NUMERO: 1647A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Salis

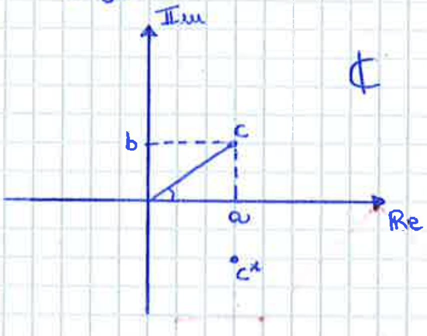
MATERIA: Analisi dei Segnali. Prof.Visintin

ANALISI DEI SEGNALI

INTRODUZIONE AI S
- Principali segnali
- Segnali a tempo c
- Sistemi LTI
- FIR & IIR
- Risposta all'impu

NUMERI COMPLESSI

$c = a + jb$



$Re\{c\} = a = \frac{c+c^*}{2}$ dove $c^* = a - jb$

$Im\{c\} = b = \frac{c-c^*}{2j}$

$|c|^2 = a^2 + b^2 = cc^*$

$\angle c = \arctan(b/a)$

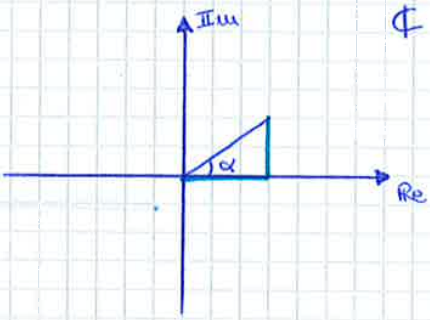
M = modulo $= \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{cc^*}$

φ = fase = $\arctan(b/a)$

TRIGONOMETRIA

$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = Re\{e^{j\alpha}\}$

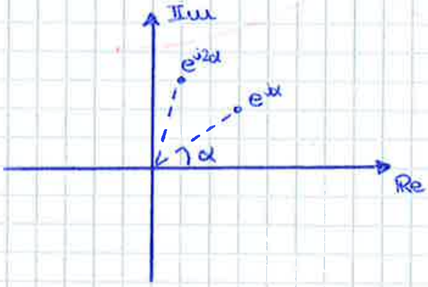
$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} = Im\{e^{j\alpha}\}$



$|e^{j\alpha}| = e^{j\alpha} \cdot e^{-j\alpha} = e^0 = 1$

$\angle e^{j\alpha} = \alpha$

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[e^{j2\alpha} + e^{-j2\alpha} + 2e^{j\alpha}e^{-j\alpha}\right] = \frac{1}{4}\left[2Re\{e^{j2\alpha}\} + 2\right] = \frac{1}{2}\left[\cos(2\alpha) + 1\right] = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$



$e^{j2\alpha} \neq |e^{j\alpha}|^2$

$\cos \pi/2 = 0$

$\cos \pi = -1$

$[\cos\pi]^n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$

$\cos \pi/4 = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$

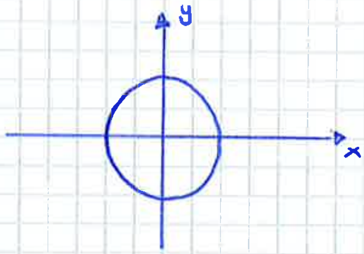
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin \pi/2 = 1$

$\sin 0 = 0$

$\sin \pi = 0$

$\sin 3/2\,\pi = -1$



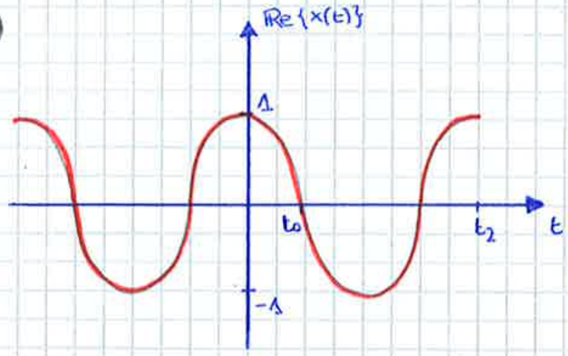
FUNZIONE COMPLESSA DELLA VARIABILE REALE TEMPO

$x(t) = e^{j2\pi f_c t}$, $x(t) \in \mathbb{C}$

$\Re\{x(t)\} = \cos(2\pi f_c t)$

$\cos x = \Re\{e^{jx}\}$

$\sin x = \Im\{e^{jx}\}$



$2\pi f_c t_0 = \pi/2 \longrightarrow t_0 = 1/4f_c$

$2\pi f_c t_1 = \frac{3}{2}\pi \longrightarrow t_1 = 3/4f_c$

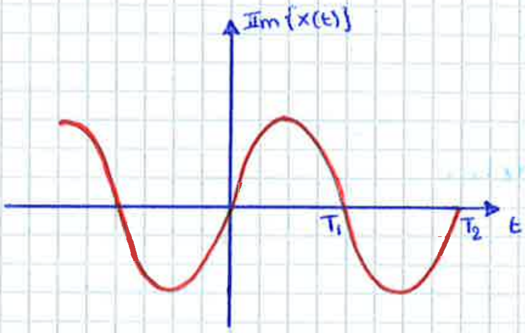
$2\pi f_c t_2 = 2\pi \longrightarrow t_2 = 1/f_c$

t_2 = PERIODO $= 1/f_c$

f_c = FREQUENZA

$x(t) = e^{j2\pi f_c t}$

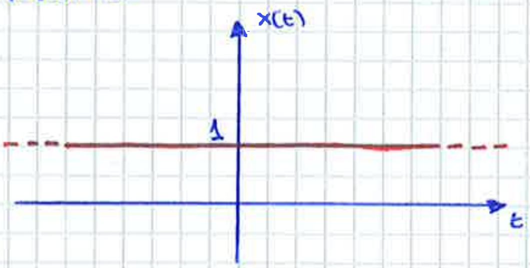
$\Im\{x(t)\} = \sin(2\pi f_c t)$



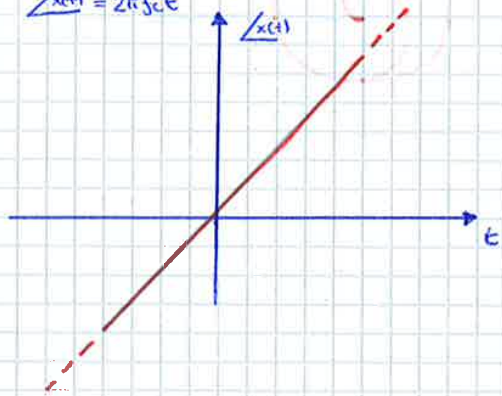
$T_1 = 1/2f_c$

$T_2 = 1/f_c$

$|x(t)| = 1$

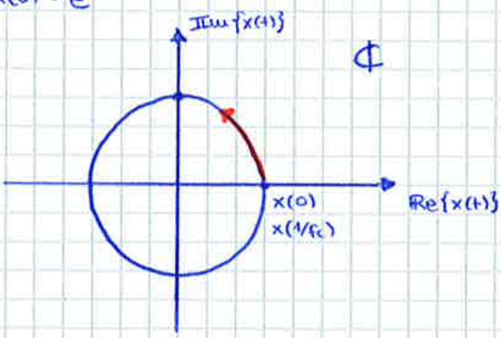


$\angle x(t) = 2\pi f_c t$



$x(t) \in \mathbb{C}$

$x(t) = e^{j2\pi f_c t}$



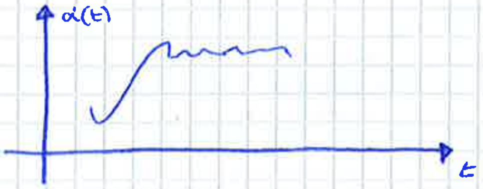
$t = 0 \quad x(0) = 1$

$t = \frac{1}{4f_c} \quad x(1/4f_c) = e^{j2\pi f_c 1/4f_c} = e^{j\pi/2} = J$

SEGNALE: Grandezza fisica che cambia nel tempo

ESEMPI - Elettrocardiogramma

- Distanza di un punto in movimento da un altro punto preso come riferimento



α(t) si misura in metri
t si misura in secondi

Esempi di segnali a TEMPO CONTINUO per ogni $t \in \mathbb{R}$ uno ed un solo valore di $\alpha(t)$

Altri esempi - segnali a tempo discreto → segnale il cui valore è noto solo in alcuni istanti di tempo

1) Segnale a tempo continuo che viene campionato ad intervalli di tempo costanti

$x(t) = e^{-|t|/T}$

$x(m\Delta_t) \quad m \in \mathbb{Z}$

Δt = intervallo di campionamento

$x(m\Delta_t) = e^{-|m\Delta t|/T} \quad \in \mathbb{R}$

$x[n] = x(m\Delta_t)$

↳ così si indica il segnale a tempo discreto

2) $T(t)$ = temperatura in una stanza

$T[n]$ = massima temperatura registrata nella stanza nel giorno n

$T[n] \neq T(m\Delta_t)$ perché Δt non è costante

$T[n]$ è una successione di numeri

3) Sequenza di basi nel DNA

DNA = sequenza di 4 basi (ACTG)

AACTTGA

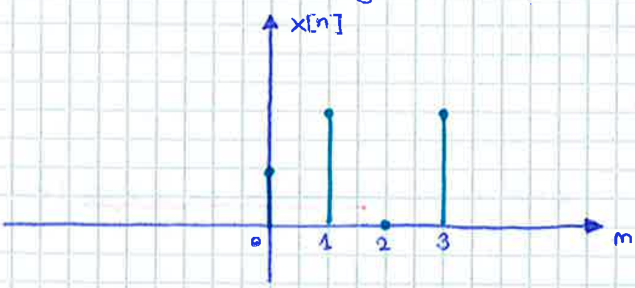
ad ogni base viene associato un numero

A ⟷ 1
C ⟷ 2
T ⟷ 3
G ⟷ 4

1123341 $\quad x[n]$ = segnale a tempo discreto

4) livelli di grigio nella riga H di una immagine in bianco e nero

$x[n]$ è ancora un segnale a tempo discreto



$$x[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 2 & n=1 \\ 0 & n=2 \\ 2 & n=3 \end{cases}$$

$x[n] = x[0]\,\delta[n] + x[1]\,\delta[n-1] + x[2]\,\delta[n-2] + \ldots + x[-1]\,\delta[n+1] + x[-2]\,\delta[n+2] + \ldots =$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k]}$$

Sistemi a tempo discreto

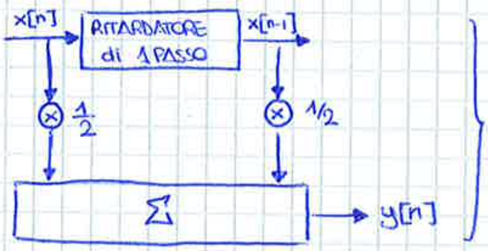
Un sistema è un blocco, un oggetto fisico, con un ingresso ed una uscita e l'uscita $y[n]$ dipende dall'ingresso $x[n]$ e dalla struttura del sistema stesso.

$y[n]$ è una trasformazione dell'ingresso $x[n]$

$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\}$

ESEMPIO

$y[n] = \dfrac{x[n] + x[n-1]}{2}$ dove $x[n-1] = x[n]$ ritardato di un passo



SCHEMA A BLOCCHI DEL SISTEMA

ESEMPIO

$y[n] = \sin(x[n])$

Sistemi lineari e tempo invarianti

DEF. Un sistema identificato dalla relazione ingresso-uscita $y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\}$ è lineare se

IPOTESI: $y_1[n] = \mathcal{T}\{x_1[n]\}$

$y_2[n] = \mathcal{T}\{x_2[n]\}$

TESI: $x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$

$y[n] = \mathcal{T}\{x[n]\} = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] \quad , \forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$

Ciò significa che vale la sovrapposizione degli effetti

ESEMPIO

$y[n] = \dfrac{x[n] + x[n-1]}{2}$ È un sistema lineare?

$y_1[n] = \dfrac{x_1[n] + x_1[n-1]}{2}$

$y_2[n] = \dfrac{x_2[n] + x_2[n-1]}{2}$

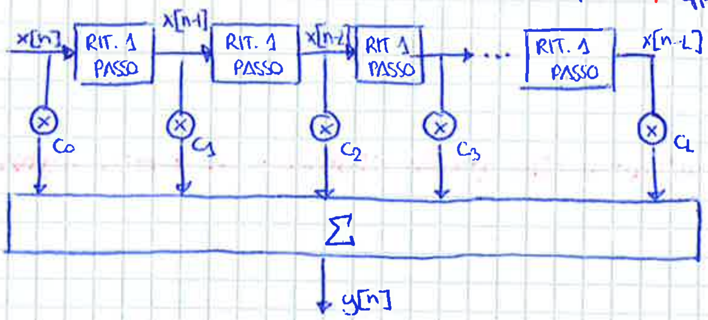
$x[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]$

$y[n] = \dfrac{x[n] + x[n-1]}{2} = \dfrac{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_1 x_1[n-1] + a_2 x_2[n-1]}{2} = a_1 \dfrac{x_1[n] + x_1[n-1]}{2} + a_2 \dfrac{x_2[n] + x_2[n-1]}{2} =$

$= a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n]$ ⤳ Il sistema è lineare

SISTEMI NON RECURSIVI (FIR - Finite Impulse Response) oppure **SISTEMI FEEDFORWARD**

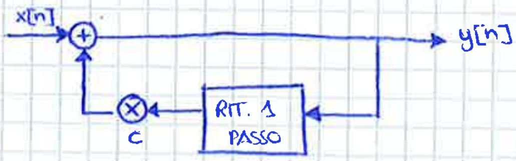
↓ l'uscita dipende unicamente dai valori di ingresso



$y[n] = c_0 x[n] + c_1 x[n-1] + \ldots + c_L x[n-L]$ Equazione alle differenze finite non recursiva

SISTEMA RECURSIVO (IIR - Infinite Impulse Response) oppure **SISTEMI CON FEEDBACK**

↓ l'uscita dipende anche dai valori precedenti dell'uscita stessa.

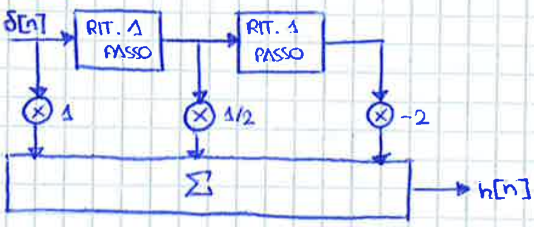


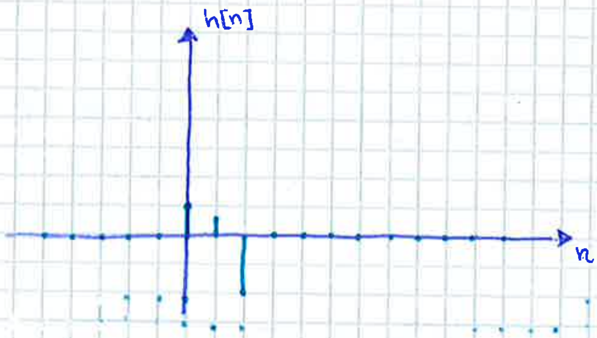
$y[n] = x[n] + c\,y[n-1]$ Equazione alle differenze finite recursiva

RISPOSTA ALL'IMPULSO ($h[n]$) di un sistema LTI è l'uscita del sistema quando all'ingresso viene posto il segnale $\delta[n]$ (IMPULSO)

ESEMPIO

FIR





$h[n] = 1\,\delta[n] + \frac{1}{2}\,\delta[n-1] - 2\,\delta[n-2]$

Finite Impulse Response — la durata della risposta all'impulso è finita per i sistemi non recursivi

ESEMPIO

IIR

$h[n] = \delta[n] + c\,h[n-1]$

ESEMPIO $c = 1/2$

n	δ[n]	h[n-1]	h[n]
<0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	c
2	0	c	c^2
3	0	c^2	c^3
4	0	c^3	c^4
5	0	c^4	c^5

Infinite Impulse Response

la durata della risposta all'impulso è infinita per sistemi recursivi.

Integrazione

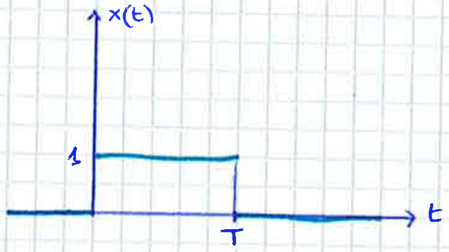
ESERCITAZIONE 1

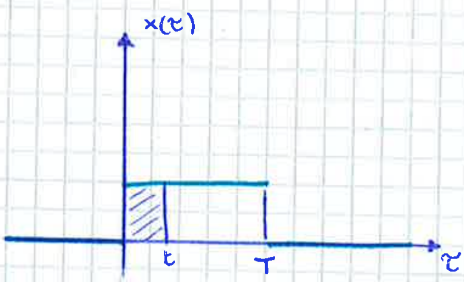
Es. 11

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

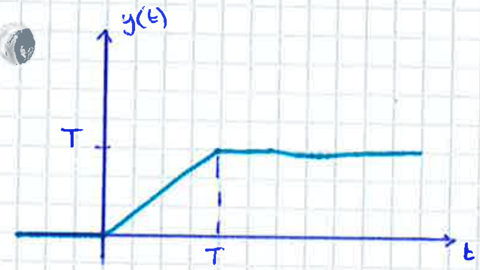
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \qquad t \in \mathbb{R}$$

Disegnare il grafico dei segnali

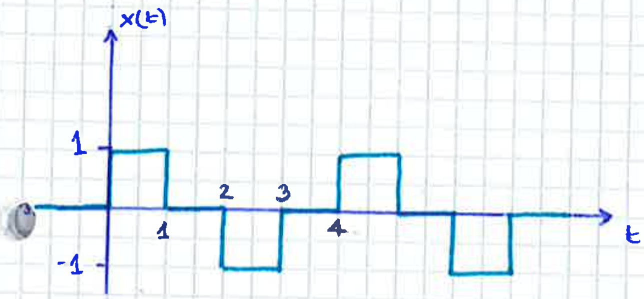




- Per $t<0$ $\quad y(t) = 0$
- $0<t<T$ $\quad y(t) = \int_0^t x(\tau)d\tau = t$
- $t>T$ $\quad y(t) = \int_0^T x(\tau)d\tau$ (area di tutto il rett.)

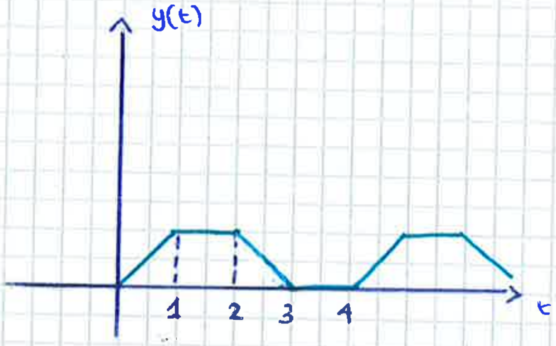


$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq T \\ T & t \geq T \end{cases}$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$$

Grafico di y(t)



$$y(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t \in [0,1] \\ 1 & t \in [1,2] \\ 3-t & t \in [2,3] \end{cases}$$

Un segnale x(t) è periodico di periodo T se $x(t) = x(t+T)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 126

$\delta[n] \to \boxed{\quad} \xrightarrow{h_1[n]} \boxed{h_2[n]} \xrightarrow{h[n]}$

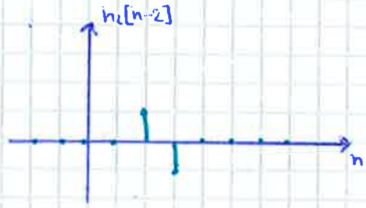
$$\left[\, h[n] = h_1[n] * h_2[n] \,\right]$$

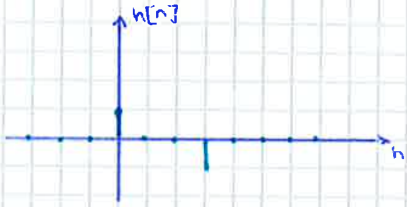
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

Calcolare $h[n]$ usando la convoluzione

$$h[n] = \sum_{k=0}^{3} h_1[k]\, h_2[n-k] = h_1[0]\,h_2[n] + h_1[1]\,h_2[n-1] + h_2[2]\,h_2[n-2] = h_2[n] + h_2[n-1] + h_2[n-2]$$

Soluzione grafica $\quad h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$

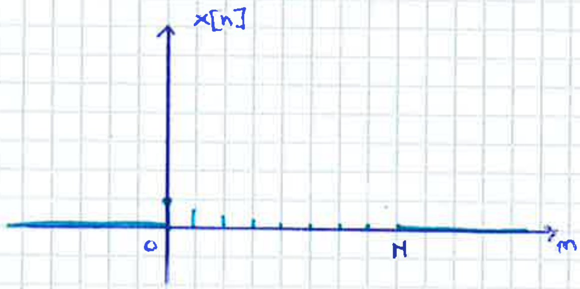


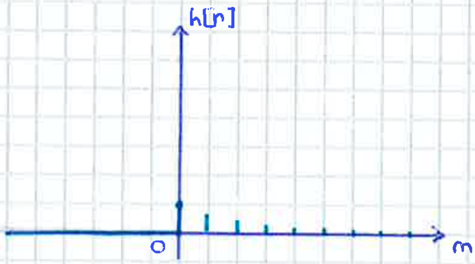


$$h[n] = h_2[n] + h_2[n-1] + h_2[n-2] = \delta[n] - \delta[n-3]$$

- Calcolare la convoluzione tra i seguenti due segnali

$$x[n] = \begin{cases} p^n & n = 0,1,2,\dots,N-1 \\ 0 & n < 0 \\ 0 & n \geq N \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} p^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad 0 < p < 1$$

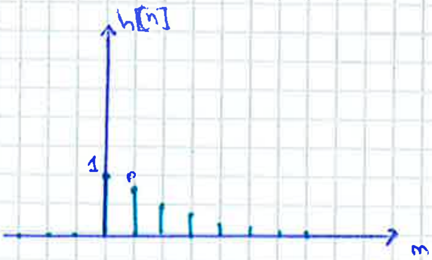


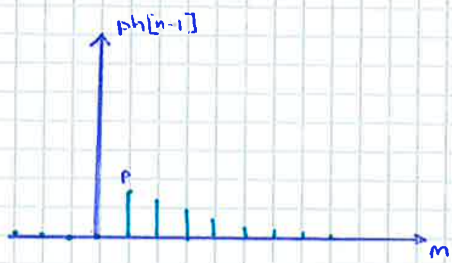


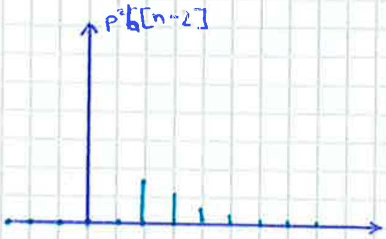
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

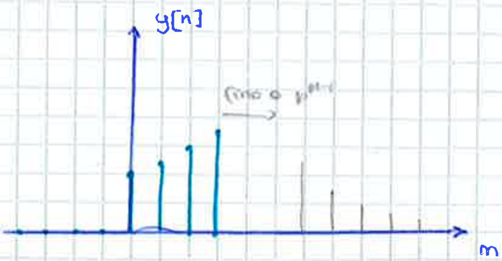
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\,h[n-k] = x[0]\,h[n] + x[1]\,h[n-1] + \dots + x[N-1]\,h[n-N+1] =$$

$$= h[n] + p\,h[n-1] + p^2\,h[n-2] + \dots + p^{N-1}\,h[n-N+1]$$









$y[1] = 2p$

$y[2] = 3p^2$

$y[3] = 4p^3$

$y[N-1] = N\,p^{N-1}$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]$$

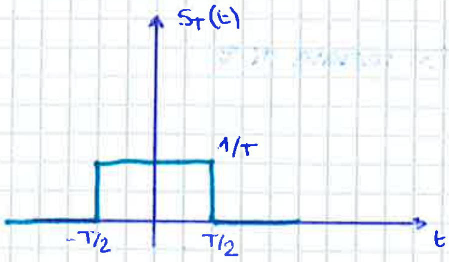
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

SEGNALI e SISTEMI A TEMPO CONTINUO

Si vuole ripercorrere la strada seguita nel tempo discreto per analizzare segnali e sistemi a tempo continuo. → occorre un segnale impulso per il tempo continuo

SEGNALI E SISTEMI T. CONTI[NUO]
- Delta di Dirac
- Convoluzione
- Trasformata di Laplace
- Trasformata di Fourier e x(t)

Delta di Dirac



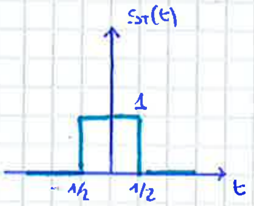
$$\delta_T(t) = \begin{cases} 1/T & t \in [-T/2, T/2] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(\tau)\,d\tau = 1 \qquad \int_{0}^{\infty} \delta_T(\tau)\,d\tau = 1/2$$

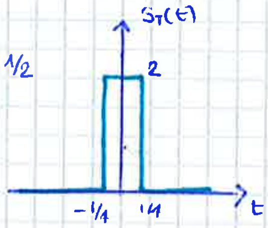
$\delta(t)$ = DELTA DI DIRAC, la definisco come:

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{T \to 0} \delta_T(t)}$$

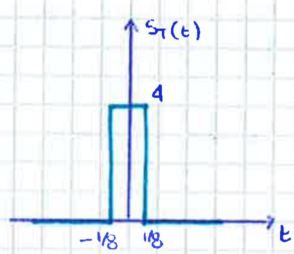
T = 1

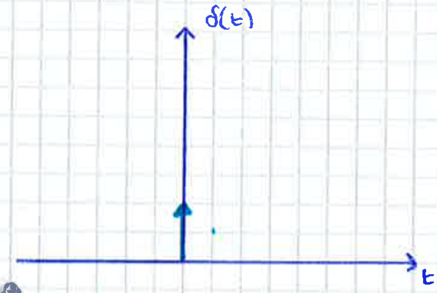


T = 1/2



T = 1/4



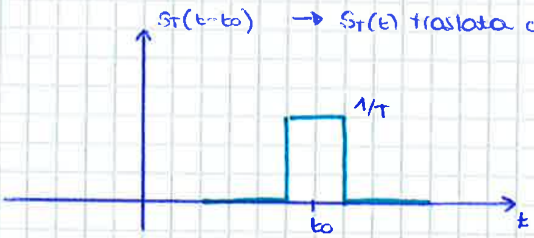


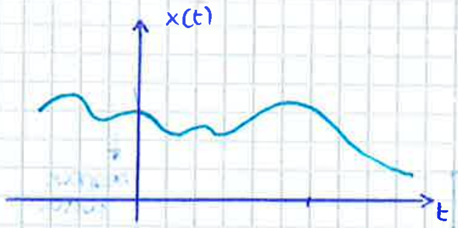
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1 \qquad \int_{-1}^{1} \delta(\tau)\,d\tau = 1$$

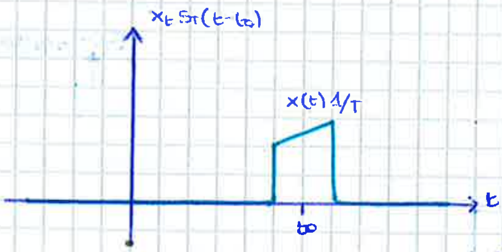
$$\int_{0}^{\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1/2$$

$x(t)\,\delta_T(t-t_0) = ?$

$\delta_T(t-t_0)$ → $\delta_T(t)$ traslata di t_0







$$x(t)\,\delta_T(t-t_0) = \begin{cases} 0 & |t-t_0| > T/2 \\ x(t)\,1/T & |t-t_0| < T/2 \end{cases}$$

→ valore di t per cui $t - t_0 = 0$ (basta sempre sostituire a t il valore del ritardo, in questo caso t_0)

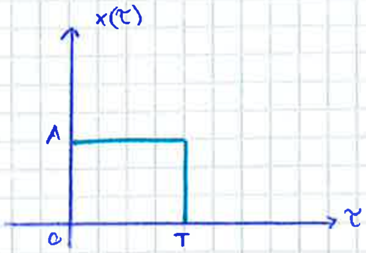
$$\lim_{T\to 0} x(t)\,\delta_T(t-t_0) = \lim_{T\to 0} x(t_0)\,\delta_T(t-t_0) = x(t_0) \lim_{T\to 0} \delta_T(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)$$

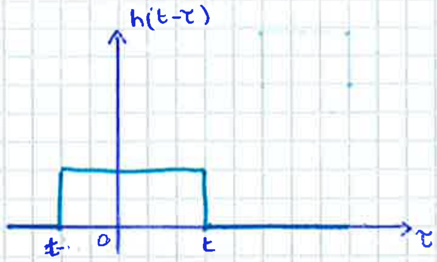
$\boxed{x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0)}$ Proprietà del campionamento

- se $x(t_0) = 0 \rightarrow x(t)\,\delta(t-t_0) = 0$

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad t \in \mathbb{R}$

$h(t-\tau)$ è funzione di τ e t ha il ruolo di parametro





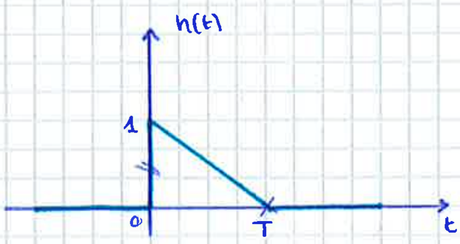
$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{altrove} \\ 1 & t \in [0,T] \end{cases}$$

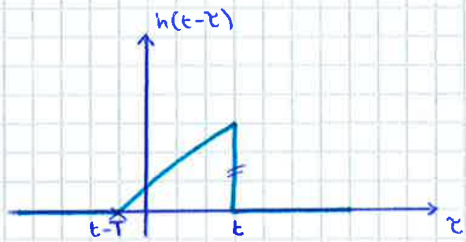
$$h(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t-\tau \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$0 < t-\tau < T$

$-t < -\tau < -t+T \longrightarrow t > \tau > t-T$

Se fosse stato:



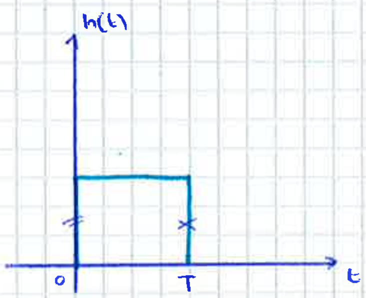


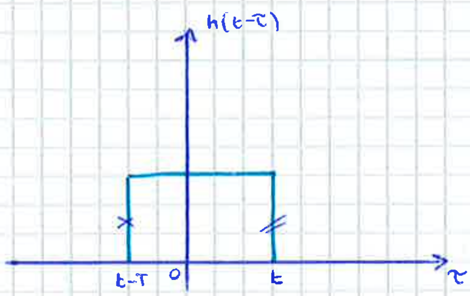
$h(0) = 1$

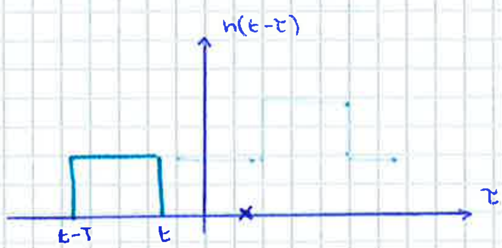
$h(T) = 0$

$h(t-\tau) = 1 \rightarrow t-\tau = 0 \rightarrow \tau = t$

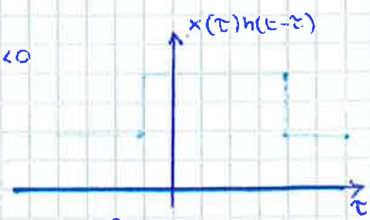
$h(t-\tau) = 0 \rightarrow t-\tau = T \rightarrow \tau = t-T$



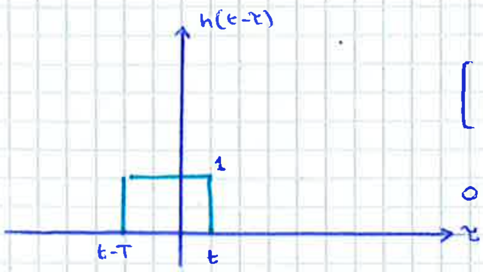




$t < 0$



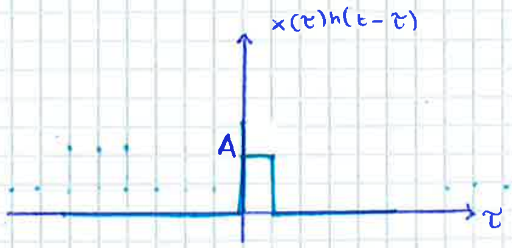
$y(t) = \int x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = 0$



$\begin{bmatrix} t > 0 \\ t-T < 0 \end{bmatrix}$

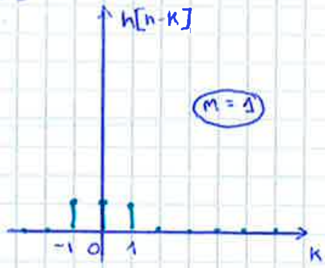
$\downarrow$

$0 < t < T$



$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = At$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ $\quad k \longleftrightarrow \tau$, $n \longleftrightarrow t$

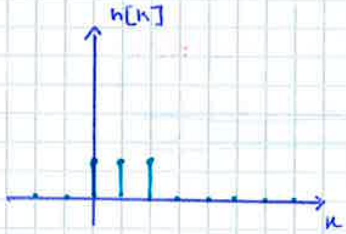


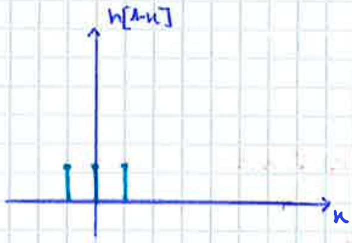
$h[n] = \begin{cases} 1 & n = 0,1,2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

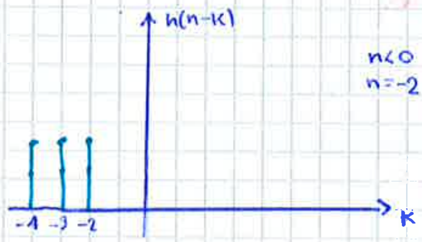
(n = 1)

$h[n-k] = \begin{cases} 1 & n-k = 0,1,2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$n-k = 0,1,2 \rightarrow k = \{n, n-1, n-2\}$

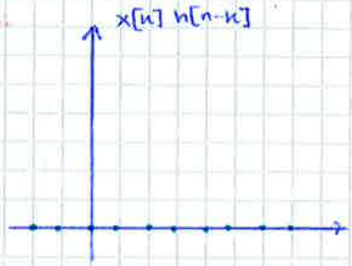




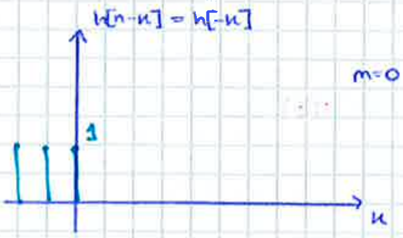


$n < 0$

$n = -2$

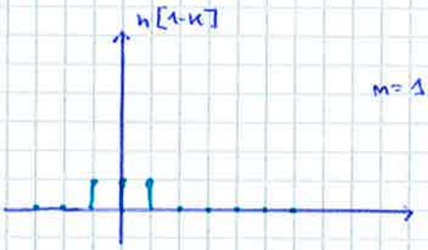


$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = 0$

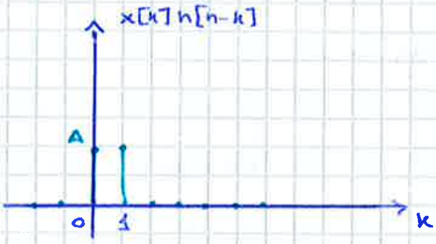


$n = 0$

$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = A$



$n = 1$



$y[1] = 2A$

sistema LTI

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau$

*La convoluzione gode della proprietà commutativa

$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

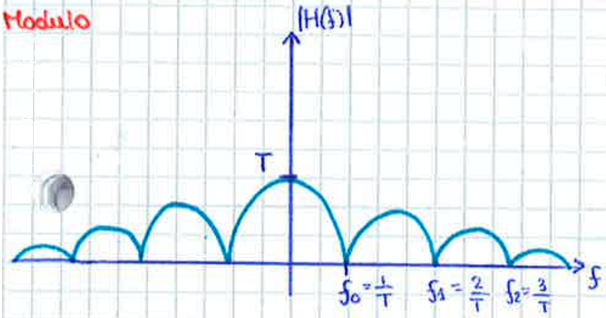
VERIFICA

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \quad t - \tau = u \rightarrow \tau = t-u$ (SOSTITUZIONE)

$= \int_{\infty}^{-\infty} x(t-u)h(u)\,(-du) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u)h(u)\,du$

TEORIA

Modulo



$\pi f_0 T = \pi \longrightarrow f_0 = 1/T$

$\pi f_1 T = 2\pi \longrightarrow f_1 = 2/T$

$T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \longrightarrow T$ when $f \longrightarrow 0$

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = p_T(t - T/2)} \longrightarrow y(t)$

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta) = \frac{A}{2}\left[e^{j2\pi f_0 t + j\Theta} + e^{-j2\pi f_0 t - j\Theta}\right] = \frac{A}{2} e^{j\Theta} x_1(t) + \frac{A}{2} e^{-j\Theta} x_2(t)$

$x_1(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

$x_2(t) = e^{-j2\pi f_0 t}$

$x_1(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y_1(t)$ $\qquad x_1(t) = e^{j2\pi f_0 t}$

$y_1(t) = x_1(t)\, H(f_0) = e^{j2\pi f_0 t} H(f_0)$

$x_2(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y_2(t)$ $\qquad x_2(t) = e^{-j2\pi f_0 t}$

$y_2(t) = x_2(t)\, H(-f_0) = e^{-j2\pi f_0 t} H(-f_0)$

Dunque abbiamo $y(t) = \frac{A}{2} e^{j\Theta} y_1(t) + \frac{A}{2} e^{-j\Theta} y_2(t)$

dove $y_1(t) = e^{j2\pi f_0 t} H(f_0)$

$y_2(t) = e^{-j2\pi f_0 t} H(-f_0)$

$H(f) = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} e^{-j\pi f T}$

$H(f_0) = T \frac{\sin(\pi f_0 T)}{\pi f_0 T} e^{-j\pi f_0 T}$

$H(-f_0) = T \frac{\sin(\pi f_0 T)}{\pi f_0 T} e^{j\pi f_0 T}$

$y(t) = \frac{A}{2} e^{j\Theta} e^{j2\pi f_0 t} \; T \frac{\sin \pi f_0 T}{\pi f_0 t} e^{-j\pi f_0 T} + \frac{A}{2} e^{-j\Theta} e^{-j2\pi f_0 t} \; T \frac{\sin \pi f_0 T}{\pi f_0 T} e^{j\pi f_0 T} =$

$= \frac{AT}{2} \frac{\sin \pi f_0 T}{\pi f_0 T} \left[e^{j\Theta} e^{-j\pi f_0 T} e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j\Theta} e^{j\pi f_0 T} e^{-j2\pi f_0 t} \right] =$

$= AT \frac{\sin \pi f_0 T}{\pi f_0 T} \cos(2\pi f_0 t + \Theta - \pi f_0 T)$

$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

$H(f)$

$\left[X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \right]$ TRASFORMATA di FOURIER di $x(t)$ $= \mathcal{F}\{x(t)\}$

$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$

Calcoliamo $Y(f)$, sapendo che $y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

$Y(f) = \int_{t=-\infty}^{\infty}\int_{\tau=-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, e^{-j2\pi f t}\, d\tau\, dt$

Posso scrivere $e^{-j2\pi f t} = e^{-j2\pi f(t-\tau)}\, e^{-j2\pi f \tau}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 126

Es. 2

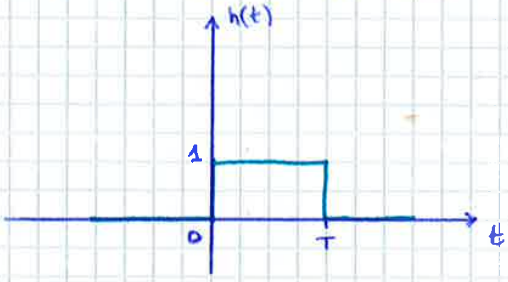
$x(t) = e^{-(t/T)^2}$

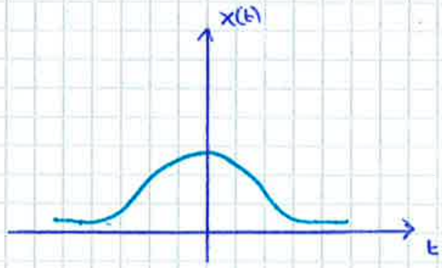
$y(t) = \delta(t) - \delta(t - T/2)$

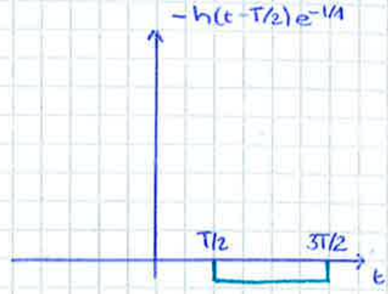
Si genera il segnale $z(t) = x(t)y(t)$ che viene posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso

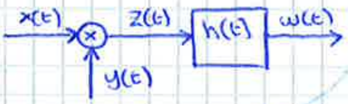
$h(t) = p_T(t - T/2) = \begin{cases} 1 & t \in [0,T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Si calcoli l'uscita $w(t)$ del sistema.









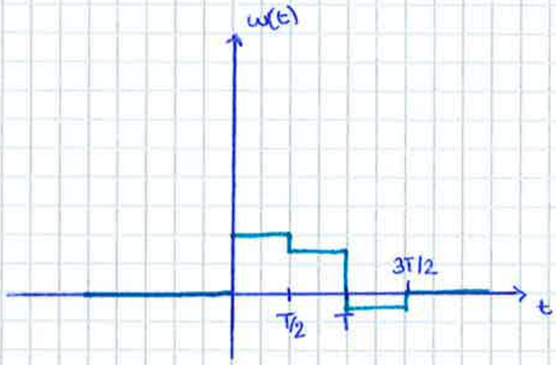
$w(t) = z(t) * h(t) = [x(t)y(t)] * h(t)$

$z(t) = x(t)y(t) = e^{-(t/T)^2}[\delta(t) - \delta(t-T/2)] = e^{-(t/T)^2}\delta(t) - e^{-(t/T)^2}\delta(t-T/2) = \delta(t) - e^{-1/4}\delta(t-T/2)$

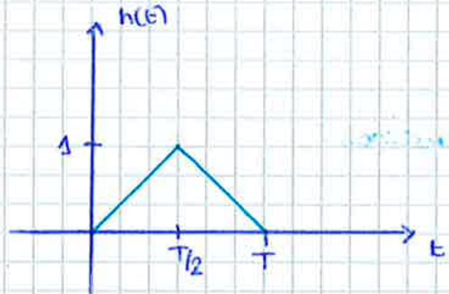
$w(t) = z(t) * h(t) = [\delta(t) - e^{-1/4}\delta(t-T/2)] * h(t) = \underbrace{\delta(t) * h(t)} - e^{-1/4}\delta(t-T/2) * h(t) =$

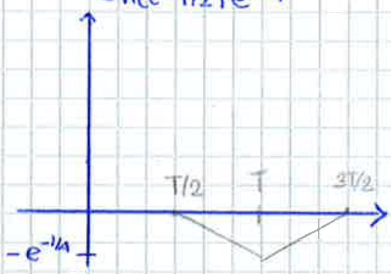
$= h(t) - e^{-1/4}h(t-T/2) = \boxed{p_T(t-T/2) - e^{-1/4}p_T(t-T) = w(t)}$

- $\delta(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = h(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\tau)\,d\tau}_{1} = h(t)$

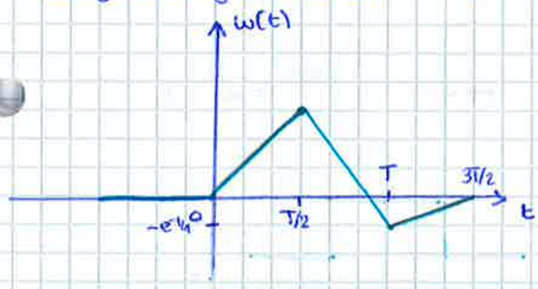


RIFARE CON h(t) triangolare





Disegnare il grafico di $w(t) = h(t) - e^{-1/4}h(t-T/2)$

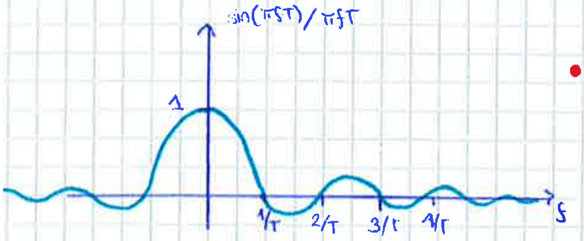


h(t) triang. mo di durata 2T

$$\mathfrak{F}\{p_T(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t}\, dt = \left. \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right|_{-T/2}^{T/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathfrak{F}\{p_T(t)\} = \frac{e^{-j2\pi f T} - e^{j2\pi f T}}{-2j\pi f} = \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{2j} \cdot \frac{1}{\pi f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$\mathfrak{F}\{1(t)\} = \lim_{T\to\infty} \mathfrak{F}\{p_T(t)\} = \lim_{T\to\infty} T\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = \delta(f)$$



• $\Delta f = 1/T$ (tra due zeri consecutivi)

$T_2 = 2T_1$

ANTITRASFORMATA DI FOURIER
- Dominio del tempo e dom. della
- Proprietà delle trasformate Fourier ($x(t)\in\mathbb{R} \rightarrow X(-f) = X^*(f)$), corollari; proprietà hermitiana, SCALAMENTO; INTEGRAZIONE, DERIVAZIONE; RITARDO)

dopo es. 1 PRODOTTO

$$\mathfrak{F}\{1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \delta(f)$$

$$\mathfrak{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_0 t - j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)} \ldots$$

$$= \delta(f - f_0)$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow H(f_0)\, e^{j2\pi f_0 t}$$

$$x(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow y(t) \qquad [Y(f) = H(f)X(f)]$$

se $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, $X(f) = \delta(f - f_0) \Rightarrow Y(f) = H(f)X(f) = H(f)\,\delta(f-f_0) = H(f_0)\,\delta(f - f_0)$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = H(f_0)\, e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\mathfrak{F}\{e^{-j2\pi f_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f_0 t} \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi t(f+f_0)}\, dt = \delta(f + f_0)$$

$$\mathfrak{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) \cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f t_0}\, \delta(t-t_0)\, dt = e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt}_{1} =$$

$$= e^{-j2\pi f t_0}$$

RIASSUMENDO:

$$\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = 1 \qquad \mathfrak{F}\{1(t)\} = \delta(f)$$

$$\mathfrak{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0) \qquad \mathfrak{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0}$$

TRASFORMATA di FOURIER INVERSA (Antitrasformata)

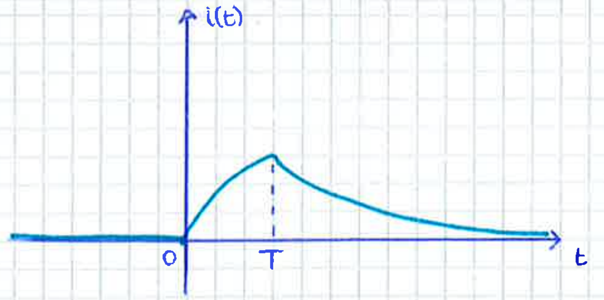
$$x(t) \triangleq \mathfrak{F}^{-1}\{X(f)\} \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \quad \text{(ANTITRASFORMATA)}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \quad \text{(TRASFORMATA)}$$

• VERIFICA

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, e^{-j2\pi f u}\, du\right]}_{X(f)} e^{j2\pi f t}\, df = \int_{u=-\infty}^{\infty} x(u) \underbrace{\left(\int_{f=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(u-t)}\, df\right)}_{\delta(u-t)} du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\, \delta(u - t)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\delta(u-t)\, du = x(t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-t)\, du}_{1} = x(t)$$

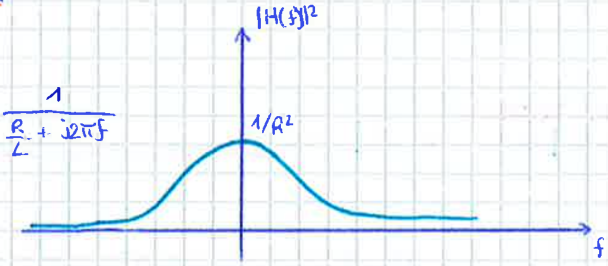


Dominio della frequenza

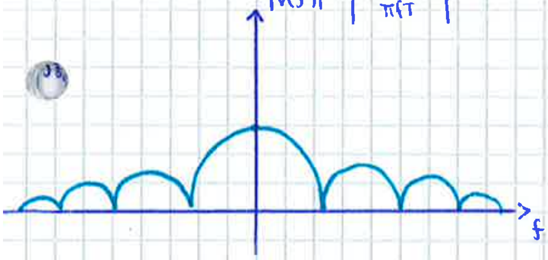
$I(f) = H(f)\,V(f)$

$H(f) = \dfrac{1}{R + j2\pi f L} = \dfrac{1}{L} \cdot \dfrac{1}{\frac{R}{L} + j2\pi f}$

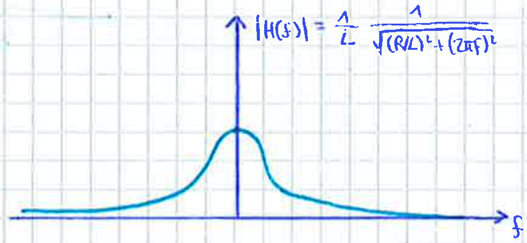
$|H(f)|^2 = \dfrac{1}{L^2} \dfrac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + (2\pi f)^2}$



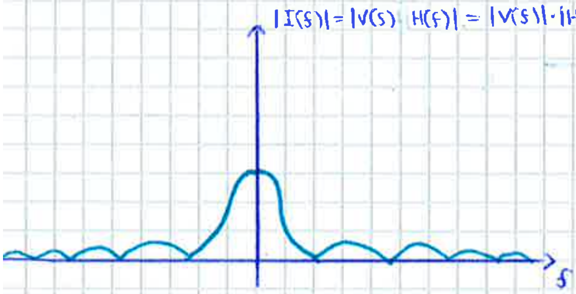
$|V(f)| = \left|\dfrac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}\right|$



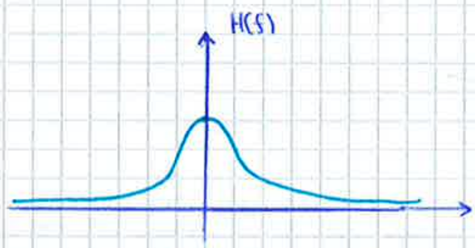
$|H(f)| = \dfrac{1}{L} \dfrac{1}{\sqrt{(R/L)^2 + (2\pi f)^2}}$



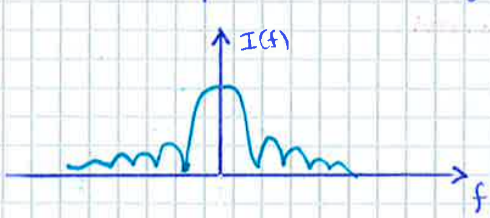
$|I(f)| = |V(f) \cdot H(f)| = |V(f)| \cdot |H(f)|$



Se uso $T' \gg T$



* Maggiore è la durata di $V(f)$ minore è la diff. tra $V(f)$ e $I(f)$, ed $H(f)$ crea meno disturbo a freq. + basse

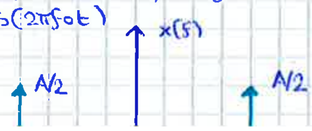


$\mathcal{F}\{A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2} e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{A}{2} e^{j\theta} \cdot e^{j2\pi f_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} \cdot e^{-j2\pi f_0 t}\right\} =$

$= \frac{A}{2} e^{j\theta}\,\delta(f - f_0) + \frac{A}{2} e^{-j\theta}\,\delta(f + f_0)$

In particolare, per $\theta = 0$, $\mathcal{F}\{A\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{A}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$

Se $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$



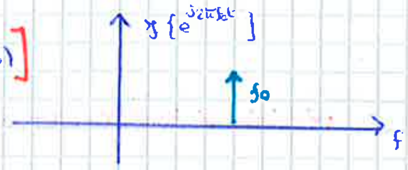
$\Re e\{X(-f)\} = \Re e\{X^*(f)\} = \Re e\{X(f)\}$

$\Im m\{X(-f)\} = \Im m\{X^*(f)\} = -\Im m\{X(f)\}$ → in un numero complesso coniugato cambia proprio il segno della parte immaginaria.

$\mathcal{F}\{\cos 2\pi f t\} = \frac{1}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]$ PARI

$\mathcal{F}\{\sin 2\pi f_0 t\} = \frac{1}{2j}[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]$ DISPARI

$\left[\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f-f_0)\right]$



$e^{j2\pi f_0 t} \rightarrow$ Sis. L.T.I $\rightarrow e^{j2\pi f_0 t} H(f_0) = y(t)$

$\downarrow \mathcal{F}$

$\delta(f-f_0)$

$Y(f) = X(f)H(f) = \delta(f-f_0)H(f) = H(f_0)\delta(f-f_0)$

$\left[y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(f)\} = H(f_0)\, e^{j2\pi f_0 t}\right]$

$A\cos 2\pi f_0 t \rightarrow \boxed{H(f)} \xrightarrow{y(t)}$ $\qquad Y(f) = X(f)H(f)$

$Y(f) = \frac{A}{2}[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]H(f) = \frac{A}{2}[H(f)\delta(f-f_0) + H(f)\delta(f+f_0)] = \frac{A}{2}[H(f_0)\delta(f-f_0) + \underbrace{H(-f_0)}_{H^*(f_0)}\delta(f+f_0)]$

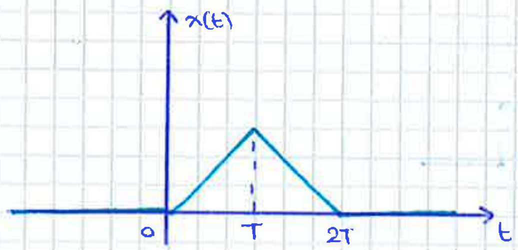
$|H(-f_0)| = |H^*(f_0)| = |H(f_0)|$ $\qquad \angle H(f_0) = \Theta, \quad \angle H(-f_0) = -\Theta$

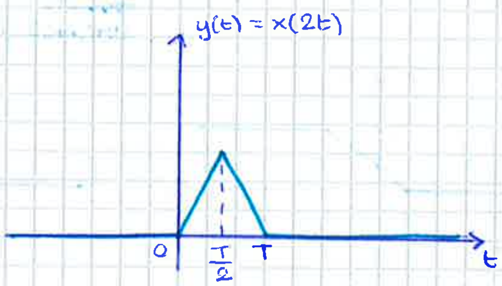
$Y(f) = \frac{A}{2}[|H(f_0)|e^{j\Theta}\delta(f-f_0) + |H(f_0)|e^{-j\Theta}\delta(f+f_0)] = \frac{A}{2}|H(f_0)|\left[e^{j\Theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\Theta}\delta(f+f_0)\right]$

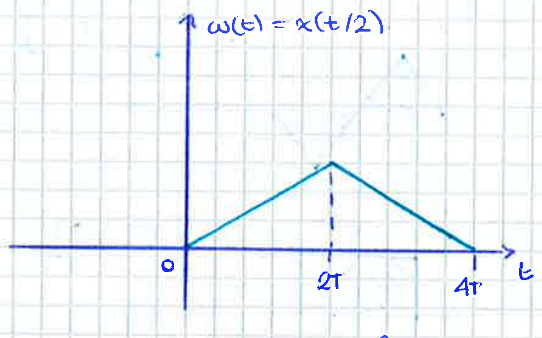
$y(t) = \frac{A}{\cancel{2}}|H(f_0)|\,\cancel{2}\cos(2\pi f_0 t + \Theta) = A|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$

$A\cos(2\pi f_0 t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow y(t) = A|H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$ $\qquad |H(f_0)| = \frac{\max x(t)}{\max y(t)}$ $\qquad \angle H(f_0) = \Theta = $ diff. fase

- **PROPRIETÀ DELLO SCALAMENTO**



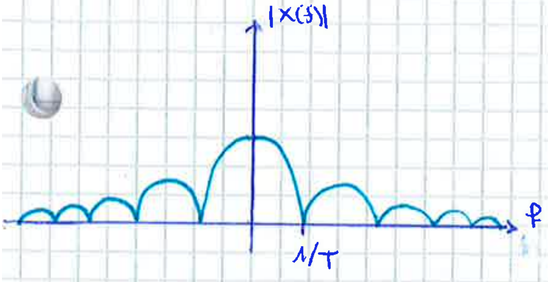




- Estensione di $x(t) \Rightarrow [0, 2T]$
- Estensione di $y(t) \Rightarrow [0, T]$
- Estensione di $w(t) \Rightarrow [0, 4T]$

$y(t) = x(kt)$ $\qquad Y(f) = ?$

$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(kt)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \underset{\boxed{kt = u,\ k>0}}{=} \int x(u)\, e^{-j2\pi f \frac{u}{k}}\, du/k \underset{\boxed{u \to t}}{=} \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t/k}\, dt = \frac{1}{k} X(f/k)$



• DERIVAZIONE

$x(t) \longleftrightarrow X(f)$

$y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$ $\qquad Y(f) = ?$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = x(t)\, e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int x(t)(-j2\pi f)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = x(t)\, e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ j2\pi f \underbrace{\int x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt}_{X(f)} =$$

INTEGRAZIONE x PARTI

$$\boxed{Y(f) = x(t)\, e^{-j2\pi f t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + j2\pi f\, X(f)}$$

1) Non tutti i segnali $x(t)$ ammettono trasf. di Fourier $X(f)$ (l'integrale non converge)
2) In genere la trasf. di Fourier esiste per segnali $x(t)$ s.t. $\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$. In questo caso $Y(f) = j2\pi f\, X(f)$

In generale (tralasciando i segnali senza trasformata di Fourier e i segnali "strani"), se $y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \Rightarrow Y(f) = j2\pi f\, X(f)$

$x(t) \rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \rightarrow y(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

DERIVATORE $\qquad Y(f) = j2\pi f\, X(f)$

$H(f) = j2\pi f \longrightarrow$ FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL DERIVATORE

$\boxed{h(t) = \delta'(t)}$

• RITARDO

$x(t) \longleftrightarrow X(f)$

$y(t) = x(t - t_0)$

$x(t) \rightarrow \boxed{\text{RIT } t_0} \rightarrow y(t)$

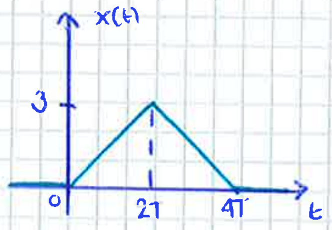
$h(t) = \delta(t - t_0)$

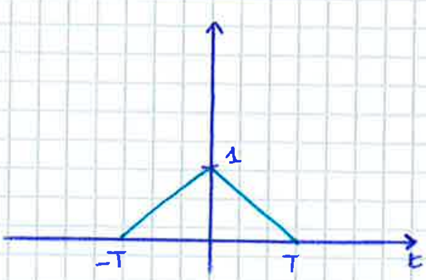
$H(f) = e^{-j2\pi f t_0}$

$$\boxed{Y(f) = X(f) H(f) = X(f)\, e^{-j2\pi f t_0}}$$

ESERCITAZIONE 4

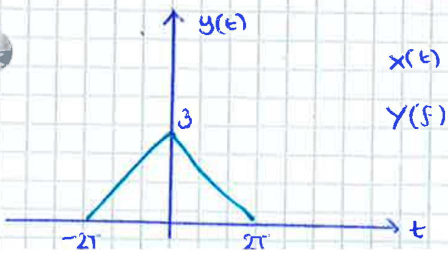
2) Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$





$$\text{Tri}(t/T) = \begin{cases} 1 - |t|/T, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

la trasformata di Fourier è $T \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$



$x(t) = y(t - 2T)$ $\qquad \boxed{T' = 2T}$

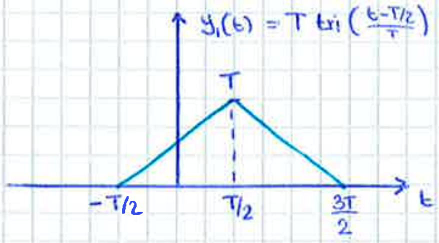
$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = 3 \cdot (2T) \cdot \frac{\sin^2(\pi f 2T)}{(\pi f 2T)^2}$$

$y(t) \rightarrow \boxed{\text{ritard. } 2T} \rightarrow x(t)$

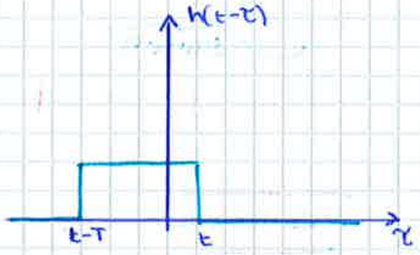
$$X(f) = Y(f) H(f) = Y(f) \cdot e^{-j2\pi f 2T} =$$

$$= 3(2T) \frac{\sin^2(\pi f 2T)}{(\pi f 2T)^2}\, e^{-j2\pi f 2T}$$

$y_1(t) = T\,\mathrm{tri}(t/T) * \delta(t-T/2) = T\,\mathrm{tri}\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$

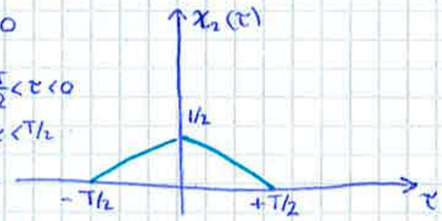


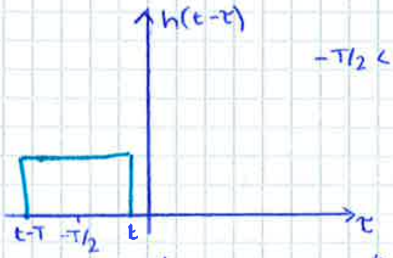
$y_2(t) = x_2(t) * h(t) = \frac{1}{2}\mathrm{tri}(2t/T) * p_T(t-T/2) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x_2(t-\tau)\,d\tau$



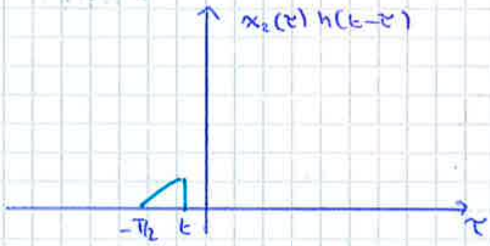
se $t < -T/2 \rightarrow y_2(t) = 0$

$$x_2(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{2\tau}{T}+1\right) & -\frac{T}{2} < \tau < 0 \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{2\tau}{T}+1\right) & 0 < \tau < T/2 \\ 0 & |\tau| > T/2 \end{cases}$$

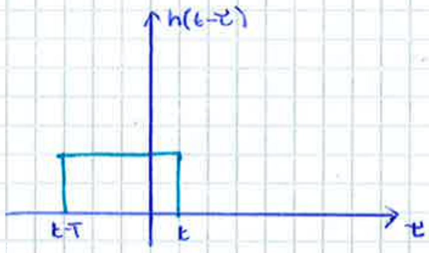




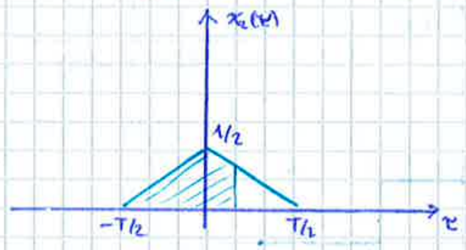
$-T/2 < t < 0$



$y_2(t) = \int_{-T/2}^{t} x_2(\tau)\,d\tau = \int_{-T/2}^{t} \frac{1}{2}\left(\frac{2\tau}{T}+1\right)d\tau = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{T}\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_{-T/2}^{t} + (t+T/2)\right) =$

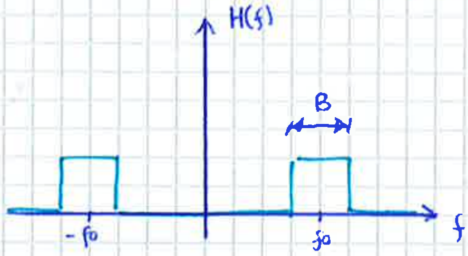


$T/2 < t < 0$

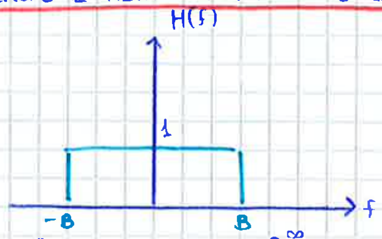


$y_2(t) = \int_{-T/2}^{t} x_2(\tau)\,d\tau = \left(\frac{T}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \int_{0}^{t} \frac{1}{2}\left(-\frac{2\tau}{T}+1\right)d\tau$

FILTRO PASSABANDA IDEALE con FREQ. CENTRALE f_0 e BANDA B
↓
stessa def. data per il filtro passabasso



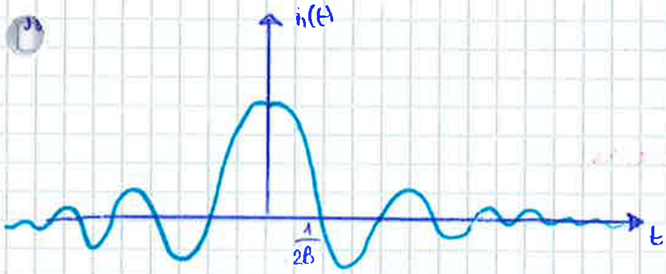
PERCHÈ IL FILTRO PASSABASSO È IDEALE?



$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-B}^{B} e^{j2\pi f t}\, df = \left.\frac{e^{j2\pi f t}}{j2\pi t}\right|_{-B}^{B} = \frac{e^{j2\pi Bt} - e^{-j2\pi Bt}}{2j\pi t} =$$

$$= \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi t} = 2B \cdot \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt}$$

SISTEMI - FILTRI
- Fisica realizzabilità e stabilità BIBO per sistemi LTI
- T.I. (verifica)
- Potenza media, ist. e energia
- SEGNALI A EN. MEDIA FINITA (=Po
- Spettro di en., funz. di autoco



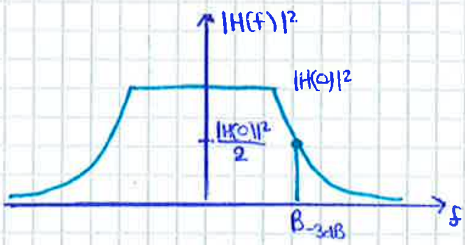
$2\pi Bt_0 = \pi \rightarrow t_0 =$

È sbagliato perché Il sistema non è fisicamente realizzabile (vorrebbe dire che l'uscita $h(t)$ è $\neq 0$ prima di aver applicato l'ingresso $\delta(t)$ al sistema)

- NELLA REALTA'

Fronti non così ripidi come nel filtro passabasso ideale

BANDA DI UN FILTRO PASSABASSO NON IDEALE

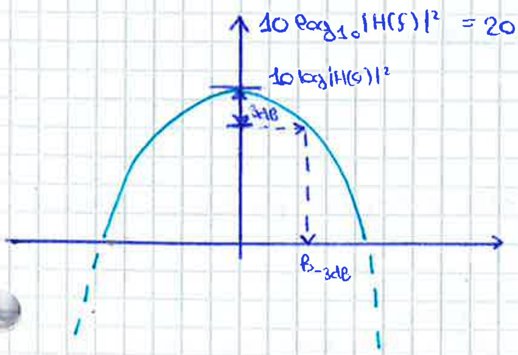


Banda a -3dB

$$\left[|H(B_{-3dB})|^2 = \frac{|H(0)|^2}{2} \right]$$

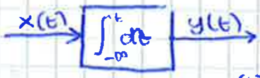
dove $\frac{1}{2}$ è l'argomento del log in base 10 affinché sia

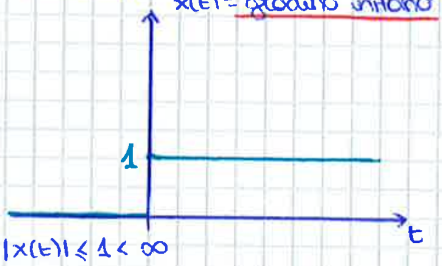
$10 \log x = -3$

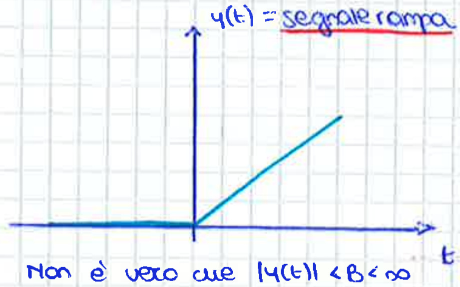


$$10 \log \frac{|H(0)|^2}{2} = 10 \log_{10} |H(0)|^2 + \underbrace{10 \log_{10} 1/2}_{-3{,}01}$$

ESEMPIO Integratore







$y(t)$ = segnale rampa $\begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ \text{cresce linearmente} & \text{per } t>0 \end{cases}$

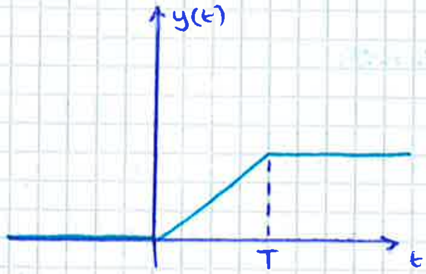
$|x(t)| \leq 1 < \infty$

$x(t)$ è limitata in ampiezza

Non è vero che $|y(t)| < B < \infty$

$\Rightarrow$ L'integratore non è BIBO stabile

ESEMPIO Integratore



$|x(t)| \leq 1 < \infty$

$|y(t)| \leq T$

È solo un caso esaminato, dunque non posso affermare la stabilità del sistema basandomi solo su questo

per $t-T>0 \rightarrow \int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{t-T}^{t} 1\, d\tau = T$

per $0<t<T \rightarrow \int_{0}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} 1\, d\tau = t$

Regola per stabilire se un sistema è stabile in senso BIBO

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau\right| < \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)\, x(t-\tau)|\, d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot A\, d\tau = A \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau}_{*} < B < \infty$$

È sufficiente che l'integrale * non diverga affinché $|y(t)| < A \cdot C < B < \infty$ e dunque il sistema sia stabile in senso BIBO. $\Rightarrow$ condizione SUFFICIENTE di stabilità di tipo BIBO per il sistema con risposta all'impulso $h(t)$: $\left[\int |h(t)|\, dt < C < \infty\right]$

È anche una condizione NECESSARIA : non esiste infatti sistema stabile che non soddisfi tale condizione (è dimostrato)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

- Nel caso dell'integratore si ha $h(t) = u(t)$ e $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt = \infty \Rightarrow$ L'integratore NON è stabile.
- Nel caso del sistema che produce $y(t) = \int_{t-T}^{t} x(\tau)\, d\tau$ la risposta all'impulso è $h(t) = p_T(t - T/2)$

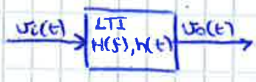
$\int |h(t)|\, dt = \int_0^T 1\, dt = T < \infty \Rightarrow$ Il sistema è stabile

* Si dimostra che il sistema è BIBO stabile se $|H(f)| < \infty, \forall f$

* Altra condizione di stabilità : i poli di $H(f)$ devono essere tutti nel semipiano negativo, cioè $\Re\{p\} < 0$

Unità di misura per risposta all'impulso e funzioni di trasferimento dei sistemi LTI

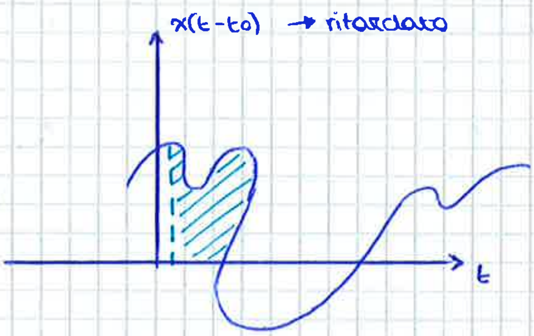
ESEMPIO



$v_i(t), v_o(t) \rightarrow$ tensioni misurate in volt

$V_i(f) = \int v_i(t)\, \underbrace{e^{-j2\pi f t}}_{\text{grandezza adimensionata}}\, dt$

La dimensione di $V_i(f)$ è $V \cdot s$



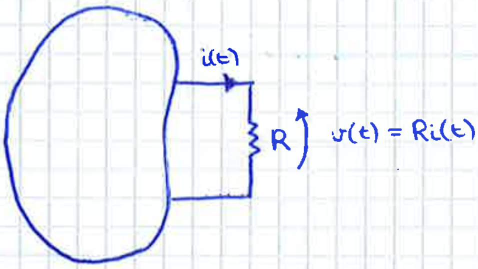
* Il valore dell'area considerata (e dunque dello integrale) resta sempre la stessa nonostante il ritardo di t_0 della funzione.

* Dato un segnale $x(t)$, si definisce $P(t) = |x(t)|^2$ come **POTENZA ISTANTANEA** del segnale, che (per semplicità) misuriamo in Watt, dunque $x(t)$ si misura in $\sqrt{W}$

* Definiamo invece $\mathcal{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt$ come **ENERGIA** del segnale.

Infine, si definisce $P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |x(t)|^2\, dt$ come **POTENZA MEDIA** del segnale $x(t)$

ESEMPIO

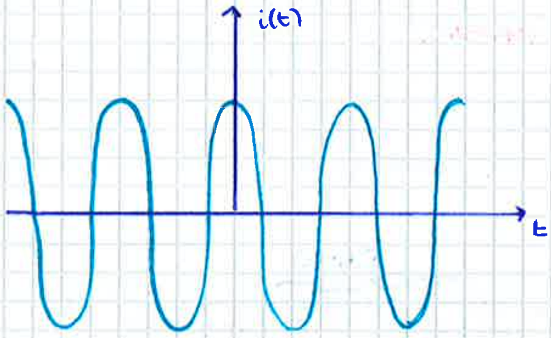


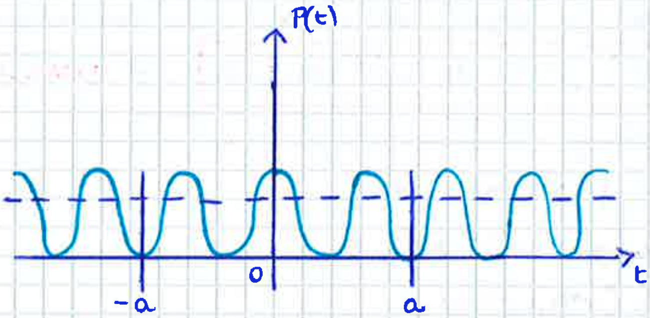
$P(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t)$

$P(t) = v(t)i(t) = \frac{1}{R}v^2(t)$

POTENZA ISTANTANEA

$i(t) = I\cos(2\pi f_0 t)$





$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

$P(t) = x^2(t) = A^2\cos^2(2\pi f_0 t) = \frac{A^2}{2}[1 + \cos(4\pi f_0 t)]$

$\mathcal{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^2/2\,[1 + \cos(4\pi f_0 t)]\, dt$

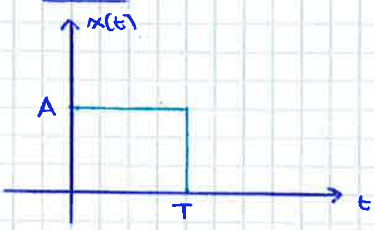
$$P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} \frac{A^2}{2}[1 + \cos(4\pi f_0 t)]\, dt = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a}\left[\frac{A^2}{2}\cdot 2a + \frac{A^2}{2}\left.\frac{\sin(4\pi f_0 t)}{4\pi f_0}\right|_{-a}^{a}\right] =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a}\left[A^2 a + \frac{A^2}{2}\underbrace{\frac{\sin(4\pi f_0 a) + \sin(4\pi f_0 a)}{4\pi f_0}}_{0}\right] = A^2/2 < \infty$$

$\Rightarrow$ $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$ è un segnale a potenza media FINITA di valore $A^2/2$

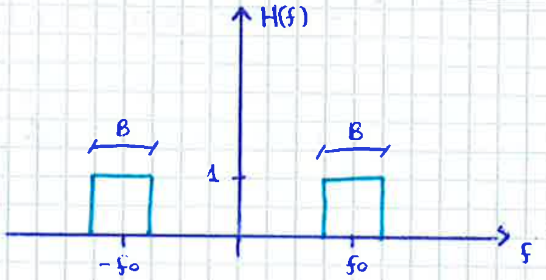
* Un segnale a potenza media finita $P(x) \neq 0$ ha necessariamente energia infinita

ESEMPIO



$\mathcal{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt = A^2T$

$P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |x(t)|^2\, dt = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} A^2T = 0$



$$\mathcal{E}(y) = \int_{-f_0-B/2}^{-f_0+B/2} |X(f)|^2\, df + \int_{f_0-B/2}^{f_0+B/2} |X(f)|^2\, df$$

(H(f) vale 1 in questi due intervalli)

- Definisco $\boxed{S_x(f) = |X(f)|^2}$ come lo SPETTRO DI ENERGIA di $x(t)$
- Definisco $R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\}$ come FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE di $x(t)$

$$\boxed{R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau}\, df}$$

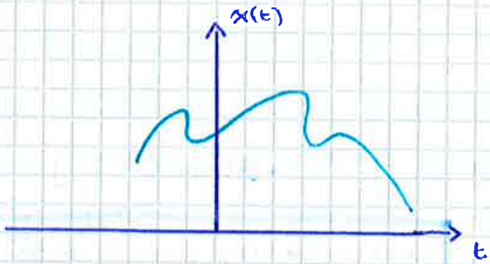
$$X(f) = \int x(t_1)\, e^{-j2\pi f t_1}\, dt_1$$

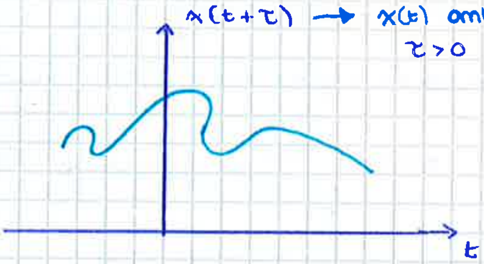
$$X^*(f) = \int x^*(t_2)\, e^{j2\pi f t_2}\, dt_2$$

$$R_x(\tau) = \int_f \int_{t_1} \int_{t_2} x(t_1)\, x^*(t_2)\, e^{j2\pi f(\tau+t_2-t_1)}\, dt_1\, dt_2\, df = \int_{t_1}\int_{t_2} x(t_1)\, x^*(t_2) \Big[\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(\tau+t_2-t_1)}\, df}^{\delta(\tau+t_2-t_1)} \Big] dt_1\, dt_2 =$$

$$= \int_{t_1}\int_{t_2} x(t_1)\, x^*(t_2)\, \delta(\tau+t_2-t_1)\, dt_1\, dt_2 = \int_{t_2} x^*(t_2) \Big[\underbrace{\int_{t_1} x(t_1)\, \delta(\tau+t_2-t_1)\, dt_1}_{x(t_2+\tau)} \Big] dt_2$$

$$\rightarrow \boxed{R_x(\tau) = \int x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt}$$





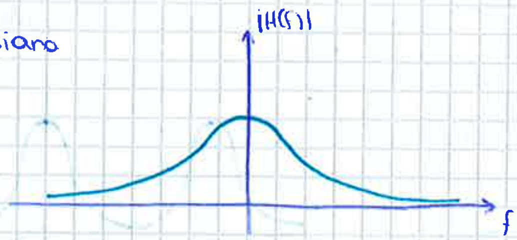
* se $\tau = 0$ $\quad R_x(\tau)\big|_{\tau=0} = \mathcal{E}(x)$

* la durata dell'autocorrelazione ci indica la velocità del segnale $x(t)$: se decade velocemente $x(t)$ è un segnale "ISTERICO", se decade lentamente $x(t)$ è un segnale LENTO

ESERCITAZIONE 5

(9) $x(t) = e^{-(t/T)^2}$ segnale gaussiano

$$x(t) \rightarrow \boxed{H(f)} \rightarrow y(t)$$



$$H(f) = e^{-(f/B)^2}\, e^{-j2\pi f(10/B)}$$

Si calcoli l'espressione di $y(t)$

$$|H(f)| = e^{-(f/B)^2}$$

$$\mathcal{F}\{e^{-t^2/(2T_0)^2}\} = T_0\sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2 f^2 T_0^2}$$

$$e^{-t^2/(2T_0)^2}$$

DOMINIO DELLA FREQUENZA

$$X(f) = \mathcal{F}\{e^{-(t/T)^2}\} = \frac{T}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}\, e^{-2\pi^2 f^2 T^2/2} = T\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 f^2 T^2}$$

$$\downarrow \quad T_0 = T/\sqrt{2}$$

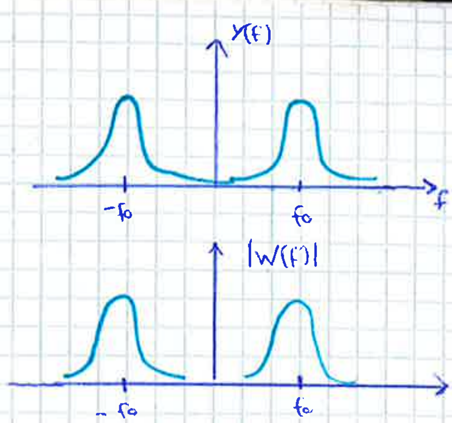
$$Y(f) = X(f)H(f) = \overbrace{T\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 f^2 T^2} \cdot e^{-(f/B)^2}}^{Z(f)}\, e^{-j2\pi f(10/B)}$$

$$y(t) = \cancel{\int Y(f) e^{j2\pi f t} df} = z(t - 10/B)$$

DOMINIO DELLA FREQUENZA

$$Y(f) = X(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] = \frac{1}{2}\left[X(f-f_0) + X(f+f_0)\right]$$

$$W(f) = W(f) * \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right] = \frac{1}{2}\left[W(f-f_0) + W(f+f_0)\right]$$



SEGNALI ad ENERGIA FINITA (RIASSUNTO)

$$\mathcal{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

Proprietà funzione di autocorr.

- $R_x(0) = \int x^*(t) x(t+\tau)\, d\tau \Big|_{\tau=0} = \int |x(t)|^2 dt = \mathcal{E}(x)$

  $R_x(\tau) = \int S_x(f) e^{j2\pi f\tau} df$

  $R_x(0) = \int S_x(f) df = \int |X(f)|^2 df = \mathcal{E}(x)$ => la funzione di autocorrel. valutata in $\tau=0$ è l'en. del segnale $x(t)$

- Se $x(t)$ è un segnale reale, la sua funzione di autocorr. è una funzione pari.

  $R_x(\tau) = \int x(t)\, x(t+\tau)\, dt$

  $R_x(-\tau) = \int x(t)\, x(t-\tau)\, dt = \int x(u+\tau) x(u)\, du = R_x(\tau)$

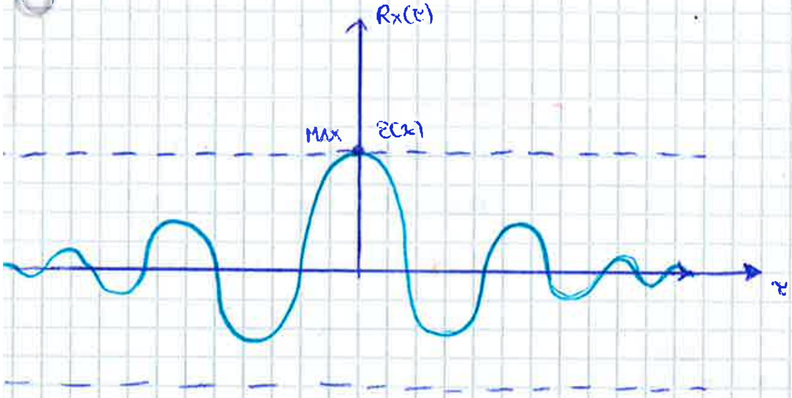
  $t-\tau = u$
  $t = u+\tau$

PROPRIETA' FUNZ. DI AUTOCORREL.
- Ritardatore e integratore
- Prodotto scalare tra 2 segn.
MACCHINA PER ECOGRAFIA
- Basi di segnali ortonorma.
- BASE di FOURIER

- $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
- DISEGUAGLIANZA di Schwartz → $R_x(\tau)$ assume valore massimo in 0

$$\left[\left|\int f(x) g(x) dx\right|^2 \leq \int |f(x)|^2 dx \int |g(x)|^2 dx\right]$$

$$|R_x(\tau)|^2 = \left|\int x(t) x(t+\tau)\, dt\right|^2 \leq \int |x(t)|^2 dt \int |x(t+\tau)|^2 dt = \mathcal{E}(x)\cdot\mathcal{E}(x) = R_x^2(0) \Rightarrow \boxed{|R_x(\tau)| \leq R_x(0)}$$



- Se $x(t)$ ha autocorrelazione $R_x(\tau)$, allora $y(t) = x(t-t_0)$ ha autocorrelazione $R_y(\tau) = R_x(\tau)$
  (TEMPO INVARIANZA)

  $R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|Y(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f) e^{-j2\pi f t_0}|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = R_x(\tau)$

  sto considerando solo il modulo!

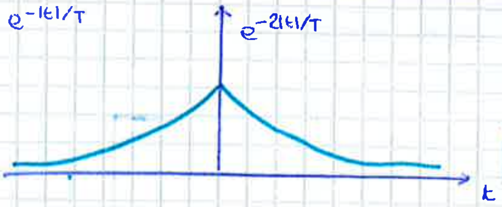
$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)$

$$S_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f) H(f)|^2 = |X(f)|^2 |H(f)|^2 = S_x(f) |H(f)|^2$$

$$R_y(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_y(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f) |H(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} * \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = R_x(\tau) * R_h(\tau)$$

$R_h(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|H(f)|^2\} = \int h(t)\, h(t+\tau)\, dt$ = funzione di autocorrelazione di $h(t)$

(6) Si calcolino energia e f.z. di autocorr. per $x(t) = e^{-|t|/T}$

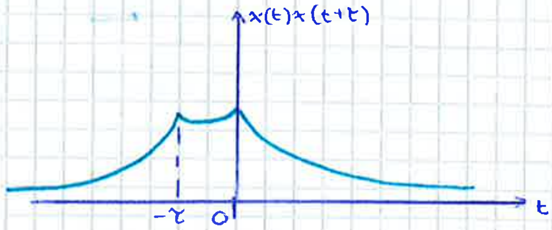


$$\mathcal{E}(x) = \int x^2(t)\,dt = \int |X(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t|/T}\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-2t/T}\,dt = 2\left.\frac{e^{-2t/T}}{-2/T}\right|_0^{\infty} = T$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,x(t+\tau)\,dt$$

$\tau > 0$



$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/T} e^{-|t+\tau|/T}\,dt = \int_{-\infty}^{-\tau} e^{+t/T} e^{(t+\tau)/T}\,dt + \int_{-\tau}^{0} e^{t/T} e^{-(t+\tau)/T}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-t/T} e^{-(t+\tau)/T}\,dt$$

$R_x(\tau) = e^{-\tau/T}(T+\tau)$ per $\tau > 0$

$R_x(\tau) = e^{-|\tau|/T}(T+|\tau|)$ per ogni τ

$R_x(0) = T$

No funzioni di CROSS-CORRELAZIONE

* La risposta all'impulso di un sistema LTI è in genere un segnale a energia finita

$S_y(f) = |Y(f)|^2 = S_x(f)\,|H(f)|^2$

$R_y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$

* Caso particolare: ritardatore

$\delta(t-t_0) = h(t)$

Qual è l'energia del segnale $\delta(t)$? È infinita

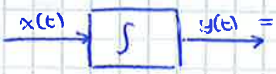
$\delta^2(t)$ non ha nessun significato matematico

$$\mathcal{E}(h) = \int h^2(t)\,dt = \int \delta^2(t-t_0)\,dt = \infty$$

Condizione di stabilità $\int |h(t)|\,dt < \infty$

Per il ritardatore la condizione di stabilità è $\int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t-t_0)|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1 < \infty$

* Altro esempio: integratore



$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$

$h(t) = u(t) \rightarrow$ gradino unitario

$$\mathcal{E}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,dt = \int_0^{\infty} dt = \infty$$

PRODOTTO SCALARE TRA DUE SEGNALI

Prodotto scalare tra vettori

$\underline{x} = [1,2,3]$, $\underline{y} = [3,4,5]$

$$\underline{x}\cdot\underline{y} = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k = 3+8+15 = 26$$

$$\boxed{\langle x(t), y(t)\rangle \triangleq \int x(t)\,y^*(t)\,dt}$$

$\mathcal{E}(x) = \int |x(t)|^2\,dt = \langle x(t), x(t)\rangle$

→ Analogia con il prodotto scalare del vettore per se stesso

* Due segnali $x(t)$ e $y(t)$ sono ortogonali tra loro se il prodotto scalare $\langle x(t), y(t)\rangle = 0 =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y^*(t)\,dt$

$\langle y(t), x(t-t_1)\rangle = \int x(t-t_0)\,x(t-t_1)\,dt =$ $t - t_0 = u$

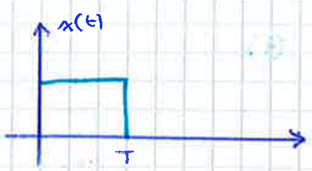
t_0 = valore vero del tempo di volo

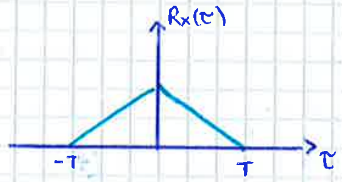
t_1 = valore di prova nella stima di t_0

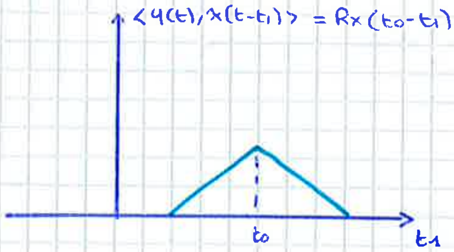
$= \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\,x(u+t_0-t_1)\,du = R_x(t_0-t_1)$

Il massimo si ha per $t_1 = t_0$ $(R_x(0))$

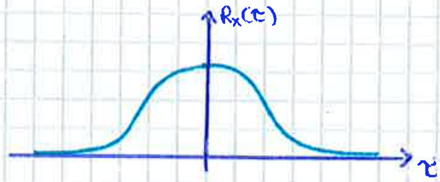
* Esempi di scelta del segnale $x(t)$

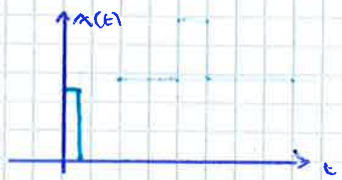


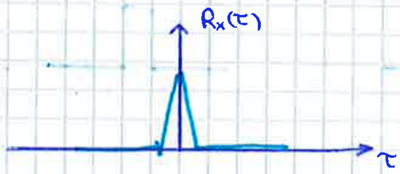




Più la funzione di autocorrelazione è "a punta" e più facile è trovare il max del prodotto scalare.



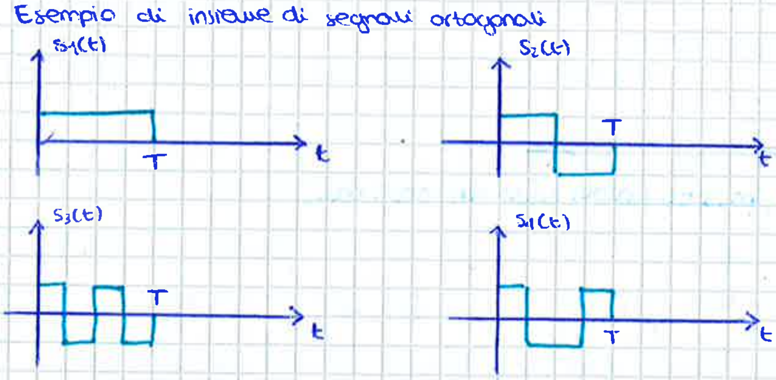




* Conviene usare segnali $x(t)$ di durata breve, che hanno funzione di autocorrelazione che decresce molto rapidamente nei dintorni del massimo. Questi segnali hanno spettro di energia con estensione grande $\Rightarrow$ segnali a banda larga. (ristretti nel tempo, estesi nella frequenza)

BASI di SEGNALI ORTONORMALI

Esempio di insieme di segnali ortogonali



$\langle s_i(t), s_j(t)\rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j \quad i,j = 1,2,3,4$

* $\mathcal{B} = \{s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)\}$ è una base di segnali ORTOGONALI

* $\mathcal{B}' = \{u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)\}$ è una base ORTONORMALE se $\langle u_i(t), u_j(t)\rangle = 0 \quad \forall\, i\neq j$ e $\langle u_i(t), u_i(t)\rangle = 1$

$\Leftrightarrow \mathcal{E}(u_i) = 1$

$u_1(t) = \alpha\, s_1(t) \Rightarrow \mathcal{E}(u_1) = \alpha^2 \mathcal{E}(s_1) = \alpha^2 T = 1 \Rightarrow \alpha^2 = 1/T, \quad \alpha = 1/\sqrt{T}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kt/T} p_T(t-T/2) = \sum_k x_k u_k(t)$$

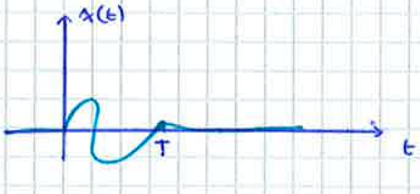
$$x_k = \langle x(t), u_k(t) \rangle = \int x(t) u_k^*(t)\, dt = \underbrace{\int_0^T x(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi kt/T}\, dt}_{\text{SERIE di FOURIER}}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi kt/T} p_T(t-T/2) \\ \mu_k = \frac{1}{\sqrt{T}} x_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi kt/T}\, dt \end{cases} \longrightarrow \text{it means that } x_k = \sqrt{T}\mu_k$$

Se $x(t) = x(t) p_T(t - T/2)$ (ciò vuole dire che $x(t)$ è nullo al di fuori di $[0,T]$)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft}\, dt = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft}\, dt$$

$$\mu_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j2\pi kt/T}\, dt = \frac{1}{T} X(k/T)$$



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k t/T}$$

$$x(t) \longleftrightarrow \mu_k = [\cdots \mu_{-1}, \mu_0, \mu_1, \cdots]$$

$$\mathcal{E}(x) = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df = \int |x(t)|^2 dt = \int \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k u_k(t) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x_\ell^* u_\ell^*(t)\, dt = \sum_k \sum_\ell x_k x_\ell^* \underbrace{\int u_k(t) u_\ell^*(t)\, dt}_{\langle u_k(t), u_\ell(t)\rangle} =$$

$$\int |x(t)|^2 dt = \int x(t) x^*(t)\, dt$$

$$\langle u_k(t), u_\ell(t) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq \ell \\ 1 & k = \ell \end{cases} = \delta[k-\ell]$$

$$= \sum_k x_k x_k^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 = \|\underline{x}\|^2 \longrightarrow \text{se } k = \ell$$

$$\mathcal{E}(x) = \int |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sqrt{T}\mu_k|^2 = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2$$

ESERCITAZIONE 6

4) Trovare la relazione tra l'energia $\mathcal{E}(x)$ di un segnale $x(t)$ e l'energia $\mathcal{E}(y)$ di $y(t) = x(2t)$

Per definizione $\mathcal{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

$$\mathcal{E}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x(2t))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(u) \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(u)\, du = \frac{1}{2}\mathcal{E}(x)$$

$2t = u$

7) Si calcolino energia e funzione di autocorrelazione del segnale $x(t) = \dfrac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$

DOMINIO DELLA FREQUENZA

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T}\right\} = T p_{1/T}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq 1/2T \longrightarrow -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \pi t/T}{(\pi t/T)^2}\, dt = \int |X(f)|^2 df = \int_{-1/2T}^{1/2T} T^2 df = T^2 \cdot \frac{1}{T} = T$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x(t+\tau)\, dt = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = \mathcal{F}^{-1}\{T^2 p_{1/T}(f)\} = T \frac{\sin \pi\tau/T}{\pi\tau/T}$$

$$R_x(0) = T = \mathcal{E}(x)$$

8) Calcolare l'energia di $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) p_T(t - T/2)$ $\quad f_0 = 10/T$

Fornire l'espressione del segnale $y(t)$ proporzionale a $x(t)$, ma con energia unitaria.

$$\mathcal{E}(x) = \int x^2(t)\, dt = \int_0^T \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T [1 + \cos(4\pi f_0 t)]\, dt = \frac{T}{2} + \frac{1}{2}\int_0^T \cos(4\pi f_0 t)\, dt$$

$z(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$P(z) = \frac{A^2}{2} = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} z^2(t)\, dt$$

$x(t) = z(t) p_T(t - T/2)$, $f_0 = 10/T$ $\longrightarrow$ Nell'intervallo $[0,T]$ $x(t)$ ha esattamente 10 periodi di segnale sinusoidale

$$\mathcal{E}(x) = P(z)\, T = A^2/2\; T$$

SEGNALI PERIODICI

Un segnale $x(t)$ é periodico di periodo T se $x(t) = x(t+T)$
Il segnale periodico di periodo T é dotato di una cosiddetta **frequenza fondamentale**. $f_0 = 1/T$

- Esempi di segnali periodici

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Theta)$
$x(t) = x(t+T)$

$A\cos(2\pi f_0 t + \Theta) = A\cos(2\pi f_0 (t+T) + \Theta)$, T incognito

$\Rightarrow 2\pi f_0 t + \Theta = 2\pi f_0 (t+T) + \Theta + n \cdot 2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$2\pi f_0 T + 2n\pi = 0 \quad \rightarrow \quad T = -\frac{n}{f_0}$ con $n = -1 \rightarrow T = 1/f_0$
con $n = -2 \rightarrow T = 2/f_0$

* Il periodo é il più piccolo valore di T che risolve l'equazione $(T = 1/f_0)$

Esempio

$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\cos(2\pi f_1 t)$

- È periodico? Se sí, di che periodo?

$x(t) = x(t+T)$

$A\cos(2\pi f_0 t) + B\cos(2\pi f_1 t) = A\cos(2\pi f_0 (t+T)) + B\cos(2\pi f_1 (t+T))$ È vera se $\exists$ sol. per il sistema

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi f_0 t = 2\pi f_0 (t+T) + 2K\pi & k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi f_1 t = 2\pi f_1 (t+T) + 2n\pi & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_0 T + k = 0 \\ f_1 T + n = 0 \end{cases} \qquad \left[\frac{f_0}{f_1} = \frac{K}{n}\right]$$

Il segnale é periodico $\Leftrightarrow$ f_0/f_1 é uguale al rapporto fra due numeri interi

ESEMPIO $f_0 = 5\ kHz$ $\quad f_1/f_0 = 11.5/5 = 115/50 = n/K \quad k = 50,\ n = 115$
$f_1 = 11.5\ kHz$

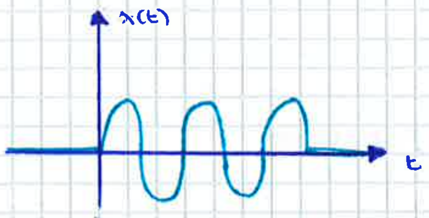
$5_0 T + k = 0 \qquad T = -k/f_0$

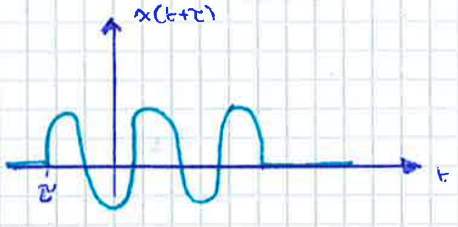
ESEMPIO (continua)

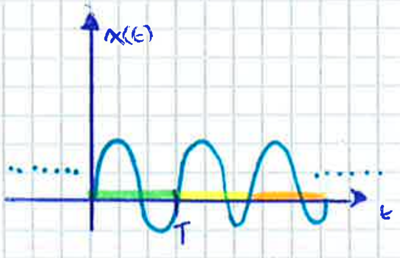
$f_0 = 5\ kHz \qquad f_1 = 11,5\ kHz$
$k = 50 \qquad T = \left|-\frac{k}{f_0}\right| = 50/f_0$

SEGNALI PERIODICI (1)
- segnale troncato
- treno di delta
- onda quadra
- Fourier per segnali perio[dici]

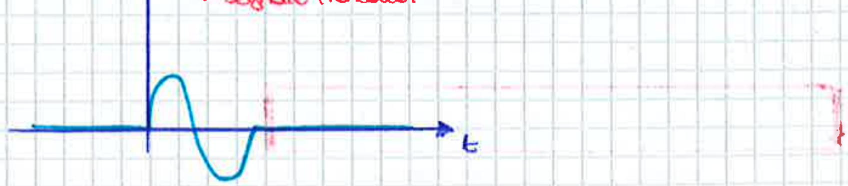
Un segnale periodico ha supporto per t da $-\infty$ a $+\infty$.







$x_T(t) = x(t)\, p_T(t - T/2) \longrightarrow$ é $\neq 0$ sol per $t \in [0,T]$
$\hookrightarrow$ segnale troncato.



$x(t) = x_T(t) + x_T(t-T) + x_T(t-2T) + \ldots + x_T(t+T) + \ldots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(t-kT)$

* Se un segnale $y(t)$ è scritto matematicamente come $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t-kT)$ allora $y(t)$ è un segnale periodico di periodo T.

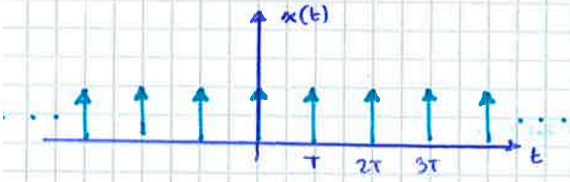
Verifica $\rightarrow$ $y(t) = y(t+T)$

- $\sum \mu_m e^{j2\pi n t/T}$ è periodica con lo stesso periodo T

$\left[\sum \mu_m e^{j2\pi n t/T} = x(t)\right]$, $t \in [0,T] \Rightarrow x(t) = \sum \mu_m e^{j2\pi n t/T}$, $t \in \mathbb{R}$

* Esempio di calcolo della trasformata di Fourier di segnali periodici

1) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ TRENO di DELTA (PETTINE)



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j2\pi n t/T}$$

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j2\pi n t/T} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n t/T} dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{3T/4} x(t) e^{-j2\pi k t/T} dt \text{ ecc.}$$

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi n t/T} dt = \frac{1}{T}\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\, dt}_{1} = \frac{1}{T} \quad \forall n$$

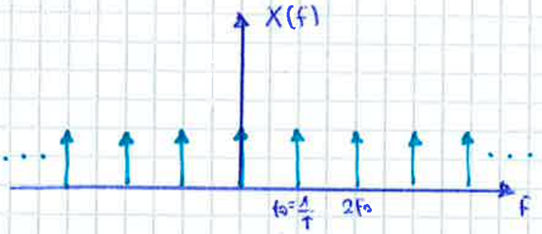
$[x_T(t) = \delta(t)]$

Dunque si ha $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_m e^{j2\pi n t/T} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n t/T}$

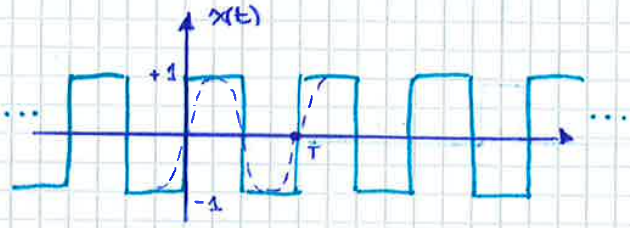
$$\boxed{x(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n t/T}}$$

$1/T = f_0$ Scrivo tutto in funzione della frequenza fondamentale

$$X(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{j2\pi n t/T}\} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_0)$$



Esempio ONDA QUADRA

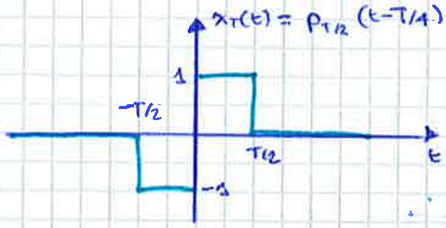


- $x(t) = \text{sign}(\sin 2\pi t/T)$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_m e^{j2\pi n t/T}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 1/T \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\, e^{-j2\pi n t/T} dt \\ 1/T \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, e^{-j2\pi n t/T} dt \text{ (SEGNALE TRONCATO)} \end{cases}$$

$x_T(t) = p_{T/2}(t - T/4) - p_{T/2}(t + T/4)$ ONDA QUADRA TRONCATA



$$x_T(t) = p_{T/2}(t) * [\delta(t - T/4) - \delta(t + T/4)]$$

$$X_T(f) = \mathcal{F}\{p_{T/2}(t)\} \cdot \mathcal{F}\{\delta(t-T/4) - \delta(t+T/4)\} = T/2 \left(\frac{\sin \pi f T/2}{\pi f T/2}\right) \cdot \left[\frac{e^{-j2\pi f T/4} - e^{j2\pi f T/4}}{(2j)}\right](-2j) =$$

$$= -jT \left(\frac{\sin \pi f T/2}{\pi f T/2}\right) \sin(\pi f T/2)$$

$$\mu_n = \frac{1}{T} X_T(n/T) = \frac{1}{T}(-jT)\frac{\sin(\pi \frac{n}{T}\frac{T}{2})}{\pi \frac{n}{T} T/2} \cdot \sin(\pi\, n/T\, T/2) =$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ -\frac{2j}{\pi} & n=1 \\ 0 & n=2 \\ -\frac{2j}{3\pi} & n=3 \end{cases}, \quad \frac{2j}{\pi} \quad n=-1$$

* In generale, se $x(t)$ è reale, $\mu_{-k} = \mu_k^*$

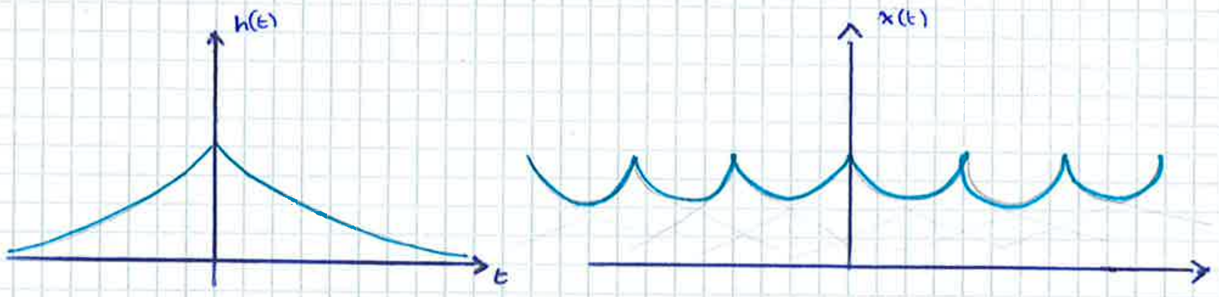
$$\begin{cases} n \text{ pari} \rightarrow 0 \\ n \text{ dispari} \rightarrow \frac{-2j}{n\pi} \end{cases}$$

ESERCIZIO

Sia dato il segnale $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT)$

$h(t) = e^{-|t|/t_0} \qquad t \in \mathbb{R}$

1) Disegnare qualitativamente $x(t)$



$x(t)$ è un segnale periodico di periodo T

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-kT)$

$x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t+T-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t-\ell T) = x(t)$ ■

2) Scrivere in forma chiusa l'espressione di $x(t)$ per $t=t_1$, $t_1 \in [0,T]$

$h(t-kT) = e^{-|t-kT|/t_0}$

$x(t_1) = e^{-t_1/t_0} + e^{(t_1-T)/t_0} + e^{(t_1-2T)/t_0} + \dots + e^{-(t_1+T)/t_0} + e^{-(t_1+2T)/t_0} + \dots$

$h(t-T)\big|_{t=t_1} = e^{-|t_1-T|/t_0} = e^{(t_1-T)/t_0}$

$h(t-2T)\big|_{t=t_1} = e^{-|t_1-2T|/t_0} = e^{(t_1-2T)/t_0}$

$x(t_1) = e^{-t_1/t_0}\left[1+e^{-T/t_0}+e^{-2T/t_0}+\dots\right] + e^{t_1/t_0}\left[e^{-T/t_0}+e^{-2T/t_0}+\dots\right]$

Scriviamo $\left[1+e^{-T/t_0}+e^{-2T/t_0}+\dots\right]$ come $\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-T/t_0}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-t/t_0}}$

Scriviamo $\left[e^{-T/t_0}+e^{-2T/t_0}+\dots\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-T/t_0}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-e^{-t/t_0}} - 1$

$x(t_1) = \frac{e^{-t_1/t_0}}{1-e^{-T/t_0}} + \frac{e^{t_1/t_0}}{1-e^{-T/t_0}} - e^{t_1/t_0}$

2) $x(t_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t_1-kT) = \qquad h(t_1) = e^{-|t_1|/t_0}$

$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|t_1-kT|/t_0}$

se $k>0 \longrightarrow t_1-kT<0 \longrightarrow h(t-kT) = e^{(t_1-kT)/t_0}$

se $k\leq 0 \longrightarrow t_1-kT>0 \longrightarrow h(t_1-kT) = e^{-(t_1-kT)/t_0}$

$x(t_1) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{(t_1-kT)/t_0} + \sum_{k=-\infty}^{0} e^{-(t_1-kT)/t_0} = e^{t_1/t_0}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kT/t_0} + e^{-t_1/t_0}\sum_{k=-\infty}^{0} e^{kT/t_0}$

$x(t_1) = e^{t_1/t_0}\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT/t_0} - 1\right) + e^{-t_1/t_0}\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} e^{-\ell T/t_0}\right) = \quad (\ell=-k)$

Calcolare la trasformata di Fourier di $x(t)$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_m e^{j2\pi n t/T}$

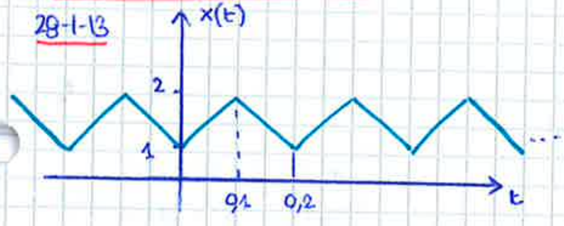
$\mu_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-j2\pi nt/T}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-j2\pi nt/T}\,dt = \frac{1}{T}X_T\left(\frac{m}{T}\right)$

$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_m\,\delta\left(f-\frac{m}{T}\right)$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t-kT) \qquad h(t-kT) = h(t) * \delta(t-kT)$

Esercitazione segnali periodici

28-1-13



Calcolare $X(f)$.

Per definizione:

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j2\pi n t/T}$ $\quad T = 0.2$ $\quad f_0 = 1/T = 5\,Hz$

$\mu_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j2\pi n t/T} dt =$

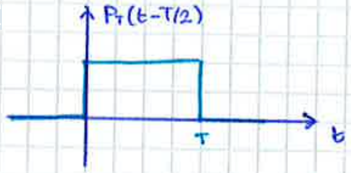
$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j2\pi n t/T} dt = \frac{1}{T} X_T(f)\Big|_{f=\frac{n}{T}}$

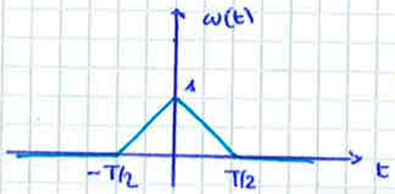
$x_T(t) = x(t)\, p_T(t - T/2)$

$X_T(f) =$

$x_T(t) = v(t) + p_T(t - T/2)$

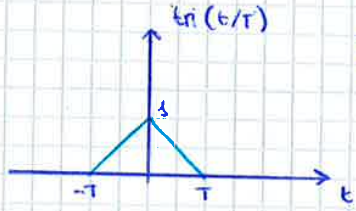
$X_T(f) = V(f) + \frac{\sin \pi f T}{\pi f} e^{-j2\pi f T/2}$





$v(t) = w(t - T/2)$

$W(f) = \frac{T}{2} \frac{\sin^2(\pi f T/2)}{(\pi f T/2)^2}$



$\mathcal{F}\{tri(t/T)\} = T \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$

$V(f) = W(f) e^{-j2\pi f T/2}$

$X_T(f) = \frac{T}{2} \frac{\sin^2(\pi f T/2)}{(\pi f T/2)^2} e^{-j2\pi f T/2} + \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-j2\pi f T/2}$

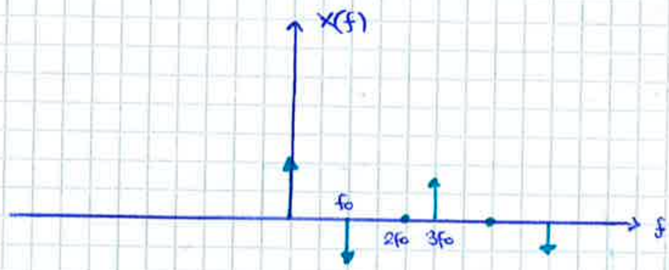
$\mu_n = \frac{1}{T} X_T(n/T) = \frac{1}{T}\cdot\frac{T}{2} \frac{\sin^2(\pi \frac{n}{T} \frac{T}{2})}{(\pi \frac{n}{T}\frac{T}{2})^2} e^{-j2\pi \frac{n}{T}\frac{T}{2}} + \frac{1}{T} \frac{T \sin(\pi n/T\, T)}{\pi n/T\, T} e^{-j2\pi \frac{n}{T}\frac{T}{2}} =$

$= \underbrace{\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n/2}\right]^2}_{} \underbrace{e^{-jn\pi}}_{(-1)^n} + \underbrace{\left(\frac{\sin \pi n}{\pi n}\right) e^{-j\pi n}}_{}$

1 per n=0
2/π per n=1
0 per n=2,4,6...
-2/3π per n=3
2/5π per n=5
-2/7π per n=7

1 per n=0
0 per n≠0

$\mu_n = \begin{cases} 3/2 & \text{per } n=0 \\ 0 & \text{per } n \text{ pari} \\ -2/\pi^2 & \text{per } n=1 \\ 2/(3\pi)^2 & \text{per } n=3 \\ -2/(5\pi)^2 & \text{per } n=5 \end{cases}$

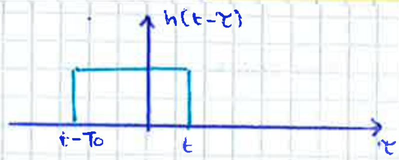


$X(-f) = X^*(f)$

$\mu_{-n} = \mu_n$

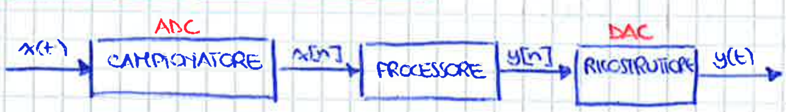
$x(t) = \sum \mu_n e^{j2\pi n t/T}$

$X(f) = \sum \mu_n \delta(f - n/T)$ $\quad \frac{1}{T} = f_0 = 5\,Hz$



$y_1(t) = 0$

Teorema del campionamento



ADC - Analogue to Digital converter

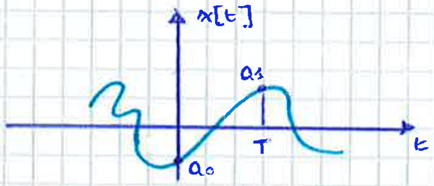
DAC - Digital to Analogue converter

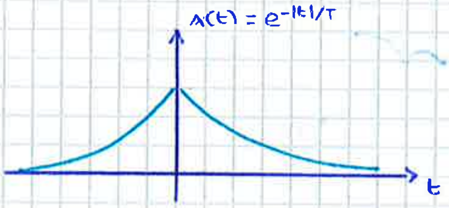
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t-kT) \qquad x(t) \text{ qualsiasi}$$

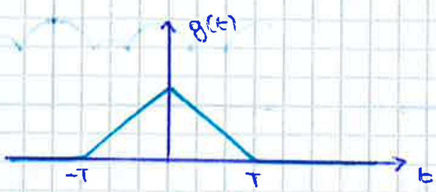
- Per il segnale periodico

$$\left[x(t) = \sum \mu_k e^{j2\pi kt/T} \right]$$

$$a_k = x[k] = x(kT)$$





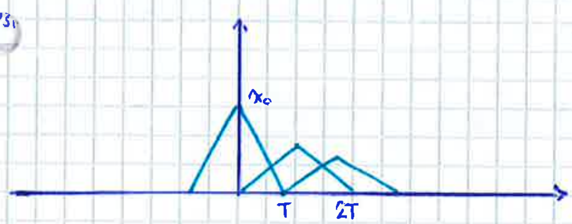


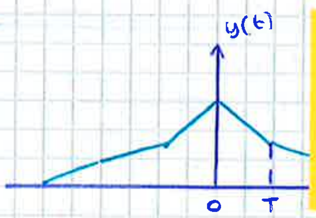
$$x(t) \neq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) g(t-nT)$$

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, g(t-nT)$$

Disegnare qualitativamente $y(t)$

$$y(t) = x(0)g(t) + x(T)\, g(t-T) + x(2T)g(t-2T) + \dots$$





TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO
- Enunciato e dimostrazione
→ -

Abbiamo realizzato una INTERPOLAZIONE LINEARE tra i campioni di $x(t)$.

* Esiste $g(t)$ s.t.

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) g(t-nT) \quad \text{esattamente?}$$

$$\boxed{x(t) = \sum x(nT)\, g(t-nT)} =$$

Sappiamo che $g(t-nT) = \delta(t-nT) * g(t)$

$$= \sum x(nT) [\delta(t-nT) * g(t)] = \left[\sum x(nT)\, \delta(t-nT)\right] * g(t) = \left[\sum x(t)\, \delta(t-nT)\right] * g(t) =$$

$$= \left[x(t) \sum \delta(t-nT)\right] * g(t)$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t) \sum \delta(t-nT)\} \cdot G(f) = \left[X(f) * \frac{1}{T} \sum \delta(f - \tfrac{n}{T})\right] \cdot G(f) = \qquad (G(f) \text{ è l'incognita})$$

$$= \left[\frac{1}{T} \sum_n X(f - n/T)\right] G(f)$$

Lezione 17-04-14

SEGNALI PERIODICI

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q(t-kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\delta(t-kT) * q(t)) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\right] * q(t)$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{\delta(t-kT)\} Q(f) = \left[\frac{1}{T}\sum \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)\right] \cdot Q(f) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} Q\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k^{*}\, \delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$*\ \mu_k = \frac{1}{T} Q\left(\frac{k}{T}\right)$

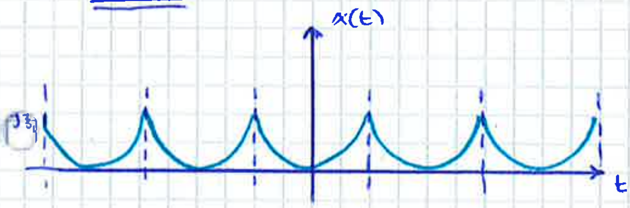
Potenza di un segnale periodico

I segnali periodici hanno energia infinita ($\mathcal{E}=\infty$), a noi interessano i segnali periodici con potenza media finita.

- Se $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \longrightarrow P(x) = \frac{A^2}{2}$

$\longrightarrow P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |x(t)|^2\, dt$

ESEMPIO



$*\ P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} |x(t)|^2\, dt$

- $a = T \longrightarrow P(x) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt = \frac{2\mathcal{E}(x)}{2T}$ *
- $a = 2T \longrightarrow P(x) = \frac{1}{4T}\int_{-2T}^{2T} |x(t)|^2\, dt = \frac{4\mathcal{E}(x)}{4T}$ *

* Si mantiene sempre la stessa relazione tra $P(x)$ e $\mathcal{E}(x)$

* Possiamo quindi scrivere la potenza $P(x)$ con la formula:

$$\boxed{P(x) = \frac{\mathcal{E}(x)}{T}}$$

Potenza con serie di Fourier

$$P(x) = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi k t/T}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_n^* e^{-j2\pi n t/T}\right) dt = \frac{1}{T}\sum_k \mu_k \mu_k^* T = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2$$

impongo $k=n$

$$= \frac{1}{T}\sum_k \sum_n \mu_k \mu_n^* \underbrace{\int_0^T e^{j2\pi(k-n)t/T}\, dt}_{\substack{=0 \text{ per } n\neq k \\ =T \text{ per } n=k}} = \longrightarrow \boxed{P(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2}$$

- VERIFICA CON ESEMPIO

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) = A\,\frac{e^{j2\pi f_0 t} e^{j\theta} + e^{-j2\pi f_0 t} e^{-j\theta}}{2}$$

$$X(f) = \frac{A}{2}\left[e^{j\theta}\delta(f-f_0) + e^{-j\theta}\delta(f+f_0)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k\, \delta\left(f-\frac{k}{T}\right) \quad ; \quad T = 1/f_0$$

$\longrightarrow \mu_1 = \frac{A}{2}e^{j\theta}\ ;\quad \mu_{-1} = \frac{A}{2}e^{-j\theta}\ ;\quad \mu_k = 0 \quad \forall k \neq \pm 1$

$\longrightarrow P(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mu_k|^2 = |\mu_1|^2 + |\mu_{-1}|^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{A^2}{4} = \frac{A^2}{2}$

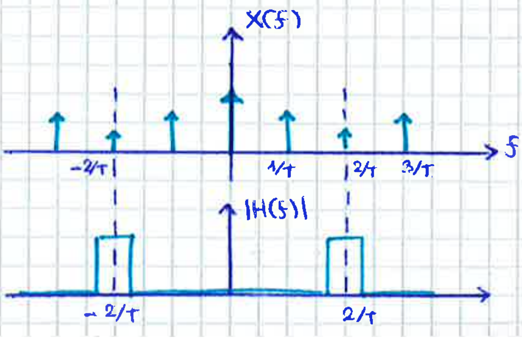
SEGNALI PERIODICI (2)
- Potenza di un segnale perio
- Potenza con serie di Fourier
- Spettro di potenza s. period
- Funzione di autocorrelazione proprietà.

Spettro di potenza nel segnale periodico

$x(t) \longrightarrow$ H(f) BPF $\longrightarrow y(t)$

caso of band pass one

BPF = Band Pass Filter
LPF = Low Pass Filter
HPF = High Pass Filter



* Altro metodo per calcolare la funzione di autocorrelazione di un segnale periodico.

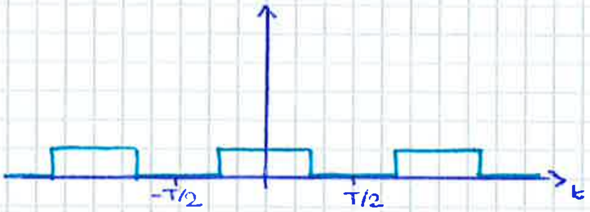
$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt}$$

- se $x(t)$ è ad energia finita:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\, x(t+\tau)\, dt$$

ESERCIZIO

* Calcolo della funzione di autocorrelazione dell'onda quadra

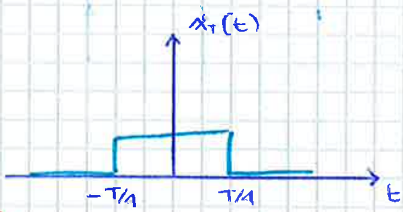


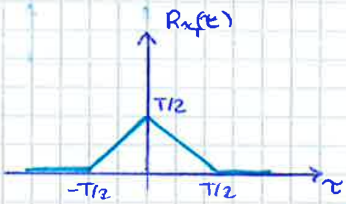
$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(t-kT) \\ x_T(t) = p_{T/2}(t) \end{cases}$$

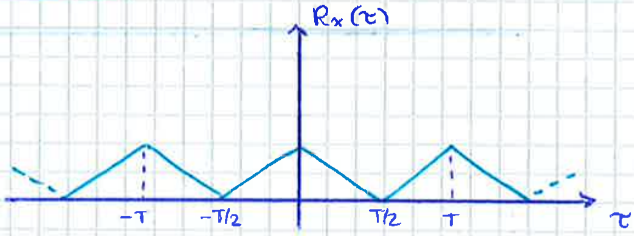
$\rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, x(t+\tau)\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\, x(t+\tau)\, dt =$

$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_T(t-kT+\tau)\, dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t)\cdot x_T(t-kT+\tau)\, dt =$

$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\, x_T(t-kT+\tau)\, dt = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{x_T}(\tau-kT)$



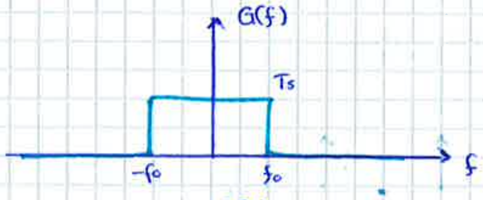


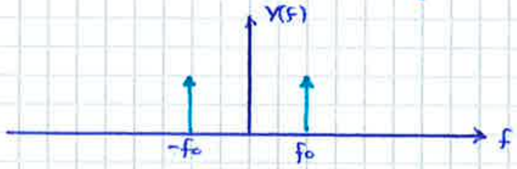


$Y(f) = X_\delta(f)\,G(f)$

$Y(f) = A\left[\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right]$

$y(t) = 2A\cos(2\pi f_0 t)$



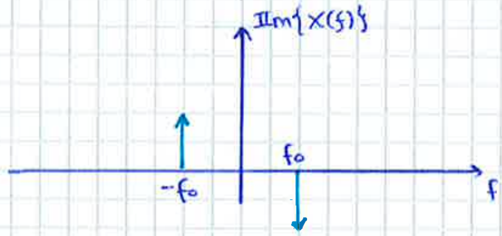


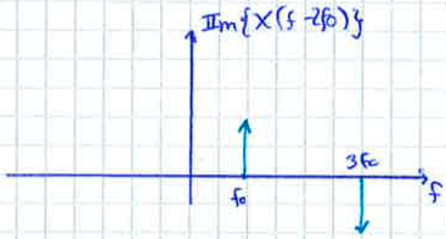
Se $x(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$

$x_\delta(t) = x(t)\sum \delta(t-nT_s)$, allora $X_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s}\sum \delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s}\sum X\left(f-\frac{n}{T_s}\right) =$

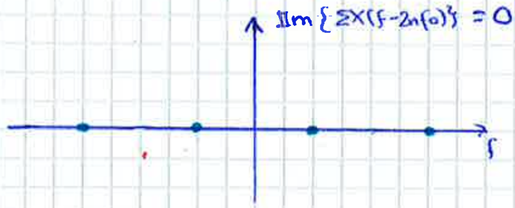
$= \frac{1}{T_s}\sum X(f-2nf_0)$

$\rightarrow X(f) = \frac{A}{2j}\left[\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right]$





$\mathrm{Im}\{\sum X(f-2nf_0)\} = 0$ (tutte le δ si elidono)



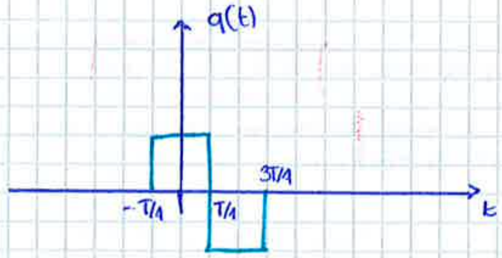
$\boxed{f_s > 2 \text{ volte la banda}}$

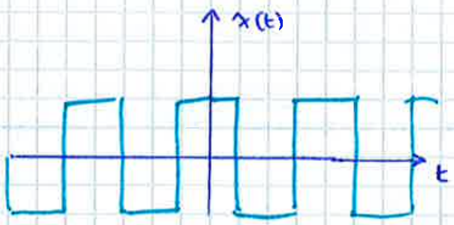
2) $x(t) = A\sum_{n=-\infty}^{\infty} q(t-nT)$

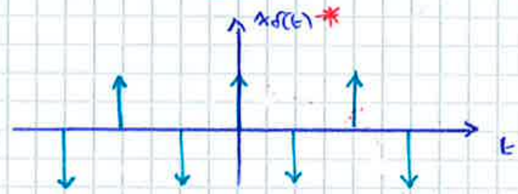
$q(t) = p_{T/2}(t) - p_{T/2}(t-T/2)$

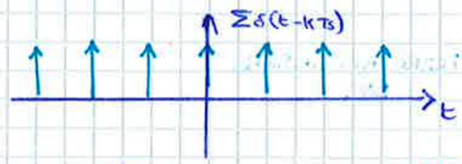
Intervallo di campionamento $T_s = T/2$

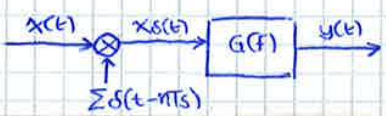
$x_\delta(t) = x(t)\cdot\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)$

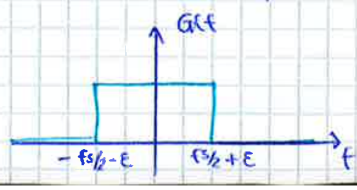












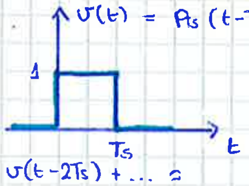
* $x(t)\sum\delta(t-nT_s) = A\cos 2\pi f_0 t +$

$+ \sum\delta(t-nT_s)$

$y(t) = 2A\cos 2\pi f_0 t = 2A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

$x(t) \rightarrow \boxed{S\&H} \xrightarrow{x_s(t)}$

$v(t) = P_{T_s}(t - T_s/2)$



$$x_s(t) = x(0)v(t) + x(T_s)v(t-T_s) + x(2T_s)v(t-2T_s) + \dots =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\, v(t-nT_s) = \left[\sum x(nT_s)\,\delta(t-nT_s)\right] * v(t) = x_\delta(t) * v(t)$$

$x(t) \rightarrow \boxed{S\&H} \xrightarrow{x_s(t)}$

$\updownarrow$

$x(t) \rightarrow \otimes \xrightarrow{x_\delta(t)} \boxed{V(f)} \xrightarrow{x_s(t)}$, con $\uparrow \sum \delta(t-nT_s)$

$\rightarrow$

$x(t) \rightarrow \otimes \xrightarrow{x_\delta(t)} \boxed{G(f)} \xrightarrow{y(t) = x(t)}$, con $\uparrow \sum \delta(t-nT_s)$

$x(t) \rightarrow \boxed{S\&H} \xrightarrow{x_s(t)} \boxed{G'(f)} \xrightarrow{y(t)} = x(t)$

$$\boxed{G'(f) = \frac{G(f)}{V(f)}}$$

$x(t) \rightarrow \otimes \xrightarrow{x_\delta(t)} \boxed{V(f)} \xrightarrow{x_s(t)} \boxed{G(f)} \xrightarrow{x(t)*v(t)}$ ✓ realizzabile nella pratica , con $\uparrow \sum \delta(t-nT_s)$

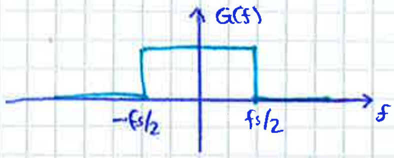
$\rightarrow \boxed{\frac{1}{V(f)}} \xrightarrow{x(t)}$

EQUALIZZATORE

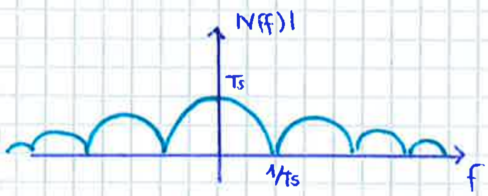
$x(t) \rightarrow \otimes \xrightarrow{x_\delta(t)} \boxed{G(f)} \xrightarrow{x(t)} \boxed{V(f)} \xrightarrow{x(t)*v(t)}$, con $\uparrow \sum \delta(t-nT_s)$

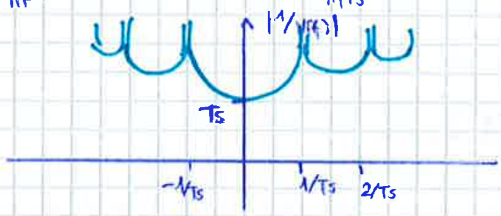
invertendo i blocchi si ottiene comunque $x(t) * v(t)$ (LTI)

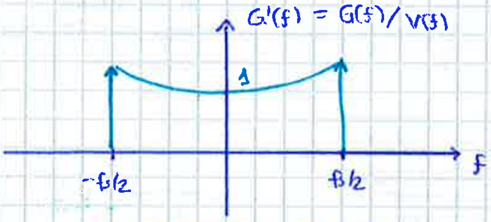
$x(t) \rightarrow \boxed{S\&H} \xrightarrow{x_s(t)} \boxed{G'(f) = \frac{G(f)}{V(f)}} \xrightarrow{x(t)}$



• $V(f) = \mathcal{F}\{v(t)\} = \mathcal{F}\{P_{T_s}(t - T_s/2)\} = \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f} e^{-j2\pi f T_s/2} = T_s \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s} e^{-j\pi f T_s}$







ADC: $x(t) \rightarrow \boxed{H_a(f)} \xrightarrow{x'(t)} \boxed{S\&H} \xrightarrow{x'_s(t)}$

$H_a(f)$ è la funzione di trasferimento del filtro ANTIALIASING

$H_a(f) = P_{f_s}(f) = \frac{G(f)}{T_s}$

DAC: $x'_s(t) \rightarrow \boxed{G'(f)} \xrightarrow{x'(t)}$

$$G'(f) = P_{f_s}(f) \frac{\pi f}{\sin \pi f T_s} = \frac{H_a(f)}{V(f)} = P_{f_s}(f) \frac{\pi f}{\sin \pi f T_s \cdot e^{-j\pi f T_s}}$$

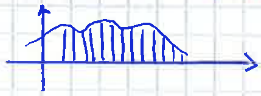
$v_u(t) = v_i(t) * h(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\, v_i(t-\tau)\, d\tau$

$v_i(t)$ nell'intervallo di tempo $[nT_s, nT_s + T_s]$ vale $v_u(nT_s)$

$v_u(nT_s) = \int_0^{\infty} h(\tau)\, v_i(nT_s - \tau)\, d\tau$

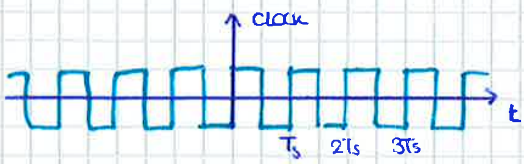
$\rightarrow v_u(nT_s) = \int_0^{\infty} h(\tau)\, v_i(nT_s - \tau)\, d\tau \cong \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_s)\, v_i(nT_s - kT_s)\, T_s$

REGOLA DEL RETTANGOLO



l'area è la somma dei tanti rettangolini sotto la curva, dunque l'integrale diventa una sommatoria: $\rightarrow$

* All'interno dell'ADC c'è un generatore di segnale di CLOCK



In corrispondenza con i fronti di salita del clock il campionatore genera il campione. $v_i(nT_s)$

$v_{u,s}'(nT_s) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_s)\, v_{is}(nT_s - kT_s)\, T_s$ *

$v_{u,s}'[n] = v_{us}'(nT_s)$

$v_{is}[n-k] = v_{is}(nT_s - kT_s)$

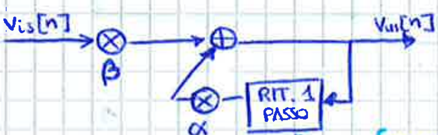
Definisco $q[k] = h(kT_s)T_s$

CONVOLUZIONE DISCRETA

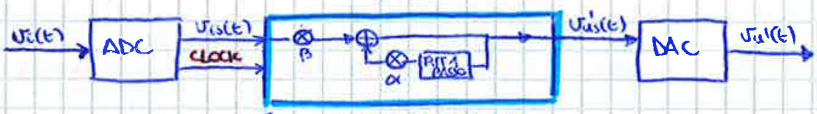
* $v_{us}'[n] = \sum q[k]\, v_{is}[n-k] = q[n] * v_{is}[n]$

$q[k] = h(kT_s)T_s = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} \underbrace{}_{u(t)} \Big|_{t=kT_s} \cdot T_s = \frac{T_s}{RC} e^{-kT_s/RC}\, u[k] = \beta \alpha^k u[k]$

dove $\beta = T_s/RC$ e $\alpha = e^{-T_s/RC}$ $\longrightarrow$ numeri adimensionali



[ritardo di T_s secondi (physical p.o.v.)]

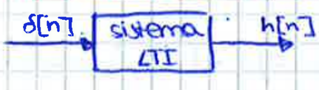


(agisce sui fronti di salita del clock)

$\uparrow$

SEGNALI E SISTEMI A TEMPO DISCRETO

Richiami sulla convoluzione nel tempo discreto



$x[n] = x[0]\,\delta[n] + x[1]\,\delta[n-1] + \ldots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]$

- $x[n] = \begin{cases} 1 & n=0,\dots,N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

- $x[n] = 1 \quad \forall n$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n}$ non converge mai $\longrightarrow$ non esiste la trasformata z di $x[n]=1$

Proprietà della trasformata zeta

1) LINEARITÀ $\mathcal{Z}\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1\mathcal{Z}\{x_1[n]\} + a_2\mathcal{Z}\{x_2[n]\}$

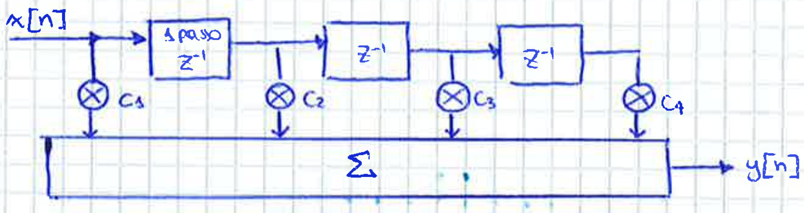
2) CONVOLUZIONE $\mathcal{Z}\{x[n]*h[n]\} = \mathcal{Z}\{y[n]\}$; $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\, z^{-n} = \sum_n\sum_k x[k]h[n-k]\, z^{-(n+k-k)} = \sum_n\sum_k x[k]h[n-k]\, z^{-k} z^{-(n-k)} =$$

$$= \sum_k x[k] z^{-k} \sum_n h[n-k] z^{-(n-k)} = \sum_k x[k] z^{-k} \sum_m h[m] z^{-m} = X(z)H(z)$$

$n-k=m$

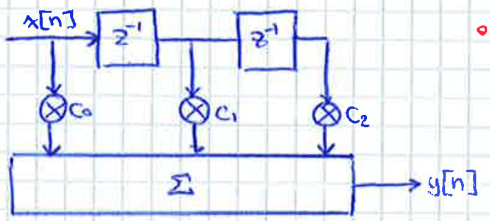
3) RITARDO $\mathcal{Z}\{x[n-M]\} = \mathcal{Z}\{x[n]*\delta[n-M]\} = X(z)\cdot\mathcal{Z}\{\delta[n-M]\} = X(z)z^{-M}$



$h[n] = c_1\delta[n] + c_2\delta[n-1] + c_3\delta[n-2] + c_4\delta[n-3]$

($\delta[n]$ all'ingresso)

$H(z) = c_1 + c_2z^{-1} + c_3z^{-2} + c_4z^{-3}$



- FIR FILTER (Finite impulse response filter)

$x[n] = r_3[n] = \begin{cases} 1 & n=0,1,2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ $\qquad h[n] = \frac{1}{3}[\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]]$ $\qquad H(z) = \frac{1}{3}[1+z^{-1}+z^{-2}]$

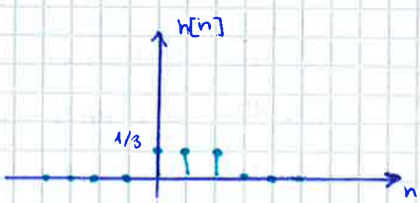
$c_0 = c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$ $\qquad y[n] = \frac{1}{3}\left[x[n] + x[n-1] + x[n-2]\right]$ (operazione di MEDIA MOBILE)

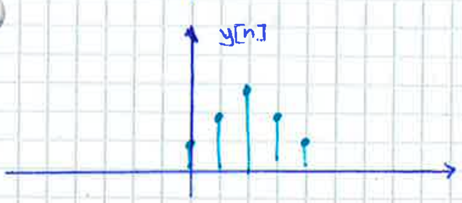
* Calcolo di $y[n]$ utilizzando la trasformata zeta

$$Y(z) = X(z)H(z) = (1+z^{-1}+z^{-2})\,\frac{1}{3}(1+z^{-1}+z^{-2}) = \frac{1}{3}\{1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}\} =$$

$$= \frac{1}{3}\{1+2z^{-1}+3z^{-2}+2z^{-3}+z^{-4}\}$$

$$y[n] = \frac{1}{3}\{\delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + \delta[n-4]\}$$





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 126

- $H(z) = \dfrac{z-2}{z^2-0{,}5} = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

Disegnare lo schema a blocchi del sistema

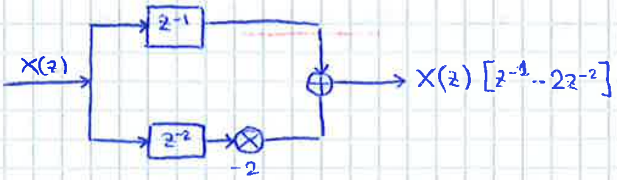
$Y(z)(z^2-0{,}5) = X(z)(z-2)$ moltiplico per z^{-2} a destra e a sinistra dell'uguale (devo ottenere esponenti negativi)

$Y(z)(1-0{,}5z^{-2}) = X(z)(z^{-1}-2z^{-2})$

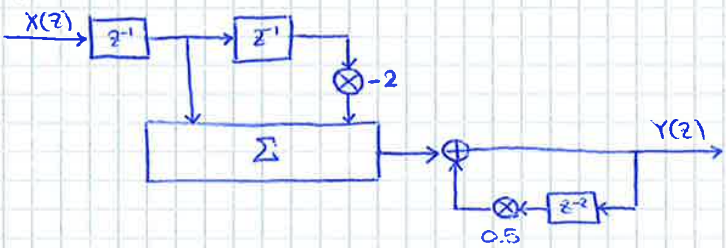
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = +\frac{1}{(1-x)^2}$$



$Y(z) = 0{,}5z^{-2}\,Y(z) + X(z)(z^{-1}-2z^{-2})$

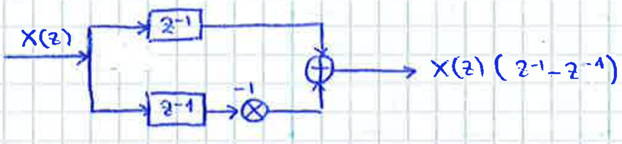


- $H(z) = \dfrac{z^3-1}{z^4-0.5z^2-1} = \dfrac{Y(z)}{X(z)}$

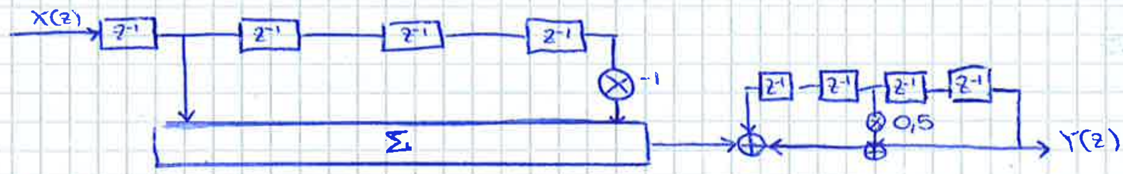
Disegnare lo schema a blocchi del sistema

$Y(z)(z^4-0{,}5z^2-1) = X(z)(z^3-1)$ moltiplico per z^{-4} entrambi i membri

$Y(z)(1-0{,}5z^{-2}-z^{-4}) = X(z)(z^{-1}-z^{-4})$



$Y(z) = Y(z)(0{,}5z^{-2}+z^{-4}) + X(z)(z^{-1}-z^{-4})$



*La funzione di trasferimento di un sistema LTI a tempo discreto è **SEMPRE** scrivibile come rapporto tra due polinomi di z

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\dots}{b_0+b_1z+b_2z^2+\dots}$$

Data la funzione di trasferimento è sempre possibile (e facile) disegnare lo schema a blocchi del sistema che la realizza.

$Y(z) = X(z)H(z)$

Antitrasformata di $X(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

- $\mathcal{Z}\{a^n u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^n = \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a} \qquad |az^{-1}|<1 \Rightarrow |z|>|a|$

- $\mathcal{Z}\{na^{n-1}u[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} n a^{n-1} z^{-n+1-1} = z^{-1}\sum n a^{n-1} z^{-(n-1)} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} n(az^{-1})^{n-1} = * = z^{-1}\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2} = \dfrac{z}{(z-a)^2}$

$|az^{-1}|<1 \longrightarrow |z|>|a|$

Ricalcolare $y_1[n]$ lavorando nel dominio del tempo

$y_1[n] = x_1[n] * h[n] = x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, u[n-k]$

$u[n-k] = 0$ se $n-k<0$; $k>n$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \cdot 1$

$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \sum_{k=0}^{n} u[k] = \sum_{k=0}^{n} 1 = (n+1)\,u[n]$

- Calcolare $y_2[n]$ per ingresso $x_2[n] = r_4[n] = \begin{cases} 1 & n = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

$Y_2(z) = Y_2(z) z^{-1} + X_2(z)$

$y_2[n] = x_2[n] * h[n] = x_2[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_2[k]\, u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]\, u[n-k] = (n+1)u[n] - (n+1-4)\, u[n-4]$

$\mathcal{Z}\{r_4[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_4[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{3} 1 \cdot z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} = \frac{1-z^{-3}}{1-z^{-1}} = X_2(z)$

$Y_2(z) = H(z) X_2(z) = \frac{z}{z-1} X_2(z)$

Calcolare $y_3[n]$

$x_3[n] = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 1 & n= \end{cases}$

CASO DEI POLI DOPPI

Scomposizione in fratti semplici di

$$\frac{N(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)(x-a_3)} = \frac{A_{11}}{(x-a_1)} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{A_3}{x-a_3}$$

grado di $N(x) < 4$

$$\frac{N(x)}{(x-a_1)^2(x-a_2)(x-a_3)} \cdot (x-a_2) = \left[A_{11} \frac{(x-a_2)}{(x-a_1)} + A_{12} \frac{(x-a_2)}{(x-a_1)^2} + A_2 + A_3 \frac{(x-a_2)}{(x-a_3)} \right] \Bigg|_{x=a_2} = A_2$$

$A_2 = \lim_{x \to a_2} \frac{N(x)}{D(x)} (x-a_2)$

$A_3 = \lim_{x \to a_3} \frac{N(x)}{D(x)} (x-a_3)$

Si moltiplica a destra e a sinistra per $(x-a_1)^2$ e si ottiene:

$$\frac{N(x)}{D(x)} (x-a_1)^2 \Bigg|_{x=a_1} = \left[A_{11}(x-a_1) + A_{12} + A_2 \frac{(x-a_1)^2}{(x-a_2)} + A_3 \frac{(x-a_1)^2}{(x-a_3)} \right] \Bigg|_{x=a_1} = A_{12}$$

$A_{12} = \lim_{x \to a_1} \frac{N(x)}{D(x)} (x-a_1)^2$

$$\boxed{A_{11} = \lim_{x \to a_1} \frac{d}{dx} \left[\frac{N(x)}{D(x)} (x-a_1)^2 \right]}$$

- Calcolo di $\mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$, dove $Y(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$

Hp. $N(z)$ con grado minore o uguale al grado di $D(z)$

1) $Y_1(z) = \frac{Y(z)}{z}$ e applico la scomposizione in fratti semplici a $Y_1(z)$

$$Y_1(z) = \frac{A_{11}}{z-p_1} + \frac{A_{12}}{(z-p_1)^2} + \frac{A_{21}}{(z-p_2)} + \frac{A_{22}}{(z-p_2)^2} + \frac{A_3}{z-p_3} + \frac{A_4}{z-p_4} + \frac{A_0}{z}$$

2) Si scrive $Y(z) = Y_1(z)\, z$ (per poter usare la trasformata che c'è nelle tavole)

$$Y(z) = A_{11} \frac{z}{z-p_1} + A_{12} \frac{z}{(z-p_1)^2} + A_{21} \frac{z}{z-p_2} + A_{22} \frac{z}{(z-p_2)^2} + A_3 \frac{z}{z-p_3} + A_4 \frac{z}{z-p_4} + A_0$$

3) Si antitrasforma usando le tavole delle trasformate zeta

$$y[n] = A_{11} p_1^n u[n] + A_{12}\, n p_1^{n-1} u[n] + A_{21} p_2^n u[n] + A_{22}\, n p_2^{n-1} u[n] + A_3 p_3^n u[n] + A_4 p_4^n u[n] + A_0 \delta[n]$$

SEGNALI DISCRETI PERIODICI

* Non esiste la trasformata zeta per i segnali periodici a tempo discreto.

Sia $x[n]$ un segnale periodico di periodo N:

$x[n] = x[n+N]$

Nell'intervallo $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ si ha $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \varphi_k[n]$

$\varphi_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi kn/N}$ $\quad n = 0, \dots, N-1$

$B = \{ \varphi_0[n], \dots \varphi_{N-1}[n] \}$

Base ORTONORMALE, infatti

$\langle \varphi_1[n], \varphi_2[n] \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \varphi_1[k] \varphi_2^*[k] = *$

$\varphi_k[n]$ è zero per $m \notin [0, N-1]$

Definisco il vettore $\underline{\varphi_k} = [\varphi_k[0], \varphi_k[1], \dots, \varphi_k[N-1]]$

$\langle \varphi_1[n], \varphi_2[n] \rangle = \underline{\varphi_1} \cdot \underline{\varphi_2}$ identico al prodotto scalare tra vettori

$$* = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi 1 k/N} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi \cdot 2k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi k/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (e^{-j2\pi/N})^k = \frac{1}{N} \cdots \frac{1-(e^{-j2\pi/N})^N}{1-e^{-j2\pi/N}} =$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1-e^{-j2\pi}}{1-e^{-j2\pi/N}} = \varnothing \quad \text{essendo } e^{\pm j2\pi} = 1$$

$\langle \varphi_l[n], \varphi_l[n] \rangle = \sum_{\ell=0}^{N-1} \varphi_l[n] \varphi_l^*[n] = \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi \ell n/N} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi \ell n/N} = \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{N} = 1 \longrightarrow$ base ortonormale

$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \varphi_k[n]}$ $\quad [c_k = \langle x[n], \varphi_k[n] \rangle]$

$\left[c_k = \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j2\pi \ell k/N} \right] = \sum_{\ell} x[\ell] \varphi_k^*[\ell]$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \varphi_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] e^{-j2\pi \ell k/N} \right) \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j2\pi kn/N} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] e^{-j2\pi k\ell/N} \right)}_{X(k)} e^{j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$$

$\boxed{X(k) = \sum_{\ell=0}^{N-1} x[\ell] e^{-j2\pi \ell k/N}}$, $X(k)$ è il k-esimo coefficiente della DFT (Discrete Fourier Transform) di $x[n]$

$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}}$ è la IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\underline{x}} \xrightarrow{\text{DFT}} \underbrace{\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}}_{\underline{X}}$$

[$\underline{X}$ = fft($\underline{x}$);]

[$\underline{x}$ = ifft($\underline{X}$)]

FFT = Fast Fourier Transform - Algoritmo veloce per il calcolo della DFT

* Se $x[n]$ è un segnale periodico di periodo N, posso usare la base di Fourier per scrivere in modo esatto il segnale $x_N[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ **SEGNALE TRONCATO**

$\left[x_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N} \right]$ $\quad n = 0, \dots, N-1$

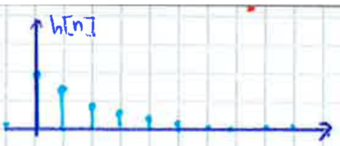
Il segnale $e^{j2\pi kn/N}$ è periodico di periodo N

- $x[n]$ è la PERIODICIZZAZIONE del segnale $x_N[n]$ di periodo N

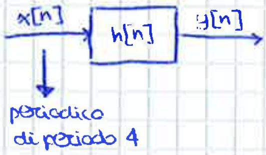
$\Rightarrow x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$, $n \in \mathbb{Z}$ è valida non solo per il segnale troncato ma rimuovendo la condizione $n = 0, \dots, N-1$ ho che il segnale si ripete quindi ottengo $x[n]$ periodico di partenza

TEMPO CONTINUO • $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k e^{j2\pi kt/T}$ $\quad t \in \mathbb{R}$, $x(t)$ periodico di periodo T

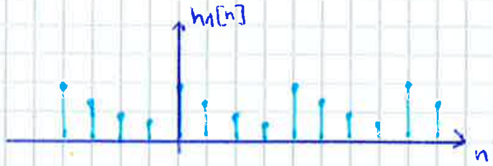
occorrono infiniti coefficienti μ_k per rappresentare esattamente $x(t)$



$$h[n] = \delta[n] + \frac{3}{4}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \frac{1}{4}\delta[n-3]$$

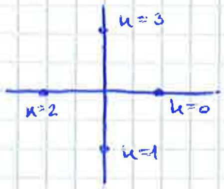


$$h_1[n] = h[n] + h[n-4] + \dots + h[n+4] + \dots$$



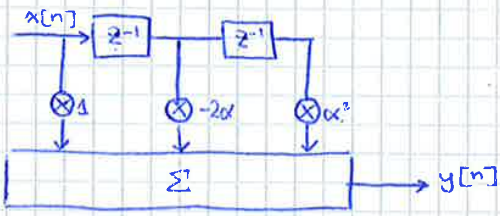
$$H_1(k) = \sum_{n=0}^{3} h_1[n]\, e^{-j2\pi kn/N} = 1e^{-j2\pi k0/N} + \frac{3}{4}e^{-j2\pi k/N} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi k2/N} + \frac{1}{4}e^{-j2\pi k3/N} =$$

$$e^{-j2\pi k/4} = e^{-jk\pi/2}$$



ESERCITAZIONE 9

4) Il segnale $x(t) = t\,e^{-t/t_0}\,u(t)$ viene posto all'ingresso di un S&H con frequenza di campionamento $f_c = 1/T_c = 10/t_0$. Il segnale numerico $x[n] = x(nT_c)$ viene posto all'ingresso di un sistema FIR con $H(z) = 1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}$, fornendo in uscita i campioni $y[n]$.
Quale deve essere il valore di α affinché $y[n]$ abbia la minima durata possibile?



$x[n] = x(nT_c) = x(t)\big|_{t=nT_c}$

$x(T_c) = x[1]$
$x(2T_c) = x[2]$
$x[n] = x(nT_c)$

$x(t) = t\,e^{-t/t_0}\,u(t)$

$x[n] = n T_c\, e^{-nT_c/t_0}\, u(nT_c) = T_c\, n\, e^{-nT_c/t_0}\, u[n] = T_c\, n b^n u[n]$, $b = e^{-T_c/t_0} = e^{-1/10}$

$\mathcal{Z}\{n b^{n-1} u[n]\} = \dfrac{z}{(z-b)^2}$

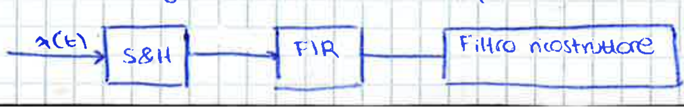
$x[n] = T_c b \cdot n b^{n-1} u[n] \longrightarrow X(z) = T_c b \cdot \dfrac{z}{(z-b)^2}$

$Y(z) = X(z)H(z) = T_c b \dfrac{z}{(z-b)^2} \cdot [1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}] = T_c b \dfrac{z^{-1}[z^2 - 2\alpha z + \alpha^2]}{(z-b)^2} = T_c b\, z^{-1} \dfrac{(z-\alpha)^2}{(z-b)^2}$

Se pongo $\alpha = b$ (zeri in corrisp. dei poli) $\rightarrow$ zeri e poli si cancellano

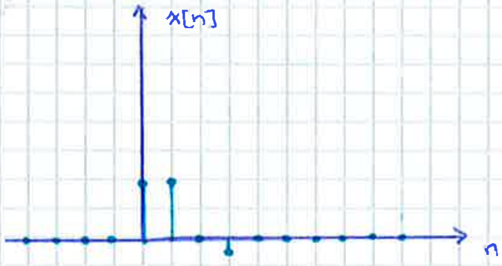
$\Rightarrow Y(z) = T_c b\, z^{-1} \rightarrow y[n] = T_c b\, \delta[n-1]$

Calcolare $y(t)$ all'uscita di un filtro ricostruttore con risposta all'impulso $g(t) = e^{-t/T} u(t)$



Problema 3 appello 2/9/2013

Un sistema LTI a tempo discreto ha risposta all'impulso $h[n] = \frac{1}{2^n} u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = p^n u[n]$
Si calcoli l'uscita del sistema per l'ingresso $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-3]$ e se ne disegni il grafico.



$$y[n] = x[n] * h[n] = \left(\delta[n] + \delta[n-1] - \frac{1}{8}\delta[n-3]\right) * h[n] = h[n] + h[n-1] - \frac{1}{8}h[n-3]$$

Segnali periodici nel tempo discreto (Riassunto)

$x[n] = x[n+N]$ periodo N

$x_N[n] = \begin{cases} x[n] & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ **SEGNALE TRONCATO**

Sviluppo in serie di Fourier tempo discreto per $x_N[n]$

IDFT $\quad x_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$ valida per $n = 0, \dots, N-1$

(DFT) $\quad X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$ $\quad k = 0, \dots, N-1$

$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi kn/N}$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

periodica di periodo N

$y[n] = x[n] * h[n]$

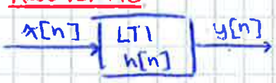
$= x[n] \circledast h_N[n]$ dove $h_N[n] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h[n-pN]$

$x[n] \circledast h_N[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, h_N[n-k]$

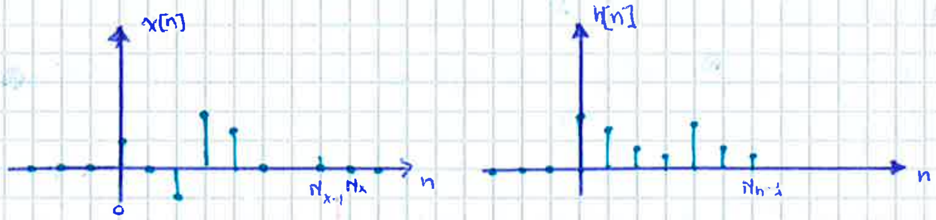
$\text{DFT}\{y[n]\} = \text{DFT}\{x[n]\}\, \text{DFT}\{h_N[n]\}$

$y[n] = \text{IDFT}\{X(k) H_N(k)\}$

ASSUNZIONE



$x[n]$ ha durata limitata (non è periodica)
$h[n]$ ha durata limitata



* Si può calcolare $y[n]$ come:

$y[n] = \text{IDFT}\{X(k)H(k)\}$

purché si sia calcolato $X(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N}$ con $N \geq N_x + N_h - 1$ $\quad (x[n] = 0$ per $n \geq N_x)$

$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi nk/N}$ $\quad k = 0, \dots, N-1$

```
• x=...        • toc              • y = ifft (X.*H);    tic;
  h=...          print toc - tic    toc;                N = Nx + Nh - 1
  tic          • X = fft (xx)       toc - tic           xx
  y = conv(x,h);  H = fft (hh)                          hh
```

$X'(f) \triangleq X(f)$ per $|f| \leq 1/2\Delta_t$ (non c'è ALIASING)

- $X'(f)$ è $\neq X(f)$ per via dell'aliasing. Per ridurre l'aliasing è necessario diminuire Δ_t

$X'(f) = \Delta_t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n\Delta_t}$

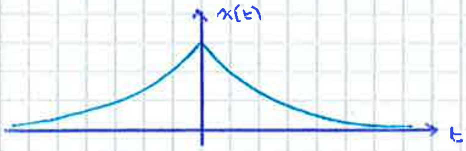
$X'(f) = X'\left(f + \frac{1}{\Delta_t}\right)$ è affetto da ALIASING

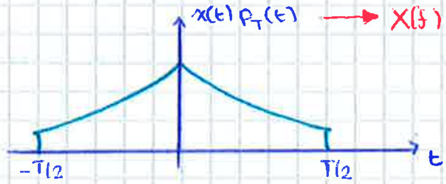
$X'(f) \approx X(f)$ per $|f| \ll \frac{1}{2\Delta_t}$

$X'(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j2\pi f n\Delta t}$ nella DFT $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j2\pi kn/N}$

$f\Delta_t = k/N \longrightarrow f = k/N\Delta_t$ $k = 0, \dots, N-1$

$x(t) \longrightarrow x(t)\, p_T(t)$





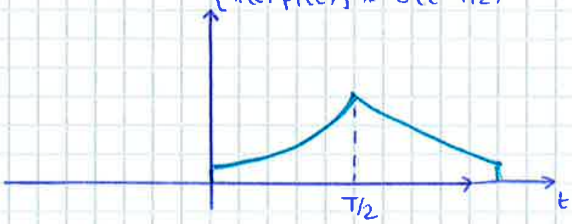
$\longrightarrow X(f) * \mathcal{F}\{p_T(t)\} \longrightarrow X(f) * T\,\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \longrightarrow$

All'interno dell'intervallo $t \in [-T/2, T/2]$ si prendono N campioni di $x(t)$ spaziati di Δ_t

$$\left| N = \frac{T}{\Delta_t} \right|$$

$\longrightarrow \lim_{T \to \infty} \frac{T \sin(\pi f T)}{\pi f T} = \delta(f)$

$[x(t)\, p_T(t)] * \delta(t - T/2)$



$\mathcal{F}\{[x(t)\,p_T(t)] * \delta(t-T/2)\} = \left[X(f) * T\,\frac{\sin \pi f T}{\pi f T}\right] e^{-j\pi f T}$

Con la DFT / FFT viene approssimata la trasformata di Fourier di $[x(t)\,p_T(t)] * \delta(t - T/2) = y(t)$

$Y(f) = \int_0^T x(t - T/2)\, e^{-j2\pi f t}\, dt \simeq \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta_t - T/2)\, e^{-j2\pi f n\Delta t}\, \Delta_t = Y'(f)$

$Y'(f)\Big|_{f = k/N\Delta_t} = \Delta_t \sum_{n=0}^{N-1} x'[n]\, e^{-j2\pi \frac{k}{N\Delta_t} \cdot n\Delta_t} = \Delta_t\, \mathrm{DFT}\{x'[n]\}$

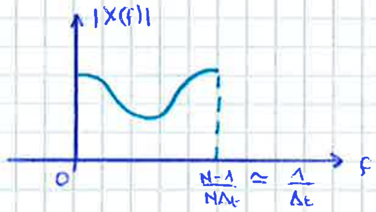
$x'[n] = x(n\Delta_t - T/2)$

$x(t) = e^{-|t|/t_0}$

```
T = ...;  N = 2^10; Δt = T/N;
t = [-T/2 : Δt : T/2 - Δt];
x = exp(-abs(t)/t0);
X = fft(x) * Δt;
f = [0 : N-1] / (N * Δt);  %  Δf = 1/ΔtN
```

$x(1)$ elemento 1 del vettore x è $x(t)$ valutato in $t = -T/2$

```
plot(f, abs(X)), grid on, xlabel('f'), ylabel('|X(f)|')
```

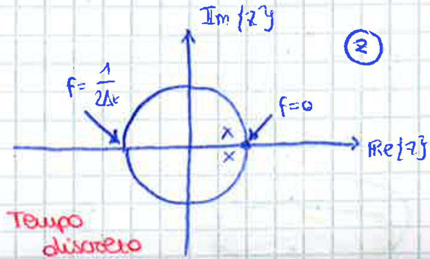



```
t = [-T/2 : Δt : T/2 - Δt];
x = exp(-abs(t)/t0);
X = Δt * fft(x)
```

```
X = fftshift(X);
f = [-N/2 : N/2 - 1] / (N * Δt);
plot(f, abs(X)), grid ...
```

Banda visibile è da $-\frac{1}{2\Delta_t}$ a $\frac{1}{2\Delta_t}$

Δ_f = risoluzione in frequenza $\rightarrow \frac{1}{N \cdot \Delta_t}$



Esperimento multiplo: due o più esperimenti condotti in serie o parallelo; come risultato si ottiene un insieme ordinato di eventi.

Esperimento 1 $\longrightarrow$ Ω_1 (N_1 elementi)
Esperimento 2 $\longrightarrow$ Ω_2 (N_2 elementi)
Esperimento doppio $\longrightarrow$ $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (prodotto cartesiano) $N = N_1 N_2$

Es. lancio di 2 monete

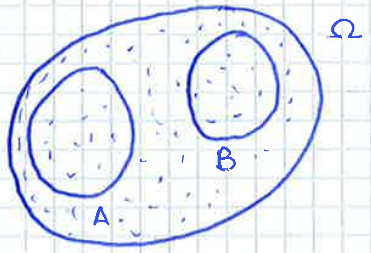
$\Omega_1 = \{T, C\}$ $\quad \Omega_2 = \{T, C\}$

$\Omega = \{TT, CC, TC, CT\}$

Definizione assiomatica della probabilità:

- ASSIOMA 1: la probabilità $P\{A\}$ di un evento A è un numero ≥ 0 (reale)
- ASSIOMA 2: la probabilità dell'evento certo è $P\{\Omega\} = 1$
- ASSIOMA 3: se A e B sono due eventi mutuamente esclusivi (i.e. o si verifica A o si verifica B, non è possibile che si verifichino contemporaneamente sia A sia B, $A \cap B = \emptyset$), allora la probabilità di $A \cup B$:

* $\rightarrow$ $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$



$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}$

La teoria assiomatica delle probabilità è utile finlantoché è possibile conoscere A PRIORI la probabilità degli eventi semplici contenuti nello spazio campione.

Es. lancio della moneta non truccata

$P\{C\} = \frac{1}{2}$ $\quad P\{T\} = \frac{1}{2}$

$P\{\Omega\} = 1$, T e C sono mutuamente esclusivi
T e C sono equiprobabili

$P\{T\} = P\{C\} = p$

$P\{\Omega\} = P\{T \cup C\} = P\{T\} + P\{C\} = p + p = 2p = 1 \longrightarrow p = 1/2$

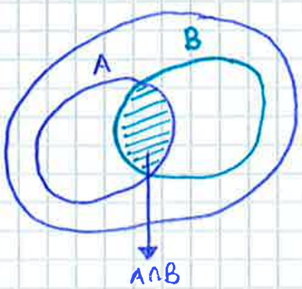
Lancio di un dado non truccato

$P\{$"esca un numero maggiore di 3"$\} = P\{$"esce 4 oppure esce 5 oppure esce 6"$\} = P\{$"esce 4" $\cup$ "esce 5" $\cup$ "esce 6"$\}$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P\{$"esca un numero maggiore di 3 e pari"$\} = P\{$"esce 4" $\cup$ "esce 6"$\} = P\{$"esce 4"$\} + P\{$"esce 6"$\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

* Si definisce **PROBABILITÀ CONGIUNTA** di due eventi la probabilità che due eventi si verifichino CONTEMPORANEAMENTE come risultato dell'esperimento. (INTERSEZIONE)

$P\{A, B\} = P\{A \cap B\}$



- Esperimento per misurare la probabilità

$N_{TOT} = 10000$ = numero di lanci della coppia di dadi
N_8 = N° di volte in cui la somma dei valori usciti è 8
N_1 = N° di volte (tra le N_8 individuate in precedenza) in cui è uscito 4 al 1° lancio.

$$p = \frac{N_1}{N_8} = \frac{N_1}{N_{TOT}} \cdot \frac{N_{TOT}}{N_8} = \frac{N_1 / N_{TOT}}{N_8 / N_{TOT}}$$

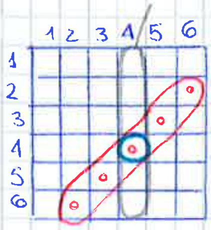
$$\frac{N_8}{N_{TOT}} \simeq P\{\text{"somma faccia 8"}\} = P\{B\}$$

$$\frac{N_1}{N_{TOT}} \simeq \frac{\text{Numero di lanci in cui il 1° lancio} = 4 \text{ E la somma dei due lanci è 8}}{\text{Numero tot di lanci}} \simeq P\{A,B\}$$

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A,B\}}{P\{B\}} \longrightarrow \boxed{P\{A,B\} = P\{A|B\}\,P\{B\}}$$

esce 4 al primo lancio

A = "esce 4 al 1° lancio"
B = "la somma dei due dadi è 8"



$P\{A|B\} = \frac{1}{5}$

$P\{A|B\} = \frac{P\{A,B\}}{P\{B\}}$

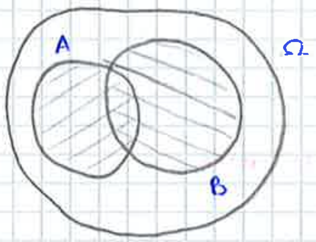
$P\{B\} = \frac{5}{36}$

$P\{A,B\} = P\{A \cap B\} = P\{4,4\} = \frac{1}{36}$

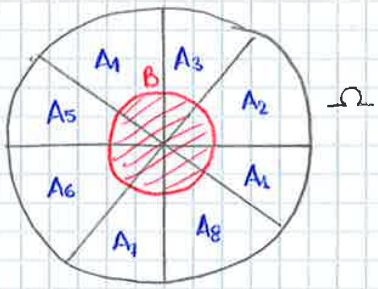
$P\{A|B\} = \frac{1/36}{5/36} = 1/5$

- Se A e B non sono mutuamente esclusivi $\Rightarrow A \cap B \neq \Phi \Rightarrow$

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$$



Teorema della probabilità totale



$A_i \cap A_j = \Phi$

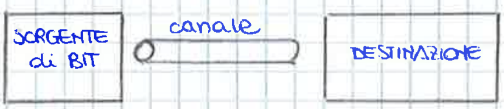
$\bigcup_{i=1}^{8} A_i = \Omega$

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^{8} P\{B, A_i\}$$

$$P\{B\} = P\{B,\Omega\} = P\{B, \bigcup_{i=1}^{8} A_i\} = P\{\bigcup_{i=1}^{8}\{B \cap A_i\}\} \qquad \{B \cap A_1\} \cap \{B \cap A_2\} = \Phi$$

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^{8} P\{B|A_i\}\,P\{A_i\}$$ TEOREMA DELLA PROBABILITÀ TOTALE

ES.



$P\{e\} = P\{\text{errore sul bit } tx\} = P\{\text{errore} \mid 1tx\}P\{1tx\} + P\{\text{errore} \mid 0tx\}P\{0tx\}$

→ 3° assioma

$$P\{2 \le \xi \le 7\} = P\{\xi = 2\} + P\{\xi = 3\} + \ldots + P\{\xi = 7\} = p_\xi(2) + p_\xi(3) + \ldots + p_\xi(7) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \ldots$$

* Data una variabile aleatoria ξ con distribuzione di massa $p_\xi(x_i)$, la media di ξ è:

$$\left[E(\xi) = \sum_i p_\xi(x_i)\, x_i = \sum_i x_i P\{\xi = x_i\} \right] \quad \text{(MEDIA STATISTICA)}$$

Ripeto il lancio della coppia di dadi $N = 10^6$ volte ottenendo i valori ν_i, $i = 1, \ldots, N$

$$\hat{E}(\xi) = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_N}{N} = \qquad \hat{E} = \text{MEDIA STIMATA (misurata)} \; \text{(MEDIA ARITMETICA)}$$

$$= \frac{2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + \ldots 12 \cdot m_{12}}{N}$$

dove m_2 = n° volte in cui ho letto il valore 2

m_3 = n° volte in cui ho letto il valore 3

⋮

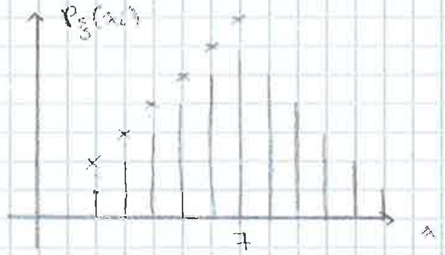
$$\hat{E}\{\xi\} = 2 \cdot \frac{m_2}{N} + 3 \cdot \frac{m_3}{N} + \ldots + 12 \frac{m_{12}}{N} = 2 \cdot \hat{p}_\xi(2) + 3 \cdot \hat{p}_\xi(3) + \ldots + 12\, \hat{p}_\xi(12) = \sum_{k=2}^{12} k\, \hat{p}_\xi(k)$$

Notazione:

$E(\xi)$ = MEDIA (Mean)
= Aspettazione (Expectation)
= Valore atteso

caso del lancio coppia di dadi

$$E(\xi) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36}$$



$E(\xi) = \sum x_i\, p_\xi(x_i)$

MODA - Valore dell'ascissa in corrispondenza del quale la distribuzione di massa assume il valore massimo. Non sempre coincide con la media.

VALOR QUADRATICO MEDIO

$$E\{\xi^2\} = \sum_i x_i^2 p_\xi(x_i) = \sum_i x_i^2 P\{\xi = x_i\}$$

VARIANZA

$$\mu_\xi \triangleq E\{\xi\} = \text{media di } \xi$$

$$\sigma_\xi^2 = E\{(\xi - \mu_\xi)^2\} = \sum_i (x_i - \mu_\xi)^2 p_\xi(x_i) = \sum_i (x_i - \mu_\xi)^2 P\{\xi = x_i\}$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{\sum_i (x_i - \mu_\xi)^2 p_\xi(x_i)} = \text{DEVIAZIONE STANDARD}$$

$$\sigma_\xi^2 = \sum_i (x_i - \mu_\xi)^2 p_\xi(x_i) = \sum_i (x_i^2 - 2\mu_\xi x_i + \mu_\xi^2)\, p_\xi(x_i) = \underbrace{\sum_i x_i^2 p_\xi(x_i)}_{E\{\xi^2\}} \underbrace{- 2\mu_\xi \underbrace{\sum_i x_i\, p_\xi(x_i)}_{\mu_\xi} + \mu_\xi^2}_{-\mu_\xi^2} \underbrace{\sum_i p_\xi(x_i)}_{1 = P\{\Omega\}}$$

$$= E\{\xi^2\} - 2\mu_\xi^2 + \mu_\xi^2 = E\{\xi^2\} - \mu_\xi^2$$

VARIANZA = VALOR QUADRATICO MEDIO − QUADRATO MEDIA

DISTRIBUZIONE CUMULATIVA

$$F_\xi(x) = P\{\xi \le x\}$$

ES. Lancio di un dado

$\xi \in \{1, 2, \ldots, 6\}$

$P\{\xi \le -27\} = 0$; $P\{\xi \le 0\} = 0$; $P\{\xi \le 0.9\} = 0$; $P\{\xi \le 1\} = p_\xi(1) = 1/6$

19) Test per individuare la presenza di una malattia.
$P = \{$"risultato del test è positivo"$\}$
$N = \{$"risultato del test è negativo"$\}$

$m = \{$"paziente effettivamente malato"$\}$
$s = \{$"paziente effettivamente sano"$\}$

$P\{P|m\} = 0.9$ (il test è positivo nel 90% dei casi con pazienti effettivamente malati) = SENSIBILITA' TEST (prob. di vero positivo)

$P\{P|s\} = 0.05$ (il test è positivo con paz. sani) = prob. del FALSO POSITIVO

$P\{m\} = 0.1$ (incidenza malattia nella popolazione)

(a) probabilita' che il test sia positivo su una persona scelta a caso.

$$P\{P\} = P\{P|m\}P\{m\} + P\{P|s\}P\{s\} = 0.9 \times 0.1 + 0.05 \times (1 - P\{m\}) = 0.09 + 0.05 \times 0.9 = 0.135$$

(b) Prob. che la persona sia effettivamente malata sapendo che il test è positivo.

$$P\{m|P\} = \frac{P\{P|m\} \cdot P\{m\}}{P\{P\}} = \frac{0{,}9 \times 0{,}1}{0.135} = \text{[redacted]}\ \frac{2}{3}$$

(c) Prob. che la persona sia effett. sana sapendo che il test è positivo.

$$P\{s|P\} = 1 - P\{m|P\} = \frac{1}{3}$$

(d) Prob che la persona sia effett. sana sapendo che il test è negativo.

$$P\{s|N\} = \frac{P\{s,N\}}{P\{N\}} = \frac{P\{N|s\}\,P\{s\}}{P\{N\}} = \frac{(1 - P\{P|s\})\,(1 - p\{m\})}{(1 - P\{P\})} = \frac{0.95 \cdot 0.9}{(1 - 0.135)} = 0.9884$$

(e) $P\{m|N\} = 1 - P\{s|N\} =$

(f) $P\{$"test fallisce"$\} = P\{s,P\} + P\{m,N\} = P\{P|s\}P\{s\} + P\{N|m\}P\{m\} = 0.05 \cdot 0.9 + (1 - 0.9) \cdot 0.1$
$=$

21) Si vuole verificare l'efficacia di una data cura per una data malattia.
Il gruppo dei malati viene diviso in 2 sottogruppi di pari numerosita': primo sottogruppo - medicina, secondo sottogruppo - placebo.
Alla fine della sperimentazione si misura la prob. di guarigione nei due sottogruppi

$P\{G|M\} = 0.5$ ($G \leftrightarrow$ "guarigione" $M \leftrightarrow$ "medicina")

$P\{G|P\} = 0.2$ ($P \leftrightarrow$ "placebo")

Il paziente x, guarito, ed il paziente y, non guarito, si chiedono se hanno ricevuto il placebo o la medicina. Probabilita' che abbia ricevuto la medicina? E' il placebo? Sia per x che per y.

$$P\{M|G\} = \frac{P\{G|M\} \cdot P\{M\}}{P\{G\}} = \frac{\text{[redacted]}\ P\{G|M\}\,P\{M\}}{P\{G|M\}P\{M\} + P\{G|P\}P\{P\}} = \frac{0.5 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = 0.71$$

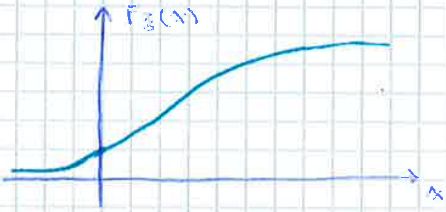
$P\{P|G\} = 1 - 0.71 = 0.29$

Variabili aleatorie continue.

Per il momento abbiamo analizzato v.a. con una certa ~~numero~~ quantità di possibili valori numerabile.
Esistono esperimenti il cui risultato è un numero (casuale) in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ v.a. CONTINUE

Distrib. cumulativa

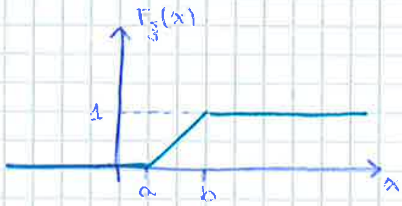
$F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$



$\lim_{\xi \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{\xi \to \infty} F_\xi(x) = 1$

$P\{\xi \leq -\infty\} = 0$ $\qquad$ $P\{\xi \leq \infty\} = 1$

ESEMPIO



$F_\xi(x)$ deve essere una funzione non decrescente di x

$F_\xi(x_2) = P\{\xi \leq x_2\}$ $\qquad$ $F_\xi(x_1) = P\{\xi \leq x_1\}$

se $x_2 > x_1 \Longrightarrow F_\xi(x_2) \geq F_\xi(x_1)$

DISTRIBUZIONE CUMULATIVA V.A. UNIFORME $\quad \xi \in [a, b]$

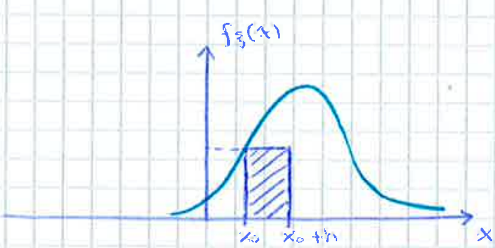
* Non è possibile definire la distribuzione di massa

$P\{\xi = x\} = 0$ per ogni v.a. continua.

Si definisce la **densità di probabilità**:

$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_\xi(x+h) - F_\xi(x)}{h}$$

$$h\, f_\xi(x) \simeq F_\xi(x+h) - F_\xi(x) = P\{\xi \leq (x+h)\} - P\{\xi \leq x\} = P\{x \leq \xi \leq x+h\}$$



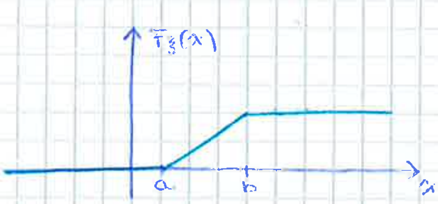
$f_\xi(x_0) \cdot h =$ area del rettangolo di base h e altezza $f_\xi(x_0) =$
$= P\{x_0 \leq \xi \leq x_0 + h\}$

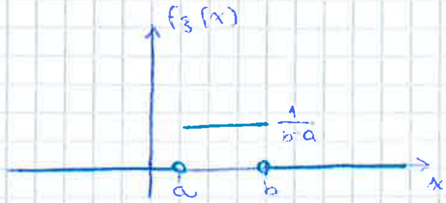
$f_\xi(x)$ è una funzione positiva o nulla (non può essere negativa) perché è la derivata di una funzione non decrescente.

$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x) \longrightarrow F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\, du \qquad (F_\xi(-\infty) = 0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(u)\, du = F_\xi(\infty) = 1$ $\quad$ | nel caso delle v.a. discrete $\sum_i p_\xi(x_i) = 1$

ESEMPIO





ξ non ha nessun valore "preferito" nell'intervallo (a, b), tutti i valori capitano con la stessa probabilità

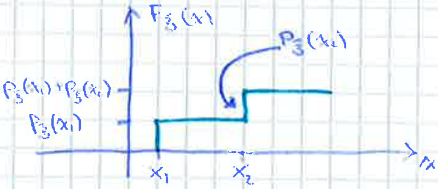
- Possiamo definire una dens. prob. per v.a. discrete?

$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x)$ $\quad$ ξ = v.a. discreta

$\delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$

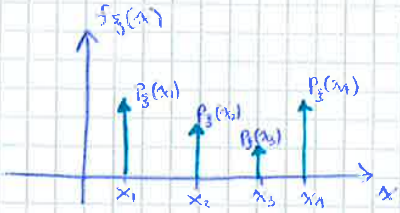
$\xi \in \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ $\quad$ $p_\xi(x_1), p_\xi(x_2), \dots$

$x_3 > x_2 > x_1$



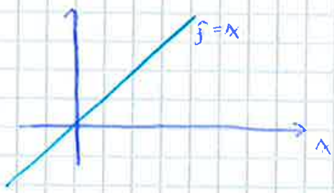
$$F_\xi(x) = p_\xi(x_1)u(x-x_1) + p_\xi(x_2)u(x-x_2) + p_\xi(x_3)u(x-x_3) + \dots =$$
$$= \sum_i p_\xi(x_i)u(x-x_i)$$

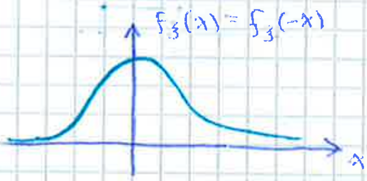
$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx}\sum_i p_\xi(x_i)\,u(x-x_i) = \sum_i p_\xi(x_i)\underbrace{\frac{d}{dx}u(x-x_i)}_{\delta(x-x_i)} = \sum_i p_\xi(x_i)\,\delta(x-x_i)$$



- Sia ξ una v.a. continua

$$\mu_\xi = E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_\xi(x)\,dx$$



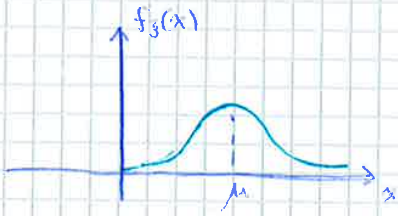


$\mu_\xi = 0$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ $\quad$ $\xi \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

V.A. NORMALI (O GAUSSIANE)

$$E\{\xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \dots = \mu$$



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 126