x^2+y^2}} d\sigma = \int_{\Sigma} f d\sigma = \int_K f(x,y, \log(x^2+y^2)) \cdot \frac{\sqrt{4+x^2+y^2}}{x^2+y^2} dx dy = \int_K \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{4+x^2+y^2}} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy =$

$= \int_K \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$



5) Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (-3x, -3y, 2\sqrt{x^2+y^2} - z)$ attraverso

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2 \leq 9\}$ orientato in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il vettore fondamentale dell'asse z.



Σ è il grafico di $g(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$ dove $g: K \rightarrow \mathbb{R}$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\}$

$\Sigma = g(K)$, $g: K \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (x, y, 2\sqrt{x^2+y^2})$

$$N_g(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right)$$

N_g forma un angolo acuto con il vettore K , dunque $N(x,y) = N_g(x,y)$

$$= \int_K F(g(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy =$$

$$F(g(x,y)) \cdot N(x,y) = F(x, y, 2\sqrt{x^2+y^2}) \cdot \left(\frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) = (-3x, -3y, 0) \cdot \left(\frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right) =$$

$$= \frac{6x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{6y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 6\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \int_K 6\sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy = \int_{K'} 6\rho^2 \, d\rho \, d\theta = \text{con } K' : [0, 3] \times [0, 2\pi]$$

COORD.
POLARI

$$= \left(\int_0^3 \rho^2 \, d\rho \right) \cdot 12\pi = 12\pi \left[\frac{1}{3} \rho^3 \right]_0^3 = 108\pi$$

$$* = \int_{K_2} -1 \, dx \, dy = - \int_{K_2} dx \, dy = -m(K_2) = -\pi R^2 = -9\pi$$

$$\Sigma_3 = G_3(K_3), \quad G_3: K_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$G_3(x, y) = (x, y, 1) \quad \text{con } K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$N_3(x, y) = \frac{\partial G_3}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial G_3}{\partial y}(x, y) = (0, 0, 1) \rightarrow \text{è uscente da } D$$

$$N_3(x, y) = N_3(x, y) = (0, 0, 1)$$

$$\int_{\Sigma_3} F \cdot n \, d\sigma = \int_{K_3} F(G_3(x, y)) \cdot N_3(x, y) \, dx \, dy = *$$

$$F(G_3(x, y)) \cdot N_3(x, y) = F(x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) = (x, y, 1) \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, 1) = 1$$

$$* = \int_{K_3} 1 \, dx \, dy = m(K_3) = 9\pi$$

* Conclusione :

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} + \int_{\Sigma_2} + \int_{\Sigma_3} = 18\pi + 9\pi - 9\pi = 18\pi$$

ALTERNATIVA: Teorema di Gauss

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_D (1 + 2z) \, dx \, dy \, dz$$

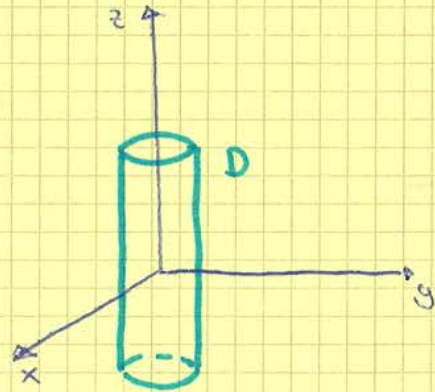
$$F(x, y, z) = (x, y, z^2)$$

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = 1 + 2z$$

Integrando per fili // all'asse z

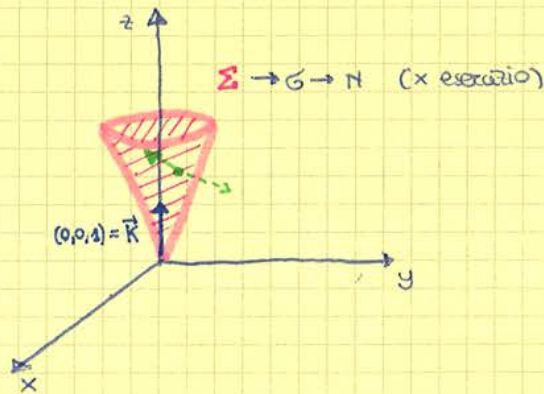
$$= \int_K \left[\int_{-1}^1 (1 + 2z) \, dz \right] dx \, dy = \text{dove } K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$$

$$= \int_K [z + z^2]_{-1}^1 dx \, dy = \int_K 2 \, dx \, dy = 2m(K) = 18\pi$$



2) Calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ attraverso la superficie

$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 4\}$ orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il vettore fondamentale dell'asse z.



Si può applicare Gauss a $\Sigma \cup S = \partial D$



$$\int_{\Sigma} F \cdot n \, d\sigma = \int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma - \int_S F \cdot n \, d\sigma$$

FLUSSO ENTRANTE

$$\int_{\partial D} F \cdot n \, d\sigma = - \text{FLUSSO USCENTE} \stackrel{\text{GAUSS}}{=} - \int_D \operatorname{div} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz =$$