NUMERO: 1640A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Robertazzi

MATERIA: Meccanica delle Macchine + Esercizi. Prof.Pastorelli

CORSO DI MECCANICA DELLE MACCHINE.

Prof. STEFANO PASTORELLI. STEFANO.PASTORELLI@POLITO.IT

LEZIONI + ESERCITAZIONI + LABORATORIO.

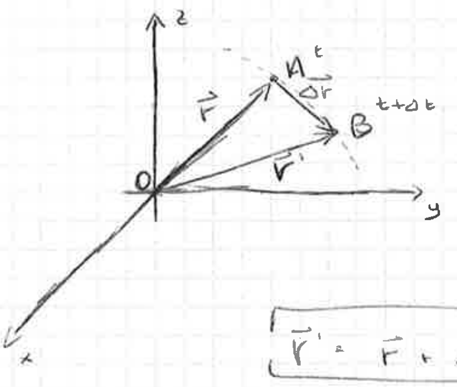
ESAME: SCRITTO (IMPOSSIBILE RIFIUTARE). NON È PREVISTO ORALE.

TESTO: • MECCANICA APPLICATA ALLE MACCHINE
• + ESERCIZI (PASTORELLI)

RICHIAMI DI CINEMATICA DEL PUNTO.

CINEMATICA: SI OCCUPA DEL MOVIMENTO DI UN CORPO PRESO IN SOGGETTO.

PUNTO = CORPO PUNTIFORME = OGGETTO DI CUI SI TRASCURA ~~LE~~ LA DIMENSIONE.



LA CINEMATICA SI PREOCCUPA DELLA POSIZIONE.

$\underbrace{\vec{r}\text{ : VETTORE POSIZIONE}}$ A

$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{AB}$ (SPOSTAMENTO)

$\underbrace{\vec{r}'\text{ : POSIZIONE DI B}}$

$$\boxed{\vec{r}' = \vec{r} + \overrightarrow{\Delta r}}$$

QUESTI VETTORI POSIZIONE CAMBIANO NEL TEMPO.

INTERVALLO DI TEMPO Δt

$\vec{V}_m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ VELOCITÀ MEDIA (ESPRIME LA VARIAZIONE DI POSIZIONE IN UN INTERVALLO DI TEMPO Δt)

$\vec{V} = \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}}$ VELOCITÀ ISTANTANEA IN UN PUNTO (A).

→ LIMITE DI UN RAPPORTO INCREMENTALE ⇒ DERIVATA

$$\boxed{\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

$\vec{a}_m = \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{V}_b - \vec{V}_a}{\Delta t}$ ACCELERAZIONE MEDIA

$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \boxed{\dfrac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}}$ ACCELERAZIONE ISTANTANEA IN UN PUNTO (A).

MOTO RETTILINEO

$\vec{r} = x\,\vec{i}$

$x =$ POSIZIONE

$v = \dot{x}$

$a = \ddot{x}$

2 TIPI DI MOTO:

MOTO AD ACCELERAZIONE COSTANTE $(\vec{a} = \text{cost})$

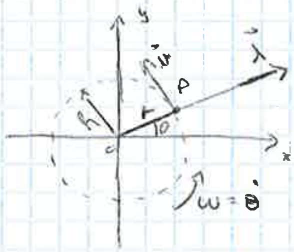
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a \implies d\vec{v} = \vec{a}\,dt$$

INTEGRANDO: $$\int_{v_0}^{v(t)} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\,dt \implies v(t) = a(t-0) + v_0$$

$$\boxed{v(t) = at + v_0}$$ VELOCITÀ RISPETTO A t.

MA ANCHE: $$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v(t)\,dt \implies \boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$ POSIZIONE RISPETTO A t.

MOTO CURVILINEO. (CIRCOLARE).



COORDINATE CILINDRICHE

$$\begin{cases} r = \text{cost} = R & \dot{r} = \ddot{r} = \phi \\ z = \text{cost} = \phi & \dot{z} = \ddot{z} = \phi \end{cases}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u} - R\dot{\theta}^2\vec{\lambda}$$

$$\begin{cases} a_{pt} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = \dot{v} \\ a_{pn} = R\dot{\theta}^2 = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \end{cases}$$

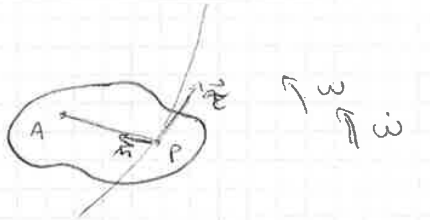
a_{pt} = ACCELERAZIONE TANGENZIALE.

a_{pn} = ACCELERAZIONE NORMALE.

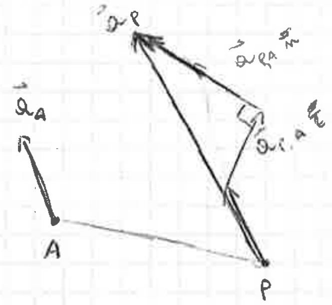
a_p = ACCELERAZIONE TOTALE

$$\boxed{a_p = a_{pt} + a_{pn}}$$

$\boxed{a_{P,A} = a_{P,A}\,\tau + a_{P,A}\,m}$

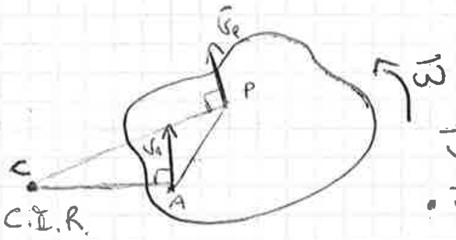


$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{a}_{P,A} =$$
$$= \vec{a}_A + \vec{a}_{P,A\tau} + \vec{a}_{P,A\,m} =$$
$$= \vec{a}_A + \overline{AP}\,\dot{\omega}\,\vec{\tau} + \overline{AP}\,\omega^2\,\vec{m}$$



IL MOTO ROTATORIO DI ACCELERAZIONE SI DIVIDE IN 2 CONTRIBUTI: TANGENZIALE E NORMALE.

IN OGNI ISTANTE È POSSIBILE, IN UN CORPO RIGIDO, INDIVIDUARE UN PUNTO IN CUI $\vec{v} = 0$. TALE PUNTO È IL $\boxed{\text{C.I.R.}}$



$\exists$ UN PUNTO SOLIDALE AL CORPO, IN CUI $\vec{v} = 0$.

$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{v}_{A,C}$ MA $\vec{v}_C = 0$

- $\vec{v}_A = \vec{v}_{A,C} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CA}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{v}_{P,C}$ MA $\vec{v}_C = 0$

- $\vec{v}_P = \vec{v}_{P,C} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}$

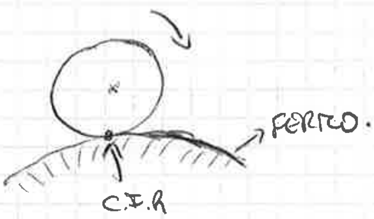
IL PUNTO C È FERMO E TUTTI I PUNTI DEL CORPO STANNO RUOTANDO INTORNO AL C.I.R. CON UNA CERTA $\vec{\omega}$.

NOTO IL C.I.R. POSSO CALCOLARE LA VELOCITÀ DI QUALSIASI PUNTO DEL CORPO RIGIDO.

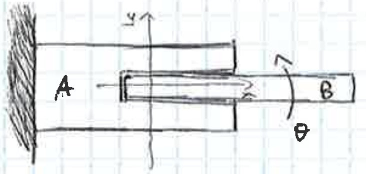
SE IL MOTO È ROTOTRASLATORIO C.I.R. CAMBIA IN OGNI ISTANTE.

NOTA BENE: IL CONCETTO DI C.I.R. PARLA SOLO DELLE VELOCITÀ; NON È DETTO CHE $\vec{a}_C$ SIA UGUALE A 0.

- MOTO DI ROTOLAMENTO PURO (SENZA SCIVOLAMENTO).

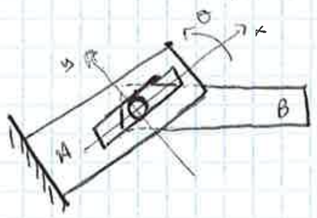


- GUIDA PRISMATICA o GUIDA LINEARE :



1 GRADO DI LIBERTA' (x)
2 GRADI DI VINCOLO (y, θ)
SOLO SPOSTAMENTI ORIZZONTALI.

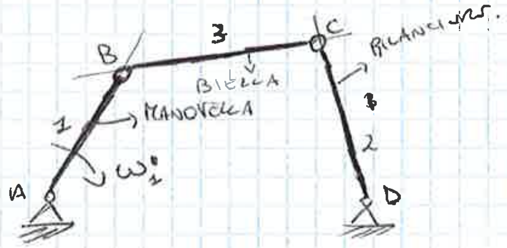
- APPOGGIO SCORREVOLE:



2 GRADI DI LIBERTA' (x, θ)
1 GRADO DI VINCOLO (y)
MOVIMENTO ROTAZIONALE E TRASLATORIO ORIZZONTALMENTE.

QUADRILATERO ARTICOLATO.

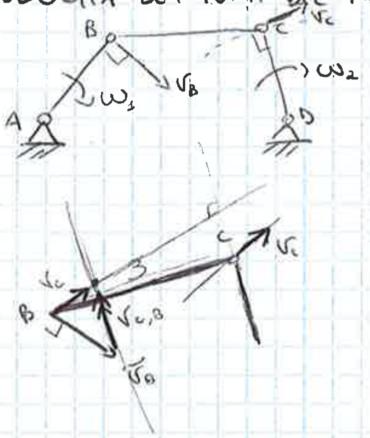
ANALISI CINEMATICA DI UN MECCANISMO.



3 CORPI $3 \cdot 3 = 9$ GRADI DI LIBERTA
4 CERNIERE $2 \cdot 4 = 8$ GRADI DI VINCOLO
$9 - 8 = 1$ grado di libertà

$\omega_1 =$ COSTANTE IMPONENDO UNO SPOSTAMENTO VOGLIAMO ANALIZZARE IL COMPORTAMENTO DEGLI ALTRI CORPI.

VELOCITA' DEI PUNTI DEL MECCANISMO:



$\vec{v}_A = 0$ PUNTO FISSO

$v_B = \omega_1 \overline{AB}$

$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C,B}$ IL PUNTO C SI MUOVE LUNGO LA CIRC. DI RAGGIO $\overline{CD}$ E CENTRO D.

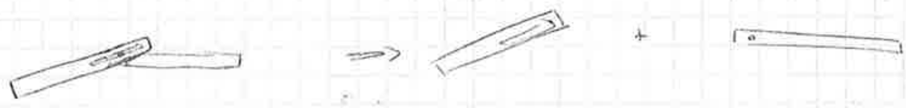
$v_C \perp r_{c,d}$ MODULO = $d(B, r_{v_c} \perp r_{fisso})$

$\vec{v}_C = \omega_2 \overline{CD} \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_C}{\overline{CD}}$

$\vec{v}_D = 0$ $v_{C,B} = \omega_3 \overline{CB} \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_{C,B}}{\overline{CB}}$

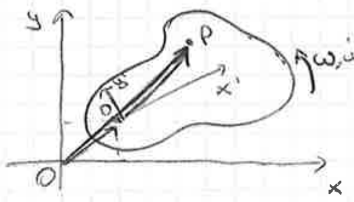
MOTI RELATIVI

SI ADOPERANO A CORPI RIGIDI, PROVENIENTI DALLA SCISSIONE VINCOLARE DI UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI:



COME SI FA?

È IMPORTANTE INDIVIDUARE 3 COSE:



1) O_{xy} SISTEMA FISSO.
2) $O'_{x'y'}$ SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE, SOLIDALE COL CORPO
3) P PUNTO MOBILE RISPETTO AL PIANO FISSO ~~MOBI~~ È MOBILE RISPETTO AL CORPO.

- MOTO ASSOLUTO: MOTO DEL PUNTO P, RISPETTO AL SISTEMA FISSO;
- MOTO RELATIVO: MOTO DEL PUNTO P RISPETTO AL CORPO MOBILE;
- MOTO DI TRASCINAMENTO: MOTO DEL PUNTO P RISPETTO AL SISTEMA FISSO, QUANDO È ANNULLATO IL MOTO RELATIVO.

$\vec{OP}$ = POSIZIONE ASSOLUTA DI P (RISPETTO AL SISTEMA FISSO)
$\vec{O'P}$ = POSIZIONE RELATIVA DI P (RISPETTO AL CORPO MOBILE)

COME METTERE INSIEME QUESTE COSE?

$\vec{OP} = \vec{O'P} + \vec{OO'}$ MOTO ASSOLUTO = MOTO RELATIVO + MOTO TRASCINAMENTO

VELOCITÀ: $\vec{v}_{P_{ass}} = \vec{v}_{P_{rel}} + \vec{v}_{P_{tras}}$

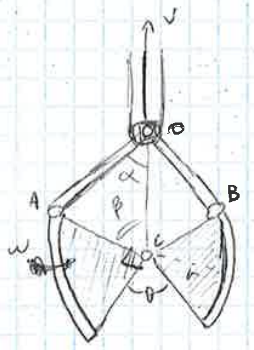
ACCELERAZIONE: $\vec{a}_{P_{ass}} = \vec{a}_{P_{rel}} + \vec{a}_{P_{tras}} + \underbrace{\vec{a}_{P_{co}}}_{\text{CORIOLIS}}$

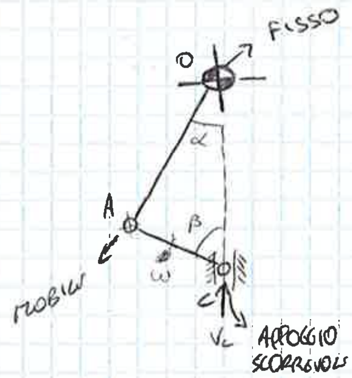
$\vec{v}_{P_{tras}} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_{P,O'}$ ("COME NEI RIGIDI")

$\vec{a}_{P_{tras}} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{P,O'n} + \vec{a}_{P,O'\tau}$ ("COME NEI RIGIDI")

$\vec{a}_{P_{co}} = 2\,\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{P_{rel}}$

PROBLEMA 2 (ESERCIZIO 1,29) (CINEMATICA CORPO RIGIDO).





$V_c = 0{,}3\ m/s$

$\overline{AO} = \overline{BO} = 600\ mm$

$r = 500\ mm$

$\theta = 45°$

β

$\beta = 180° - 90° - \frac{\theta}{2}$ $\qquad \vec{\omega}_{AC} = ?$ $\qquad \beta = 67{,}5°$

$\omega_{AC} = \frac{V_c}{\overline{AC}}$ $\qquad r = \overline{AC} = 0{,}5\ m$ $\qquad \overline{AO} = 0{,}6\ m$

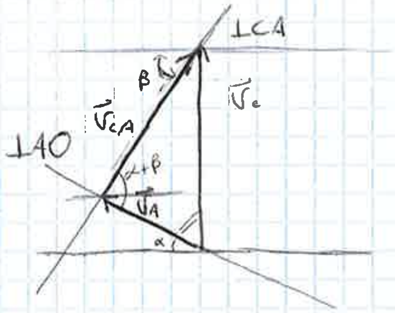
$\omega = \frac{v}{R}$

"TEOREMA SENI (o coseno α)"

$\frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{AO}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AC\ \sin\beta}{AO} \Rightarrow \alpha = 50{,}34°$

CORPO RIGIDO $\overline{AC}$: $\boxed{\vec{V}_c = \vec{V}_A + \vec{V}_{c,A}}$

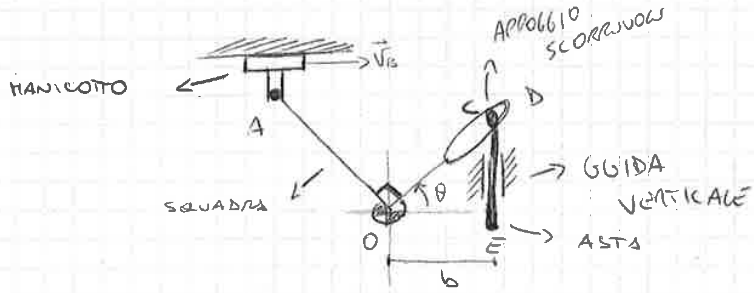
$\vec{V}_A \perp \overline{OA}$ $\qquad V_{c,A} \perp CA$



$\frac{V_{c,A}}{\sin(90-\alpha)} = \frac{V_c}{\sin(\alpha+\beta)}$ $\qquad \omega = V_{c,A}$

$\omega = \frac{V_{c,A}}{AC} = \frac{V_c}{AC} \frac{\sin(90-\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow \boxed{\omega = 0{,}433\ rad/sec}$

MOTI RELATIVI ES. E 1/13 (ESERCIZIO 1,13)



DATI:

$\overline{AO} = r$ $\overline{OE} = b$

- $\vec{V}_B$ = COSTANTE (MODULO)

CALCOLARE:

$\vec{V}_{ASTA} = ?$ $\vec{a}_{ASTA} = ?$

$\overline{OC} = \dfrac{b}{\cos\theta}$

CALCOLO I GRADI DI LIBERTA': (INTERO SISTEMA).

$(3 \cdot 3) - 2 - 1 - 2 - 1 - 2 = \underbrace{1 \text{ GRADO DI LIBERTA'}}$

MI BASTA UN SOLO PARAMETRO PER STUDIARE IL MOTO.

SVOLGIMENTO:

$\vec{V}_A = \vec{V}_{A_r} + \vec{V}_{A_t}$

VELOCITA' RELATIVA — VELOCITA' TRASCINAMENTO.

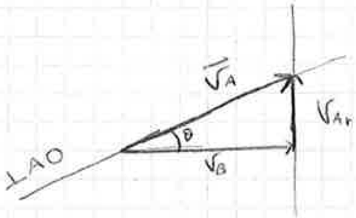
PUNTO A, MANICOTTO.

$\vec{V}_{A_t} = \vec{V}_B$

~~$\vec{V}_{A_r}$~~

	$\vec{V}_A =$	$\vec{V}_{A_r}$ +	$\vec{V}_{A_t}$
D.	$\perp AO$	$\updownarrow$	$\vec{V}_B$
M.	$\omega \cdot \overline{AO}$?	?	
V.	?	?	

TRIANGOLO DI VETTORI:



$\boxed{V_A = \dfrac{V_B}{\cos\theta}}$

RUOTA IN SENSO ORARIO

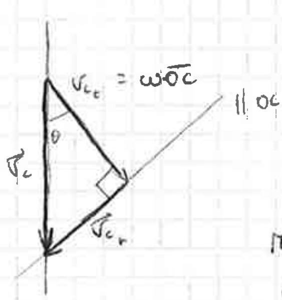
$\omega = \dfrac{V_A}{AO}$

PUNTO C:

SQUADRA

	$\vec{V}_C =$	$\vec{V}_{C_r}$ +	$\vec{V}_{C_t}$
D.	$\updownarrow$	$\parallel \overline{OC}$	$\perp \overline{OC}$
M.	?	?	$\omega \cdot \overline{OC}$
V.	?	?	↘

TRIANGOLO DI VETTORI



$\boxed{V_C = \dfrac{V_{C_t}}{\cos\theta}}$

MA ~~$V_C = V_E$~~

$\boxed{V_C = V_E = V_{ASTA}}$

CLASSIFICAZIONE FORZE (AZIONE)

1) NATURA DELLA FORZA → FORZA DI MASSA (FORZA PESO ...) (INTERNO)
↳ FORZA DI SUPERFICIE (ESTERNE).
CAUSATE DAL CONTATTO CON ALTRI MATERIALI

2) POSIZIONE RISPETTO AL CORPO → FORZE INTERNE
↳ FORZE ESTERNE

→ SISTEMA MECCANICO

- FORZE INTERNE SONO SCAMBIATE FRA 2 ELEMENTI APPARTENENTI AL SISTEMA MECCANICO CONSIDERATO.
- FORZE ESTERNE SONO GENERATE DA QUALCOSA ESTERNA AL SISTEMA MECCANICO.

- PER LE FORZE INTERNE VI E' IL PRINCIPIO DI AZIONE REAZIONE, MA SO CHE LE FORZE DI AZIONE REAZIONE SONO UGUALI ED OPPOSTE, PERCIO' $\underbrace{\sum F_i = 0}_{\to \text{ FORZE INTERNE}}$.
- LE FORZE ESTERNE NON SONO EQUILIBRATE.

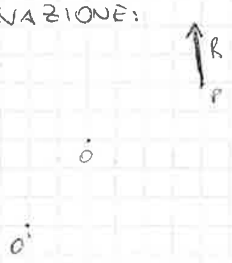
3) ORIGINE DELLA FORZA → FORZE ATTIVE
↳ FORZE REATTIVE

FORZE ATTIVE: RIGUARDANTI AL SISTEMA MECCANICO (DIPENDONO DAL MOTO DEL SISTEMA).
LA FORZA PESO E' ATTIVA PERCHE' E' NOTA.
DIPENDONO DA COSE IMPOSTE ALL'INIZIO.

FORZE REATTIVE: SONO FORZE CHE NASCONO IN FUNZIONE DI ALTRE FORZE SUL SISTEMA. FORZE CHE DIPENDONO DALL'EQUILIBRIO DEL SISTEMA. UN ESEMPIO SONO LE REAZIONI VINCOLARI. SONO FORZE DI CUI SI CONOSCE LA DIREZIONE E IL MODULO DIPENDE DA ALTRE FORZE APPLICATE.

4) LAVORO → FORZE MOTRICI (COMPIONO LAVORO POSITIVO)
↳ FORZE RESISTENTI (COMPIONO LAVORO NEGATIVO)

OSSERVAZIONE:



$\vec{M}_o = \vec{OP} \wedge \vec{R}$

1)

POSSO CALCOLARE IL MOMENTO DI R RISPETTO AD UN ALTRO POLO

$$\underbrace{\vec{M}_{o'} = \vec{M}_o + \vec{R} \wedge \vec{OO'}}$$

2)

PER L'EQUILIBRIO, CONDIZIONE NECESSARIA $\Sigma F_{(ext)} = 0$ | SOLO FORZE ESTERNE

$\Sigma F_{ext} = 0$
$\Sigma M = 0$ $\Rightarrow$ EQUILIBRIO STATICO

3)

POSSIAMO AVERE 2 SITUAZIONI:

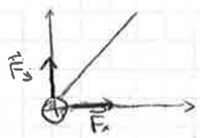
	3D	2D
$\Sigma F_{ext} = 0$	x y z	x y
$\Sigma M = 0$	x y z	z
	6 EQUAZIONI SCALARI	3 EQUAZIONI SCALARI

• REAZIONE VINCOLARE.

FORZE CHE NASCONO NEI VINCOLI, OVVERO IN QUEGLI ELEMENTI CHE LIMITANO I GRADI DI LIBERTÀ DI UN CORPO.

- CERNIERA:

1)

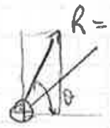


IL VINCOLO IMPEDISCE QUALSIASI TIPO DI TRASLAZIONE.

N° REAZIONI VINCOLARI = ~~[illegible]~~ MODI PER ESPRIMERE LA REAZIONE.

~~[illegible] 2 REAZIONI VINCOLARI~~

2)



$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_y}{F_x}$

2 PARAMETRI DI REAZIONE

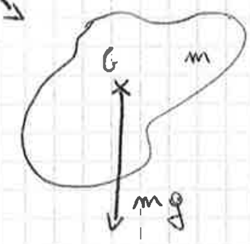
- FORZA PESO

ASSOCIATA AL FATTO CHE IL CORPO HA UNA MASSA.

DIPENDE DALL'INTERAZIONE CON LA TERRA E HA DIREZIONE SEMPRE PERPENDICOLARE ALLA TERRA

$m \downarrow mg$ $\quad g = 9{,}8\ m/s^2$ ACC. GRAVITAZIONALE.

PER UNA SUPERFICIE CON ~~STE~~ VARI SISTEMI DI FORZE, POSSO SOSTITUIRE UN SISTEMA EQUIVALENTE, CHE HA EQUIVALENTE CONSEGUENZA.

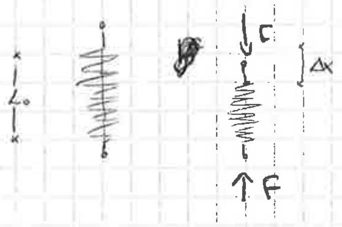


G = BARICENTRO O CENTRO DI MASSA

- FORZA ELASTICA

AZIONI CHE AFFERMANO CHE QUANDO UN CORPO VIENE DEFORMATO, VI È STATA NECESSARIA UNA FORZA CHE LO HA DEFORMATO, TALE FORZA È DETTA ELASTICA.

MOLLA LINEARE



$\boxed{F = kx}$

LEGGE DI HOOKE.

K = RIGIDEZZA DELLA MOLLA

$[k] = \frac{N}{m}$

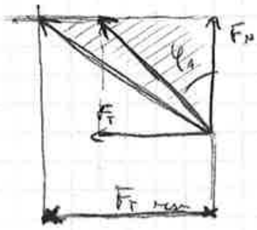
PER QUANTO RIGUARDA IL CASO DI ADERENZA POSSIAMO QUINDI DIRE CHE VI E' PROPORZIONALITA' TRA $F_{T_{max}}$ e F_N:

$$\boxed{F_{T_{max}} = \mu_a F_N}$$

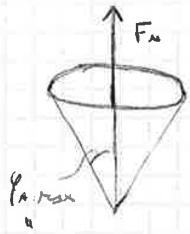
μ_a: COEFFICIENTE DI ADERENZA.

$$\boxed{F_T \leq \mu_a F_N}$$

CONDIZIONE DI ADERENZA



$$Tg\,\varphi_A = \frac{F_T}{F_N} \leq \mu_a$$



CONO DI ADERENZA

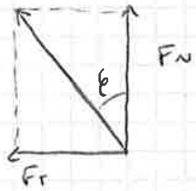
ANGOLO DI ADERENZA.

PER QUANTO RIGUARDA LO STRISCIAMENTO LA SITUAZIONE E' MOLTO SIMILE.

$$\boxed{F_T = \mu F_N}$$

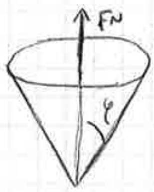
HO SOLO UN VALORE PRECISO DI F_T, $\forall F_N$

μ = COEFFICIENTE DI ATTRITO.



$$Tg\,\varphi = \frac{F_T}{F_N} = \mu$$

φ ANGOLO DI ATTRITO.



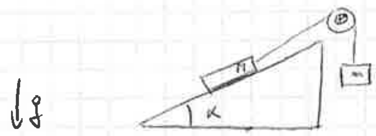
DI SOLITO $\mu_A < \mu$

APPLICAZIONI: (ESEMPIO 2/9)

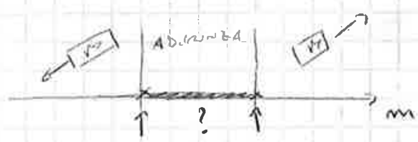
DATI: $M = 100\ kg$ $\alpha = 20°$

SITUAZIONE DI ADERENZA ($\mu_A = 0{,}3$)

$m = ?$ AFFINCHE' SISTEMA FERMO.

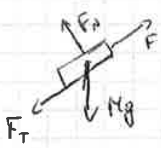


POSSIAMO RIASSUMERE LA SITUAZIONE IN QUESTO MODO:



1) LIMITE DI ADERENZA PER IL MOTO DI M IN SALITA.

CORPO LIBERO:

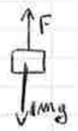


$$\begin{cases} F - Mg\,sen\alpha - F_T = 0 & \text{LUNGO } x \\ Mg\cos\alpha - F_N = 0 & \text{LUNGO } y \end{cases}$$

$F_T \leq F_N\,\mu_A$

F_N = COSTANTE

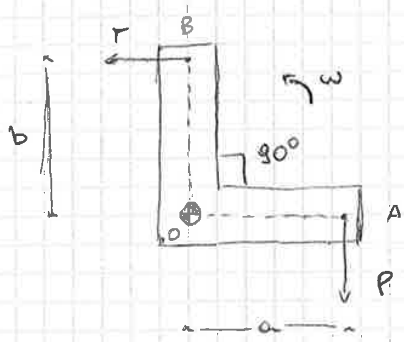
CI SARA' UN VALORE IN CUI $F_T = \mu_A F_N$, QUANDO $F_T = F$ (LIMITE).



$F = mg$ LUNGO y

RISOLVENDO IL SISTEMA $m = M(\sin\alpha + \mu_A\cos\alpha) = \boxed{62{,}4\ kg}$

APPLICAZIONE: (ESEMPIO 2/12)



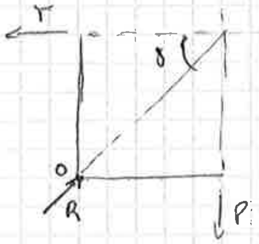
P = NOTA   d = DIAMETRO PERNO

T = ? AFFINCHÈ MOTO UNIFORME.

η = COEFF. ATTRITO

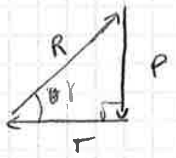
POSSIAMO RISOLVERE IL PROBLEMA ADOPERANDO IL METODO DEL CERCHIO DI ATTRITO.

INIZIALMENTE IMMAGINO UNA CERNIERA SENZA ATTRITO.



$$\vec{T} + \vec{P} + \vec{R} = 0$$

$$\boxed{T = \frac{P}{tg\,\gamma}}$$



con $tg\,\gamma = \frac{b}{a}$

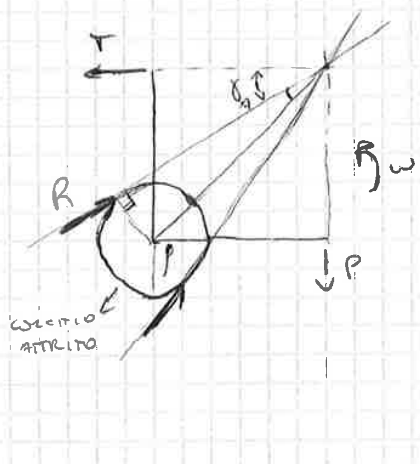
CONSIDERANDO L'ATTRITO:

$$\vec{R} + \vec{T} + \vec{P} = 0$$

IN PIÙ $\vec{R}$ TANGENTE AL CERCHIO DI ATTRITO

DI CUI $\rho = \frac{d}{2} \operatorname{sen} \varphi$ $\varphi = \operatorname{arctg} \eta$

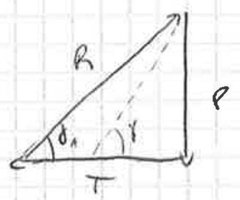
CORPO LIBERO:



ESSENDO $\vec{R}$ PASSANTE PER IL PUNTO E TANGENTE AL CERCHIO ABBIAMO 2 POSSIBILI SOLUZIONI.

QUALE SCELGO ?

DIPENDE DAL ω. SCELGO SEMPRE QUELLA CHE MI DÀ MOTO OPPOSTO AL MOTO DI ω: IN QUESTO CASO CI SERVE LA FORZA CHE CI DÀ MOTO ORARIO.

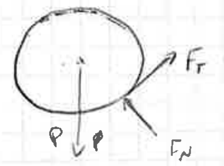


$$\boxed{T = \frac{P}{tg\,\gamma_1}}$$

ROTOLAMENTO CON STRISCIAMENTO

CORPO LIBERO :

STRISCIAMENTO : $F_T = \eta F_N$



$F_N = P \cos\alpha$

~~IL MOTO DEL CENTRO~~

$-F_T + P \operatorname{sen}\alpha = ?$

$P \operatorname{sen}\alpha - \eta P \cos\alpha \gtrless 0 ?$

IL MOTO DEL CENTRO DEL RULLO DIPENDE DA QUESTO EQUILIBRIO. (TRASLAZIONE)

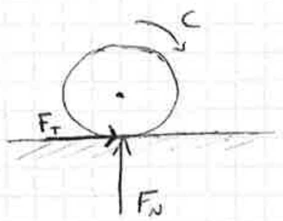
MOMENTO DELLA FORZA F_T NON EQUILIBRATO : $F_T\, r$

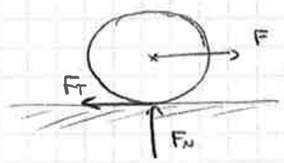
- ## ROTOLAMENTO

RUOTA MOTRICE

RUOTA CONDOTTA

DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO PARZIALI





GRAZIE ALLA FORZA DI ATTRITO TRA RUOTA E TERRENO SI HA MOTO DI ROTOLAMENTO

LA FORZA CHE DA' IL MOTO, LA COMPONENTE MOTRICE, E' PROPRIO LA FORZA DI ATTRITO F_T

LA RUOTA GIRA PERCHE' LA RUOTA MOTRICE INDUCE UN MOTO CHE "SPINGE" LA RUOTA. IN QUESTO CASO LA F_T VA OPPOSTO AL MOTO, ED E' PROPRIO GRAZIE A F_T CHE LA RUOTA 'ROTOLA'.

DINAMICA

- BARICENTRO (CENTRO DI MASSA)

DATO UN CORPO COSTITUITO DA N MASSE PUNTIFORMI ($m_1, m_2 \ldots$), INDIVIDUATE OGNUNA DA UN VETTORE POSIZIONE ($\vec{r}_1, \vec{r}_2 \ldots$), VIENE DEFINITA POSIZIONE DEL BARICENTRO $\vec{r}_G$, IL VETTORE OTTENUTO DA:

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 \ldots m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i m_i}{m_{TOT}}$$

POSIZIONE

IN CASO DI CORPI AVENTI DENSITA' ρ, LA POSIZIONE E' DATA DA:

$$\vec{r}_G = \frac{\int_V \rho \vec{r} \, dV}{m_{TOT}}$$

- MOMENTO DI INERZIA

IL MOMENTO DI INERZIA DI UN CORPO FORNISCE INFORMAZIONI SU COME E' DISTRIBUITA LA MASSA DI UN CORPO, RISPETTO AL SUO BARICENTRO.

I VARI MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AGLI ASSI SONO:

$$\begin{cases} I_{xx} = \int_V (y^2 + z^2)\, dm \\ I_{yy} = \int_V (x^2 + z^2)\, dm \\ I_{zz} = \int_V (x^2 + y^2)\, dm \end{cases}$$

MENTRE SONO DEFINITI MOMENTI CENTRIFUGHI:

$$\begin{cases} I_{xy} = \int_V xy \, dm = I_{yx} \\ I_{yz} = \int_V yz \, dm = I_{zy} \\ I_{xz} = \int_V xz \, dm = I_{zx} \end{cases}$$

DA RICORDARE:

1) I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} SEMPRE POSITIVI

2) I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} POSITIVI O NEGATIVI

3) $I_{xy} = 0$, $I_{xz} = 0$, $I_{zy} = 0$ $\Leftrightarrow$ ASSI DI SIMMETRIA

I 3 ASSI PER CUI I MOMENTI CENTRIFUGHI SONO NULLI SONO DETTI "ASSI PRINCIPALI DI INERZIA" E SE TALI ASSI PASSANO PER IL BARICENTRO DEL CORPO CONSIDERATO SONO DETTI "ASSI CENTRALI DI INERZIA".

VI SONO CASI IN CUI BISOGNA CALCOLARE I MOMENTI DI INERZIA RISPETTO AD ALTRI ASSI x' y' z' TRASLATI RISPETTO A x y z. TALI MOMENTI SONO DATI DA:

$$\begin{cases} I_{z'z'} = I_{zz} + (x_G'^2 + y_G'^2) m \\ I_{y'y'} = I_{yy} + (x_G'^2 + z_G'^2) m \\ I_{x'x'} = I_{xx} + (y_G'^2 + z_G'^2) m \end{cases}$$

IN GENERALE: $\underline{I_P = I_G + mR^2}$ DAL TEOREMA DI STEINER.

EQUILIBRIO DINAMICO DEI CORPI

- CORPO PUNTIFORME:

FINO AD ORA ABBIAMO STUDIATO SOLO MOTI UNIFORMI, NEI QUALI ABBIAMO VELOCITA' COSTANTE E ACCELERAZIONE NULLA, IN MODO DA TROVARCI IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO STATICO. NEI CASI IN CUI SI HA CHE $\vec{v} \neq cost$ E $\vec{a} \neq 0$ CI TROVIAMO DI FRONTE A SITUAZIONI DI EQUILIBRIO DINAMICO.

LA RELAZIONE CHE GUIDA TALE EQUILIBRIO FU INTRODOTTA DA NEWTON E DICE CHE LA SOMMA DELLE FORZE ESTERNE AGENTI SU UN CORPO E' UGUALE AL PRODOTTO DELLA MASSA DEL CORPO PER L'ACCELERAZIONE CHE SUBISCE.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

L'OPPOSTO DELLA FORZA $m\vec{a}$, OVVERO $-m\vec{a}$ E' DETTA FORZA D'INERZIA:

$$\vec{F}' = -m\vec{a} \qquad \text{QUINDI AVREMO} \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{F}_i' = 0}$$

LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO DINAMICO PER IL MOMENTO, RISPETTO AL GENERICO PUNTO A, DELLE FORZE AGENTI SUL PUNTO P E' DATA DA:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{AP} \wedge \vec{F}_i = \frac{d\vec{H}_A}{dt} + \vec{V}_A \wedge \vec{Q}}$$

- CORPI RIGIDI:

LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DINAMICO PER UN CORPO RIGIDO SEGUE IL PRINCIPIO DELLA RELAZIONE PER I PUNTI:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{Q}}{dt} \Rightarrow$$ POSSIAMO PERO' RICONDURRE IL MOTO DEL CORPO AL MOTO DEL BARICENTRO:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\vec{a}_G}$$

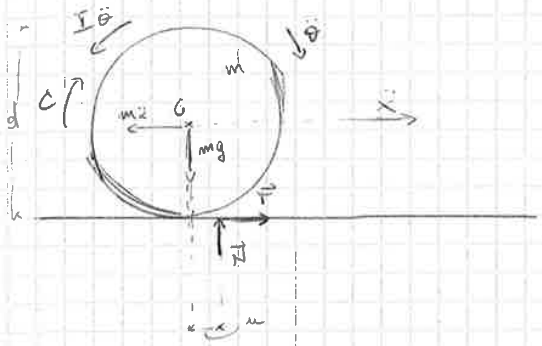
LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE E' UGUALE AL PRODOTTO DELLA MASSA TOTALE PER L'ACCELERAZIONE DEL C.M.

ANCHE IN QUESTO CASO ESISTE LA RISULTANTE DELLE FORZE DI INERZIA: $\vec{F}' = -m\vec{a}_G$

E QUINDI: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{F}_i' = 0}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 162

ESEMPIO E 3/2



$m = 0{,}5\ kg$ $\quad \eta = 0{,}22$

$d = 40\ mm$ $\quad \eta_A = 0{,}38$

$\mu = 0{,}12$

DETERMINARE $\ddot{\theta}$ e $\ddot{x}$ NEI CASI:

1) $C = 0.04\ Nm$

2) $C' = 0{,}1\ Nm$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

$$\begin{cases} N - mg = 0 \\ T - m\ddot{x} = 0 \\ N\mu + T\frac{d}{2} + I\ddot{\theta} - C = 0 \\ \ddot{x} = \frac{d}{2}\ddot{\theta} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{4}{3d}\left(\frac{C}{m} - g\mu\right) \\ \ddot{\theta} = 2\frac{\ddot{x}}{d} \end{cases}$$

DA CUI: $T = \frac{4}{3d}(C - mg\mu)$

$N = mg$

IPOTESI DI ADERENZA: $\left(\frac{T}{N} \leq \eta_A\right)$

$$\frac{T}{N} = \frac{4}{3d}\left(\frac{C}{mg} - \mu\right) \longrightarrow \text{SE } C = 0{,}04\,Nm \Rightarrow \underline{\frac{T}{N} = 0{,}27 \leq \eta_A}$$

$$\longrightarrow \text{SE } C = 0{,}1\,Nm \Rightarrow \underline{\frac{T}{N} = 0{,}68 \geq \eta_A}$$

STRISCIAMENTO

ROTOLAMENTO

1) CASO IN CUI SI HA ROTOLAMENTO: $(C = 0.04\ Nm)$:

$\boxed{\ddot{x} = 2{,}663\ m/s^2}$ $\quad$ $\boxed{\ddot{\theta} = 133{,}13\ rad/s^2}$

2) CASO IN CUI SI HA STRISCIAMENTO $(C = 0{,}1\ Nm)$

NON VALE PIÙ $\ddot{x} = \frac{d}{2}\ddot{\theta}$, QUINDI BISOGNA TROVARE UN'ALTRA RELAZIONE IN MODO DA RISOLVERE IL SISTEMA. ESSENDOCI STRISCIAMENTO ENTRA IN GIOCO ANCHE η (ATTRITO DINAMICO):

$$\begin{cases} N = mg \\ T = m\ddot{x} \\ N\mu + T\frac{d}{2} + I\ddot{\theta} - C = 0 \\ T = \eta N \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{T}{m} = \frac{\eta \cancel{m} g}{\cancel{m}} = \eta g = \underline{2{,}15\ m/s^2} \\ \ddot{\theta} = \frac{8}{d}\left(\frac{C}{md} - \frac{\mu g}{d} - \frac{\eta g}{2}\right) = \underline{278{,}38\ rad/s^2} \end{cases}$$

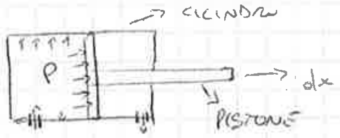
SI NOTA CHE QUANDO SI HA ROTOLAMENTO $\ddot{x}$ È MAGGIORE E $\ddot{\theta}$ È MINORE RISPETTO A QUANDO SI HA STRISCIAMENTO (C.V.D).

DI SOLITO IL LAVORO DELLE FORZE INTERNE E' NULLO, TRANNE IN 2 CASI:

1) MOTO RELATIVO TRA I CORPI

$\underbrace{dL = c\,d\theta}$ LAVORO INTERNO

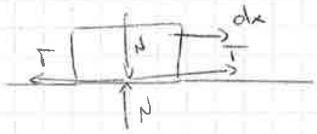
OPPURE:



AGISCE UNA FORZA DI PRESSIONE SUL PISTONE $\Rightarrow \vec{P} = P \cdot A$

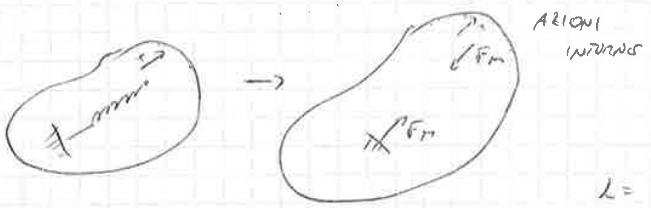
$\underbrace{dL = P \cdot A\,dx}$ LAVORO INTERNO

OPPURE



$\underbrace{dL = -T\,dx}$ LAVORO INTERNO

2) PRESENZA DI ELEMENTI ELASTICI



$$L = \int_0^x \vec{F}_m\,dx = \int_0^x -kx\,dx$$

$\underbrace{L = -k\frac{x^2}{2}}$ LAVORO INTERNO

POTENZA

LA POTENZA E' ESPRIMIBILE COME LA QUANTITA' DI LAVORO SVOLTO IN UNA UNITA' DI TEMPO:

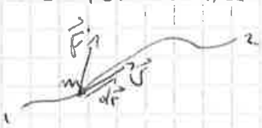
$$\boxed{W = \frac{dL}{dt}} = \frac{\vec{F}\,d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\vec{F}\,\vec{v}}$$

MA ANCHE:

$$W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{c}\,d\vec{\theta}}{dt} = \underbrace{\vec{c}\,\vec{\omega}}$$

- ENERGIA CINETICA

1) CORPO PUNTIFORME



PER DEFINIZIONE : $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$

$$\vec{F}' = -m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

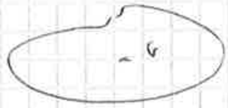
$$L'_{12} = \int_1^2 \vec{F}' \, d\vec{r} = \int_1^2 -m \frac{d\vec{v}}{dt} \, d\vec{r} \qquad \text{MA} \quad d\vec{r} = \vec{v} \, dt$$

$$L'_{12} = \int_1^2 -m \, v \, dv = -m \int_1^2 v \, dv = -\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \underline{-\Delta E_c}$$

$$L'_{12} = -\Delta E_c \implies \boxed{L_{12} = \Delta E_c}$$

2) CORPO RIGIDO

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \vec{\omega}^2}$$



→ CORPO RIGIDO.

EQUAZIONE DELL'ENERGIA :

$L_{12} + L'_{12} = 0$ ← DATO UN QUALUNQUE SISTEMA MECCANICO CHE SI EVOLVE DALLO STATO 1 A 2 $(1 \to 2)$.

L_{12}: LAVORO AZIONI INTERNE & ESTERNE

L'_{12}: LAVORO AZIONI DI INERZIA.

$$L_{12} = \Delta E_c + \Delta U_g + \Delta U_e$$

ΔU_g: FORZA PESO

ΔU_e: FORZA ELASTICA

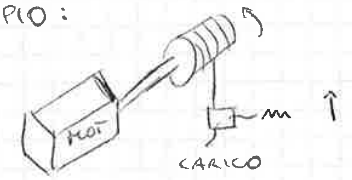
$$L_{12\,(est)} + L_{12\,(int)} = \Delta E_c + \Delta U_g + \Delta U_e$$

AZIONI MOTRICI $L > 0$

AZIONI DISSIPATIVE $L < 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 162

ESEMPIO:



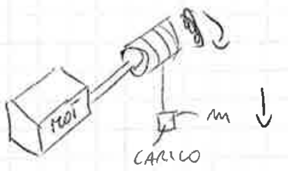
1) SALITA:

CARICO RESISTENTE

MOTORE = MOT

TRASMISSIONE = FUNE + TAMBURO

UTILIZZATORE = CARICO



2) DISCESA:

CARICO TRASCINANTE

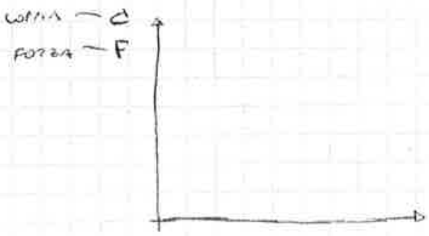
MOTORE = CARICO

TRASMISSIONE = FUNE + TAMBURO

UTILIZZATORE = MOT

- CARATTERISTICHE MECCANICHE DEI COMPONENTI:

LA CARATTERISTICA MECCANICA ESPRIME LA CONDIZIONE DI MOTO RISPETTO ALLA VELOCITÀ.



$C = C(\omega)$

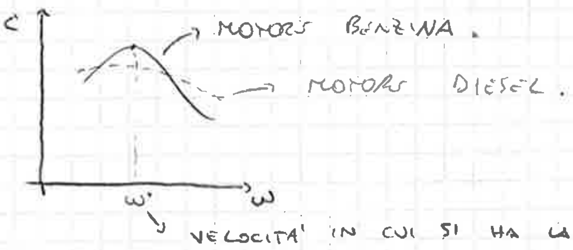
$F = F(v)$

ω : VELOCITÀ ANGOLARE

v " " LINEARE

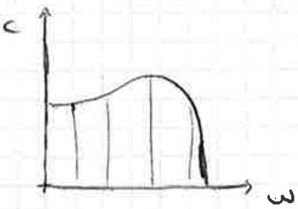
MOTORI

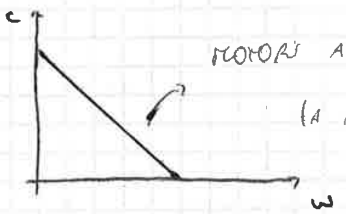
ESEMPIO: 1) MOTORE A COMBUSTIONE INTERNA



VELOCITÀ IN CUI SI HA LA COPPIA MASSIMA

2) MOTORE ASINCRONO O ELETTRICO

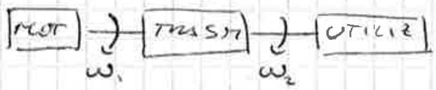




MOTORE A CORRENTE CONTINUA

(A MAGNETI PERMANENTI)

- SECONDO MODELLO DI SISTEMA (MOTORE - TRASMISSIONE - UTILIZZATORE)



VI È TRASMISSIONE QUANDO $\omega_1 \neq \omega_2$

2 TIPI DI TRASMISSIONE: 1) RIDUTTORE $\Leftrightarrow \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} < 1$

2) MOLTIPLICATORE $\Leftrightarrow \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} > 1$

τ: RAPPORTO DI TRASMISSIONE o RAPPORTO DI VELOCITÀ

BILANCIO ENERGETICO: (SUPPONIAMO ASSENZA DI TRASMISSIONE)

$C_1\omega_1 dt - C_2\omega_2 dt = \Delta E_c$ NO AZIONI DISSIPATIVE

ASSUMO CHE: FUNZIONAMENTO A REGIME. $\Rightarrow \Delta E_c = 0$

$C_1\omega_1 = C_2\omega_2$

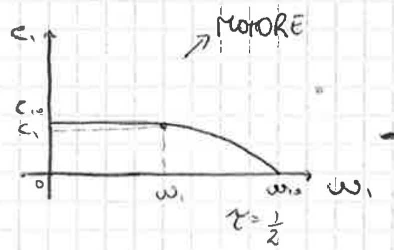
POTENZA MOTRICE → INGRESSO ALLA TRASMISSIONE

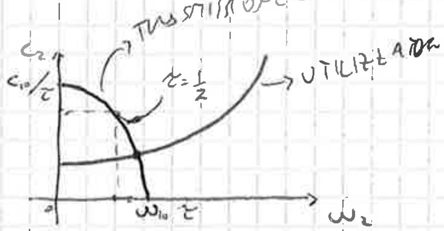
POTENZA ASSORBITA → USCITA DALLA TRASMISSIONE

ORA POSSIAMO DIRE CHE:

$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \eta = 1$

CASO TRANSITORIO:





NON SI POSSONO SOVRAPPORRE ($\omega_1 \neq \omega_2$)

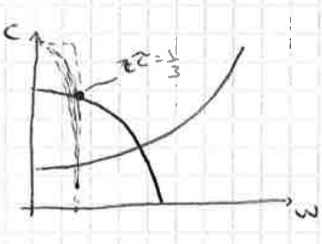
SI AUMENTA DEL DOPPIO LA COPPIA E SI DIMINUISCE DI METÀ LA VELOCITÀ. ($\tau = \frac{1}{2}$)

$C_1(\omega_1)$

$\frac{C_1}{\tau}\left(\frac{\omega_2}{\tau}\right) \Rightarrow C_1^* = C_1^*(\omega_2^0)$

- IL RAPPORTO DI TRASMISSIONE PUÒ VARIARE:

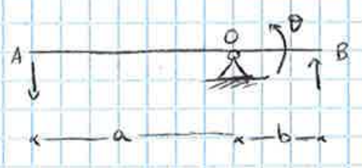
AD ESEMPIO SE $\tau = \frac{1}{3}$



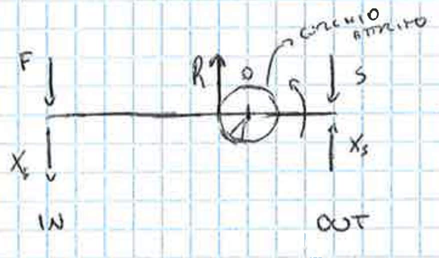
IN QUESTO MODO AUMENTA DEL TRIPLO LA COPPIA MA DIMINUISCE DEL TRIPLO LA VELOCITÀ.

ESEMPIO:

TRASMISSIONE LEVA (TRASMISSIONE SEMPLICE).



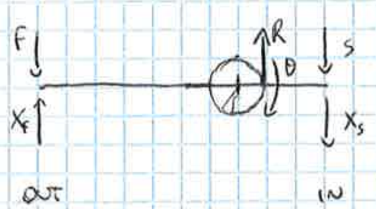
1) UTILIZZIAMO QUESTO SISTEMA IPOTIZZANDOLO COME UN RIDUTTORE.



$$\tau_R = \frac{b}{a}$$

$$\bullet\ \eta_R = \frac{S X_s}{F X_F} = \frac{1-\frac{\rho}{a}}{1+\frac{\rho}{b}} \Longleftarrow \begin{cases} X_F = \theta a \ ; \ X_s = \theta b \\ F(a-\rho) = S(b+\rho) \end{cases}$$

2) UTILIZZIAMO QUESTO SISTEMA COME MOLTIPLICATORE



$$\tau_M = \frac{a}{b}$$

$$\bullet\ \eta_M = \frac{F X_F}{S X_s} = \frac{1-\rho/b}{1+\rho/a} \Longleftarrow \begin{cases} X_F = \theta a \ ; \ X_s = \theta b \\ F(a+\rho) = S(b-\rho) \end{cases}$$

ESEMPIO NUMERICO:

$a = 1m$; $\rho = 0{,}01m$;

	CASO 1: $b_1 = 0{,}1\ m$	CASO 2: $b_2 = 0{,}2\ m$
RIDUTTORE	$\tau_R = \frac{1}{10}$ $\eta_R = 0{,}90$	$\tau_R = 1/50$ $\eta_R = 0{,}66$
MOLTIPL.	$\tau_M = 10/1$ $\eta_M = 0{,}891$	$\tau_M = 50/1$ $\eta_M = 0{,}495$

OSSERVAZIONI:

1) QUALUNQUE TRASMISSIONE MECCANICA (STA USATA) COME MOLTIPLICATORE HA UN η PIÙ BASSO.

2) TANTO + GRANDE È L'EFFETTO DI TRASMISSIONE, TANTO MINORE È IL RENDIMENTO.

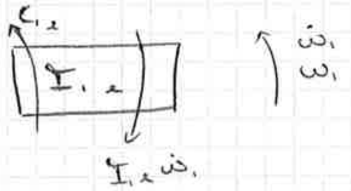
3) RIDUZIONE AL SISTEMA EQUIVALENTE ALL'ASSE MOTORE "1"

①) C_i
②) C_w
③

ADOPERANDO TALI PASSAGGI DI SOSTITUZIONE OTTENIAMO $\dot{\omega}_1$ NELLA PRIMA EQUAZIONE

$$\rightarrow \quad \dot{\omega}_1 = \frac{C_1 - \frac{\tau}{\eta} C_2 - \frac{\tau}{\eta}\frac{D}{2} mg}{I_1 + \frac{\tau^2}{\eta} I_2 + \frac{\tau^2}{\eta}\frac{D^2}{4} m}$$

CONSIDERIAMO TRASMISSIONE E CARICO COME UNICO UTILIZZATORE EQUIVALENTE.



4) RIDUZIONE AL SISTEMA EQUIVALENTE ALL'ASSE TAMBURO "2"

①) C_i
②) C_w
③

ADOTTANDO TALI PASSAGGI OTTENGO $\dot{\omega}_2$ NELLA ~~PRIMA~~ SECONDA EQUAZIONE.

$$\rightarrow \quad \dot{\omega}_2 = \frac{\overbrace{\frac{\eta}{\tau} C_1 - C_2 - \frac{D}{2} mg}^{\text{COPPIA EQUIVALENTE}}}{\underbrace{\frac{\eta}{\tau^2} I_1 + I_2 + \frac{D^2}{4} m}_{\text{INERZIA EQUIVALENTE}}}$$

NOTA: LE ESPRESSIONI CHE APPAIONO IN NEGATIVO SONO TUTTE AZIONI RESISTENTI

5) SISTEMA EQUIVALENTE RIDOTTO AL CARICO

①) C_i
②) C_w
③

OTTENGO $\ddot{z}$ NELLA 3ª EQUAZIONE

$$\rightarrow \quad \ddot{z} = \frac{\overbrace{\frac{2}{D}\frac{\eta}{\tau} C_1}^{\text{AZIONI MOTRICI}} \overbrace{- \frac{2}{D} C_2 - mg}^{\text{AZIONI RESISTENTI}}}{\frac{4}{D^2}\frac{\eta}{\tau^2} I_1 + \frac{4}{D^2} I_2 + m}$$

TRANSITORIO:

$$\omega_1(t) - \omega_{t_0} = \int_0^t \dot{\omega}_1 \, dt$$

REGIME:

$\dot{\omega}_1 = 0 \Rightarrow$ AZIONE MOTRICE = AZIONE RESISTENTE.

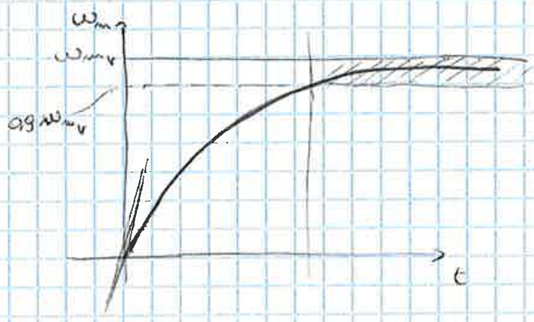
TRANSITORIO:
$$\dot{\omega}_m = \frac{C_{m_0} - K_{1,2}\,\omega_m}{I_{1,2}}$$

DA CUI:
$$\frac{d\omega_m}{dt} + \frac{K_{1,2}}{I_{1,2}}\,\omega_m = \frac{C_{m_0}}{I_{1,2}}$$

RISOLVENDO:
$$\int_0^{\omega_m(t)} \frac{d\omega_m}{C_{m_0} - K_{1,2}\,\omega_m} = \int_0^t \frac{1}{I_{1,2}}\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{C_{m_0} - K_{1,2}\,\omega_m}{C_{m_0}} = -\frac{K_{1,2}}{I_{1,2}}\,t$$

$$\omega_m(t) = \underbrace{\frac{C_{m_0}}{K_{1,2}}}_{\omega_{m_r}}\left(1 - e^{-\frac{K_{1,2}}{I_{1,2}}t}\right)$$

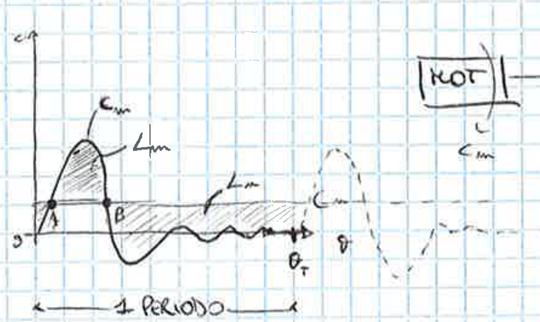


$$\omega_m = 0{,}9\,\omega_{m_r} \Rightarrow t = -\frac{I_{1,2}}{K_{1,2}}\ln 0{,}1$$

SISTEMA A REGIME PERIODICO /* IRREGOLARITÀ PERIODICA */

IN CASI COME QUESTO LA VELOCITÀ CAMBIA NEL TEMPO IN MODO CICLICO.

ESEMPIO:

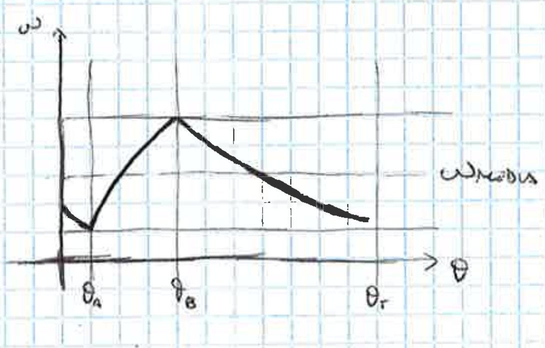


T = PERIODO

AVRÒ:

$\theta_A < \theta < \theta_B \Rightarrow C_m > C_u \Rightarrow \omega \uparrow$

$0 < \theta < \theta_A$ e $\theta_B < \theta < \theta_T \Rightarrow C_m < C_u \Rightarrow \omega \downarrow$



CONDIZIONE PER AVERE FUNZIONAMENTO A REGIME:

INTERVALLO $0 - \theta_T$

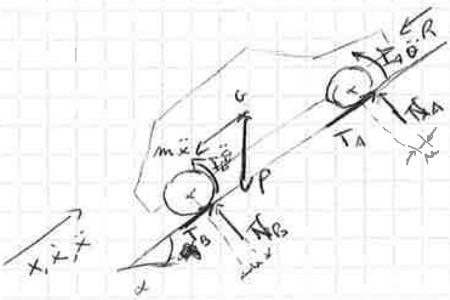
$$L_m = \int_0^{\theta_T} C_m\,d\theta$$

$$L_u = -\int_0^{\theta_T} C_u\,d\theta$$

$$L_m + L_u = \Delta E_c$$

SISTEMA PERIODICO $\Leftrightarrow \Delta E_c = 0 \Rightarrow \boxed{L_m = -L_u}$

DINAMICA DEI VEICOLI CON RUOTE



R: FORZA AERODINAMICA

P = mg PESO

μ: PARAMETRO ATTRITO VOLVENTE

C_A C_B AZIONI MOTRICI

D.C.L.

HO 7 INCOGNITE: T_A, T_B, N_A, N_B, $\ddot{x}$, $\ddot{\theta}_A$, $\ddot{\theta}_B$

PER RISOLVERLO: 3 EQUAZIONI EQUILIBRIO VEICOLO

1 EQUAZIONE ~~RUOTA~~ EQUILIBRIO COPPIA RUOTA A

1 EQUAZIONE EQUILIBRIO COPPIA RUOTA B

2 EQUAZIONI - CINEMATICHE (ADERENZA)

- FORZE (STRISCIAMENTO)

FARE LE IPOTESI.

FLESSIBILI: è un organo caratterizzato da un alto valore di deformabilità. (cedevolezza)

3 tipi di flessibili:

1) fune
2) cinghia
3) catena

1), 2) } deformabilità o cedevolezza distribuita su tutto il corpo.

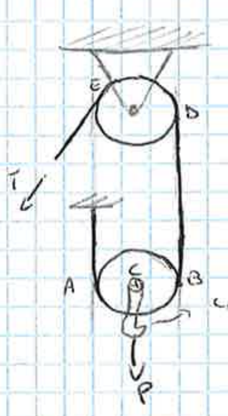
3) } serie di corpi rigidi incernierati alle estremità.

Vi sono 2 applicazioni per questi organi:

1) sistemi di sollevamento (argani, paranchi)
2) sistemi di trasmissione di potenza tra assi paralleli.

- **ARGANO**:

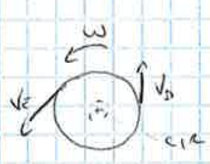
costituito da 2 pulegge vincolate come in figura:

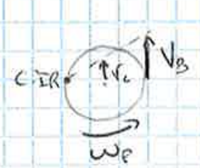


Puleggia in alto è collegata da una cerniera fissa. Quella in basso è mobile.

"come vedremo la forza T per vincere la forza P è molto più piccola!"

• Aspetto cinematico:





$V_D = V_E = \omega \frac{d}{2}$ d = diametro

$V_B = V_D$

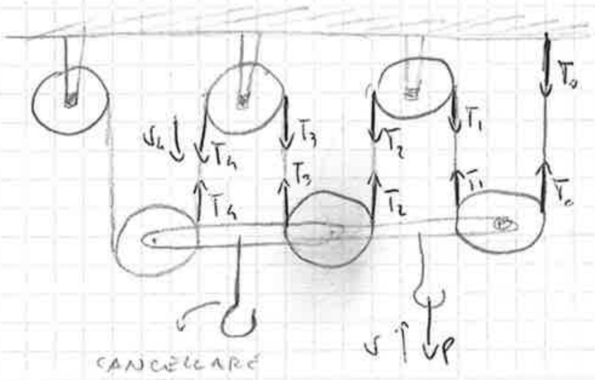
$V_C = \frac{V_B}{2}$

il carico si muoverà quindi con V_C

$\omega_P = \frac{V_B}{d}$

PARANCO:

COMPOSTO DA UNA SERIE DI ARGANI:



$$\begin{cases} T_0 \\ T_1 = (1+k)\,T_0 \\ T_2 = (1+k)\,T_1 \\ T_3 = (1+k)\,T_2 \\ T_4 = (1+k)\,T_3 \end{cases} \Longrightarrow \underline{T_4 = (1+k)^4\,T_0}$$

4 (ESPONENTE) = N° DI PULEGGE.

EQUILIBRIO SOTTOSISTEMA MOBILE

$$P = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 = \left[\sum_{n=0}^{3}(1+k)^n\right] T_0$$

$$\boxed{T_4 = P\,\frac{(1+k)^4}{\sum_{n=0}^{3}(1+k)^n}}$$

CASO IDEALE $\Longleftrightarrow$ $k=0$ $\Longrightarrow$ $T_4 = \frac{P}{4}$

$T_4 V_4 = P V \Rightarrow \underline{V_4 = 4V}$

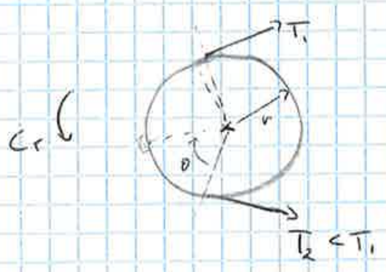
CONDIZIONE VERA SIA NEL CASO IDEALE CHE NEL CASO REALE.

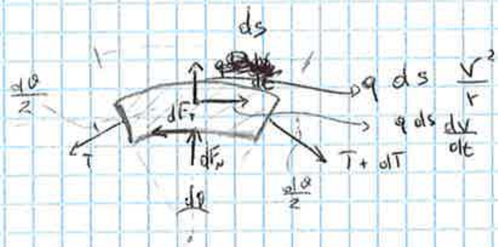
$$\tau = \frac{V}{V_4} = \frac{1}{4} = \frac{T_4}{P}$$

SEMPRE $\quad \Updownarrow \; \eta = 1$

STUDIO DEL MOTO:

PULEGGIA MOTRICE.





$ds = r\,d\theta$ $\quad \omega, \dot{\omega}$

SE INDICHIAMO CON q = MASSA x UNITA' DI LUNGHEZZA.

$v = \omega r \qquad \dot{v} = \dot{\omega} r$

EQUILIBRIO:

$$\leftarrow \quad T\cos\frac{d\theta}{2} + dF_T - q\,ds\,\frac{dv}{dt} - (T + dT)\cos\frac{d\theta}{2} = 0$$

$$\uparrow \quad -T\,\text{sen}\,\frac{d\theta}{2} + dF_N + q\,ds\,\frac{v^2}{r} - (T + dT)\,\text{sen}\,\frac{d\theta}{2} = 0$$

$$dF_T = f\,dF_N$$

$$ds = r\,d\theta$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA FACENDO DELLE IPOTESI:

VISTO CHE $d\theta$ E' PICCOLO $\Rightarrow$ $\cos\frac{d\theta}{2} \approx 1$

$\text{sen}\,\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$

TRASCURIAMO LA FORZA DI INERZIA TANGENZIALE $\Rightarrow$ $q\,ds\,\frac{dV}{dt} \approx 0$

CONSIDERANDO QUESTE ASSUNZIONI SI SEMPLIFICA IL SISTEMA:

$$\begin{cases} dF_N = (T - qv^2)\,d\theta \\ dF_T = f\,dF_N = f\,(T - qv^2)\,d\theta \\ \underline{dT = f\,d\theta\,(T - qv^2)} \end{cases}$$

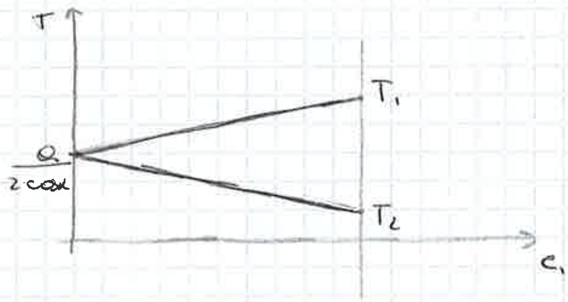
$\theta = 0 \Rightarrow T = T_2$ $\quad$ T MINORE

$\theta \Rightarrow T =$ FUNZIONE θ

INTEGRANDO:

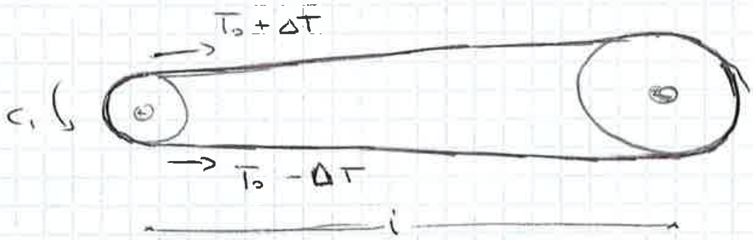
$$\boxed{\frac{T - qv^2}{T_2 - qv^2} = e^{f\theta}}$$

RELAZIONE FINALE



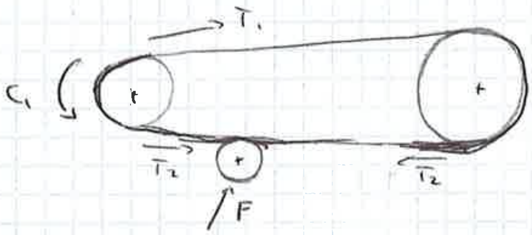
CONDIZIONE PER CUI LA CINGHIA SIA SEMPRE TESA E' CHE $T_2 > 0$

SUPPONGO DI MUOVERE LA ~~ruota~~ PULEGGIA MOBILE FACENDO STENDERE LA CINGHIA PER POI BLOCCARE IL SISTEMA.



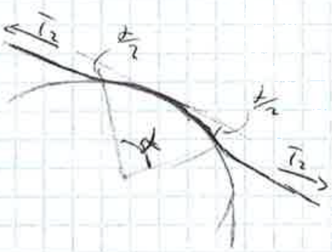
$$\frac{T_1 + T_2}{2} = T_0$$ (TRASMETTENDO POI IL MOTO).

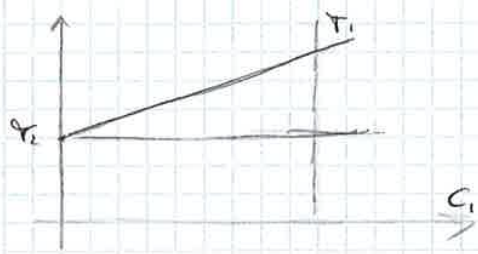
- FORZAMENTO CON GALOPPINO



$F = 2 T_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$

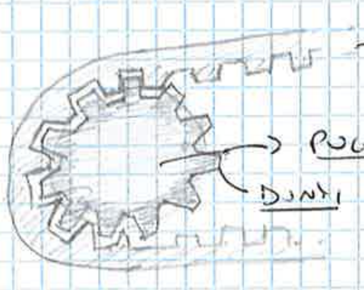
$c_1 = (T_1 - T_2)\, r_1$

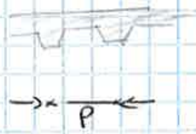




TRASMISSIONE CON CINGHIE DENTATE:

POSSIAMO IMMAGINARE DI UTILIZZARE, AL POSTO DI UNA PULEGGIA LISCIA, UNA PULEGGIA DENTATA:





P = DISTANZA TRA 2 DENTI ADIACENTI (PASSO)

AVANZANDO DI UN PASSO:

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{z_1} \qquad \varphi_2 = \frac{2\pi}{z_2}$$

" z_1 e z_2 SONO IL NUMERO DI DENTI IN PULEGGIA 1 e 2 !

$$\tau = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$ RAPPORTO DI TRASMISSIONE

" VALE SOLO SE $\eta = 1$ "

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{\tau = \frac{z_2}{z_1}}$ MOLTO SIGNIFICATIVA

RAPPORTO DEL N° DI DENTI

" OSS.

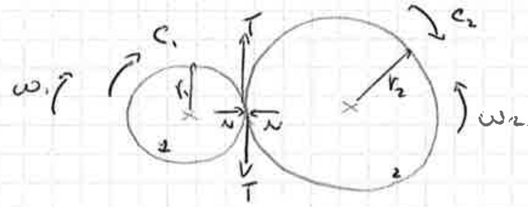
QUESTO DISCORSO VALE NON SOLO PER LE CINGHIE DENTATE MA ANCHE PER LE CATENE (TIPO BICI) ".

ANALISI DELLE RUOTE DENTATE:

• COME FUNZIONANO?

CONSIDERIAMO DAPPRIMA LA "TRASMISSIONE CON RUOTE AD ATTRITO"
(RUOTE DI FRIZIONE)

CONSIDERIAMO IL CASO DI DOVER TRASMETTERE IL MOTO FRA 2 RUOTE AD ASSI //:



IN PRESENZA DI ATTRITO SI GENERA T, LA CUI GENERA UN'AZIONE T PER IL PRINCIPIO A/R

$$T \leq f N \Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1 = T r_1 \\ C_2 = T r_2 \end{array}\right\} \text{VALE SOLO SE } \underbrace{T \leq f N}_{\text{ADERENZA}}$$

$\Updownarrow$

POSSO DIRE CHE: $\underline{\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2} \Rightarrow \underline{\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}}$

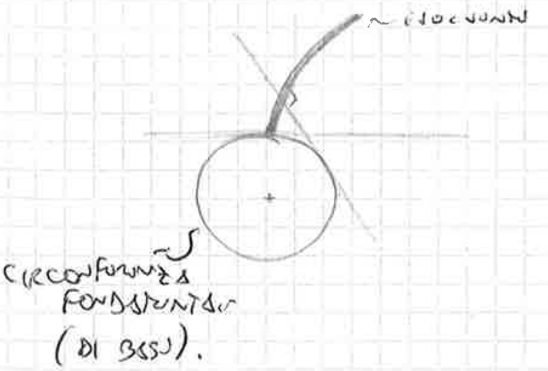
NOTA:

IL PRINCIPIO DI FUNZIONAMENTO DELLE RUOTE DENTATE SI BASA SUL FATTO CHE I DENTI SI COMPORTANO IN MODO TALE DA "RIMANDARE" DELLE RUOTE SEMPLICI, RUOTE DI FRIZIONE.

DENTI:

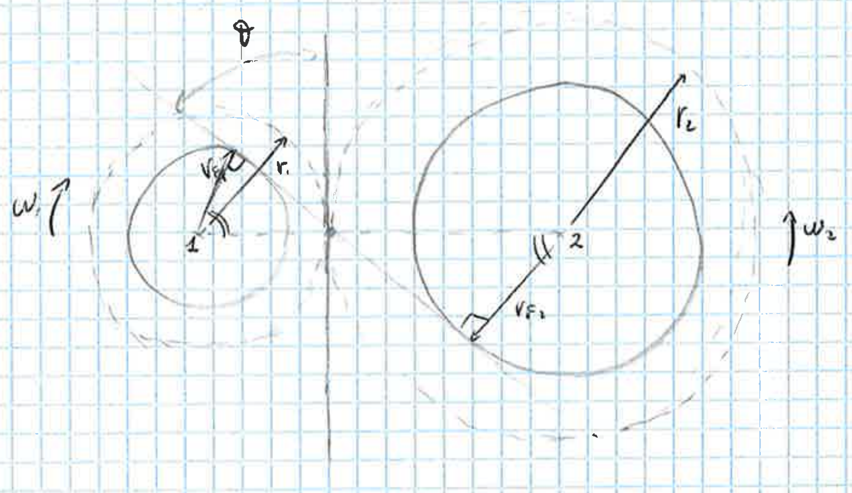
• COME SONO STRUTTURATI?

PROFILO DEI DENTI: <u>EVOLVENTE DI CERCHIO</u>



LA CURVA E' $\perp$ ALLA RETTA.

↪ SERVE PER LA FORMULAZIONE OTTIMALE DEI FIANCHI DEI DENTI

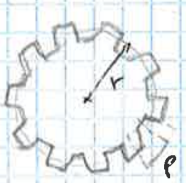


$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_{F_1}}{\cos\theta}\,\frac{\cos\theta}{r_{F_2}} = \frac{r_{F_1}}{r_{F_2}} = \tau$$

RAPPORTO COSTANTE, QUALUNQUE SIA IL PUNTO DI CONTATTO.

MOTIVO PER CUI IL PROFILO AD EVOLVENTE È UTILIZZATO PER LA REALIZZAZIONE DEI DENTI $\Longrightarrow$ NON SI SBAGLIA MAI

"τ DIPENDE STRETTAMENTE DAL NUMERO DI DENTI",
COME LO VERIFICO?



p: PASSO — $\frac{1}{2}$ PIENO, $\frac{1}{2}$ VUOTO

r: RAGGIO PRIMITIVO (RUOTA)

SUCCEDE CHE SULLA CIRCONFERENZA PRIMITIVA AVRÒ UN NUMERO INTERO (z) DI DENTI

$$\boxed{\underbrace{2\pi r}_{\text{circ.}} = \underbrace{z}_{\text{n° denti}}\ \underbrace{p}_{\text{passo}}} \Longrightarrow z \propto r$$

ESSENDO $z \propto r$ $\Longrightarrow$ IL RAPPORTO DEI RAGGI È UGUALE AL RAPPORTO DEI DENTI $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = \tau}$

$$z = \frac{2\pi r}{p}$$

MA $p = \pi m$

$$z = \frac{2r}{m}$$

RISCRIVENDO:

$$C_1 = F\, r_{F_1} = Q\, r_{F_1}$$
$$C_2 = F\, r_{F_1} = Q\, r_{F_2}$$

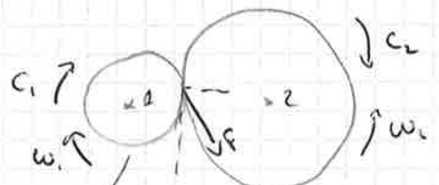
$\Longrightarrow \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{r_1}{r_2} = \tau$

LE COPPIE SI CONSERVANO

$$\boxed{C_1 \omega_1 = C_2 \omega_2} \iff \eta = 1$$ RENDIMENTO UNITARIO.

LA POTENZA SI CONSERVA.

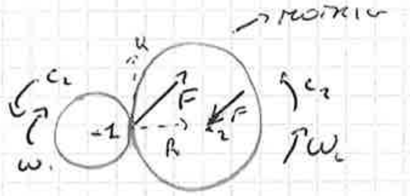
AZIONI DI 1 SU 2



RUOTA 1 MOTRICE

RUOTA 2 TRASCINATA

(NOTA LA DIFFERENZA NEI VERSI)

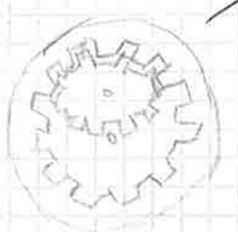


RUOTA 2 MOTRICE

RUOTA 1 TRASCINATA

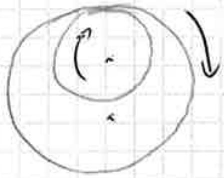
OSSERVAZIONI:

POSSIAMO AVERE IL CASO IN CUI I DENTI SONO INTERNI AL [illegible]:



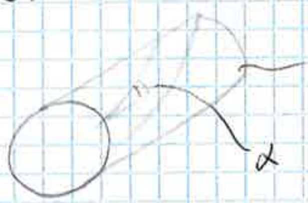
DENTI INTERNI

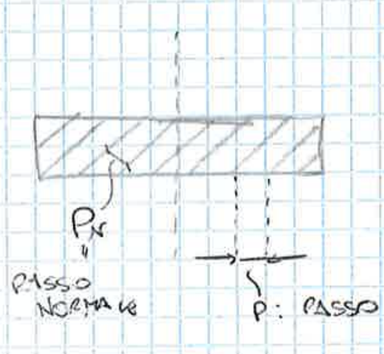
PARTICOLARITA' A LIVELLO CINEMATICO:



IL MOTO ROTATORIO E' CONCORDE

RAPPRESENTANDO LA RUOTA DENTATA ATTRAVERSO IL SUO CILINDRO PRIMITIVO:





$$\boxed{P_N = P\cos\alpha}$$

DEFINIAMO UN MODULO NORMALE : $\boxed{m_N = m \cdot \cos\alpha}$

MODULO UNIFICATO

(SI USA NELLE RUOTE ELICOIDALI)

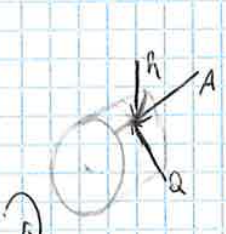
• FORZE

NELLA DEFINIZIONE DELLE FORZE SI FA RIFERIMENTO ALL'ANGOLO DI PRESSIONE ϑ . (FRONTALE).

IN CASO DI DENTI ELICOIDALI AVREMO UN ANGOLO DI PRESSIONE NORMALE (ϑ_N) → ANGOLO UNIFICATO (SI USA NELLE RUOTE ELICOIDALI)

RELAZIONE : $\boxed{Tg\,\vartheta_N = Tg\,\vartheta \cdot \cos\alpha}$

NELLE RUOTE A DENTI DIRITTI: | NELLE RUOTE A DENTI ELICOIDALI:



A : DIREZIONE ASSIALE

IN TERMINI DI C:

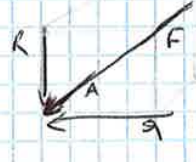
$Q = \frac{C}{r}$

$A = \frac{C}{r}\,Tg\,\alpha$

$R = \frac{C}{r}\,\frac{Tg\,\vartheta_N}{\cos\alpha}$

$$\begin{cases} C = Q \cdot r \\ R = F \sin\vartheta_N \\ A = (F\cos\vartheta_N)(\sin\alpha) \\ Q = (F\cos\vartheta_N)(\cos\alpha) \end{cases}$$

" $F = R + A + Q$ "



F: RISULTANTE DELLE FORZE AGENTI

ROTISMI

SISTEMI DI PIÙ INGRANAGGI MESSI INSIEME. (UNICA TRASMISSIONE)

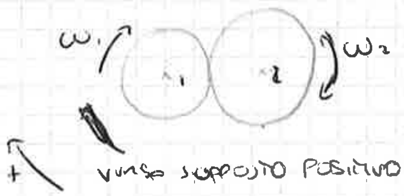
ABBIAMO VARI TIPI DI ROTISMI:

1) ROTISMI ORDINARI (ASSE FISSO PER TUTTE LE RUOTE)

2) ROTISMI EPICICLOIDALI (ASSI MOBILI)

• RAPPORTO DI TRASMISSIONE (SEGNO):

SAPPIAMO CHE PER DUE RUOTE, SE UNA HA COPPIA DI VERSO ORARIO, L'ALTRA AVRÀ VERSO ANTIORARIO.



NEL CASO DI RUOTE ESTERNE AVREMO ~~2 ...~~

RAPPORTO NEGATIVO: $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = -\dfrac{z_1}{z_2}$ "VERSO VELOCITÀ OPPOSTO"

RAPPORTO POSITIVO: $\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = +\dfrac{z_1}{z_2}$ "VERSO VELOCITÀ CONCORDE."

RICAPITOLANDO:

SI UTILIZZA UNA CONVENZIONE DI SEGNO (+)

POI SI ANALIZZA IL VERSO DELLE 2 VELOCITÀ.

2 CASI:

CON LA CONVENZIONE

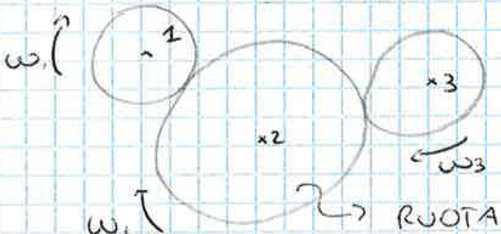
1) VERSI CONCORDI $\Longrightarrow$ $\tau > 0$

2) VERSI DISCORDI $\Longrightarrow$ $\tau < 0$

CON LA CONVENZIONE

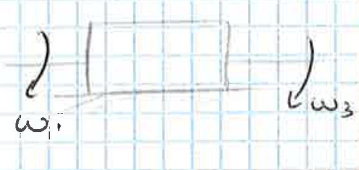
CASO PARTICOLARE:

SISTEMA DI 3 RUOTE DENTATE



RUOTA OZIOSA: NON ENTRA IN GIOCO A LIVELLO QUANTITATIVO, SOLO INFLUISCE SUL SEGNO

POSSO RAPPRESENTARE IL SISTEMA CON UNA SCATOLA:



AVRÒ:

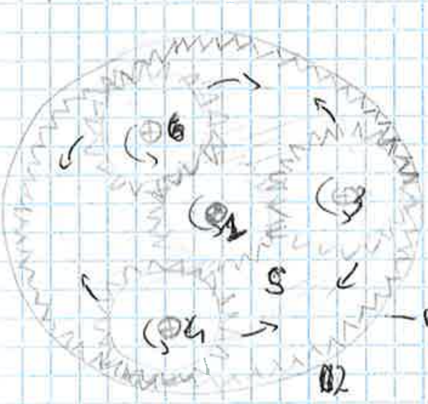
$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \left(-\frac{z_1}{z_2}\right)\left(-\frac{z_2}{z_3}\right) = +\frac{z_1}{z_3}$$

RAPPORTO POSITIVO.

- ROTISMI EPICICLOIDALI:

SISTEMI DI RUOTE AD ASSE MOBILE.

VISTO DA FRONTE:

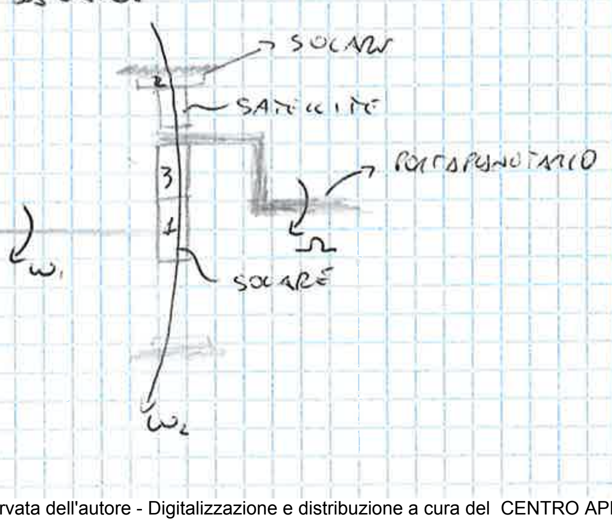


3, 4, 6 } ASSI MOBILI (SATELLITI)

1, 2 } ASSI FISSO (SOLARI)

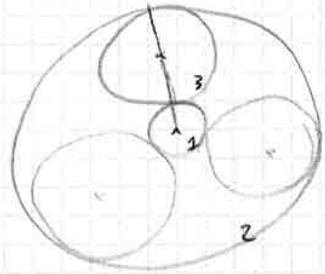
S) PORTAPIANETARIO

VISTO DA LATO:



IN BASE ALLA CONFIGURAZIONE AVREMO UN LEGAME TRA ω_1, ω_2, Ω

ABBIAMO RELAZIONI FRA I RAGGI E DI CONSEGUENZA FRA I DENTI. (IL NUMERO DEI DENTI NON E' MAI ARBITRARIO).

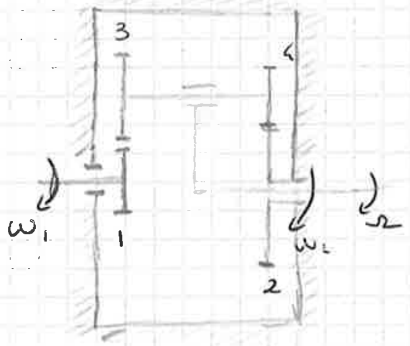


$$r_1 + 2r_3 = r_2$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{z_1 + 2z_3 = z_2}$$

PERCHE' SI UTILIZZANO PIU' SATELLITI?

L'UTILIZZO DI PIU' SATELLITI E' DOVUTO AL FATTO CHE MAGGIORE E' IL NUMERO DI SATELLITI, PIU' VANTAGGIOSO E' IL MOTO IN QUANTO IL CARICO VIENE RIPARTITO, IN UGUALE RAPPORTO, SU TUTTI I SATELLITI.

- RIDUTTORE ~~HO~~ EPICICLOIDALE:



IMMAGINO DI TENERE FERMO Ω. S.R. SOLIDALE AL PORTASATELLITE:

$$\tau_w = \frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} = \left(-\frac{z_1}{z_3}\right)\left(-\frac{z_4}{z_2}\right) = \frac{z_1 z_4}{z_3 z_2}$$

~~GRAFICA~~ ORA IMMAGINO DI UTILIZZARE L'OGGETTO IMPONENDO $\omega_2 = 0$:

$$\omega_2 = 0 \Rightarrow \tau_w = \frac{-\Omega}{\omega_1 - \Omega} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\Omega} = \boxed{\frac{\tau_w - 1}{\tau_w} = \tau}$$

NOTA

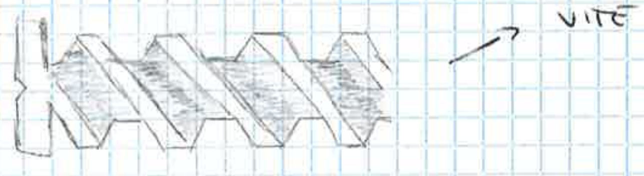
SE $\tau_w \simeq 1 \Rightarrow \Omega$ MOTORE

ω_1 UTILIZZATORE

* PER FAR SI CHE $\tau_w \simeq 1$ IMPONIAMO $z_1 + z_3 = z_4 + z_2$

CONSEGUENZA: τ ALTO.

TRASMISSIONE A VITE - MADREVITE



LA VITE È UN COMPONENTE MECCANICO STRUTTURATO IN 2 PARTI:

1) ASSE A FORMA CILINDRICA CHE CORRISPONDE ALL'ANIMA DEL COMPONENTE
2) AVVOLGIMENTO ELICOIDALE, UTILE ALLO SCOPO DELLA VITE.

TALE AVVOLGIMENTO È DETTO FILETTO ED È UN COMPONENTE ESSENZIALE NELLA DISTINZIONE DI 2 TIPI DI VITE:

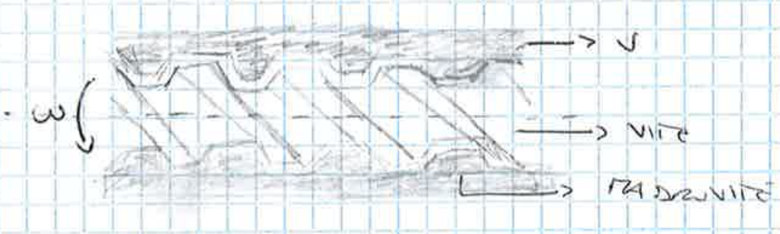
1) VITE A FILETTO RETTANGOLARE
2) VITE A FILETTO TRAPEZIO

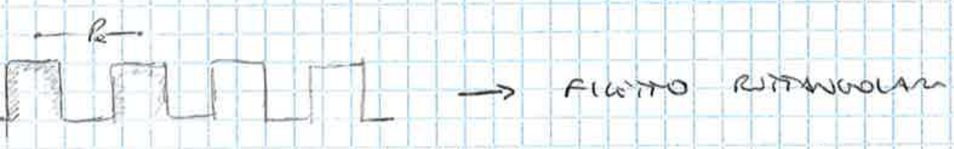
NOTA: A SECONDA DEL VERSO DI ROTAZIONE DEL MOTO IL FILETTO PUÒ RISULTARE "DESTRORSO" O "SINISTRORSO"

COME SI TRASMETTE IL MOTO?

• VITE E MADREVITE A FILETTO RETTANGOLARE

SI USA L'ACCOPPIAMENTO VITE - MADREVITE PER LA TRASMISSIONE DEL MOTO DA ROTATORIO (VITE) A RETTILINEO (MADREVITE):





NOTA: I RUOLI ASSEGNATI AI 2 ELEMENTI POSSONO ESSERE INVERTITI: IL MOTO INFATTI DIPENDE DAL VINCOLO CHE SI IMPONE. AD ESEMPIO RENDENDO FISSA LA MADREVITE SI OSSERVA CHE LA ROTAZIONE DELLA VITE PROVOCA ANCHE LA SUA TRASLAZIONE.

CONSIDERANDO NON PIU' LO SVILUPPO VITE-MADREVITE SU UN PIANO MA IL MECCANISMO EFFETTIVO, SI HA:

$$\boxed{M_v = T\,\frac{d}{2}}$$

M_v: MOMENTO DA APPLICARE PER SOLLEVARE IL CARICO.

MA T E' A NOI NOTO, QUINDI SE $T = P\,Tg(\alpha+\varphi)$

$$\boxed{M_v = \frac{Pd}{2}\,Tg(\alpha+\varphi)}$$

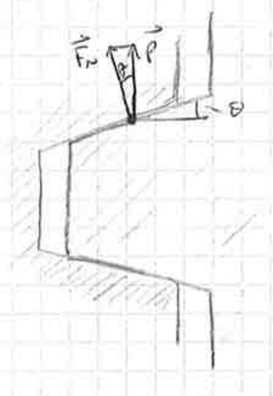
RENDIMENTO DEL MECCANISMO: $\eta = \frac{P d_2}{M_v 2\pi} = \boxed{\frac{Tg\,\alpha}{Tg(\alpha+\varphi)} = \eta}$

- CONSIDERANDO IL CASO IN CUI IL MOMENTO DELLA VITE E' APPLICATO NEL VERSO OPPOSTO, OVVERO CONCORDE AL CARICO, OVVERO IN DISCESA DEL CARICO, SI HA UNA PICCOLA MODIFICA NELL'ESPRESSIONE DELLE FORZE!

$$\begin{cases} P = F\cos\cancel{(\alpha+\varphi)}\,(\varphi-\alpha) \\ T = F\sin(\varphi-\alpha) \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_v = \frac{Pd}{2}\,Tg(\varphi-\alpha)}$$

- VITE-MADREVITE A FILETTO TRAPEZIO:

IN QUESTO CASO VALGONO LE STESSE RELAZIONI DINAMICO-CINEMATICHE ESPRESSE PER LA VITE A FILETTO RETTANGOLARE. L'UNICA ASSUNZIONE DA FARE E' CHE CAMBIA L'ATTRITO A CAUSA DELLA DIVERSA GEOMETRIA:



$$\boxed{f' = \frac{f}{\cos\theta}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 162

FRENI

Si definiscono freni quei componenti meccanici che hanno il compito di trasformare ~~una~~ l'energia cinetica di un corpo, in energia dissipata sottoforma di calore.

3 tipi di freni:
1) freni a fluido
2) freni ad attrito
3) freni elettromagnetici.

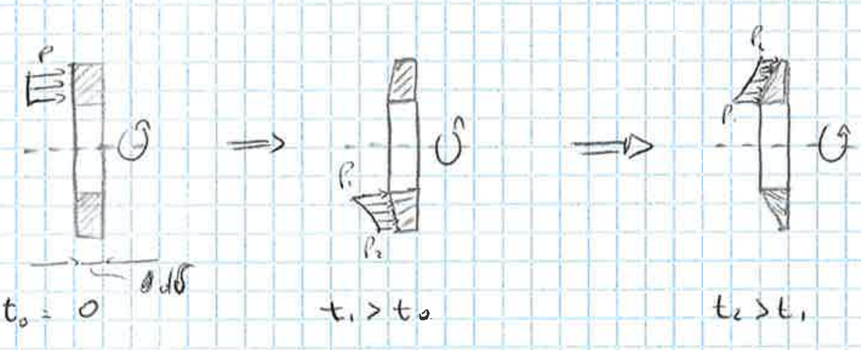
→ Tale distinzione si fa in base alla natura del fenomeno fisico che genera la dissipazione.

In meccanica si utilizzano i freni ad attrito.
Un freno ad attrito è costituito da un corpo rotante collegato al sistema che deve essere frenato, sul quale viene appunto applicata una forza di attrito. Tale attrito dipende molto dal materiale costituente del freno (ghisa e fibre organiche).

Possiamo avere 3 tipi di freni ad attrito:
1) freno a tamburo
2) freno a disco
3) freno a nastro

L'azione frenante provoca un fenomeno di usura del materiale. Usura dovuta appunto al moto di strisciamento fra i 2 organi. Tale usura provocherà una distribuzione irregolare delle pressioni.

Si può pensare allora che l'usura sia proporzionale al tempo di impiego del freno e di conseguenza l'irregolarità della distribuzione delle pressioni varia nel tempo. Avremo che:



Si può notare che l'usura dipende dal tempo t.
L'usura è maggiore alle estremità xk si hanno velocità maggiori.

volume $\boxed{dV = d\delta \cdot dA}$

Lavoro compiuto dalle forze tangenziali di attrito:

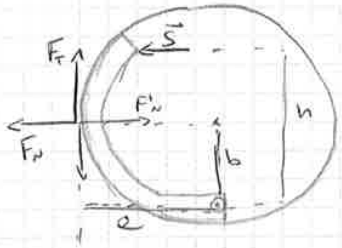
$$dL_f = f\, p\, dA\, V\, dt = \boxed{f\, p\, \omega r\, dA\, dt}$$

$F_T' = f\,F_N' \Rightarrow \boxed{F_T' = f\,\frac{hs}{b+fe}}$ $\qquad |F_T'| = |F_T|$

POSSIAMO COSÌ RICAVARE IL MOMENTO FRENANTE:

$$M_f = F_T \cdot r = \boxed{\frac{f\,h\,r\,s}{b+fe} = M_F} \leftarrow \text{MOMENTO FRENANTE}$$

- POSSIAMO AVERE IL CASO DI UN MECCANISMO CON CEPPO INTERNO:



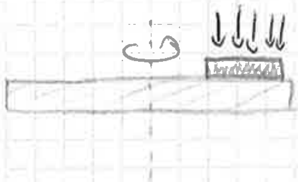
$Sh - F_N' b + F_T' e = 0$ $\quad$ ma $\quad F_T' = f F_N'$

$$\boxed{F_N' = \frac{hs}{b-fe}} \qquad \boxed{F_T' = \frac{fhs}{b-fe}}$$

MOMENTO FRENANTE: $\boxed{M_F = \frac{fhrs}{b-fe}}$

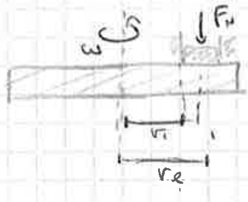
- FRENI A DISCO

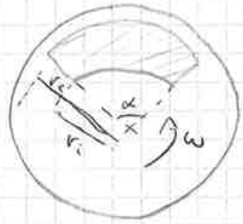
COSTITUITO DA UN DISCO ROTANTE A CUI SI ACCOPPIA UN PATTINO DI FRENATURA CON ATTRITO.



TECNICA DELL'ACCOSTAMENTO RIGIDO:

RIFACENDOCI AI FENOMENI DI USURA, RICORDIAMO CHE $p = \frac{k}{r}$





$F_N = \int_{r_1}^{r_2}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} p\,r\,d\alpha\,dr$ con $p = \frac{k}{r} \Rightarrow \boxed{F_N = k\alpha\,(r_2 - r_1)}$

MOMENTO FRENANTE $\rightarrow M_F = \int_{r_1}^{r_2}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} f\,p\,r^2\,dr\,d\alpha \Rightarrow \boxed{M_F = f\,k\,\frac{\alpha}{2}(r_2^2 - r_1^2)}$

VIBRAZIONE DI SISTEMI MECCANICI

CON VIBRAZIONE SI INTENDE IL MOTO ONDULATORIO (OSCILLATORIO) DI UN CORPO ~~INTORNO~~ INTORNO AD UNA POSIZIONE FISSA DETTA POSIZIONE D'EQUILIBRIO.

LA VIBRAZIONE È DOVUTA DA UNA PARTICOLARE PROPRIETÀ CHE APPARTIENE AL CORPO STESSO, LA DEFORMABILITÀ.

AFFRONTIAMO LO STUDIO DELLE VIBRAZIONI ATTRAVERSO 2 MODELLI:

MODELLI A PARAMETRI
- DISTRIBUITI (D) gdl INFINITI
- CONCENTRATI (C) gdl ~~INFINITI~~ FINITI

D $\longrightarrow$ EQ. DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

C $\longrightarrow$ EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE

NELL'AFFRONTARE I PROBLEMI DI VIBRAZIONE NOI UTILIZZIAMO RELAZIONI LINEARI OPPURE RELAZIONI NON LINEARI

LINEARI $\longrightarrow$ SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

NON LINEARI $\longrightarrow$ NORMALE RISOLUZIONE DELLE EDO.

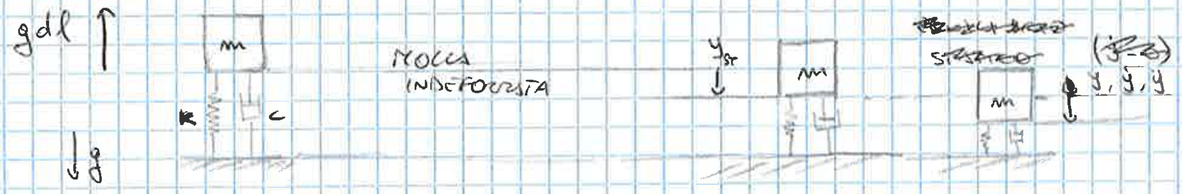
DISTINGUIAMO 2 SISTEMI:

1) SISTEMA SMORZATO

2) SISTEMA NON SMORZATO (NO DISSIPAZIONI) (IDEALE)

ESEMPIO DI SISTEMA VIBRANTE:

SISTEMA: MASSA - MOLLA - SMORZATORE



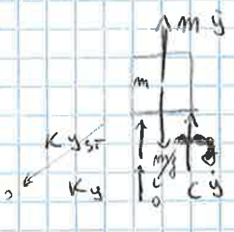
$c\ \left[\frac{N \cdot s}{m}\right]$

$\cancel{y_{st}} = \quad y_{st} \cdot K = mg$

IL SISTEMA INIZIA AD OSCILLARE SE VIENE PERTURBATO (AD ESEMPIO SE ALLA MASSA VIENE APPLICATA UNA FORZA DALL'ESTERNO).

PRESENZA DI FORZA ESTERNA $\Longrightarrow$ OSCILLAZIONE PRESENTE.

COME STUDIAMO L'OSCILLAZIONE? D.C.L.



$$\boxed{m\ddot{y} + c\dot{y} + Ky = 0}$$ EQ. DIFFERENZIALE

$y(t) = ?$ CHE FUNZIONE È?

POSSO RISCRIVERE L'EQUAZIONE: $\dfrac{\ddot{y}}{\frac{K}{m}} + \dfrac{c}{K}\dot{y} + y = 0$

IN GENERALE:

$$\frac{\ddot{y}}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}\dot{y} + y = 0$$

ω_n: PULSAZIONE PROPRIA DEL SISTEMA NON SMORZATO $[rad/s]$

ξ: FATTORE DI SMORZAMENTO.

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{c}{K} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{c}{2\sqrt{Km}}}$$

• VIBRAZIONI LIBERE

$$\boxed{\frac{\ddot y}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}\dot y + y = 0}$$

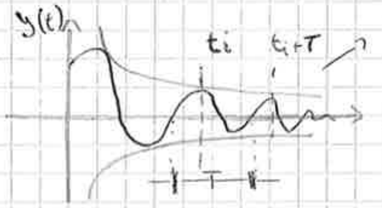
$$\xi \begin{cases} >1 & \text{SOVRASMORZATO} \\ =1 & \text{SM. CRITICO} \\ <1 & \text{SOTTOSMORZATO} \end{cases}$$

↳ LEGGE DI MOTO:

EQUAZIONE CANONICA DELLA LEGGE DEL MOTO.

con $\xi \geq 0$ (SEMPRE!)

CONSIDERIAMO IL SISTEMA SOTTOSMORZATO $(\xi < 1)$:



$$y(t) = \underline{a}\, e^{-\xi\omega_n t} \cos\left(\underline{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\, t - \underline{\varphi}\right)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$ DA CUI SI RICAVA ω.

DECREMENTO LOGARITMICO.

$$y(t_i) = y_i = a\, e^{-\xi\omega_n t_i}$$
$$y(t_i+T) = y_{i+1} = a\, e^{-\xi\omega_n (t_i+T)}$$

con $\cos(\dots) = 1$ (massimo)

FACENDO IL RAPPORTO FRA LE 2 CONDIZIONI:

$$\frac{y_{i+1}}{y_i} = e^{-\xi\omega_n T}$$ ← VALE SEMPRE!

$$\delta = \ln\frac{y_{i+1}}{y_i} = -\xi\omega_n T$$ DECREMENTO LOGARITMICO

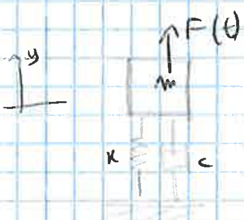
$$\longrightarrow \delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

NEL CASO IN CUI SI CONSIDERA IL CASO $\xi \ll 1$ $(\xi \approx 0{,}1)$, SI OTTIENE:

$$\delta \cong -2\pi\xi$$

VIBRAZIONI FORZATE

Si parla di vibrazioni forzate quando un moto oscillatorio viene provocato grazie all'aiuto di una forza esterna.



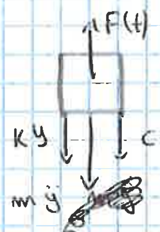
FORZANTE ARMONICA $F(t)$ (AZIONE ESTERNA)

$$F(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

F_0: AMPIEZZA — ω: PULSAZIONE

y: gdl rispetto alla config. di equilibrio statico

EQUILIBRIO



peso equilibrato (siamo in condizioni statiche)

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{y}}{k/m} + \frac{c}{k}\dot{y} + y = \frac{F}{k} \leftarrow \text{canonica}$$

$$\frac{\ddot{y}}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}\dot{y} + y = \frac{F_0}{k}\operatorname{sen}(\omega t)$$

Generalizzando:

$$\frac{\ddot{y}}{\omega_n^2} + \frac{2\xi}{\omega_n}\dot{y} + y = A\operatorname{sen}(\omega t)$$

La soluzione di tale equazione è vista come la somma di 2 contributi:

soluzione completa = soluzione omogenea associata + soluzione particolare.

$S_{OA} \to 0$ (tende a zero)

Mi interessa quindi il calcolo della soluzione particolare che prima o poi sarà determinante al moto solo quella.

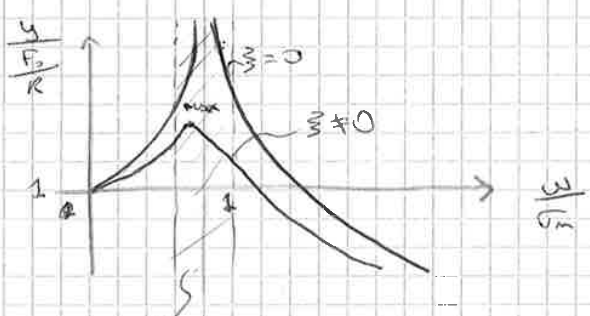
→ ADIMENSIONALIZZANDO LA FORMULA

$$\frac{y}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

RISPOSTA IN FREQUENZA DEL SISTEMA FORZATO

CON $A = \frac{F_0}{k}$

RIPORTANDO TALE FUNZIONE SU UN GRAFICO.



ZONA DI RISONANZA DEL SISTEMA

CIÒ CHE CONTA NON È L'AMPIEZZA DELLA FORZA, MA LA FREQUENZA.

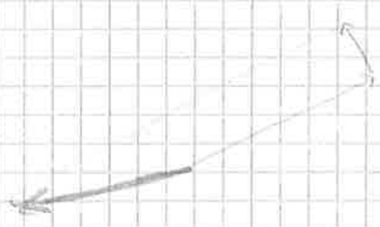
VEDI TACOMA BRIDGE

VARI CASI:

- $\omega << \omega_n$

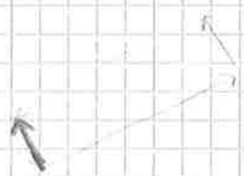
SISTEMA DOMINATO DALL'ORGANO ELASTICO k.

- $\omega >> \omega_n$



SISTEMA DOMINATO DALL'INERZIA

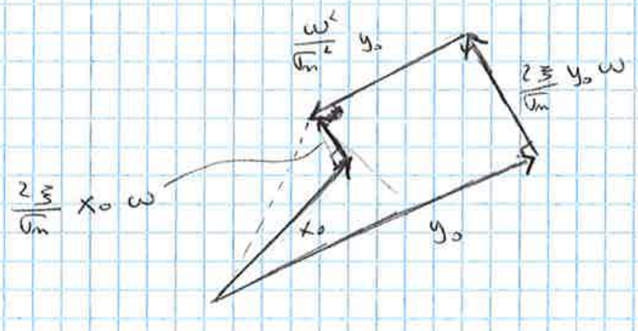
- $\omega = \omega_n$



SI HA RISONANZA SE $\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$ / $\left(\frac{y}{F_0/k}\right)_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 162

RISOLVIAMO TALE EDO CON IL METODO DEI VETTORI ROTANTI.



LA LUNGHEZZA DEL LATO TRATTEGGIATO E' UGUALE A:

PITAGORA $\Rightarrow$ $$y_0 \sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2} = x_0 \sqrt{1+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

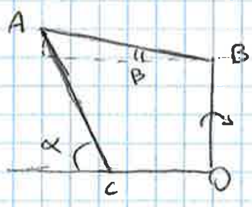
LEGAME x_0, y_0 $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{y_0}{x_0} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}} \rightarrow \text{TRASMISSIBILITA' (DI SPOSTAMENTO)}$$

RAPPORTO DELLE AMPIEZZE (SIGNIFICATIVO)

TALE TRASMISSIBILITA' DI SPOSTAMENTO E' PRATICAMENTE ANALOGA ~~A QUELLO~~ ALLA TRASMISSIBILITA' DI FORZE. (ANDARE A VEDERE SUL LIBRO).

ESERCITAZIONE MECCANICA DEGLI MACCHINE 22/8/2013

PROBLEMA (1,42)



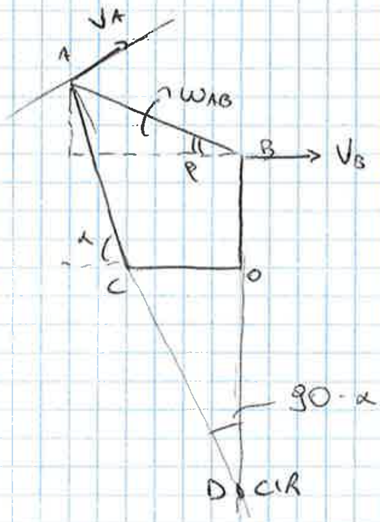
$\circlearrowleft \omega_{OB} = 0{,}6$ RAD/s $\qquad \omega_{CA} = ? \qquad \dot{\omega}_{CA} = ?$

$Tg\,\alpha = \frac{4}{3} \qquad \overline{OB} = 120$ mm $\qquad \overline{CA} = 200$ mm $\qquad \overline{OC} = 120$ mm

$AB = \sqrt{(AC\cos\alpha + \overline{OC})^2 + (AC\sin\alpha - \overline{OB})^2}$

$tg\,\beta = \dfrac{AC\sin\alpha - OB}{AC\cos\alpha + OC}$

$\beta = 9{,}460°$



CALCOLO VELOCITA':

$DB = BO + \dfrac{CO}{Tg(90-\alpha)}$

$DA = AC + \dfrac{CO}{\sin(90-\alpha)} = 400$ mm

$V_B = \omega_{OB}\,(\overline{OB})$

$\omega_{AB} = \dfrac{V_B}{DB} = 0{,}2571$ RAD/sec $\circlearrowleft$

$V_A = \omega_{AB}\,AD = 0{,}1029$ m/s

$\omega_{AC} = \dfrac{V_A}{AC} = 0{,}5143$ RAD/sec $\circlearrowleft$

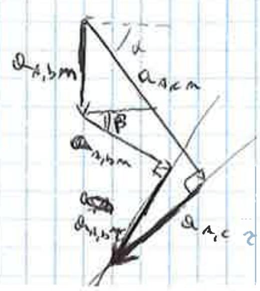
CALCOLO ACCELERAZIONI

CORPO AB : $\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{a,b}$

- $\vec{a}_{A,C\,n} + \vec{a}_{A,C\,\tau} = \vec{a}_{b,O\,n} + \cancel{\vec{a}_{b,O\,\tau}} + \vec{a}_{A,b\,n} + \vec{a}_{A,b\,\tau}$

D	// AC	⊥ AC	// BO	O	// AB	⊥ AB
V	A→C	?	B→O	PERCHE' $\dot{\omega}_{OB} = 0$	A→B	?
M	$\omega^2_{AC}\cdot AC$	$\dot{\omega}_{AC}\cdot AC$?	$\omega^2_{OB}\cdot OB$		$\omega^2_{AB}\cdot AB$	?

POLIGONO:

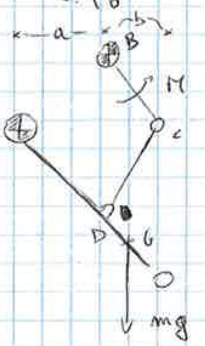


$a_{A,C\,n}\cos(\alpha-\beta) = a_{b,O\,n}\cos(90-\beta) + a_{A,b\,n} + a_{A,C\,\tau}\sin(\alpha\beta)$

$a_{A,C\,M} = \dot{\omega}_{AC} \Rightarrow \dot{\omega}_{AC} = 0{,}109$ RAD/sec² $\circlearrowright$

ESERCITAZIONE M.D.M. 31 | 1 | 2013

ESERCIZIO 2.16



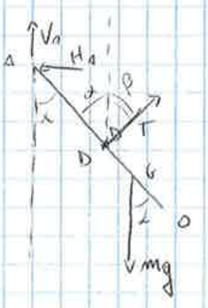
CALCOLARE $\vec{M}$ = ? PER L'EQUILIBRIO STATICO

$\overline{AD} = 800\ mm$ $\overline{DG} = 200\ mm$

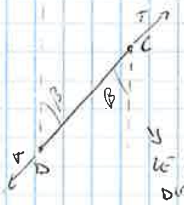
$\overline{DC} = \overline{BC} = 500\ mm$ $a = 400\ mm$ $b = 250\ mm$

$M_{\overline{AO}} + M_{RUOTA} = 45\ kg$

DIAGRAMMI DI CORPO LIBERO:



EQ. MOMENTO ASTA $\overline{AO}$ INTORNO AD A $\Rightarrow$ T



LE REAZIONI VINCOLARI SONO DIRETTE LUNGO L'ASTA

EQ. MOMENTO ASTA $\overline{BC}$ INTORNO A B $\Rightarrow$ M

EQUILIBRIO FORZE AO $\Rightarrow$ H_A, V_A

$$\begin{cases} T \operatorname{sen}(\alpha+\beta)\,\overline{AD} - mg\,\overline{AG}\sin\alpha = 0 \\ T\cos\beta + V_A - mg = 0 \\ T\sin\beta - H_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} T &= 318{,}5\ N \\ H_A &= 159{,}2\ N \\ V_A &= 165{,}5\ N \end{aligned}$$

$$R_A = \sqrt{V_A^2 + H_A^2} = 229{,}6\ N$$

$$M - T\,\overline{BC}\cos\beta = 0 \Rightarrow M = 138\ Nm$$