NUMERO: 1642A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Vergine

MATERIA: Analisi Matematica II + Formulario. Prof.Quelali

Serie numeriche

30/09/2014

Def Sia $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali; chiameremo serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (1)$$

Per ogni intero $k \geq 1$ chiamiamo successione delle ridotte

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\vdots$

$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$

e chiamiamo somma parziale k-esima della serie la quantità

$$S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$$

Diciamo che la serie (1) è convergente se esiste ed è finito il limite delle somme parziali

$$S = \lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^{k} a_j \qquad (2)$$

In tal caso (e solo in tal caso!!) diciamo che il numero S è la somma della serie (1)

Se invece il limite (2) esiste ma è uguale a $+\infty$ o $-\infty$ diciamo che la serie è divergente.

Infine, se il limite (2) non esiste diciamo che la serie è indeterminata.

Serie telescopiche

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice telescopica se il termine generico $a_n = b_n - b_n$

$\{b_n\} \geq 0$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n$

$= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$

Serie di Bernoulli

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \qquad \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n \cdot n!}{n! \cdot (n+1)!} = \frac{(n+1-1)\, n!}{n!\,(n+1)!} = \frac{(n+1)\, n! - n!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2!}} - \cancel{\frac{1}{3!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3!}} - \cancel{\frac{1}{4!}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{(n-1)!}} - \cancel{\frac{1}{n!}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n!}} - \frac{1}{(n+1)!}\right)$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+5+6 \dots$$

$$\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + 50 \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 51 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 \end{array}$$

$$\sum_{n=1}^{100} n = 101 \cdot 50 = 101 \cdot \frac{100}{2}$$

se n è pari:

$$1 + 2 + 3 + \dots + \frac{n}{2}$$

$$n + n-1 + n-2 + \dots + \frac{n}{2} + 1$$

$$S_n = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \text{divergente!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+1+1 \dots$$

$$S_n = n$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \text{divergente!}$$

Secondo metodo (valido solo nel caso delle serie geometriche)

Per $|x|<1$

è dimostrato che

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x} \Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3}{1-\frac{4}{5}} = \frac{64}{25}$$

$1,99999999\ldots$

$= 9\cdot 10^0 + 9\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2} + \ldots 9\cdot 10^{-n} + \ldots$

$$9\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^n}+\ldots\right)$$

$$9\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 9\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 9\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}} = 10$$

Def Si definisca serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Proposizione

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi, allora la serie o converge o diverge positivamente.

Proposizione

(condizione necessaria)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Se la serie converge, allora la successione dei termini della serie tende a zero.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \underset{\text{converge}}{<+\infty} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

IL VICEVERSA NON E' NECESSARIAMENTE VERO $\not\Leftarrow$ Se la serie tende a zero, NON è detto che converga.

$A \Rightarrow B$ $\quad$ Se $a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge

$\neg B \Rightarrow \neg A$

$S_{2k} \geq 1 + k \cdot \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{k \to +\infty} 1 + k \cdot \frac{1}{2} = +\infty$

Per il teorema del confronto $S_{2k} \to +\infty$

$\Rightarrow$ la serie armonica diverge

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 192

$$\sum_{n=2014}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Sappiamo che

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$, dunque anche $\sum_{n=2014}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Criterio del confronto

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad , \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

$a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $0 \leq a_k \leq b_k$, $\forall k \geq 0$

(1) Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge allora converge anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(2) Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge allora diverge anche la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Dim

$0 \leq a_k \leq b_k$

$0 \leq a_0 \leq b_0$

$0 \leq a_0 + a_1 \leq b_0 + b_1$

$0 \leq a_0 + a_1 + a_2 \leq b_0 + b_1 + b_2$

$0 \leq a_0 + a_1 + \ldots + a_k \leq b_0 + b_1 + \ldots b_k$

$0 \leq A_k \leq B_k$

$\lim_{k \to +\infty} A_k \leq \lim_{k \to +\infty} B_k \quad *$

(1) Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty$

$\lim_{k \to +\infty} B_k = B \in \mathbb{R}$ Allora in $*$ $\lim_{k \to +\infty} A_k \leq B \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$

(2) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge $\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} A_k = +\infty$

$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} B_k = +\infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ è divergente.

n^2 è sempre ≥ 0, $\left(1-\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ anche perchè il coseno assume valori compresi tra -1 e 1.

$\cos t \sim 1-\frac{1}{2}t^2 \quad , t \to 0$

$\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim 1-\frac{1}{2}\frac{1}{n^4} \quad , n \to +\infty$

$a_n \sim n^2\left(\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^4}\right) \sim n^2\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^4}\right) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow$ CONVERGE (Ricorda che $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converge se $p>1$ e diverge se $p\leq 1$)

<u>Formula di Stirling</u>

$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

per $n \to +\infty$

Criterio della radice

Sia data la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0 \quad \forall n$

Si supponga che esiste, finito o infinito, il limite $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

Allora:

Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge

Se $l < 1 \Rightarrow$ la serie converge

Se $l = 1 \Rightarrow$ usare un altro criterio

5.6

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{1+2^{-n}}-1\right)$$

$\sqrt{1+2^{-n}}-1 \geq 0 \quad \sqrt{1+\frac{1}{2^n}} \geq 1 \Rightarrow 1+\frac{1}{2^n} \geq 1 \Rightarrow$ sempre positivi

$\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} 1+\frac{1}{2}t$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{1+2^{-n}}-1\right) \simeq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}2^{-n}-\cancel{1}\right) \simeq \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge

5.18

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log(1+2^n)}{n^2}$$

$\log(1+2^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \log(2^n) = n\log 2 \Rightarrow \frac{n\log 2}{n^2} = \frac{\log 2}{n} \sim \frac{1}{n}$

divergente

6.1

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{\sin n}}{n^3+1}$$

$\frac{e^{-1}}{n^3+1} \leq \frac{N(n)}{n^3+1} \leq \frac{e}{n^3+1}$ convergente

6.5

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\log n}{n\sqrt{n+1}}$$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log n}{n^{\alpha}} = 0 \Leftrightarrow \alpha>0 \quad \log n < n^{\alpha}$

$\frac{\log n}{n\sqrt{n+1}} < \frac{n^{\alpha}}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{n^{\alpha}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}-\alpha}}$ converge se $\frac{3}{2}-\alpha>1 \Rightarrow \alpha<\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}\cdot\frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)\,n^n}{n!\,(n+1)\,(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\sim \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} < 1$$ Convergente

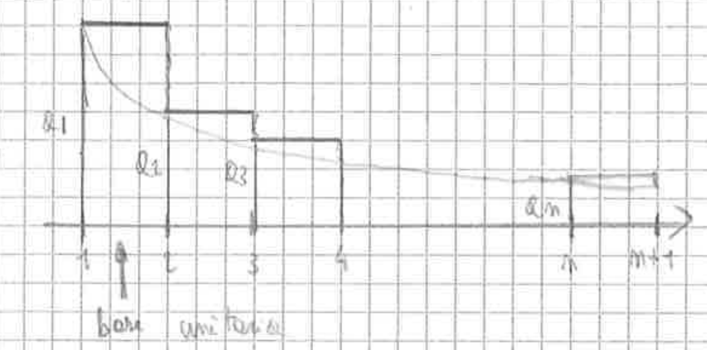
06/10/14

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \qquad a_j = f(j)$$

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$$

f continua, decrescente, positiva

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \sum_{j=1}^{\infty} 1 \cdot f_j$$



$$S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} f(j)$$

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le S_n$$

$$\underbrace{a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n+1}}_{\text{rettangoli sotto il grafico}} \le \int_1^{n} f(x)\, d(x)$$

$$S_{n+1} \le a_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

$$S_{n+1} \le a_1 + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \le a_1 + S_n$$

Se la serie converge sia S_n che S_{n+1} tendono a S

Se l'integrale diverge la serie diverge

Se l'integrale converge la serie converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \text{converge, se } p>1 \\ \text{diverge, se } p\leq 1 \end{cases}$$

Esercizio

Ricorda: non si può usare il confronto asintotico per $\log n$, perché non sappiamo di preciso a cosa tende

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$

$$\int f'(x)\,f(x)^\alpha\,dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{\log x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{\log^2 x}{2}\right]_2^t$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log^2 t}{2} - \frac{\log^2(2)}{2} = +\infty \Rightarrow \text{diverge}$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg}(n)}}{n^2+1}$

$$\int e^{f(x)}\cdot f'(x) = e^{f(x)}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{x^2+1}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{n^2+1} = \lim_{t\to+\infty} \left[e^{\operatorname{arctg} x}\right]_1^t$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{\operatorname{arctg} t} - e^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{4}} > 0 \Rightarrow \text{converge}$$

Def Si dice che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente se la serie dei termini positivi

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ converge}$$

Attenzione!! Non confondere la nozione di convergenza e convergenza assoluta di una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. La prima è la convergenza usuale della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (nel senso delle successioni ridotte) mentre la seconda è la convergenza di un'altra serie, ossia quella dei valori assoluti $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$

Criterio della convergenza assoluta

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente allora essa converge (semplicemente).

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

Esempio

$(-1)^{n^2+2n}$

$n = 2m$

$n^2 + 2n = (2m)^2 + 2(2m) = \underbrace{4m^2 + 4m}_{\text{pari}}$

$n = 2m+1$

$n^2 + 2n = (2m+1)^2 + 2(2m+1) = \underbrace{4m^2 + 4m + 4m + 2 + 1}_{\text{dispari}}$

Criterio di Leibniz

Data una serie a termini di segno alterno $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (-1)^k$, se valgono le due condizioni

(1) $\lim_{n \to +\infty} a_k = 0$

(2) la successione $\{a_k\}_{k \geq 0}$ è monotona decrescente

$\Rightarrow$ la serie è convergente (semplicemente)

Esempio

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(1) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (2) $a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente

$\Rightarrow$ la serie converge

Studiando invece con la convergenza assoluta:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow$ diverge

Quindi: la convergenza non implica necessariamente la convergenza assoluta.

Def Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $\{a_k\}_{k \geq 0}$ una successione numerica.
Chiamiamo serie di potenze una serie della forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$, dove x_0 è il centro della serie, mentre le a_k sono i coefficienti della serie.

Caso particolare: $x = x_0 \Rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0\} = \{x_0\}$

Esempio

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n!}$

Studiamo la convergenza assoluta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{|x|^n} \cdot |x|}{\cancel{n!}(n+1)} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{|x|^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

$\Rightarrow$ Questa serie converge assolutamente per ogni $x \Rightarrow$ converge per ogni x

2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$

Studiamo la convergenza assoluta perché non possiamo applicare il criterio della radice n-esima per termini negativi.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^n |x|^n} = \lim_{n \to +\infty} n|x| \to +\infty$$

La serie diverge assolutamente, ma ciò NON implica la divergenza semplice.

$\lim_{n \to +\infty} n^n x^n \neq 0$ se $x \neq 0 \Rightarrow$ non è convergente

---

3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\qquad$ se $|x| < 1$, la serie converge

$(-1, 1)$ è l'insieme di convergenza

Determinazione del raggio di convergenza (R): criterio della radice per le serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Supponiamo che esiste finito o infinito il limite

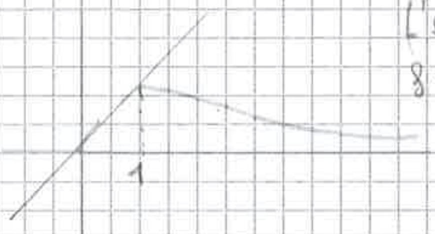
$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora il raggio di convergenza della serie di potenze è dato da

$$R := \frac{1}{A} \Rightarrow R = \begin{cases} 0, & A \to +\infty \\ \frac{1}{A}, & A \text{ finito} \\ +\infty, & A \to 0 \end{cases}$$

Esercizi

9.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

L'esponenziale è più forte: da un certo punto in poi f è continua, positiva, decrescente.



$$\int_1^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} -2x e^{-x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\int_1^t -2x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-x^2}\right)_1^t = -\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t^2} - e^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-1}$$

L'integrale converge $\Rightarrow$ la serie è convergente

RICORDA: quando c'è il log NON usare il confronto asintotico

9.4 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \left(\log(\log n)\right)^2}$

$f(x) := \log(\log x)$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)^2} dx = -\frac{1}{f(x)}$

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \log(\log(\log x))^2} dx =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\int_3^t \frac{1}{x\log x\left(\log(\log x)\right)^2} dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{-1}{\log(\log x)}\right]_3^t = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{-1}{\log(\log t)} + \frac{1}{\log(\log 3)}\right) = \frac{1}{\log(\log 3)}$$

integrale convergente $\Rightarrow$ serie convergente

10.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n) - 3\sin(n^2)}{n^2}$$

Studiare la convergenza assoluta di:

$$-1 \leq \sin(n^2) \leq 1$$

$$-3 \leq -3\sin(n^2) \leq 3$$

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1$$

$$-4 \leq \cos(n) - 3\sin(n^2) \leq 4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n) - 3\sin(n^2)|}{n^2} = \frac{|\cos(n) - 3\sin(n^2)|}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}$$

$\frac{4}{n^2}$ converge $\Rightarrow$ la serie converge assolutamente e semplicemente.

10.3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{7^n}\cos(\sqrt{n})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{7^n}|\cos(\sqrt{n})|$$

$$\frac{n^3}{7^n}|\cos\sqrt{n}| \leq \frac{n^3}{7^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{7^n}$$ Criterio del rapporto $\rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{7^{n+1}} \cdot \frac{7^n}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3 \cancel{7^n}}{\cancel{7^n} \cdot 7 n^3}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{7n} = \frac{1}{7} < 1 \Rightarrow$ la serie è convergente per il criterio del rapporto.

Per il criterio del confronto anche $\frac{n^3}{7^n}|\cos\sqrt{n}|$ converge.

La serie di partenza converge assolutamente, dunque converge

Esercizi sulle serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

$R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ $\quad (-2;2)$ $\quad$ Cosa succede agli estremi?

$x = 2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cancel{2^n}} \cdot \cancel{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ indeterminata}$$

$x = -2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^n \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \Rightarrow \text{divergente}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\underbrace{(n+1)}_{\text{trascurabile}} 2^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

$R = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ $\quad (-2,2)$

$x=2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \Rightarrow \text{diverge}$$

segni alterni $\Rightarrow$ criterio di Leibniz: $\frac{1}{n+1}$ è continua, positiva e decrescente, il $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, dunque è convergente

$x = -2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(-1)^n}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} \Rightarrow \text{abbiamo convergenza semplice} \Rightarrow [-2,2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$A = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (1)$$

$$R = \frac{1}{A}$$

$$R = \begin{cases} 0 & A = +\infty \\ \frac{1}{A} & \text{finito} \\ +\infty & A = 0 \end{cases}$$

Teorema

ⓐ Se una serie di potenze converge in un certo punto converge assolutamente per tutti gli x tali che $|x| < |x_1|$

ⓑ Se una serie di potenze non converge in un certo punto x_2, essa non converge per tutti gli x tali che $|x| > |x_2|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + n x^n + \dots$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n\right)' = 1 + 4x + 9x^2 + \dots + n^2 x^{n-1} + \dots$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

Def Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ chiamiamo serie derivata $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ (B)

Teorema

La serie derivata (B) ha lo stesso raggio di convergenza di A

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \Leftrightarrow R = \frac{1}{L}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n a_n} = L \Rightarrow R = \frac{1}{L}$$

$-x = t^2$

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad |t|<1$$

$$\operatorname{arctg}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad |t|<1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad k = n-1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x)$$

$$f(x) = f'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Serie di Mc Laurin

Data una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ si studia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Data una funzione $f(x)$ trovare una serie di potenze tale che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ in un certo intervallo.

Il teorema precedente è una condizione necessaria affinché una funzione sia rappresentabile tramite una serie di potenze

Se una funzione $f(x)$ è rappresentabile tramite una serie di potenze su $(-R, R)$ allora $f(x)$ è derivabile un numero qualsiasi di volte nell'intervallo $(-R, R)$.

Se la funzione è derivabile non è detto che sia rappresentabile tramite una serie di potenze.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f'(0) = a_1$

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$

$f''(0) = 2a_2$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = n!\, a_n \Rightarrow a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$\Rightarrow f \in C^{\infty}(I)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

Una funzione si dice analitica se si può esprimere attraverso uno sviluppo di Taylor / MacLaurin in un certo intervallo.

Potrebbero però esserci dei problemi:

1) La serie di MacLaurin potrebbe avere raggio nullo.

2) La serie di MacLaurin potrebbe avere raggio ∞; la formula potrebbe non coincidere con la f.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \longrightarrow \text{Polinomio di Taylor}$$

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Resto n-esimo di Lagrange}}$$

$f(x) - R_n(x) = P_n(x)$

Se $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ cosa succede?

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = S$

Se $R_n(x)$ è infinitesimo riusciamo a risolvere il problema.

Se $f(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$|f^{(n)}(t)| < M \quad \forall t \in \mathbb{R}$

allora f si può scrivere come sviluppo di MacLaurin

$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|$

$\frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} < \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} |R_n(x)| \leq \lim_{n \to +\infty} \frac{M}{(n+1)!} |x|^{n+1} = 0$

$f(x) = \sin x \to 0$

$f'(x) = \cos x \to 1$

$f''(x) = -\sin x \to 0$

$f'''(x) = -\cos x \to -1$

$f^{IV}(x) = \sin x \to 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

$\sin(x) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f(x) = \sin x \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$|f^{(n)}(t)| < 1$

$M = 1$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 192

Prodotto alla Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$

$$g(x) = \frac{1}{1-3x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$$g(x) = \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n x^n$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad b_n = 3^n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\cdot 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(6)^k}$$

Ricordiamo che:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 192

1.7

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n^2}}{3^n} x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{5^{n^2}}{3^n}} = +\infty \Rightarrow R=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n} x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{5}{3}\right)^{\cancel{n}}} = \frac{5}{3}$$

$$R = \frac{3}{5}$$

$$\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$x = \frac{3}{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n} \cdot \frac{3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \underline{\text{diverge}}$$

$$x = -\frac{3}{5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n (-1)^n \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Rightarrow \text{indeterminata}$$

$\Rightarrow$ L'insieme di convergenza è $\left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$ perché non converge agli estremi.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n} x^n$$

Sappiamo che:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 192

centro $= \frac{3}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n+1)2^n} = 2$$

$R = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{3}{2}-\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{2}+\frac{1}{2}$ $\qquad x \in (1,2)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (2x+3)^n$$

$2x+3 = t$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} (t)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$R = 2 \Rightarrow t \in (-2,2)$

$t = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cancel{2^n}} \cancel{2^n}$ diverge

$t = -2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibniz

$t \in [-2,2)$

$t = 2x+3$ $\qquad 2x+3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ centro

$2x+3 = -2 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

$2x+3 = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x \in \left[-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{x-1} = e^{-1/3}$$

$$x-1 = e^{-2/3}$$

$$x_0 = 1+e^{-2/3}$$

$$\left(1+e^{-2/3}, +\infty\right)$$

2.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 e^{nx}$$

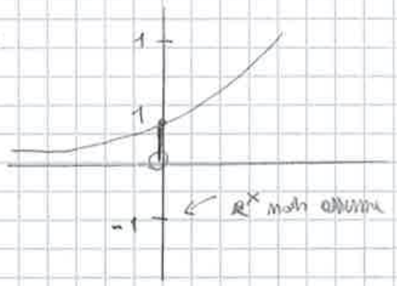
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 (e^x)^n$$

$$e^x = t$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^5 t^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^5} = 1$$

$$t \in (-1, 1)$$



$\leftarrow e^x$ non assume mai valore -1

$$t \in (0,1) \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$$

Esempio

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{4x^3}{y} \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

$\dfrac{4x^3}{y}$ continua , $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{4x^3}{y^2}$ continua

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{y}$$

$$\int y \, dy = \int 4x^3 \, dx$$

$$\int_{-3}^{y} u \, du = \int_0^x 4v^3 \, dv$$

$$\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-3}^{y} = \left[v^4\right]_0^x = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}9 = x^4 \Rightarrow y^2 - 9 = 2x^4 \Rightarrow \boxed{y^2 = 9 + 2x^4}$$

$$y = -\sqrt{9 + 2x^4} = -3\sqrt{1 + \frac{2}{9}x^4} \sim -3\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{9}x^4\right) = -3 - \frac{1}{3}x^4$$

$\frac{2}{9}x^4 \to 0$

$x \to 0$

Delle due radici prendiamo quella negativa perché il problema di Cauchy ci dice che $y(0) = -3$

Equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$y'(x) = p(x)\,y(x) + q(x) \qquad p, q : I \to \mathbb{R}$$

$$y(x) = e^{\int p(x)\,dx}\left(\int e^{-\int p(x)\,dx} q(x)\,dx + c\right)$$

Esempio

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{2}{x}y + 6x^3 \\ y(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int p(x)\,dx = \int\left(-\frac{2}{x}\right)dx = -2\log|x|$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow \int p(x)\,dx = -2\log x$$

$$y(x) = e^{-2\log x}\left(\int e^{2\log x} 6x^3\,dx + c\right) = e^{\log x^{-2}}\left(\int e^{\log x^2} 6x^3\,dx + c\right) =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\int x^2 \cdot 6x^3\,dx + c\right) = \frac{1}{x^2}\left(\int 6x^5\,dx + c\right) = \frac{1}{x^2}\left(x^6 + c\right)$$

$$y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{1^2}(1^6 + c) = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + c = \frac{1}{2} \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$u(x) = y^{\frac{1}{2}}(x) \qquad u'(x) = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}}(x)\, y'(x)$

$u'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\, tg(x)\, u(x) + \frac{1}{2} \Rightarrow p(x) = tg\, x \quad q(x) = \frac{1}{2}$

$\int p(x)\, dx = \int tg\, x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int -\frac{\sin x}{\cos x} dx = -\log|\cos x|$

$u(x) = e^{-\log|\cos x|}\left(\int e^{\log|\cos x|} \frac{1}{2} dx + c\right) = |\cos x|^{-1}\left(\int \frac{|\cos x|}{2} dx + c\right) =$

$= \frac{1}{|\cos x|}\left(\int \frac{|\cos x|}{2} dx + c\right)$

C.I. $u(0) = 1$

$u(x) = \frac{1}{\cos x}\left(\int \frac{\cos x}{2} dx + c\right) = \frac{1}{\cos x}\left(\frac{1}{2}\sin x + c\right) = \frac{tg\, x}{2} + \frac{c}{\cos x}$

$1 = \frac{0}{2} + \frac{c}{1} \Rightarrow c = 1 \Rightarrow u(x) = \frac{tg(x)}{2} + \frac{1}{\cos x}$

Equazioni differenziali omogenee

$y'(x) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \frac{y}{x} = t \qquad y(x) = t\, x$

$y'(x) = t'(x)\, x + t(x)$

$t'(x)\, x\ t(x) = g(t) \Rightarrow t'(x)\, x = g(t) - t(x)$

$t'(x) = \frac{g(t)}{x} - \frac{t(x)}{x} \qquad y'(x) = p(x)\, y(x) + q(x)$

Esempio

$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)} \\ y(2) = 4 \end{cases} \qquad t(x) = \frac{y(x)}{x} \qquad y(x) = x\, t(x) \qquad y'(x) = t(x) + x\, t'(x)$

$\cancel{t(x)} + x \cdot t'(x) = \cancel{t(x)} + \frac{1}{t(x)} \qquad t'(x) = \frac{1}{x\, t(x)} \qquad \frac{1}{x} = t(x)\, t'(x)$

$\frac{1}{x} dx = t(x)\, dt \qquad \int_2^x \frac{1}{u} du = \int_{2}^{t} v\, dv \Rightarrow \left[\log|u|\right]_2^x = \left[\frac{v^2}{2}\right]_2^t$

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = (x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

$x_0 \in I$

$(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$

$f : I \times D \to \mathbb{R}$

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

è una funzione Lipschitziana su $E = I \times D$ rispetto a y e uniforme rispetto a x se $\exists L > 0$, $(L \in \mathbb{R})$, se $\forall (x, y_1)\ (x, y_2)$ vale

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = L\,|y_1 - y_2|$$

$f : E \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

vettore! vettore!

f è Lipschitziana su E rispetto a y e uniforme rispetto a x se $\exists L > 0 : \forall (x, \vec{y}_1)$, $\forall (x, \vec{y}_2)$

$y_1, y_2 \in D$, $x \in I$, $E = I \times D$

$$\left| f(x, \vec{y}_1) - f(x, \vec{y}_2) \right| \leq L \left| \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \right|$$

se f è continua $\Rightarrow$ f è Lipschitziana

$\not\Leftarrow$ (se f è Lipschitziana non è detto che sia continua)

Teorema

Se f è una funzione lipschitziana su $E = I \times D$ rispetto a y e uniforme rispetto a x, allora il problema di Cauchy ammette una ed una sola soluzione $\vec{y} = \vec{y}(x)$ definita in un intorno chiuso $[x_0 - a, x_0 + a]$ di x_0 e a valori in E, ed ivi derivabile con continuità.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 192

$\lambda^n + Q_1 \lambda^{n-1} + Q_2 \lambda^{n-2} + \ldots + Q_{n-1} \lambda + Q_n = 0$

Voglio verificare che $y = e^{\alpha x}$ è soluzione

$y' = \alpha e^{\alpha x}$, $y'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$, $y''' = \alpha^3 e^{\alpha x}$, $y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$

$\alpha^n e^{\alpha x} + \alpha^{n-1} e^{\alpha x} Q_1 + \ldots + \alpha^2 e^{\alpha x} Q_{n-2} + Q_{n-1} \alpha e^{\alpha x} + Q_n e^{\alpha x} = 0$

$e^{\alpha x} (\alpha^n + Q_1 \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha^2 Q_{n-2} + \alpha Q_{n-1} + Q_n) = 0$

Se $\alpha = \lambda$ $\quad e^{\alpha x}$ è soluzione di (2)

Primo caso:

$P(\lambda) = 0$

n soluzioni

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \ldots \lambda_n)$

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$

$y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

$y_3(x) = e^{\lambda_3 x}$

$\vdots$

$y_n(x) = e^{\lambda_n x}$

$y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$

con $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

$W(x) \neq 0$

Secondo caso:

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \ldots, & \lambda_r \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ k_1 & k_2 & k_3, & \ldots & k_r \end{array}$$

(molteplicità)

$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_r = n$

	1	-2	2	-2	1
		1	-1	1	-1
1	1	-1	1	-1	0
1		1	0	1	
	1	0	1	0	

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda^2 + 1)$$

$\lambda = 1$, $k = 2$

$\lambda = 0 + i$

$\lambda = 0 - i$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{0x} \cos(1 \cdot x) + C_4 e^{0x} \sin(1 \cdot x)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 192

$a_n \to +\infty,\ n \to +\infty$

$x^2 \log|x| = f(x)$

$(-e^2, e^2)$

$\left[-\frac{1}{2}e^{-1}, e^2\right)$

$x^2 \log|x| = e^2$

$x_1 = -e$

$x_2 = e$

$x \in (-e, e)$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad R_1$

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad R_2$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ avrà come raggio di convergenza il più piccolo tra i due $\Rightarrow \min(R_1, R_2)$

8.

Prodotto alla Cauchy

$f(x) = \frac{3}{3-4x} \ / R_1 \qquad g(x) = \frac{4}{4-3x} \ / R_2$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$

$f(x) = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\left(1 - \frac{4}{3}x\right)}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}x\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n x^n$

$R_1 = \frac{3}{4}$

11) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-8x+12}$

$= \dfrac{x+2}{(x-2)(x-6)}$

$= \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-6} \Rightarrow \dfrac{x+2}{x-6} = A + \dfrac{B}{(x-6)}(x-2)$ Poniamo $x=2$

$\dfrac{4}{-4} = A \Rightarrow A = -1$

Poniamo $x=6$

$\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{A}{x-2}(x-6) + B \Rightarrow \dfrac{8}{4} = B \Rightarrow B = 2$

$f(x) = -\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x-6}$

$= \dfrac{1}{2-x} - \dfrac{2}{6-x}$

$= \dfrac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}x\right)} - \dfrac{2}{6\left(1-\frac{x}{6}\right)}$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}x\right)^n - \dfrac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{6}x\right)^n$

$R_1 = 2$ $\qquad$ $R_2 = 6$

$R_{Cauchy} = \min(2,6) = 2$

$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{6^{n+1}}x^n$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}} - \dfrac{2}{6^{n+1}}\right)x^n$ $\qquad R = 2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 192

$y^3(x) - 2y''(x) + 5y' = 0$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$

$\lambda = 0$

$(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$

$5 = 4 + 1$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = -4$

$\lambda - 1 \pm 2i$

$\lambda = 0$
$\lambda = 1 + 2i$
$\lambda = 1 - 2i$

$y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{1 \cdot x} \cos(2x) + C_3 e^{1 \cdot x} \sin(2x)$

$y^{(3)} - ky'' + k^2 y' - k^3 y = 0$

$\lambda^3 - k\lambda^2 + k^2\lambda - k^3 = 0$

$\lambda^2(\lambda - k) + k^2(\lambda - k) = 0$

$(\lambda^2 + k^2)(\lambda - k) = 0 \qquad k \neq 0$

$\lambda = k$

$\lambda = 0 \pm ik$

$y_0(x) = C_1 e^{kx} + C_2 \cos(kx) + C_3 \sin(kx)$

Se $\Delta = 0$

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + x\lambda e^{\lambda x} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x}(1 + x\lambda) \end{vmatrix}$$

$= e^{2\lambda x} \neq 0 \Rightarrow$ le soluzioni sono linearmente indipendenti

$\Delta < 0$

$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$

$y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

$y_1'(x) = \alpha e^{\alpha x} \cos(\beta x) - e^{\alpha x} \beta \sin(\beta x) = e^{\alpha x}(\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x))$

$y_2'(x) = \alpha e^{\alpha x} \sin(\beta x) + e^{\alpha x} \beta \cos(\beta x) = e^{\alpha x}(\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos(\beta x))$

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha x} \cos(\beta x) & e^{\alpha x} \sin(\beta x) \\ e^{\alpha x}(\alpha \cos(\beta x) - \beta \sin(\beta x)) & e^{\alpha x}(\alpha \sin(\beta x) + \beta \cos \beta x) \end{vmatrix}$$

$= \beta e^{2\alpha x} \neq 0$

$y''' + 9y' = 0$

$\lambda^3 + 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + 9) = 0$

$\lambda = 0, \quad \lambda = 3i, \quad \lambda = -3i$

$y_0(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{0x} \cos(3x) + C_3 e^{0x} \sin(3x) = C_1 + C_2 \cos(3x) + C_3 \sin(3x)$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

Equazioni differenziali di ordine n-esimo non omogenee

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \quad (1)$$

se $b(x) = 0 \Rightarrow (2)$

seppiamo trovarla

$$y(x) = y_0(x) + y_P(x)$$

Come trovare $y_P(x) = ?$

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

Metodo di somiglianza

① $b(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$

ⓐ se $P(\alpha) \neq 0$ (α non è soluzione del polinomio caratteristico)

$$y_P(x) = e^{\alpha x} \cdot q_m(x)$$

ⓑ se $P(\alpha) = 0$

$\alpha \rightarrow$ molteplicità h

$$y_P(x) = x^h e^{\alpha x} q_m(x)$$

② $b(x) =$

m e k indicano il grado

$$= e^{\alpha x}\left(P_1(m)\cos(\beta x) + P_2(k)\sin(\beta x)\right)$$

ⓐ $P(\alpha + i\beta) \neq 0$

$$y_P(x) = e^{\alpha x}\left(q_1(r)\cos(\beta x) + q_2(r)\sin(\beta x)\right), \text{ dove } r = \max(m, k)$$

ⓑ $P(\alpha + i\beta) = 0$

$\alpha + i\beta \rightarrow$ molteplicità h

$$y_P = x^h e^{\alpha x}\left(q_1 r\cos(\beta x) + q_2 r\sin(\beta x)\right)$$

$y'''(p) + 9y'(p) = 2X$

$0 + (2AX + B)9 = 2X$

$18AX + 9B = 2X$

$B = 0$

$A = 1/9$

$y''' + 9y' = 2\cos X$

$2\cos X = 2e^{0x}\cos X + 0\, e^{0x}\sin X$

$\alpha = 0 \quad \beta = 1$

$0 + i$

$P(0+i) \neq 0$

$y_p = e^{0x} = 1$

$(A\cos X + B\sin X)$

$y_p' = -A\sin X + B\cos X$

$y_p'' = -A\cos X - B\sin X$

$y_p''' = A\sin X - B\cos X$

$y'''p + 9y'p = 2\cos X$

$A\sin X - B\cos X - 9A\sin X + 9B\cos X = 2\cos X$

$\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{-8A}\sin X + \underset{\substack{\parallel \\ +\frac{1}{4}}}{8B}\cos X = 2\cos X$

$A = 0 \ , \ B = 1/4$

$y_p(x) = \frac{1}{4}\sin X$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 192

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_5 = 1 \\ y'(0) = C_2 + C_6 = -1 \\ y''(0) = 2C_3 - C_5 = 1 \\ y'''(0) = 6C_4 - C_6 = -1 \\ y^{IV}(0) = C_5 = 1 \\ y^{V}(0) = C_6 = -1 \end{cases}$$

$6C_4 = C_6 - 1$

$C_4 = \dfrac{-1-1}{6} = -\dfrac{1}{3}$

$2C_3 = C_5 + 1$

$C_3 = \dfrac{C_5+1}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$C_2 = -C_6 - 1 = 0$

$C_1 = -C_5 + 1 = 0$

$C_1 = C_2 = 0$

$C_3 = 1$

$C_4 = -\frac{1}{3}$

$C_5 = 1$

$C_6 = -1$

$y = x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cos x - \sin x$

$y^{(6)} + y^{(4)} = 24$ (Consideriamo sempre il problema di Cauchy dell'esercizio precedente anche nei prossimi esercizi)

$= 24 \cdot e^{0x}$

$y_p(x) = x^4 A$

$y_p^{(6)} + y_p^{(4)} = 24$

$y'_p(x) = 4Ax^3$

$y_p = \frac{x}{2} \cdot \sin x$

$y = y_0(x) + y_p(x)$

$$\begin{cases} y''' - 16 y' = 0 \\ y(1) = 1 + \cosh(4) \\ y'(1) = 4 \sinh(4) \\ y''(1) = 16 \cosh(4) \end{cases}$$

$\lambda^3 - 16\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 16) = 0$

$P(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - 16)$

$\lambda_1 = 0 \quad k = 1$

$\lambda_2 = 4 \quad k = 1$

$\lambda_3 = -4 \quad k = 1$

$y_0 = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{+4x}$

$y_0(1) = C_1 + C_2 e^{-4} + C_3 e^{4}$

$y_0' = -4 C_2 e^{-4x} + 4 C_3 e^{4x}$

$y_0'(1) = -4 C_2 e^{-4} + 4 C_3 e^{4}$

$y_0'' = 16 C_2 e^{-4x} + 16 C_3 e^{4x}$

$y_0''(1) = 16 C_2 e^{-4} + 16 C_3 e^{4}$

$C_1 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{1}{2}$ (impostare il problema di Cauchy con i ~~risultati~~ risultati ottenuti)

$y_0(1) = 1 + \frac{1}{2} e^{-4x} + \frac{1}{2} e^{4x}$

$= 1 + \cosh(4x)$

Teorema

Supponiamo che $V_1 \in \mathbb{R}^2$ sia un autovettore di una matrice reale A, 2×2, con autovalore λ_1.
Allora $y_1 = e^{\lambda_1 t} V_1$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione del sistema differenziale lineare $X' = AX$

Esempio

$a x_2' + b x_2 + c x_1 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \Rightarrow x_2' = x'' \end{cases}$$

$$x_2' = -\frac{c}{a} x_1 - \frac{b}{a} x_2$$

$$x_1' = x' = x_2$$

$$x_2 = -\frac{c}{a} x_1 - \frac{b}{a} x_2$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{c}{a} x_1 - \frac{b}{a} x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -\frac{c}{a} & -\frac{b}{a} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0$$

Teorema (Autovalori reali distinti)

Sia A una matrice reale 2×2 con due autovalori reali e distinti λ_1, λ_2 con i relativi autovettori V_1 e V_2.
Allora le soluzioni $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1$, $y_2(t) = e^{\lambda_2 t} V_1$ sono linearmente indipendenti e la soluzione generale è data da $g(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2$

Esempio

$x'' + 3x' + 2x = 0$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -2x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 192

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = \cancel{x} - y \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda^2 - 1 - 3 = 0$

$\lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$

$\boxed{\lambda = -2}$ $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$x + y = 0$, $y = -x$

$v_1 = (1, -1)$

$\boxed{\lambda = +2}$ $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

$x - 3y = 0 \Rightarrow x = 3y$ $\quad v_2 = (3, 1)$

$$Y(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x(t) = C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{2t}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\quad \lambda_1 = -2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 = 2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + y \\ y' = -x + 2y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(\lambda - 2)(\lambda + \frac{1}{2}) + 1 = 0$

$\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - 2\lambda - 1 + 1 = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 192

$V_1 = (1, -2)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2x + y = 0$

$y = 2x$

$V_2 = (1, 2)$

Esponenziale di una matrice A $(n \times n)$

e^{At}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & t e^t \\ 0 \cdot e^t & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & t e^t \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & t e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 192

Se $X(t) = X_{Re}(t) + i X_{im}(t)$ è una soluzione complessa del sistema differenziale lineare

$X' = AX$

$\Rightarrow$ sia la parte reale $X_{Re}(t)$, sia la parte immaginaria $X_{Im}(t)$ sono soluzioni dello stesso $X' = AX$.

Lo spazio delle soluzioni reali del sistema $X' = AX$ è descritto da tutte le combinazioni lineari del tipo $C_1 X_{Re}(t) + C_2 X_{im}(t)$.

$$C_1 \begin{pmatrix} -\sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ \sin \beta t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C_1 \begin{pmatrix} \cos \beta t \\ -\sin \beta t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{pmatrix}}$$

$X(t) = X_{Re}(t) + i X_{im}(t)$

$X'(t) = X'_{Re}(t) + i X'_{im}(t)$

$\parallel$

$AX(t) = A\left(X_{Re}(t) + i X_{im}(t)\right)$

$= AX_{Re}(t) + i AX_{im}(t)$

$X'_{Re}(t) = AX_{Re}(t)$

$X'_{Im}(t) = AX_{im}(t)$

$\lambda = 3 \pm 5i$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} \cos 5t \\ -\sin 5t \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} \sin 5t \\ \cos 5t \end{pmatrix}$$

2×2 $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) \\ y'(t) = a y(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$\frac{dx}{x} = a\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int a\,dt$$

$$\log x = at$$

$$x = e^{at}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{at} \\ y(t) = C_2 e^{at} \end{cases}$$

<u>Esempio</u>

$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) \\ y'(t) = 3y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{3t} \\ y(t) = C_2 e^{3t} \end{cases}$$

$$X(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

$$X(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}$$

$$\begin{cases} \dots \\ y(t) = C_2 e^{\alpha t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) + y(t) \\ y'(t) = \alpha y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t} \\ y(t) = C_2 e^{\alpha t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(t) = 5x(t) + y(t) \\ y'(t) = 5y(t) \end{cases}$$

$$U \mid AU = V_1 + \alpha U$$

U non deve essere proporzionale a V_1 $\Rightarrow$ devono essere linearmente indipendenti

$$A u = V_1 + \alpha u$$

$$A u = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & \beta \\ \alpha & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a\alpha + b \\ \alpha\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a\alpha + \beta = 1 + a\alpha \\ \alpha b = \alpha b \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$ (Usiamo la soluzione più semplice)

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V_1 $\quad$ V

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -36 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

righe proporzionali

$-6x + y = 0$ $\quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad$ m algebrica $\neq$ m geometrica

$x = 1 \quad y = 6$

$$U \mid AU = V_1 - 2U$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 1 \\ 36 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8a + b \\ -36a + 4b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8a + b \\ -36a + 4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -8a + b = 1 - 2a \\ -36a + 4b = 6 - 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a + b = 1 \\ -36a + 6b = 6 \end{cases}$$

$-6a + b = 1$

soluzione semplice : $a = 0, \ b = 1$

$$P = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} v_1 & \ \ U \end{array} \end{array} \rightarrow P^{-1}$$

$$A = P J P^{-1}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

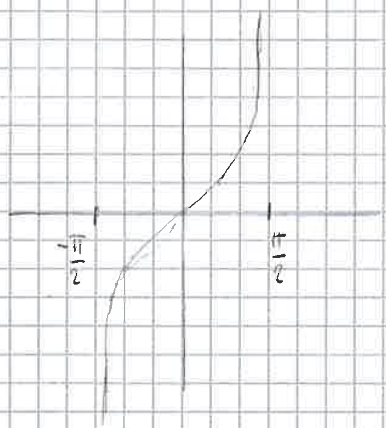
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 192

$y = tgx = f(x)$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

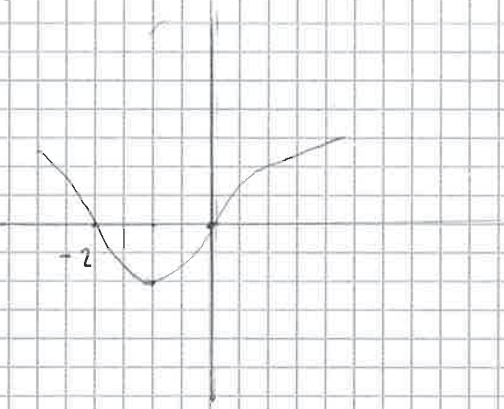
Esplicitare x in funzione di y

$x = arctg(y)$



Ricorda: se la funzione di partenza è crescente anche l'inversa è crescente.

$y = x^2 + 2x$



$f(-\infty, -1)$ $\qquad$ $f\,|\,(+1, +\infty)$

$x^2 + 2x = y$

$x^2 + 2x - y = 0$

$\Delta = 4 + 4y$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1+y)}}{2}$$

$x_1 = -1 + \sqrt{1+y}$

$x_2 = -1 - \sqrt{1+y}$

$f(x) = e^x + x \qquad x_0 = 0$

$f'(x) = e^x + 1$

$f(0) = e^0 + 0 = 1 = y_0$

$f'(0) = e^0 + 1 = 2$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2} = (f^{-1})'(y_0)$$

Curve di livello

$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Def

Si chiama insieme di livello k della funzione f il sottoinsieme dei punti del dominio D
$\gamma_k = \{ x \in D \mid f(x) = k \}$. Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ gli insiemi di livello di f sono curve nel piano chiamate curve di livello.

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$

L'equazione $f(x, y) = 0$ ha come soluzioni coppie di valori (x, y) che formano un luogo geometrico sul piano cartesiano che corrisponde ad una curva di livello di f.

$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

$(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$

$f(x, y) = 0 \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0 \qquad (x, y) = (0, 0) \to$ c'è solo una soluzione!

$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 1$

$f(x, y) = 0$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = -1 \quad ? \to$ Non esistono soluzioni!

In un intorno di $(0,0)$ possiamo disegnare un luogo dei punti che soddisfi $f(x,y)=0$?
In generale ciò non è detto.

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$$

c'è un unica soluzione

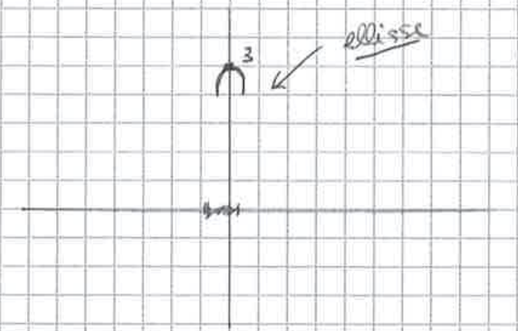
Localmente tutte le soluzioni di $f(x,y)=0$ si possono rappresentare tramite una funzione che dipende solo da x o da y ?

$$\exists\, \varphi(x) : f(x, \varphi(x)) = 0 \ ?$$

$$\exists\, \psi(y) : f(\psi(y), y) = 0 \ ?$$

$$f(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1$$

Fisso il punto $(0,3)$ che è soluzione di $f(x,y)=0$



$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \iff \frac{y^2}{9}=1-\frac{x^2}{4}$$

$$\iff y^2 = 9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

$$y = 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$\varphi(x) = 3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

$$(x, \varphi(x)) \Rightarrow \text{in un intorno di } (0,0)$$

Ricorda: un insieme aperto è costituito solo da punti interni

Teorema del Dini (o delle funzioni implicite)

Sia D un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f: D \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Supponiamo che in un punto $(x_0, y_0) \in D$ si abbia che $f(x_0, y_0) = 0$.
Se $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$, allora esiste un intorno $I = (x_0 - a, x_0 + b)$ di x_0 e una funzione $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tali che:

(1) $\quad (x, \varphi(x)) \in D \quad \forall x \in I$

(2) $\quad y_0 = \varphi(x_0) \quad$ (la soluzione è unica)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = e^2 \neq 0$

$x = \varphi(y)$

$f(x, \varphi(x)) = x e^{\varphi(x)} + 2(x-1)(\varphi(x) - 2)$

$\frac{d f(x, \varphi(x))}{dx} = e^{\varphi(x)} + x e^{\varphi(x)} \cdot \varphi'(x) + 2(\varphi(x) - 2) + 2(x-1)(\varphi'(x))$

$(x=0, y=2) \Rightarrow e^2 + 0 e^2 \cdot \varphi'(x) + 2(2-2) + 2(0-1)\varphi'(x) = 0$

$e^2 - 2\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = \frac{e^2}{2}$

$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} = -\frac{e^2}{-2} = \frac{e^2}{2}$

$\varphi(x)$ in un intorno di $(0,2)$ è crescente, $\varphi'(0) > 0$

Verificare che l'equazione $x^3 + x + y + y^3 - 4 = 0$ definisca implicitamente una e una sola funzione $y = \varphi(x) \in C^\infty$ tale che $\varphi(1) = 1$.
Calcolare $\varphi'(1)$ e $\varphi''(1)$.

$(1,1)$

$f(x,y) = x^3 + x + y + y^3 - 4$

$f(1,1) = 0$? sì!

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1 + 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial f(1,1)}{\partial y} \neq 0$? sì!

$\Rightarrow$ esistono due costanti a e b e una sola funzione $\varphi : (1-a, 1+a) \to (1-b, 1+b)$
tali che $f(x,y) = 0$ in $(1-a, 1+a) \times (1-b, 1+b)$

$\Leftrightarrow y = \varphi(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 192

$$\varphi''(1) = - \frac{6 + 2 \cdot 0 + 6 \cdot (-1)^2}{4} = - \frac{12}{4} = -3$$

$\varphi(x)$ decrescente e concava

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 192