



Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

NUMERO: 1639A -

ANNO: 2015

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Robertazzi

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale + Esercizi +  
Temi d'esame. Prof.Cornetti

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

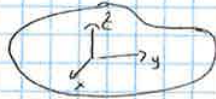
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# FONDAMENTI DI MECCANICA STRUTTURALE (SCIENZA DELLE COSTRUZIONI)

POSSIAMO AVERE 3 TIPI DI STRUTTURE:

1) SOLIDA (3D):



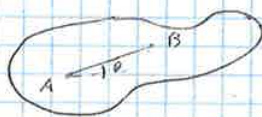
2) LINEARE o GUSCI (2D):



3) TRAVI (1D):



- GRADI DI LIBERTÀ: NUMERO DI COORDINATE GENERALIZZATE NECESSARIE E SUFFICIENTI A DESCRIVERE LA CONFIGURAZIONE.



$$A: (x_A; y_A)$$

UN CORPO RIGIDO HA 3 GRADI DI LIBERTÀ

$g$  = GRADI DI LIBERTÀ

$v$  = GRADI DI VINCOLO

ABBIAMO 3 CASI:

-  $g > v$

I VINCOLI NON SONO SUFFICIENTI

STRUTTURA LABILE

-  $g = v$

I VINCOLI SONO STRETTAMENTE SUFFICIENTI

STRUTTURA ISOSTATICA

-  $g < v$

I VINCOLI SONO PIU' CHE SUFFICIENTI

STRUTTURA IPERSTATICA

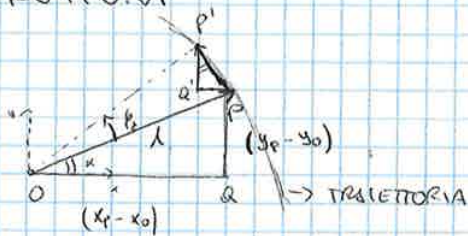
- FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA DI STRUTTURE RIGIDE PIANE:



$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + (\vec{\omega} \wedge \vec{OP})$$

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k}$$

### STRUTTURA



$$x_0 = y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M_p = -r_2 y \\ v_p = r_2 x \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_p = -r r_2 \sin \alpha \\ v_p = r r_2 \cos \alpha \end{cases}$$

### VINCOLI PIANI

- VINCOLI ESTERNI;
- VINCOLI INTERNI;
- VINCOLI COMPOSTI.

#### • VINCOLI ESTERNI.

SIMBOLO	NOME	DEF. CINEMATICA	DEF. STATICA	C.I. R.	GRADO DI VINCOLO
	CARRELLO o BIELLETTA	$M \neq 0$ $v = 0$ $P \neq 0$	$H = 0$ $V \neq 0$ $M = 0$	SU y	1
	CERNIERA	$M = 0$ $v = 0$ $P \neq 0$	$H \neq 0$ $V \neq 0$ $M = 0$	IN P	2
	DOPPIO PENDOLO o PATTINO	$M \neq 0$ $v = 0$ $P = 0$	$H = 0$ $V \neq 0$ $M \neq 0$	ALL'∞ in direzione y	2
	DOPPIO DOPPIO PENDOLO	$M \neq 0$ $v \neq 0$ $P = 0$	$H = 0$ $V = 0$ $M \neq 0$	ALL'∞	1
	INCASTRO	$M = 0$ $v = 0$ $P = 0$	$H \neq 0$ $V \neq 0$ $M \neq 0$	#	3

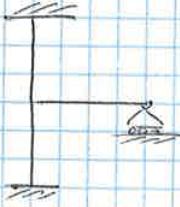


$$g = 3 \cdot 2 = 6$$

$$v = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$6 - 6 = 0$$

STRUTTURA ISOSTATICA



$$g = 3$$

$$v = 3 + 3 + 1 = 7$$

$$3 - 7 = -4$$

STRUTTURA 4 VOLTE IPERSTATICA

NOTA BENE:

$g = v$  è SOLO CONDIZIONE NECESSARIA, MA NON SUFFICIENTE, PER L'ISOSTATICITÀ.

ESEMPIO:



$$g = 3 \cdot 2 = 6$$

$$v = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$6 - 6 = 0 \text{ ISOSTATICA}$$



$$g = 6$$

$$v = 6$$

$g = v$  MA SI NOTA CHE LA STRUTTURA È LABILE!!!

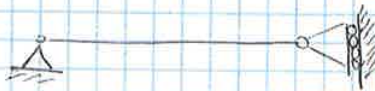
### MALDISPOSIZIONE VINCOLARE



$$g = v = 3$$

ISOSTATICA

BEN DISPOSTA

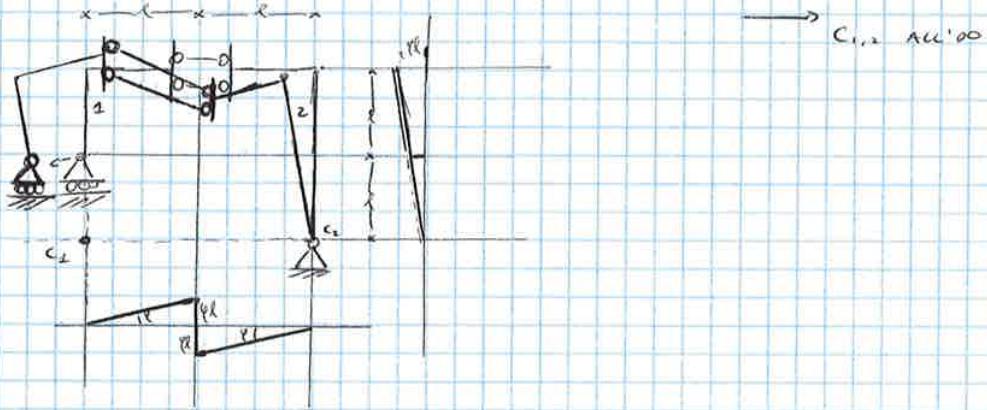


VINCOLO MALDISPOSTO

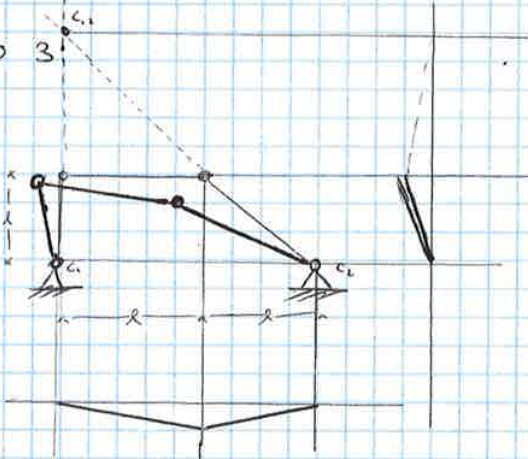


LABILE

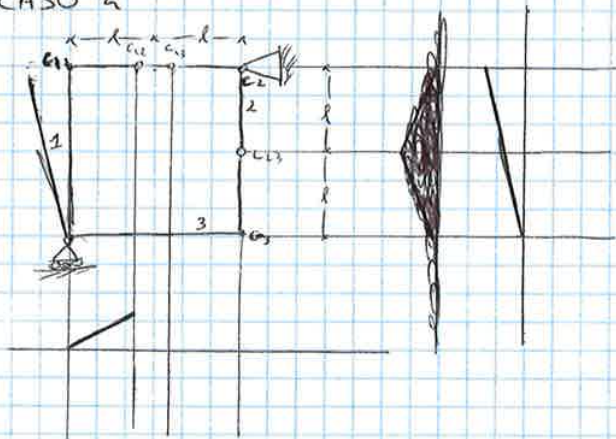
### CASO 2



### CASO 3



### CASO 4



## FORMULA FONDAMENTALE DELLA CINEMATICA.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

VELOCITÀ

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{P} \wedge \vec{OP}$$

PER PICCOLI SPOSTAMENTI

$$\vec{P} \wedge \vec{OP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ x_P - x_O & y_P - y_O & z_P - z_O \end{vmatrix} = \vec{i} \left[ P_y(z_P - z_O) - P_z(y_P - y_O) \right] - \vec{j} \left[ P_x(z_P - z_O) - P_z(x_P - x_O) \right] + \vec{k} \left[ P_x(y_P - y_O) - P_y(x_P - x_O) \right]$$

SAPENDO CHE:  $M_P = M_P \vec{i} + N_P \vec{j} + W_P \vec{k}$

$M_O = M_O \vec{i} + N_O \vec{j} + W_O \vec{k}$

IN FORMA MATRICIALE:

MATRICE ANTISIMMETRICA

$$\vec{M}_P = \vec{M}_O + \vec{P} \wedge \vec{OP} \Rightarrow \begin{pmatrix} M_P \\ N_P \\ W_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_O \\ N_O \\ W_O \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_P - x_O \\ y_P - y_O \\ z_P - z_O \end{pmatrix}$$

IN FORMA CONVENZIONE NAU:  $\begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ P \end{Bmatrix} + [P] \begin{Bmatrix} P-O \end{Bmatrix}$

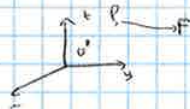
## RICHIAMI DI STATICA

1) CONDIZIONE DI EQUIVALENZA:

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ 2 SISTEMI DI VETTORI APPLICATI SIANO EQUIVALENTI (OVVERO SI POSSA PASSARE DA UNO ALL'ALTRO TRASLANDOLI LUNGO LA LORO RETTA D'AZIONE ESATTAMENTE CON LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA) È CHE ABBIANO UGUAL RISULTANTE E UGUAL MOMENTO RISULTANTE RISPETTO A UN PUNTO O.

2) RIDUZIONE A UN PUNTO O:

QUALUNQUE SISTEMA DI VETTORI APPLICATI È EQUIVALENTE ALLA RISULTANTE APPLICATA IN UN PUNTO O ARBITRARIO PIÙ UNA COPPIA DI MOMENTO, UGUALE AL MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AD O DEL SISTEMA DATO.



$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum \vec{OP} \wedge \vec{F}_i$$

3) ASSE CENTRALE - SISTEMI PIANI:

SE LA RISULTANTE È DIVERSA DA ZERO ( $\vec{R} \neq 0$ ) ESISTE SOLO UNA RETTA DEL PIANO TALE CHE IL MOMENTO RISULTANTE RISPETTO AI SUOI PUNTI È NULLO.

SE RIDOTTO AD UN PUNTO È ASSE CENTRALE, IL SISTEMA È EQUIVALENTE ALLA SOLA RISULTANTE.

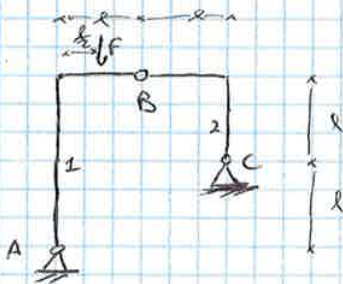
# CALCOLO DI REAZIONI VINCOLARI IN SISTEMI DI TRAVI ISOSTATICI.

$g = 3 \cdot M$     n° GRADI DI LIBERTÀ = NUMERO DI EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

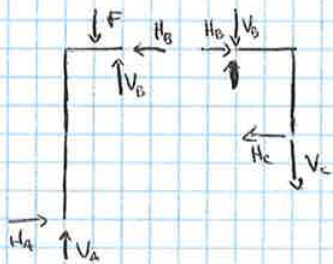
$S =$  NUMERO DI REAZIONI VINCOLARI INCOGNITE

SONO PROBLEMI RISOLVIBILI CON LE CARBINALI PERCHÉ IN STRUTTURE ISOSTATICHE SI HA n° EQUAZIONI = n° REAZIONI VINC.

ESEMPIO:



1) METODO GENERALE



$g = 3 \cdot 2 = 6$  INCOGNITE

CORPO 1:

$\uparrow V_B + V_A - F = 0$

$\rightarrow H_A - H_B = 0$

$\curvearrowright V_B l + H_B 2l - F \frac{3}{2} l = 0$

CORPO 2:

$\uparrow -V_B - V_C = 0$

$\rightarrow H_B - H_C = 0$

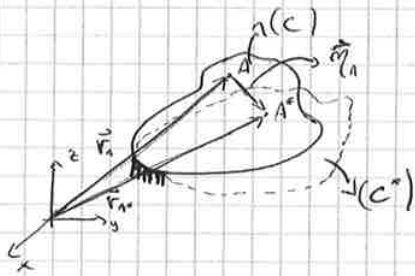
$\curvearrowright -V_C l - H_C l = 0$

SVOLVENDO I CALCOLI:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_A = \frac{2}{3} F \\ V_B = \frac{1}{3} F \\ V_C = -\frac{1}{3} F \\ H_C = \frac{1}{3} F \\ H_B = \frac{1}{3} F \\ H_A = \frac{1}{3} F \end{array} \right.$$



GENERALIZZIAMO:



vincoli del corpo

valori conosciuti in posizioni del punto dopo la deformazione.

$$\{r_A\} = \{r_A\} + \{M_A\} \rightarrow \text{VETTORE SPOSTAMENTO.}$$

ANALISI:

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A + \vec{M}_A$$

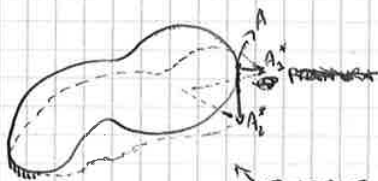
FUNZIONI VETTORIALI DI 3 VARIABILI  $\vec{p}(x, y, z)$

POSSIAMO SCRIVERE COSI:

$$\begin{Bmatrix} x_A^*(x, y, z) \\ y_A^*(x, y, z) \\ z_A^*(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

OBBIETTIVO DI CALCOLO.

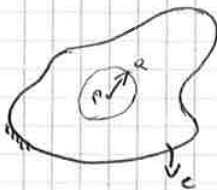
UNO SCOPO DELLA DEFORMAZIONE E' CHE NON CI SIANO DELLE FRATTURE



$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{AD 1 SOLO VALORE} \end{array} \right.$$

QUESTO NON DEVE ACCADERE!!!

ANALISI:



PUNTO P CIRCONDATO DA UN INDOLO DI RAGGIO INFINITESIMO.

$$\begin{cases} u_p(x, y, z) = u_p(x, y, z) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_p dz \\ v_p(x, y, z) = v_p(x, y, z) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_p dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_p dz \\ w_p(x, y, z) = w_p(x, y, z) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_p dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_p dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_p dz \end{cases}$$

FATTANDO CI AL PRIMO ORDINE SARMO IN GRADO DI CALCOLARE SOLO GLI SPOSTAMENTI INFINITESIMI.

(VALIDA SOLO PER PICCOLI SPOSTAMENTI).

POSSO SCRIVERE COSI:

$$\{M_p\} = \{r_p\} + [J_p] \{dr\}$$

RELAZIONE CHE DA' GLI SPOSTAMENTI DI UN PUNTO QUALSIASI. (SEmpre infinitesimo)

$$[J_p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_p$$

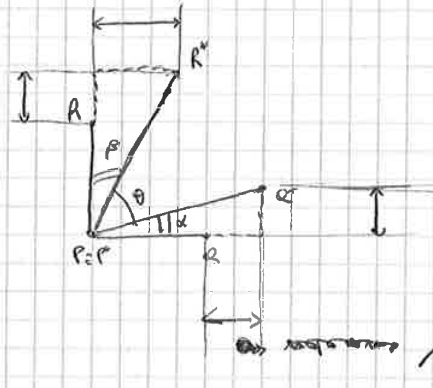
MATRICE JACOBIANA.

$$\{dr\} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

RIPARTENDO DA:

$$\{m_q\} = \{m_r\} = [J_r] \{dr\}$$

↓  
P<sub>A</sub>, P<sub>R</sub>



FACENDO IL PRODOTTO RIGA x COLONNA:

$$m_q - m_r = \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_P dx$$

$$v_r - v_p = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy$$

$$v_q - v_p = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx$$

$$m_r - m_p = \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_P dy$$

LUNGHEZZE DI P<sub>Q</sub> e P<sub>R</sub> SONO LE COORDINATE PRINCIPALI LE DIVERGENZE DI PIU' COLTA APPLICATE AL TRIANGOLO ASSOCIATO.

$$\Delta_x = \frac{P^x Q^x - P_x}{P_x} = \frac{\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_P dx - dx}{dx} = \left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)_P = \epsilon_x$$

$$\Delta_y = \frac{P^y P - R P}{R P} = \dots = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P = \epsilon_y$$

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \alpha + \beta$$

$$\alpha \approx \text{Tg } \alpha$$

$$\beta \approx \text{Tg } \beta$$

per piccole misure

$$\alpha + \beta = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P dx}{dx} + \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_P dy}{dy} = \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)_P + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_P$$

RIASSUMENDO IL SIGNIFICATO FISICO:

- $\epsilon$ : DILATAZIONE LINEARE
- $\delta$ : VARIAZIONE DI ANGOLO (SCALZAMENTO ANGOLARE)

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\delta_{xy} & \frac{1}{2}\delta_{xz} \\ \frac{1}{2}\delta_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\delta_{yz} \\ \frac{1}{2}\delta_{xz} & \frac{1}{2}\delta_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \text{TENSORE DELLA DEFORMAZIONE!}$$

→ 6 TERMINI DISTINTI

$$T = f(x, y, z) \Rightarrow \text{SCALARE}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \Rightarrow \text{VETTORE (3. COMPONENTI)}$$

$$E = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \Rightarrow \text{TENSORE 2° ORDINE SIMM. (6 COMPONENTI)}$$

∞ SOLUZIONI:

1) SOLUZIONE BANALE:  $\{m\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} m_x = 0 \\ m_y = 0 \\ m_z = 0 \end{cases}$  ma  $\|\vec{m}\| = 1$  NO ACCETTABILE

2) BISOGNA ANDRE  $\det([E] - E_m [I]) = 0$

CALCOLO IL DETERMINANTE:

$$\det \begin{pmatrix} E_x & \frac{1}{2} \delta_{xy} & \frac{1}{2} \delta_{xz} \\ \frac{1}{2} \delta_{xy} & E_y & \frac{1}{2} \delta_{yz} \\ \frac{1}{2} \delta_{xz} & \frac{1}{2} \delta_{yz} & E_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_m \end{pmatrix} = 0$$

$$E_m^3 - J_1 E_m^2 - J_2 E_m - J_3 = 0$$

$J_1$   
 $J_2$   
 $J_3$  } INVARIANTI SCALARI DELLE DIFERENZIALI.

$$\begin{cases} J_1 = E_x + E_y + E_z \\ J_2 = \dots \\ J_3 = \dots \end{cases}$$

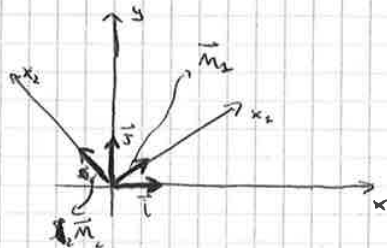
TROVARE QUINDI QUANTITÀ:

(VEDI LEZ. PAG 213.)

$$E^* = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

$x_1$   
 $x_2$   
 $x_3$  } ASSI PRINCIPALI

$E_i \Rightarrow$   $m_{i1}$   
 $m_{i2}$   
 $m_{i3}$



$$[A] \{x\} = \lambda \{x\}$$

IN QUESTO MODO ABBIAMO TROVATO LE S.R. IDEALI.

$E_1, E_2, E_3$  SONO SEMPRE 3 VALORI REALI  $\Leftrightarrow$  ( $[E]$  SIMMETRICA)  
AUTOVALORI

- a)  $E_1 \neq E_2 \neq E_3 \Rightarrow$  3 DIREZIONI PRINCIPALI ORTOGONALI.
- b)  $E_1 = E_2 \neq E_3 \Rightarrow$   $\{m_s\}$  ORTOGONALI AL PIANO  $(x_1, x_2)$ .
- c)  $E_1 = E_2 = E_3 \Rightarrow$   $\infty^3$  DIREZIONI ORTOGONALI.

$$[E] = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = E_1 + E_2 + E_3$$

$$J_2 = E_1 E_2 - E_1 E_3 - E_2 E_3$$

$$J_3 = E_1 E_2 E_3$$

FORMULA 1  
PAGINA 213

VETTORI DEI MOMENTI STATICI

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_y \\ S_x \end{Bmatrix} = \int_A \{r\} dA$$

- PER TRASFORMAZIONI DI TRASLAZIONI:

$$\begin{aligned} \{\bar{S}\} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_y \\ \bar{S}_x \end{Bmatrix} &= \int_A \{\bar{r}\} dA = \begin{Bmatrix} \int_A \bar{x} dA \\ \int_A \bar{y} dA \end{Bmatrix} = \int_A (\{r\} - \{r_0\}) dA = \\ &= \int_A \{r\} dA - \{r_0\} \int_A dA \end{aligned}$$

$$\boxed{\{\bar{S}\} = \{S\} - \{r_0\} A}$$

TRASLAZIONE

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_y &= S_y - x_0 A \\ \bar{S}_x &= S_x - y_0 A \end{aligned} \right\} \text{COMPONENTI}$$

SISTEMA BARICENTRICO:

$$\begin{aligned} 0 &= S_y - x_0 A \rightarrow x_0 = \frac{S_y}{A} \\ 0 &= S_x - y_0 A \rightarrow y_0 = \frac{S_x}{A} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{COORDINATE CENTRO D.R.} \\ \text{BARICENTRICO.} \end{array} \right\}$$

- TRASFORMAZIONI DI ROTAZIONE (MOMENTI STATICI):

$$\begin{aligned} \{\bar{S}^*\} = \begin{Bmatrix} \bar{S}_y^* \\ \bar{S}_x^* \end{Bmatrix} &= \int_A \{\bar{r}^*\} dA = \int_A [N] \{r^*\} dA = [N] \int_A \{r\} dA \\ &= [N] \{S\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\{\bar{S}^*\} = [N] \{S\}}$$

ROTAZIONE

$$\text{IN COMPONENTI: } \begin{cases} \bar{S}_y^* = \bar{S}_y \cos \theta + \bar{S}_x \sin \theta \\ \bar{S}_x^* = -\bar{S}_y \sin \theta + \bar{S}_x \cos \theta \end{cases}$$

- NOTA:

PER LA LEGGE DI ROTOTRASLAZIONE A POSTO DI  $\{r\}$ , USO  $\{r\} - \{r_0\}$ .

GEOMETRIA MOMENTO DI INERZIA (ROTAZIONE).

$$F_{x^*}^* = \int_A \bar{y}^{2*} dA$$

$$F_{y^*}^* = \int_A \bar{x}^{2*} dA$$

$$F_{x^*y^*}^* = \int_A \bar{x}^* \bar{y}^* dA$$

Matriciali:

$$[F^*] = \int_A \{F^*\} \{F\} dA = \int_A [N] \{F\} ([N] \{F\})^t dA$$

$$= [N] \int_A \{F\} \{F\}^t dA [N]^t$$

$$[I^*] = [N] [I] [N]^t$$

in componenti:

TRASFORMAZIONI DI ROTAZIONE:

$$\begin{cases} - I_{y^*}^* = \bar{I}_y \cos^2 \theta + \bar{I}_x \sin^2 \theta + 2 \bar{I}_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ - I_{x^*}^* = \bar{I}_y \sin^2 \theta + \bar{I}_x \cos^2 \theta - 2 \bar{I}_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ - I_{x^*y^*}^* = (\bar{I}_y - \bar{I}_x) \sin 2\theta - \bar{I}_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

ESISTE PER TUTTI I SISTEMI  $(\theta)$ , UN SISTEMA  $(\theta_0)$  CHE ANNULLA IL FATTORE CROCIATO  $(I_{x^*y^*}^*)$ .

TALE SISTEMA È DETTO PRINCIPALE. S. PRINCIPALE  $\Leftrightarrow I_{x^*y^*}^* = 0$

$$I_{x^*y^*}^* (\theta_0) = 0$$

$$0 = \frac{(\bar{I}_x - \bar{I}_y)}{2} \sin 2\theta_0 + \bar{I}_{xy} \cos 2\theta_0 = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta_0 = \frac{2 \bar{I}_{xy}}{\bar{I}_y - \bar{I}_x} \Rightarrow \theta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \bar{I}_{xy}}{\bar{I}_y - \bar{I}_x}$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{4}$$

SCELTA PER CUI SI HA IL SISTEMA PRINCIPALE.

• MOMENTI DI INERZIA ASSIATI IN UN SISTEMA PRINCIPALE.

$$- I_{\xi} = \bar{I}_{x^*}^* (\theta_0)$$

$$- I_{\eta} = \bar{I}_{y^*}^* (\theta_0)$$

FORMULA DI USARS

$$\begin{cases} I_{\xi} \\ I_{\eta} \end{cases} = \left( \frac{\bar{I}_x + \bar{I}_y}{2} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{I}_x - \bar{I}_y)^2 + 4 \bar{I}_{xy}^2}$$

\* CONVENZIONI SIANO:

$$\begin{cases} \bar{I}_x < \bar{I}_y \rightarrow I_{\xi} < I_{\eta} \\ \bar{I}_x > \bar{I}_y \rightarrow I_{\xi} > I_{\eta} \end{cases}$$

RLS

SAPPIAMO CHE:

$$S_x = \int_A y \, dA$$

$$S_y = \int_A x \, dA$$

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

DATA UN'ARSA PESS COMPRESA POSSIAMO  
SEMPLIFICARLA IN TANTO DA ANCHE ARRE PIU'  
SEMPLICI.

ESEMPIO:

HO DIVISO A IN  $A_1, A_2, A_3$



IN GENERALE:

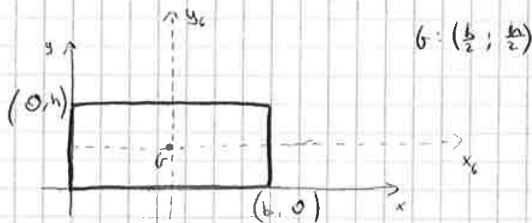
$$S_x \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n S_x(A_i)$$

$$I_x \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n I_x(A_i)$$

L'ARCA TOTALE E' UGUALE  
ALLA SOMMATORIA DELLE  
ARRE SOTTOMULTIPLI.

### CALCOLO DEI MOMENTI DI INERZIA

CONSIDERIAMO UN RETTANGOLO:



CALCOLO LE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE NEI 2 S.R.

	A	$S_x$	$S_y$	$I_x$	$I_y$	$I_{xy}$
x y	bh	$\frac{bh^2}{2}$	$\frac{b^2h}{2}$	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{b^3h}{3}$	$\frac{b^2h^2}{4}$
$x_G, y_G$	bh	0	0	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{b^3h}{12}$	0

$$x_G = \frac{S_y}{A} \Rightarrow S_y = x_G \cdot A = b \cdot h \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2 h}{2} \quad \text{"STESSA COSA PER } S_x \text{"}$$

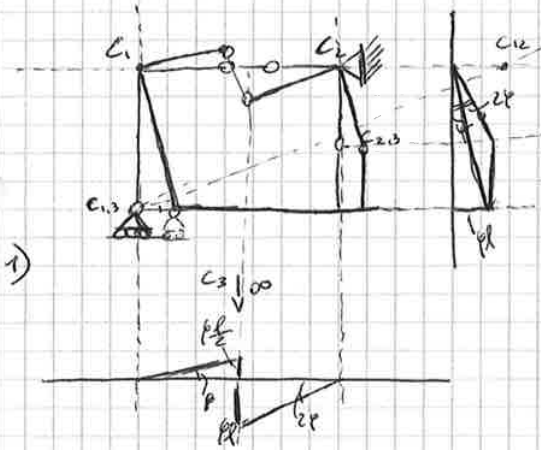
$$I_x = \int_A y^2 \, dA = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dx \, dy = \int_{-b/2}^{b/2} dx \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \, dy = [x]_{-b/2}^{b/2} \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + bh \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{3} \quad \text{"STESSA COSA PER } I_{y_G} \text{"}$$

"STESSA COSA PER  $I_y$ "

$$I_{xy} = 0 + bh \left(-\frac{b}{2}\right) \left(-\frac{h}{2}\right) = \frac{b^2 h^2}{4}$$

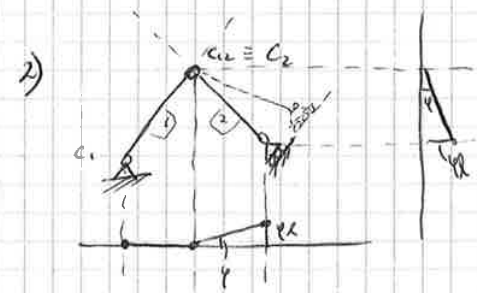
ESERCIZIO CASA:



$g = 9$   
 $v = 8$

CINEMATICA

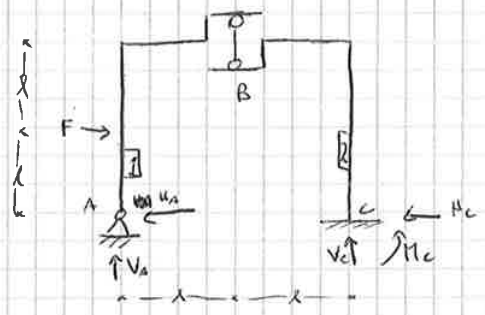
2° TEORMA	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{23}$	ALLINEATI
1° TEORMA	$C_1$	$C_{12}$	$C_2$	ALLINEATI
	$C_1$	$C_{13}$	$C_3$	ALLINEATI
	$C_2$	$C_{23}$	$C_3$	ALLINEATI



$C_{12} \equiv C_2 \Rightarrow$  CORPO 1 NON SI MUOVE  
BISOGNA IMPORRE LO SPORTELLINO AD UN ALTRO CORPO

CALCOLO REAZIONI VINCOLARI

METODO EQUAZIONI AUSILIARIE



3 EQ. CORPO INTERO + 3 EQ AUSILIARIE DERIVANTI DALLO SINCOSTRINTO.

EQ. EQUILIBRIO GLOBALE

$$\begin{cases} \uparrow V_A + V_C = 0 \\ \leftarrow H_A + H_C - F = 0 \\ \curvearrowright V_C 2l - Fl + H_C = 0 \end{cases}$$

SINCOGNTE IN 3 EQ.  $\Rightarrow$  SOTTI SONO 2 EQ. AUSILIARIE.

corpo 2:  $\rightarrow H_C = 0$   
corpo 1:  $\curvearrowright Fl - H_A 2l - V_A l = 0$

SISTEMA TOTALE:

$$\begin{cases} V_A + V_C = 0 \\ H_A + H_C - F = 0 \\ V_C 2l - Fl + H_C = 0 \\ H_C = 0 \\ Fl - H_A 2l - V_A l = 0 \end{cases}$$

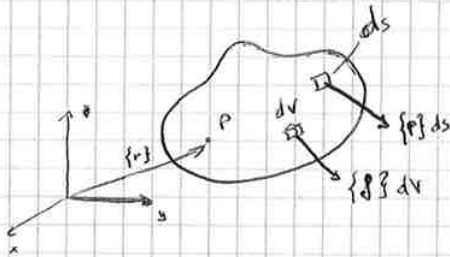
UNA VOLTA TROVATI I VALORI CI SOSTITUISCO NELLA SINGOLA CON I RISULTATI NON SI CORRETTI.

DA RISOLVERE





### ANALISI DELLA TENSIONE



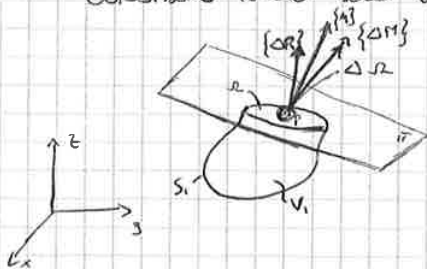
SUPPONIAMO CHE IL CORPO SIA IN EQUILIBRIO, SOGGETTO A FORZE DI VOLUME E FORZE DI SUPERFICIE.

EQ. CARDINALI STATICA:

$$\begin{cases} \int_V \{f\} dV + \int_S \{p\} ds = \{0\} & \text{TRASLAZIONE} \\ \int_V \{r\} \wedge \{f\} dV + \int_S \{r\} \wedge \{p\} ds = \{0\} & \text{ROTAZIONE} \end{cases}$$

PER FARE CHE IL SIST. SIA IN EQUILIBRIO, <sup>TUTTI</sup> I <sup>ACQUEDOTTI</sup> PUNTI DEVONO ESSERE IN EQUILIBRIO.

CONSIDERIAMO PORZIONI SOLO UN PIZZETTO.



$\Omega$  AREA SEZIONE.

$\Delta \Omega$  AREA FINITA DI  $\Omega$

POSSO RIDURRE LA SOMMA DELLE FORZE INTERNE A  $\Delta \Omega$  AD UN SOLO PUNTO P.

$\{m\}$ : NORMALI AL TAGLIO CONSIDERATO.

• ANALISI DELLA TENSIONE: IPOTESI DI CAUCHY

1)  $\lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{\{\Delta R\}}{\Delta \Omega} = \{t(\{m\}, \{r\})\} = \{t_m\} \rightarrow$  ETTORE TENSIONE

2)  $\lim_{\Delta \Omega \rightarrow 0} \frac{\{\Delta M\}}{\Delta \Omega} = 0$  SIGNIFICA CHE PER OGNI PUNTO IL MOMENTO RISULTANTE NON ESISTE (INTUITIVO).

- LA TEORIA DI CAUCHY ESCLUDE LA PRESENZA DI FORZE E MOMENTI CONCENTRATI;

- DIMENSIONI FISICHE DI  $\{t_m\}$ :  $F L^{-2}$ ;

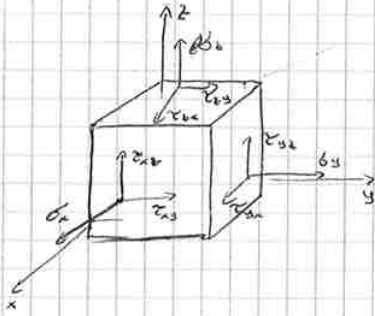
- EQ. DI EQUILIBRIO PORZIONE I:

$$\int_{V_i} \{f\} dV + \int_{S_i} \{p\} ds + \int_{\Omega} \{t_m\} d\Omega = 0$$

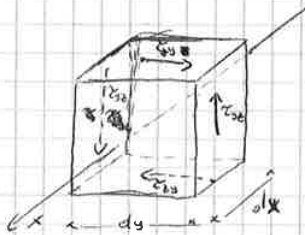
ADDIZIONE QUESTO TERMINO PER STABILIRE L'EQUILIBRIO.

$\{t_m\}$  DEVE DIPENDERE DA  $\{m\}$

EQ. DI EQUILIBRIO (ROTAZIONE).



EQUAZIONE DI EQUILIBRIO DUNA ROTAZIONE ATTORNO A X



$$\tau_{yz} dx dy dz - \tau_{zy} dx dy dz = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

ANALOGAMENTE:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

INDICHEREMO IL PRODOTTO  
SCALARE  $\vec{m} \cdot \vec{v}$  IN COORDINATE  
RETTANGOLARI:

$$\{m\}^t \{v\}$$

$$\{t_m\} = [\sigma] \{m\} \rightarrow \text{TENSORE DEGLI SFORZI}$$

$$\begin{Bmatrix} t_{mx} \\ t_{my} \\ t_{mz} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

H

$$f: R^3 \rightarrow R^3$$

$$f: \{m\} \rightarrow \{t_m\}$$

tensoriale simmetrico  $\Rightarrow \vec{x} \cdot f(\vec{y}) = \vec{y} \cdot f(\vec{x})$

$$\{m\}^t [\sigma] \{m\} = \{m\}^t [\sigma] \{m\}$$

$$\{m\}^t \{t_m\} = \{m\}^t \{t_m\}$$

$$t_{mm} = t_{mm}$$

LEGGE DI  
RECIPROCA.

SE  $\{m\} \perp \{m\} \Rightarrow \tau_{nm} = \tau_{mn}$

APPORTANDO TAV SEMPLIFICAZIONI ( $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$ ) POSSIAMO  
 RISCRIVERE LE EQUAZIONI DELLA STATICA IN FORMA SEGUENTE:

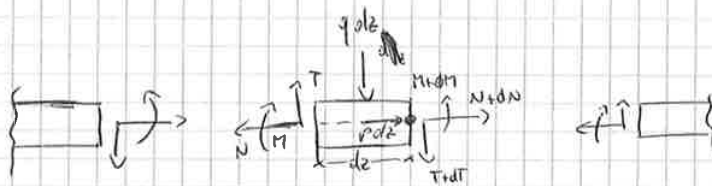
$$\begin{cases} p ds + dN + T d\theta = 0 \\ q ds - N d\theta + dT = 0 \\ m ds + dM - T r d\theta = 0 \end{cases}$$

EQUAZIONI DI STATICA

LE QUALI DIVISE PER  $ds$  DANNO LE "EQUAZIONI INFINITESIME DI EQUILIBRIO"

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} + \frac{T}{r} + p = 0 \\ \frac{dT}{ds} - \frac{N}{r} + q = 0 \\ \frac{dM}{ds} - T + m = 0 \end{cases}$$

TRAVE PIANA AD ASSI RETTILINEI.



$$\begin{aligned} \rightarrow \quad & -N + (N + dN) + p ds = 0 \\ \uparrow \quad & T - (T + dT) - q ds = 0 \\ \curvearrowright \quad & -T ds - M + (M + dM) + m ds + \frac{q ds^2}{2} = 0 \end{aligned}$$

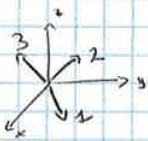
DA CUI:

	$q(z)$	$T(z)$	$M(z)$
$\frac{dN}{dz} = -p(z)$	NULLO	COSTANTE	LINEARE
$\frac{dT}{dz} = -q(z)$	COSTANTE	LINEARE	QUADRATICO
$\frac{dM}{dz} = T - m$	LINEARE	QUADRATICO	CUBICO

EQUAZIONI  
 STATICHE

$$\frac{dM'}{dz^2} = -q(z)$$

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO PRINCIPALE:

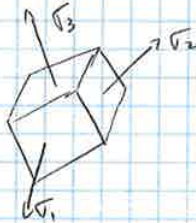
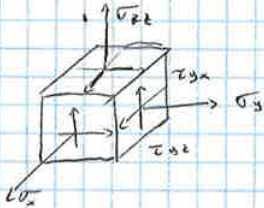


$$\{t_m\} = [v] \{m\}$$

↓

$$\begin{Bmatrix} t_{m1} \\ t_{m2} \\ t_{m3} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix}$$

$m_1, m_2, m_3$   
 ↓  
 sono le componenti di  $\{m\}$   
 generico nel sistema di  
 riferimento principale.



• CERCHI DI MOHR :

↳ NOTE CHE SONO  $v_1, v_2, v_3$  con  $v_1 > v_2 > v_3$

- 1) QUAL È LA GIACITURA  $\{m\}$  SU CUI  $\{t_m\}$  HA COMPONENTI  $\sigma_m$  e  $\tau_m$ ?
- 2)  $\sigma_m$  e  $\tau_m$  POSSONO ESSERE  $\forall$ ?

$$\begin{Bmatrix} t_{m1} \\ t_{m2} \\ t_{m3} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 m_1 \\ v_2 m_2 \\ v_3 m_3 \end{Bmatrix}$$

$$\|\vec{t}_m\|^2 = \sigma_m^2 + \tau_m^2$$

$$\Rightarrow v_1^2 m_1^2 + v_2^2 m_2^2 + v_3^2 m_3^2 = \sigma_m^2 + \tau_m^2$$

IMPOSTO CHE LA COMPONENTE NORMALE SIA  $\sigma_m$ :

$$\vec{m} \cdot \vec{t}_m = \sigma_m$$

$$\{m\}^t [v] \{m\} = \sigma_m \implies (m_1 \ m_2 \ m_3) \begin{pmatrix} v_1 & m_1 \\ v_2 & m_2 \\ v_3 & m_3 \end{pmatrix} = \sigma_m$$

$$\begin{cases} v_1 m_1 + v_2 m_2 + v_3 m_3 = \sigma_m^2 + \tau_m^2 \\ v_1 m_1^2 + v_2 m_2^2 + v_3 m_3^2 = \sigma_m \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1 \end{cases}$$

RISOLUZIONE SISTEMA  
 LINEARE →

• STATO TENSIONALE PIANO

def: UNO STATO TENSIONALE SI DICE PIANO SE LE SUOIE TENSIONI  $\vec{t}_m$  È SUPPRA CONTINUA MENTE STRESS PIANO  $\forall \vec{n}$

- CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ UNO STATO TENSIONALE SIA PIANO È CHE UNA TENSIONE PRINCIPALE SIA NULLA.

IPOTESI:  $\sqrt{3} = 0$

$$\begin{pmatrix} t_{m_1} \\ t_{m_2} \\ t_{m_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1} m_1 \\ \sqrt{2} m_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PICCOLA DROGMA ZIONE

↳ NEI SISTEMI DI RIFERIMENTO PRINCIPALI (1, 2, 3)

SE SONO NEI SISTEMI DI RIFERIMENTO (x, y, z):

$$\begin{pmatrix} t_{m_x} \\ t_{m_y} \\ t_{m_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x} & \sqrt{y} & 0 \\ \sqrt{y} & \sqrt{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}$$

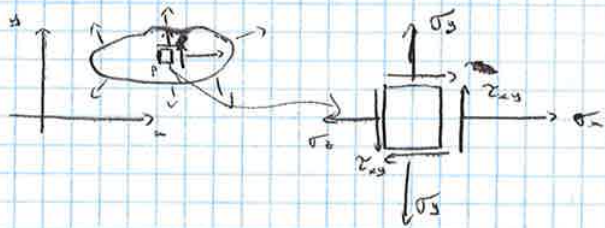
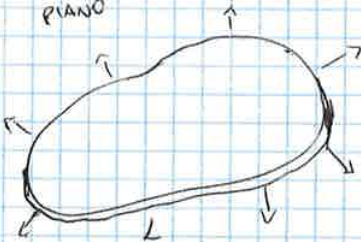
PER LA RICERCA DELLE TENSIONI PRINCIPALI SI UTILIZZANO DEI AUTOVALORI

• STATO TENSIONALE PIANO - CERCHIO DI MOHR 2

STATO PUNTUALMENTE PIANO ⇒ PIANO IN UN SOLO PUNTO.

STATO GLOBALMENTE PIANO ⇒ PIANO IN TUTTO IL CORPO.

GLOBALMENTE PIANO



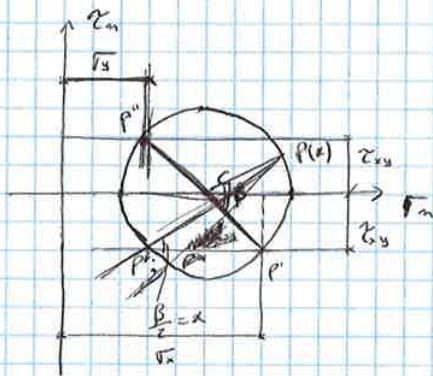
ELEVO AL QUA DATO È SOTTO:

$$\left(\bar{v}_m - \frac{\bar{v}_x + \bar{v}_y}{2}\right)^2 + \bar{z}_m^2 = \left(\frac{\bar{v}_x + \bar{v}_y}{2}\right)^2 + \bar{z}_{xy}^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2 \quad \text{CIRCONFERENZA}$$

$$\rightarrow C\left(\frac{\bar{v}_x + \bar{v}_y}{2}; 0\right)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\bar{v}_x - \bar{v}_y}{2}\right)^2 + \bar{z}_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{v}_x - \bar{v}_y)^2 + 4\bar{z}_{xy}^2}$$

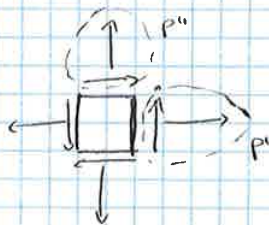


$$\alpha = 0 \Rightarrow P(0) = P' \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_m = \bar{v}_x \\ \bar{z}_m = -\bar{z}_{xy} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P\left(\frac{\pi}{2}\right) = P'' \Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_m = \bar{v}_y \\ \bar{z}_m = \bar{z}_{xy} \end{cases}$$

$$\rightarrow P''(\bar{v}_y; \bar{z}_{xy})$$

RIPRENDEMO IL QUADRANTE



CON FUNZIONI CIRCHI DI MOHR:

SE  $\bar{z}$  SONO POSITIVI  
SI FANNO ROTARE IN  
SENSO OROLOGIO.

$$\beta_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\bar{z}_{xy}}{\bar{v}_x - \bar{v}_y} \quad \text{FORMULA}$$

CALCOLO  $\beta$ :

$$\overline{CP'} \cdot \overline{CP} = R^2 \cos 2\beta \Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{v}_x - \frac{\bar{v}_x + \bar{v}_y}{2} \\ -\bar{z}_{xy} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{v}_m - \frac{\bar{v}_x + \bar{v}_y}{2} \\ \bar{z}_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\bar{v}_x - \bar{v}_y}{2} \\ -\bar{z}_{xy} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{\bar{v}_x - \bar{v}_y}{2} \cos 2\alpha + \bar{z}_{xy} \sin 2\alpha \\ \frac{\bar{v}_x - \bar{v}_y}{2} \sin 2\alpha - \bar{z}_{xy} \cos 2\alpha \end{pmatrix} = \underbrace{\left[ \left(\frac{\bar{v}_x - \bar{v}_y}{2}\right)^2 + \bar{z}_{xy}^2 \right]}_{R^2} \cos 2\alpha = R^2 \cos 2\alpha \cos 2\alpha$$

$$\boxed{2\alpha = \beta}$$

LE COMPONENTI  $\bar{v}_m$  e  $\bar{z}_m$  AGENTI SULLA GIACITURA DI NORMALE  $\hat{n}$  SONO LE COORDINATE DEL PUNTO P IN TERSIZIONE TRA IL CERCHIO DI MOHR E LA PARABOLA AD  $\hat{n}$  PASSANTE PER  $P'$

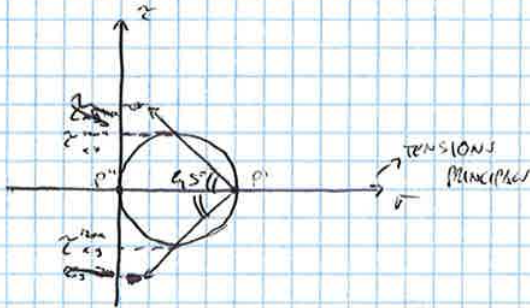
**COSTRUZIONE CERCHIO DI MOHR:**

- 1) TRACCIO I PUNTI  $P'(\bar{v}_x, -\bar{z}_{xy})$   $P''(\bar{v}_y, \bar{z}_{xy})$ , UNISCO  $P'$  e  $P'' \Rightarrow$  TROVO  $C$  e  $R$ ;
- 2) TROVO LA RETTA ORIZZONTALE PER  $P'$  (O VERTICALE PER  $P''$ ) E TROVO IL PUNTO  $P''$ ;
- 3) TRACCIO LA  $\hat{n}$  PER  $P'$ ,



$$\sigma_x = 2 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

$$P' = (2, 0) \quad P'' = (0, 0)$$



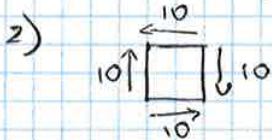
~~$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 0$$~~

IN CASO DI STATI PIANO ASSIATI,  
LA TENSIONE MASSIMA SI HA SU PIANI  
INCLINATI DI 45° RISPETTO ALLA  
TENSIONE PRINCIPALE ATTINTE

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4} \Rightarrow \frac{2}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)2 = 2$$

$$\sigma_2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)2 = 0$$

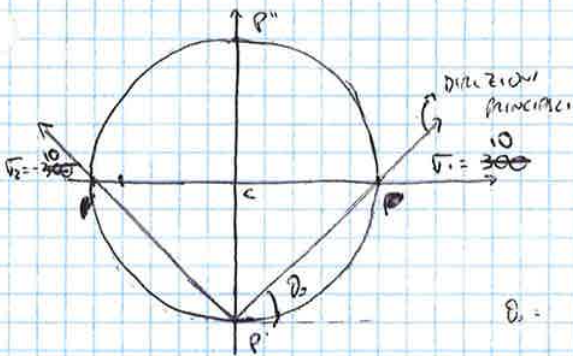
$$\tau_{max} = \frac{\tau_{xy}}{2} = \pm 1$$



$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = 10 \text{ MPa}$$

$$P' = (0, -10) \quad P'' = (0, 10)$$



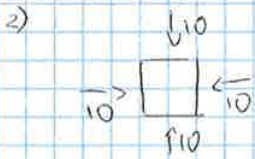
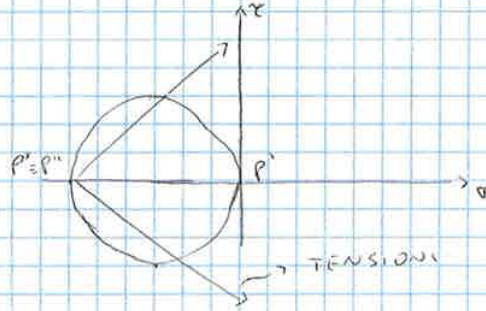
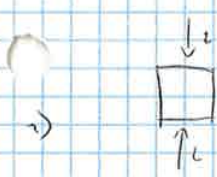
$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 10^2} = \frac{1}{2} \sqrt{400} = 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 10^2} = -\frac{1}{2} \sqrt{400} = -10 \text{ MPa}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{1}{2} \arctan \infty = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

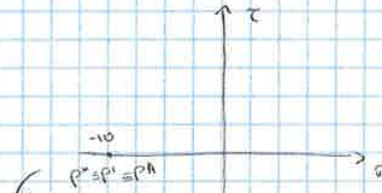
PRECISAZIONI CERCHI DI MOHR

$P'(0,0)$   $P''(12,0)$

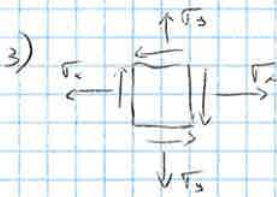


$P'(-10,0)$

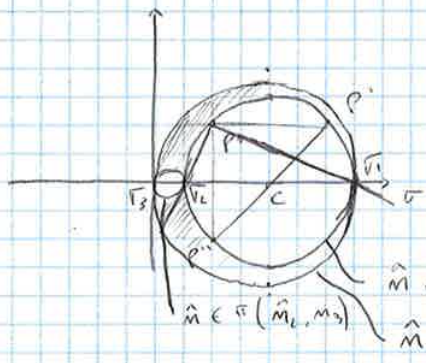
$P''(-10,0)$



|| STATO TENSIONALE IDROSTATICO: I 2 PUNTI ( $P'$  e  $P''$ ) COINCIDONO. → ISOSTATICITÀ



RELAZIONI FRA COSTRUZIONE CERCHI DI MOHR A 3 CERCHI E A 1 CERCHIO.



IN CASI COME QUESTO SI CONSIDERA  
SOTTO PUNTO  $\tau_3$  POSITO NEGATIVO.  
POI SI COSTRUISCONO GLI ALTRI 2  
CERCHI.

$\hat{m} \in \pi(\hat{m}_1, \hat{m}_2)$   
 $\hat{m} \in \pi(\hat{m}_2, \hat{m}_3)$   
 $\hat{m} \in \pi(\hat{m}_1, \hat{m}_3)$

LA "SECONDA" COSTRUZIONE DEI CERCHI DI MOHR PERMETTE DI DETERMINARE LO STATO TENSIONALE IN CUIQUE SI APPARTIENE AL PRIMO PRINCIPALE.

4) QUALSIASI STATO TENSIONALE TRIASSIALE PUO' ESSERE VISTO COME LA SOMMA DI UNO STATO TENSIONALE PIANO E UNO STATO TENSIONALE AD UNO L



# DIAGRAMMI E CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

POSSIAMO AVERE 3 TIPI DI DIAGRAMMA:

- N → sforzo normale
- T → TAGLIO
- M → momento flettente.

CASO 1:

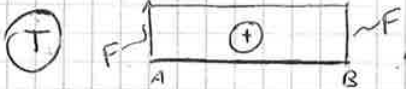
CONSIDERIAMO UNA STRUTTURA (MENSOCA):



ATALE MENSOCA SI APPLICA UNA FORZA F:  
 PER IL PRINCIPIO A/R CI SARÀ UNA FORZA  
 UGUALE ED OPPOSTA IN A.

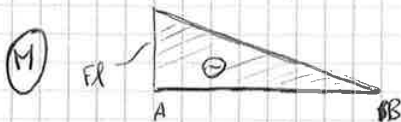


IL DIAGRAMMA DI TAGLIO È LINEARE LUNGO LA TRAVE E SEGUE LA DIREZIONE  
 DELLE FORZE APPLICATE.



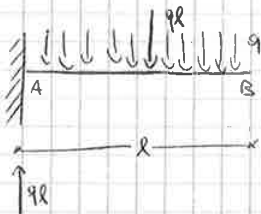
TAGLIO POSITIVO IN QUANTO TENDI A FAR RUOTARE  
 IN SENSO OROLOGIO LA TRAVE:  $T(z) = F$

IL DIAGRAMMA MOMENTO ESSENDO DIPENDENTE DALLA COORDINATA z, SI COMPORTA  
 IN MODO DIFFERENTE:

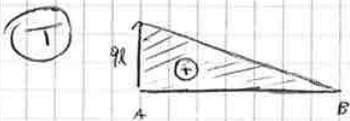


IL GRAFICO È LINEARE PER ASSUNZA DI CARICHI DISTRIBUITI.  
 ~~$M(z) = F(l-z)$~~   $M(z) = F(l-z)$

NOTA: SE IL CARICO È UNIFORME:

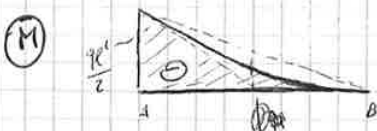


VI SARÀ UNA REAZIONE UGUALE ED OPPOSTA IN A



IN CASO DI CARICO DISTRIBUITO

$$T = q(l-z)$$



NEZ CASO DI CARICO DISTRIBUITO IL GRAFICO DI MOMENTO È  
 UNA PARABOLA:

$$M(z) = -q \frac{(l-z)^2}{2}$$

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + p_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + p_y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + p_z = 0 \end{cases}$$

COMPONENTI DI FUNZIONE:

IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\*  $[D]^T \{v\} + \{p\} = \{0\}$  → IN FORMA COMPATTA  
 ↳ EQUAZIONI STATICHE

COMPONENTI DI DEFORMAZIONE:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

\*  $\{E\} = [D] \{v\}$  → IN FORMA COMPATTA.  
 ↳ EQUAZIONI CINETICHE

NOTA:

LE 2 MATRICI NEI 2 CASI SONO UNA LA TRASPONDA DELL'ALTRA:

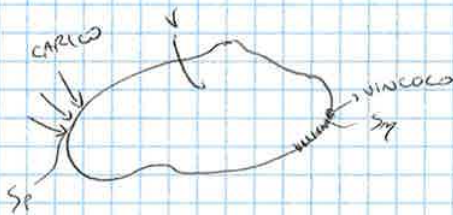
↳ DUALITA' STATICO-CINETICA.

# PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PER I SOLIDI DEFORMABILI.

IPOTESI: consideriamo 2 sistemi: STATICO e CINEMATICO  
 STATICO I 2 SISTEMI NON HANNO CONNESSIONI

SISTEMA (a)  $\Rightarrow [D]^t \{u_a\} + \{P_a\} = \{0\} \quad \forall P \in V$       CONDIZIONI STATICHE  
 $[N]^t \{u_a\} = \{P_a\} \quad \forall P \in S_p$

SISTEMA (b)  $\Rightarrow \{E_b\} = [D] \{u_b\} \quad \forall P \in V$       CONDIZIONI CINEMATICHE  
 $\{r\} = \{0\} \quad \forall P \in S_r$



$$\int_V \frac{dP}{dx} dV = \int_S P m_x ds \quad \text{--- } P = g \cdot h$$

$$\text{se } P = g \cdot h \Rightarrow \int_V \frac{dg}{dx} h dV + \int_V g \frac{dh}{dx} dV = \int_S g h m_x ds$$

NOTA:

$$([B][A])^t = [A]^t [B]^t$$

LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE DI VOLUME ESTERNE

$$\int_V \{P_a\}^t \{u_b\} dV = - \int_V ([D]^t \{u_b\})^t \{m\} dV =$$

NOTA:

$$= \int_V \{r\}^t [D] \{u_b\} dV - \int_S \{r\}^t [N] \{r\} ds = \left[ - \int_V \frac{d r_x}{dx} m dV = \int_V r_x \frac{dm}{dx} dV = - \int_S r_x m_x ds \right]$$

$$= + \int_V \{r\}^t \{E_b\} dV - \int_S ([N]^t \{r\})^t \{m\} ds = \int_V \{r\}^t \{E_b\} dV - \int_{S_p} \{P\}^t \{u_b\} ds - \int_{S_r} \{r\}^t \{m\} ds$$

INFINE SI OTTIENE:

LAVORO INTERNO (VIRTUALE)  $S = S_p + S_r$

$$\int_V \{P_a\}^t \{u_b\} dV + \int_S \{P_a\}^t \{u_b\} ds = \int_V \{u_a\}^t \{E_b\} dV$$

$$L_{V, \text{EXT}} - L_{V, \text{INT}}$$

L "PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI"

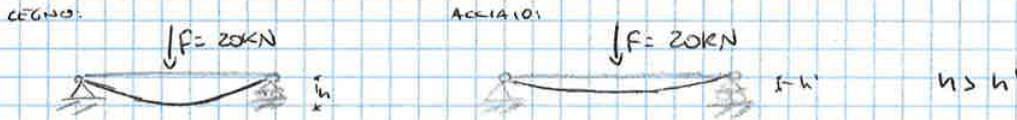
se  $V$  è RIGIDO:  $\{E_b\} = 0 \Rightarrow L_{V, \text{EXT}} = 0$

# I LEGAMI COSTITUTIVI. (LEGGE COSTITUTIVA ELASTICA)

NOTA

A CORPI AVENTI STESSA GEOMETRIA MA DIFFERENTE NATURA, CORRISPONDONO DEFORMAZIONI DIFFERENTI SOTTO LO STESSO SISTEMA DI FORZE.

ESEMPIO:



QUINDI E' NECESSARIO INTRODURRE IPOTESI CHE SPECIFICANO LA DIVERSITA' DEI LORO COMPORTAMENTI:

## TEORIA DELLE RELAZIONI COSTITUTIVE:

- 1) RELAZIONI CHE LEGANO LO STATO DI DEFORMAZIONI CON QUELLO DI TENSIONE;
- 2) RELAZIONI CHE RESTRINGONO LA CLASSE DELLE DEFORMAZIONI POSSIBILI.

• TRATTARE IL PIU' PUNTO:

LEGAME :  $\sigma = \sigma(\epsilon, \epsilon', t)$

ABBANDONO 3 COMPORTAMENTI: (LEGAMI)

- 1) COMPORTAMENTO ELASTICO : LE DEFORMAZIONI SI ANNULLANO ALL'ANNULLARSI DELLO STATO TENSIONALE
- 2) COMPORTAMENTO PLASTICO : AL CESSARE DELLA SOLLECITAZIONE RESTA UNA DEFORMAZIONE PERMANENTE
- 3) COMPORTAMENTO VISCOSO : LA DEFORMAZIONE CONTINUA A CRESCERE A DEFORMAZIONI COSTANTI.

NO APPROFONDITO.

## TEORIA DELL'ELASTICITÀ

DEF: SI DEFINISCE UN CORPO ELASTICO QUANDO IL CAMPO TENSIONALE  $[\sigma]$  È FUNZIONE DIRETTA E BIVOCICA DEL CAMPO DI DEFORMAZIONE  $[\epsilon]$ .

$$[\sigma] = \sigma([\epsilon])$$

"QUANDO  $\epsilon$  SI ANNULLA, SI ANNULLA ANCHE  $\sigma$ "

TALE TEORIA SI BASA SULLA LEGGE DI HOOKE:



RELAZIONE CHE LEGA FORZA ED DEFORMAZIONE:

$$F = kx$$

$k$ : RIGIDITÀ MATERIALE (MOCCA)

• TALE LEGGE DI HOOKE DEFINISCE L'ELASTICITÀ LINEARE !!!

IN TERMINI DI TENSIONI E DEFORMAZIONI, LA RELAZIONE CHE DEFINISCE L'ELASTICITÀ LINEARE È DATA DA BERNOULLI:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

(STABILISCE LA PROPORZIONALITÀ TRA  $\sigma$  E  $\epsilon$ ) ← MODULO DI YOUNG

UNA CLASSE MOLTO IMPORTANTE DEI MATERIALI CRISTALLINI È QUELLA DEI MATERIALI PLASTICI:

### • ELASTICITÀ

UN CORPO DEFORMABILE SI DICE IPER-ELASTICO QUANDO LA SUA ENERGIA DI DEFORMAZIONE, OVVERO IL LAVORO ESAGUITO PER PORTARLO IN UN DATO STATO DEFORMATIVO  $\{\epsilon\}$ , NON DIPENDE DAL PROCESSO DI CARICO MA SOLO DALLO STATO FINALE.

QUINDI L'ENERGIA DI DEFORMAZIONE DIVENTA UNA FUNZIONE DI STATO E IL LAVORO SVOLTO DA TALE ENERGIA DEVE ESSERE UN DIFFERENZIALE ESATTO.

SAPPIAMO CHE:

CORPO IPOTENASTICO  $\implies$  LAVORO È DIFFERENZIALE ESATTO

QUINDI:

È UN POTENZIALE DELLE DEFORMAZIONI

$\hookrightarrow$  IL PROCESSO DEFORMATIVO ANNIUNTE FORNENDO ENERGIA AL CORPO.

$\hookrightarrow$  TALE ENERGIA VIENE INTEGRALMENTE RISPITUITA AL CESSARE DELLE DEFORMAZIONI.

• IL POTENZIALE ELASTICO ( $\Phi$ )

$$dL_i = \int_V \{\sigma\}^t \{d\epsilon\} dV$$

PERCHÈ  $dL_i$  SIA UN DIFFERENZIALE ESATTO, OCCORRE CHE LO SIA INTEGRANDO:

$$d\Phi = \{\sigma\}^t \cdot \{d\epsilon\} \rightarrow \text{DEF. MATEMATICA DEL POTENZIALE ELASTICO.}$$

$\Phi$  È FUNZIONE DELLE 6 COMPONENTI DI DEFORMAZIONE:

$$\Phi = \Phi (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$$

TALI COMPONENTI SI DEDUCONO MEDIANTE DERIVAZIONE PARZIALE DI  $\Phi$ .

MATEMATICAMENTE POSSIAMO SCRIVERE:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} d\epsilon_x + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y} d\epsilon_y + \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z} d\epsilon_z + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

MA:  $d\Phi = \{\sigma\}^t \cdot \{d\epsilon\}$

QUINDI:  $d\Phi = \sigma_x d\epsilon_x + \sigma_y d\epsilon_y + \sigma_z d\epsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}$

CONFRONTANDO LE 2 ESPRESSIONI, OTTIENIAMO:

$$\sigma_x = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_y} \quad ; \quad \sigma_z = \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_z}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xy}} \quad ; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{xz}} \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}}$$

$\swarrow$   
ECCO OTTENUTE LE COMPONENTI DELLA TENSIONE.

POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE :

CONSIDERANDO IL LAVORO VIRTUALE INFINITESIMO  $d\psi = \{\sigma\}^t \cdot \{E\}$

SI HA ~~UNA~~ LA DIFFERENZIALE :  $d\phi + d\psi = d(\{\sigma\}^t \cdot \{E\})$

$d\phi + d\psi = \{\sigma\}^t \cdot \{dE\} + \{d\sigma\}^t \cdot \{E\}$  ← CHE SCRITTO IN FORMA ADDITIVA DIVENTA

SAPPIAMO INOLTRE CHE  $\phi$  e  $\{\sigma\}^t \cdot \{E\}$  SONO FUNZIONI DI STATO

QUINDI :  $d\phi$  ] DIFFERENZIALI ESATTI PERCUI  $\Rightarrow$   $\psi$  È FUNZIONE DI STATO  
 $d\psi$  DIFFERENZIALE ESATTO

$\psi$  : POTENZIALE ELASTICO COMPLEMENTARE.

FUNZIONE DEI 6 COMP. DI TENSIONE  $\Rightarrow \psi = \psi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$

RIAVVIAMO LE COMPONENTI PER DERIVAZIONE PARZIALE:

MATEMATICAMENTE:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz}$$

MA  $d\psi = \{\sigma\}^t \cdot \{dE\}$

QUINDI :  $d\psi = E_x d\sigma_x + E_y d\sigma_y + E_z d\sigma_z + \gamma_{xy} d\tau_{xy} + \gamma_{xz} d\tau_{xz} + \gamma_{yz} d\tau_{yz}$

CONFRONTANDO LE 2 ESPRESSIONI OTTENIAMO:

$$E_x = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_x} ; \quad E_y = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_y} ; \quad E_z = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xy}} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{xz}} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau_{yz}}$$



ECCO OTTENUTE  
LE COMPONENTI  
DI DEFORMAZIONE.

## ELASTICITÀ LINEARE

LA GRAN PARTE DEI MATERIALI PRESENTANO UN COMPORTAMENTO ELASTICO-LINEARE IN CUI  $\Psi = \Phi$ . TALI MATERIALI POSSONO ESSERE L'ACCIAIO O IL CALCESTRUZZO.

I CORPI ELASTICI-LINEARI SEGUONO LE CONDIZIONI DELLA LEGGE DI HOOKE  $\sigma = \bar{C} \cdot \epsilon$  APPLICATA AI CASI 3D.

SI PUÒ INTRODURRE UN TENSORE DEL IV ORDINE CHE TRASFORMA  $\sigma[\epsilon]$  IN  $[\sigma]$ :

$$[\sigma] = [[A]] \cdot [\epsilon]$$

↳ TENSORE DI ELASTICITÀ

IN GENERALE IL TENSORE  $[[A]]$  CONTIENE ~~81~~ 81 COMPONENTI MA, VISTA LA SIMMETRIA DI  $[\sigma]$  e  $[\epsilon]$ , IL TENSORE GODRE DELLE PROPRIETÀ DI SIMMETRIA MINORE:

$$A_{iksh} = A_{kish} = A_{ikhs} \quad (36 \text{ COMP. INDIPENDENTI})$$

IN CASI DI IPERELASTICITÀ IL TENSORE  $[[A]]$  GODRE ANCHE DELLA PROPRIETÀ DI SIMMETRIA MAGGIORE:

$$A_{ikih} = A_{jhik} \quad (21 \text{ COMP. INDIPENDENTI})$$

### DERIVAZIONE DELLE COSTANTI:

SI PUÒ SVILUPPARE LA FUNZIONE POTENZIALE ELASTICO IN SERIE DI TAYLOR (INTORNO ALLO STATO INDEFORMATO), NELL'IPOTESI DI PICCOLE DEFORMAZIONI.

IPOTIZZANDO LE PICCOLE DEFORMAZIONI POSSIAMO LIMITARCI A SVILUPPARE LA RESILIA FINO AL SECONDO ORDINE.

$$\begin{aligned} \Phi(\epsilon_x, \dots, \gamma_{yz}) = & \Phi(0) + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon_x} \right)_0 \epsilon_x + \dots + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_{yz}} \right)_0 \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x^2} \right)_0 \epsilon_x^2 + \dots \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz}^2} \right)_0 \gamma_{yz}^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \epsilon_x \partial \epsilon_y} \right)_0 \epsilon_x \epsilon_y + \dots + 2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma_{yz} \partial \gamma_{yz}} \right)_0 \gamma_{yz} \gamma_{yz} \right\} + \dots \end{aligned}$$



TRAMITE DERIVAZIONE PARZIALE SI OTTIENE IL "LEGAME COSTITUTIVO ELASTICO LINEARE".

$$\{\sigma\} = [H] \{\epsilon\}$$

SI RICAVA L'ESPRESSIONE BILINEARE DI  $\Phi$ :

$$\Phi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t [H] \{\epsilon\} = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t \{\sigma\}$$

POICHE' LO STATO INDEFORMATO DEVE RAPPRESENTARE UN MINIMO ASSOLUTO DI  $\Phi$ , LA MATRICE HESSIANA DEVE ESSERE DEFINITA POSITIVA.

IL FATTO CHE  $\det [H] > 0 \Rightarrow$  INVERTIBILITA' MATRICE

SE QUINDI ~~DETERMINO~~ POSSO SCRIVERE:

$$\{\epsilon\} = [H]^{-1} \{\sigma\} \quad (\text{LEGGE INVERSA})$$

QUINDI PER I CORPI ELASTICI SI HA:

$$\Phi = \Psi = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^t \{\epsilon\}$$

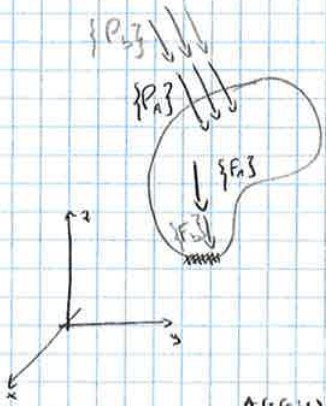
AL POTENZIALE ELASTICO CORRISPONDENTE SI PUO' DARE ALLORA LA SEGUENTE FORMA.

$$\Psi = \frac{1}{2} \{\sigma\}^t [H]^{-1} \{\sigma\}$$

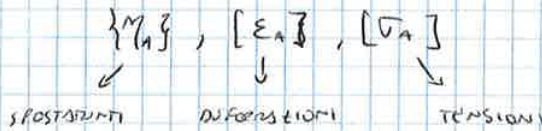
$\Psi$  E' UNA FORMA QUADRATICA DELLE COMPONENTI DI TENSIONE

• PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

CONSIDERIAMO, SU UN CORPO ELASTICO LINEARE, UN SISTEMA DI FORZE  $\{F_a\}$  e  $\{P_a\}$ :



PER EFFETTO DELLE FORZE  $\{F_a\}$ ,  $\{P_a\}$ , NASCONO:



AGGIUNGENDO FOR AL SISTEMA  $\{F_b\}$ ,  $\{P_b\}$  NASCONNO:

$$\{M_b\}, [E_b], [U_b]$$

E' POSSIBILE DIMOSTRARE CHE L'AZIONE SIMULTANEA DEI SISTEMI A e B PRODUCE LA "SOMMA DEGLI EFFETTI"

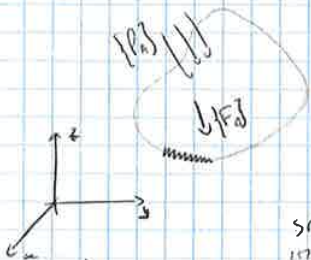
$$\begin{matrix} \{F_a\}, \{P_a\} \\ \{F_b\}, \{P_b\} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \{M_a\} + \{M_b\} \\ [E_a] + [E_b] \\ [U_a] + [U_b] \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{PRINCIPIO DI} \\ \text{SOVRAPPOSIZIONE EFFETTI} \end{array} \right.$$

NOTA:

LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI NON VALGONO PER IL CASO DI DEFORMAZIONE

$$L_{A+B} \neq L_A + L_B$$

• TEOREMA DI KIRCHHOFF (UNICITA' SOLUZIONE ELASTICA).



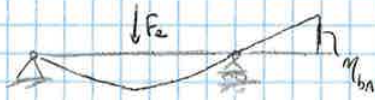
IL TEOREMA DICE CHE, SE SONO ASSIGNATI

$\{F_a\}$ ,  $\{P_a\}$ ,  $\{M_{0A}\}$ , SE LA SOLUZIONE DI  $\{M_a\}$  ESISTE, ESSA E' UNICA.

$$\underbrace{\{M_a\}, [E_a], [U_a]}_{\text{UNICI}}$$

ESEMPIO:

APPLICAZIONE TEORICA DI BETTI.



$$F_a \gamma_{ab} = F_b \gamma_{ba}$$

SE  $F_a = F_b = F \Rightarrow \boxed{\gamma_{ab} = \gamma_{ba}}$



PROBLEMA ELASTICO

$$[D]^t \{\sigma\} + \{f\} = \{0\}$$

$$[\sigma] = [H] \{\epsilon\}$$

$$\{\epsilon\} = [D] \{\gamma\}$$

IPOTESI L'ISOTROPIA:

(MATERIALE ISOTROPICO: HA LO STESSO COMPORTAMENTO IN TUTTE LE DIREZIONI)

$$\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23})$$

SE MI METTO NELLE S.R. PRINCIPALI:

$$\Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 + \text{DIREZIONI PRINCIPALI})$$

ISOTROPIA  $\Rightarrow \Psi = \Psi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$\Psi = a \sigma_1^2 + b \sigma_2^2 + c \sigma_3^2 + d \sigma_1 \sigma_2 + e \sigma_1 \sigma_3 + f \sigma_2 \sigma_3$$

NON DEVO CAPIRE SOTTOINTESO MA LO STO W TENSIONI PRINCIPALI.

$$\Rightarrow \boxed{\Psi = a(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + b(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)}$$

$(a=b=c) \quad (d=e=f)$

NELLE IPOTESI DI ISOTROPIA, I 21 COEFFICIENTI ELASTICI, SI RIDUCCONO A 2 ( $\bar{E}, \nu$ )

MA SE:

$a = \frac{1}{2E} \quad b = -\frac{\nu}{E}$

$$\Rightarrow \Psi = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3)$$

RICORDANDOCI GLI INVARIANTI DEI TENSORI DEGLI SFORZI:

$J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

$$\Psi = \frac{1}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - \frac{1}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3)$$

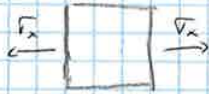
$$\Rightarrow \Psi = \frac{1}{2E} J_1^2 + \frac{1+\nu}{E} J_2 = \frac{1}{2E} J_1^2 + \frac{1}{2G} J_2$$

$J_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z)$

IN CUI  $\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$

✓ SIGNIFICATO FISICO

• SOLO  $\epsilon_x \neq 0$

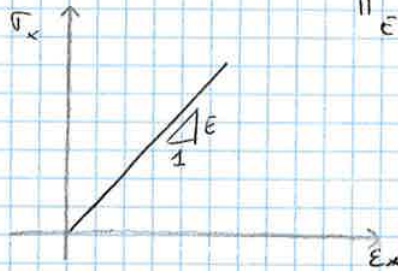


$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \epsilon_x$$

$$\epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \epsilon_x$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

DEFORMAZIONI:



|| E: MODULO DI ELASTICITA'  
NATURALE, MODULO DI  
YOUNG. || (PASCAL)

|| nu = COEFF. DI CONTRAZIONE TRASVERSALE, MODULO DI POISSON ||

DILATAZIONE VOLUMICA

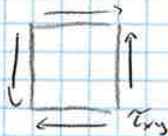
$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \left( \frac{1-\nu}{E} \right) \sigma_x$$

SONO CONCORDI

CASO LIMITE:

$$\nu = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = 0$$

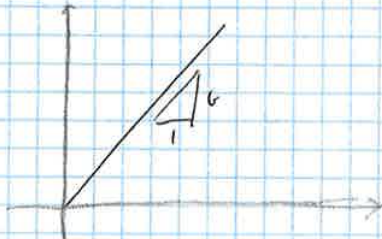
• SOLO  $\tau_{xy} \neq 0$



$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

DEFORMAZIONE:



G: MODULO DI ELASTICITA' TANGENZIALE

$$\tau_{xy} = 0 \Leftrightarrow \gamma_{xy} = 0$$

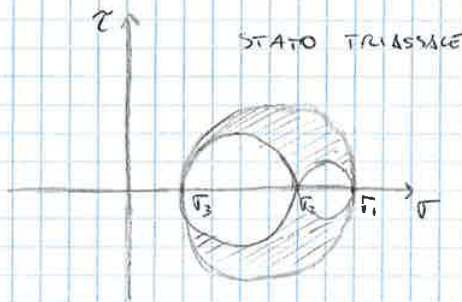
DIR. PRINCIPALI: 2 SUE TENSIONI e 2 SUE  
DEFORMAZIONI CONCORDI.

ABBIAMO 3 CRITERI DI RESISTENZA:

1) CRITERIO DI RANKINE (MASSIMA TENSIONE NORMALE).

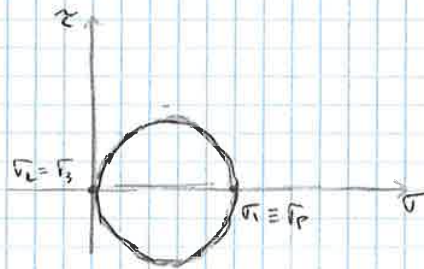
IPONIAMO  $\sigma_{max} < K$

ANALIZZANDO LA  $\sigma_{max}$  ATTRAVERSO IL METODO DEI CERCHI DI MOHR:



$\sigma_1 \neq 0$   
 $\sigma_2 \neq 0$   
 $\sigma_3 \neq 0$

STATO MONOASSIALE



$\sigma_1 \neq 0$   
 $\sigma_2 = 0$   
 $\sigma_3 = 0$

RANKINE DICE CHE  $\sigma_{max} = \sigma_1$  e  $\sigma_K = \sigma_p$

$\sigma_{max} < K \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_p$

$\sigma_{eq} = \max \{ |\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3| \} < \sigma_p$

RICAPITOLANDO:

RANKINE DICE CHE, DOPO AVER CALCOLATO LE 3 TENSIONI PRINCIPALI, PASSA SE LA PIU' GRANDE FUGA LE 3 E' MINORI DI  $\sigma_p$ , ALLORA LA DISUGUAGLIANZA E' CONFERMATA.

EVIDENZA SPERIMENTALE:

LA SOVRAPPRESIONE DI UNO STATO TENSIONALE IDROSTATICO NON HA INFLUENZA SULLA TENSIONE DI SNERVAMENTO.

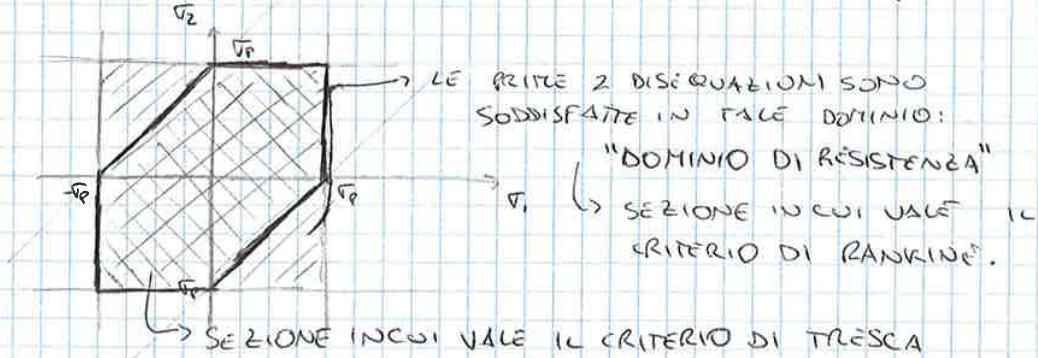
COSA SUCCEDDE SE LO STATO TENSIONALE È PIANO?

STATO TENSIONALE PIANO:  $(\Rightarrow) \sigma_3 = 0$

COSA SUCCEDDE AI CRITERI?

RANKINE:  $\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|\} < \sigma_p \rightarrow \begin{cases} |\sigma_1| < \sigma_p \\ |\sigma_2| < \sigma_p \end{cases}$

TRESCA:  $\max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} < \phi \sigma_p \rightarrow \begin{cases} |\sigma_1| < \sigma_p \\ |\sigma_2| < \sigma_p \\ |\sigma_1 - \sigma_2| < \phi \sigma_p \end{cases}$



• CRITERI DI RESISTENZA ENERGETICI.

1) CRITERIO DI BELTRAMI:

BELTRAMI DISEGNA CHE NON SI HA CRISI DEL MATERIALI SE  $\Phi < \Phi_p$

$\Phi_p$ : VALORI LIMITE ENERGETICI

$$\Phi = \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II}^2$$

"IL CRITERIO DI BELTRAMI NON SODDISFA L'EVIDENZA Sperimentale"

AD "AGGIUSTARE" TALE CRITERIO È STATO VAN MISES:

2) CRITERIO DI VAN MISES: (massima energia di distorsione).

$$[\sigma] = [\sigma^i] + [\sigma^d]$$

$\swarrow$  TENSORE DI STRESS  
 $\swarrow$  COMPONENTI IDROSTATICHE  
 $\swarrow$  COMPONENTI DEVIATORICHE

VAN MISES DISEGNA CHE NON SI HA CRISI SE:

$$\Phi^d < \Phi_p^d$$

ORA CI CHIAMAHO:

1 2 SISTEMI, IDROSTATICO e DEVIATORIO, SONO ENERGETICAMENTE  
ORTOGONALI?

PER VERIFICARE USANDO IL PRODOTTO SCALARE; HO 2 POSSIBILITÀ:

$$\sigma^d \{ \epsilon^d \} = \{ \epsilon^i \}^T \{ \sigma^d \}^T$$

Sviluppo il secondo prodotto

$$\begin{aligned} \{ \sigma^d \}^T \{ \epsilon^i \} &= (\sigma_x - \bar{\sigma}) \epsilon_x^i + (\sigma_y - \bar{\sigma}) \epsilon_y^i + (\sigma_z - \bar{\sigma}) \epsilon_z^i = \\ &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\bar{\sigma}) \frac{1-2\nu}{E} \bar{\sigma} = 0 \quad (\text{DIMOSTRATO CHE SONO} \\ &\quad \text{ORTOGONALI.}) \end{aligned}$$

• CRITERIO DI VAN MISES O DELLA MASSIMA ENERGIA DI DEFORMAZIONE:

$$\phi^d < \phi_p^d$$

ESPRESSIONE GENERALE DI  $\phi \Rightarrow \phi = \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II}$

DA CUI:

$$\phi^d = \frac{1}{2E} (J_I^d)^2 + \frac{1}{2G} (J_{II}^d)$$

SE I SISTEMI SONO ORTOGONALI:  $\phi = \phi^i + \phi^d + \cancel{\phi^{id}} = 0$   
 $\Rightarrow \phi^d = \phi - \phi^i$

QUINDI:

$$\begin{aligned} \phi^d = \phi - \phi^i &= \frac{1}{2E} J_I^2 + \frac{1}{2G} J_{II} - \frac{1}{2E} (J_I^i)^2 - \frac{1}{2G} J_{II}^i \\ &\quad \leftarrow J_{II} = J_{II}^i \right. \\ &\quad \left. J_{II}^i = -3\bar{\sigma}^2 = -\frac{J_I^2}{3} \right. \end{aligned}$$

$$\phi^d = \frac{1}{2G} \left( J_{II} + \frac{J_I^2}{3} \right) = \frac{1}{6G} (J_I^2 + 3J_{II})$$

- CONDIZIONI DI CARICO UNIASSIALE IN CONDIZIONE DI CRISI  
INCIDENTE.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\phi_p^d = \frac{1}{6G} (\sigma_p^2) \quad \text{VALORE CRITICO.}$$

RICAPITOLANDO, SARÀ IN SICUREZZA SE:

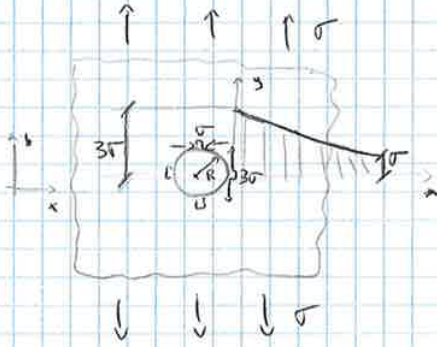
$$\frac{1}{6G} (J_I^2 + 3J_{II}) < \frac{\sigma_p^2}{6G}$$

TEORIA DI VAN MISES.

ARGOMENTI LEZIONE:

- 1) SOLIDO DI SAINT VENANT
- 2) SFORZO NORMALE.

SUPPONGO DI AVERE UNA LASTRA, CON UN FORO, SOTTOPOSTA A TENSIONI VERTICALI:



IN QUESTO CASO SI HA CRISI

QUANDO  $\sigma = \frac{\sigma_p}{3}$

COME CI SI ARRIVA?

$3\sigma = \sigma_p \Rightarrow \sigma = \frac{\sigma_p}{3}$

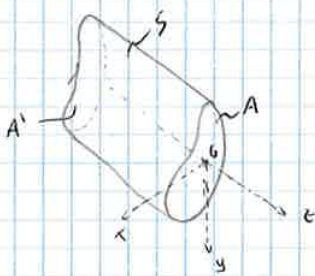
SOLIDO DI DE SAINT VENANT: (DSV)

- DSV È UN PARTICOLARE PROBLEMA ELASTICO
- LA GEOMETRIA È UN CILINDRO RETTO DI BASE ARBITRARIA

H<sub>p</sub>:

(x, y) È SISTEMA CARTESIANO

È: ASSI DEL SOLIDO DI D.S.V.



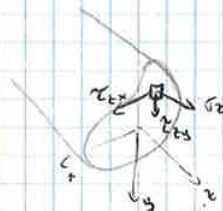
H<sub>p</sub>:

- MATERIALE ELASTICO, LINEARE, ISOTROPO, OMOGENEO.
- CARICHI:

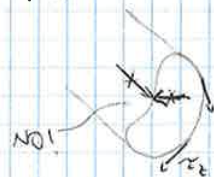
$\{P\} = \{0\}$  FORZE DI VOLUME NULLE  
 FORZE DI SUPERFICIE  $\neq 0$  SOLO SULLE BASI

$\{P\} = [N]^t \{0\} \Rightarrow$  SU A  $\{P\} = \{t_z\}$

SU A:  $m_x = m_y = 0$   
 $m_z = 1$



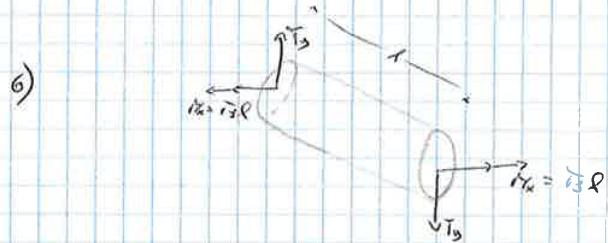
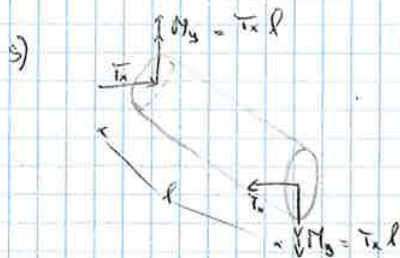
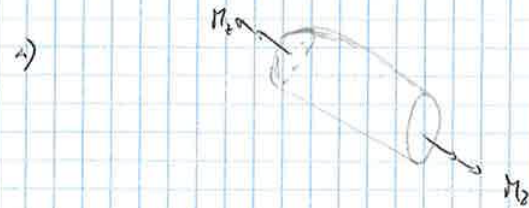
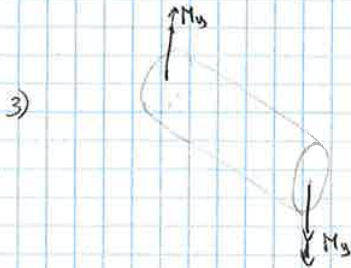
$\{P\} = \{0\}$  SU S



LE  $\tau$  POSSONO ESSERE SOLO TANGENTI ALLA LINEA ARBITRARIA POTREMMO  
 O  $\{P\} = \{0\}$



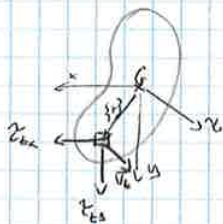
QUALI SONO I 6 CASI?



I CASI 5 e 6 DEI TAGLI NON VANNO BENE XW' NON SONO COMPLETI I MOMENTI, PER CUI SI AGGIUNGONO MOMENTI FLETTENTI. ESSENDO IL TAGLIO LA DERIVATA DEL MOMENTO, ANCHE IN PRESENZA DI M TROVARE ANCHE T.

~~PER~~ I 6 CASI ELEMENTARI SI RIDUCONO A 4:

- 1) SFORZO NORMALE N
- 2) MOMENTO TORCENTE  $M_z$  (TORSIONE)
- 3) FLESSIONE  $M_x$  (o  $M_y$ )
- 4) FLESSIONE e TAGLIO  $T_x, M_y$  (o  $T_y, M_x$ )



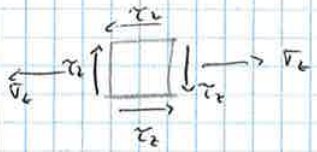
$$\{r\} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\{t_z\} = \tau_{zx}\hat{i} + \tau_{yz}\hat{j} + \tau_z\hat{k}$$

$$\bar{R} = \int_A \{t_z\} dA = \hat{i} \int_A \tau_{zx} dA + \hat{j} \int_A \tau_{yz} dA + \hat{k} \int_A \tau_z dA$$

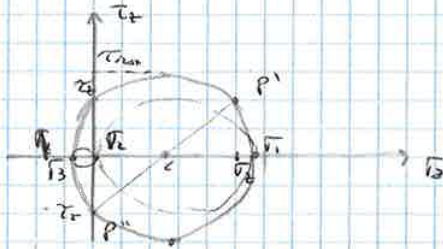


PER APPLICARE IL CRITERIO DI TRUSCA USUANDO  
LE MASSIME TENSIONI TANGENZIALI:



$$P' = (\sigma_z, \tau_z)$$

$$P'' = (0, -\tau_z)$$



$$\sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = 0$$

$\sigma_1, \sigma_3$  DISCORDI

$$\tau_{max} = R = \overline{CP'} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} < \tau_p = \frac{\sigma_p}{2}$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_z^2} < \sigma_p \quad \leftarrow \text{TRUSCA}$$

CAMPO DEFORMATIVO

$$E_{zz} = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA} = E_z \quad \text{DEFORMAZIONE ASSIALE}$$

$$E_x = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \frac{N}{EA} = E_x$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

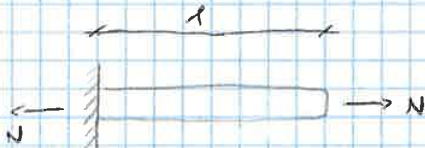
DEFORMAZIONI TRASVERSALI

E: RIGIDEZZA DEL MATERIALE

A: RIGIDEZZA GEOMETRICA

E·A: RIGIDEZZA ASSIALE

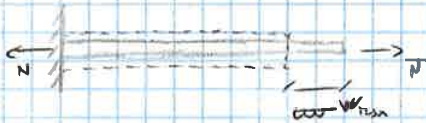
ESEMPIO:



SPOSTAMENTO MASSIMO

$$W_{max} = W(l) = \frac{Nl}{EA}$$

DIVENTA COSI':

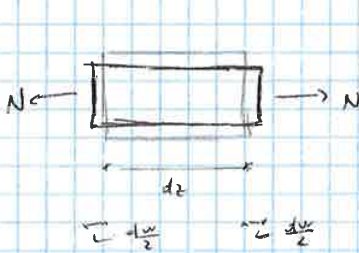


CAMPO DI SPOSTAMENTI:

$$E_z = \frac{dw}{dz} \Rightarrow w = \int E_z dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(z) = \int_0^z E_z dz = \frac{N}{EA} z$$

CONSIDERIAMO UN PEZZO DI SOLIDO DI DSV, SOGGETTO SOLO A N.



IL RESTRINGIMENTO E' DOWTO ALL'EFFETTO POISSON.

LO SPOSTAMENTO E' dw, PER SIMMETRIA SI SPOSTANO IN DUE DIREZIONI DI  $\frac{dw}{2}$

VUOLIO ORA CALCOLARE IL LAVORO PER UNITA' DI LUNGHERZA (OVVERO L'ENERGIA ELASTICA INDETERMINATA PER CUNO ELEMENTO).

CALCOLO IL LAVORO CON LE FORME DI CAPOURON:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} N \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} N E_z = \frac{N^2}{2EA} = \frac{dL}{dz}$$

LAVORO

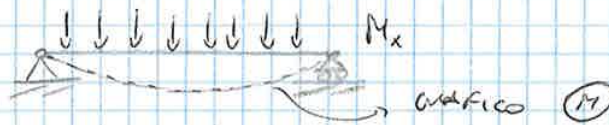
## SOLLECITAZIONE DI FLESSIONE: (AGISCE IL MOMENTO FLETTENTE)

- 2 TIPI DI FLESSIONI → FLESSIONI RETTA
- FLESSIONI CURVATA

• LA FLESSIONE RETTA AGISCE LUNGO GLI ASSI CENTRALI DI INERZIA.

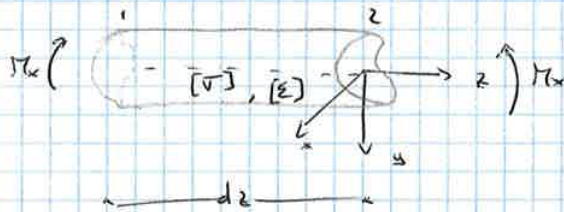
## FLESSIONE RETTA

TRAVE APPOGGIATA:



VOGLIAMO STUDIARE COSA SUCCEDE ALL'INTERNO DELLA TRAVE QUANDO AGISCE IL MOMENTO FLETTENTE.

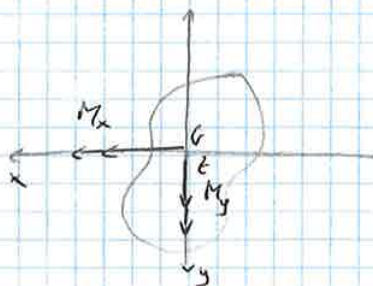
CONCETTO DI TRAVE:



LE PROPRIETÀ DI D.S.V. PORTA A CACCIA, ALL'INTERNO DEL SOLIDO GLI STATI DEFORMATIVI E TENSIONALI

|| PROPRIETÀ: TROVARE  $\epsilon$  E  $\sigma$  SOTTO L'AZIONE DI  $M_x$  ||

DEFINIZIONE:  
**FLESSIONE RETTA:** APPLICAZIONE DI UNA COMPONENTE DI MOMENTO ATTORNO AD UN ASSE CENTRALE  $(x, y)$ .



||  $M_x$  } FLESSIONI RETTE.  
 ||  $M_y$  }

A QUESTO PUNTO SCRIVO UN EQUILIBRIO ALLI ROTAZIONI:

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \, dA \quad \text{MA} \quad \sigma_z = E \cdot \left( -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot y \right)$$

$$\Rightarrow M_x = \int_A E \left( -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) y^2 \, dA \quad \rightarrow \quad M_x = E \left( -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \int_A y^2 \, dA \quad \xrightarrow{\quad} \quad I_x$$

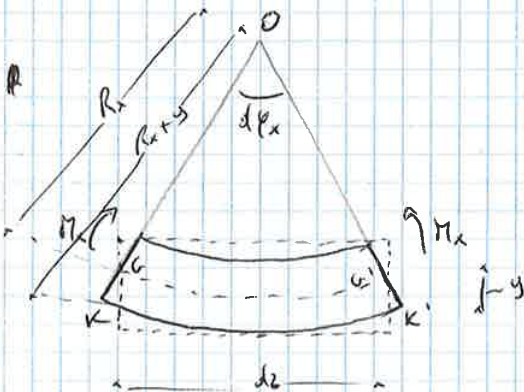
QUINDI  $M_x = E \cdot \left( -\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) I_x$

SI CHIAMA  $\chi_x$  LA CURVATURA

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \chi_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_x = -\frac{M_x}{EI_x}} \quad \leftarrow \text{CURVATURA FLESSIONALE}$$

GRAFICIZZANDO



SIMILITUDINE TRA I TRIANGOLI CURVILINEI

$$OO' \sim RO R'$$

$$\chi_x = \frac{1}{R_x} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

↓  
RAGGIO DI CURVATURA

↓  
RIGIDEZZA FLESSIONALE DELLA SEZIONE

RITORNIAMO ALLORA ALLE FORMULE PRECEDENTI:

$$\epsilon_z = -\chi_x \cdot y = \frac{M_x}{EI_x} \cdot y$$

DA CUI SI OTTIENE LA FORMULA DI NAVIER  $\rightarrow$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y}$$

↓  
TENSIONI IN OGNI PUNTO.

IN PRESENZA DI MOMENTO FLESSIONALE  $M_y$ :

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_y}{I_{yy}} \cdot x}$$

← caso con  $M_y$

↓  
STATO TENSIONALE  
PIONOASSIALE

COSA SUCCEDIE AL CUNEO:



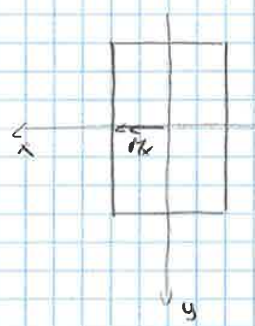
LE FIBRE DELL'ASSE NEUTRO NON VARIANO DI LUNGHEZZA

IL BARICENTRO NON SUBISCE SPOSTAMENTI

LE FIBRE COMPRESSE SI CONTRAONO

LE FIBRE TESI SI DILATANO

LO STATO DEFORMATIVO DI FLESSIONE E' PLURIASSIALE



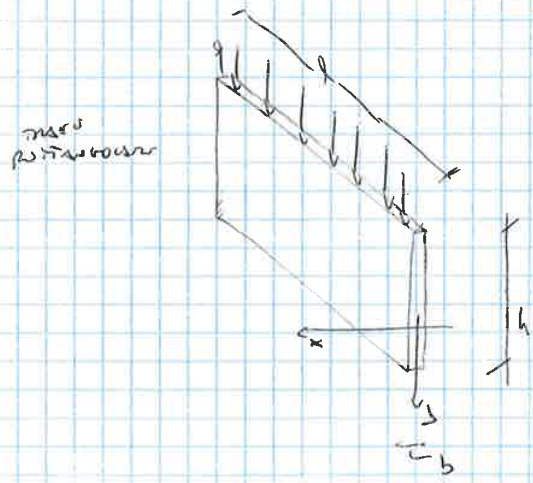
ASSIALI

$$\epsilon_z = \frac{F_z}{E} = \frac{M_x}{EI_x} \cdot y$$

DILATAZIONI TRASVERSALI

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\nu \int \epsilon_z = -\nu \frac{M}{EI_x} y$$

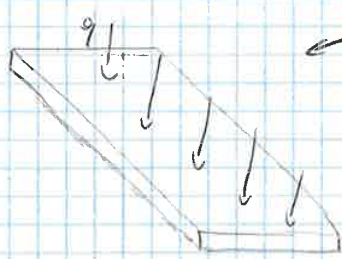
RUOLO DELL'INERZIA DELLE TRAVI



$$h \gg b$$

caricando la trave con q nasce un  $M_x$ . la trave si curva ancora sull'ASSE FORTE.

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

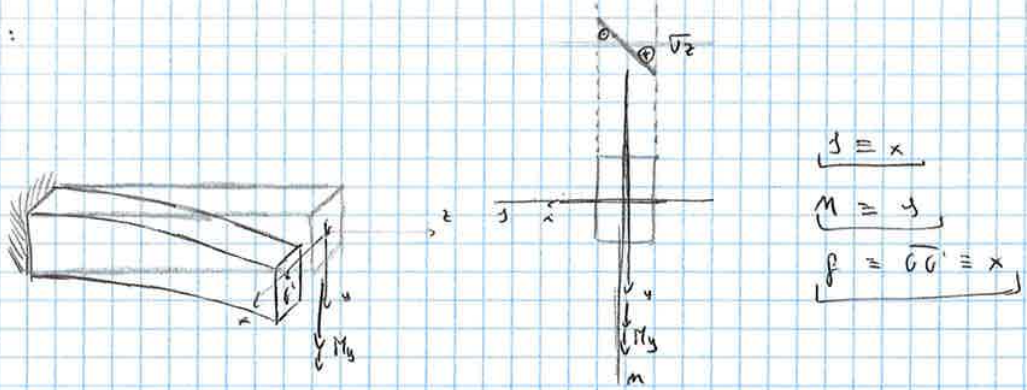


trave curvata sull'ASSE DEBOLLE

$$I_y = \frac{b^3h}{12}$$

CONFRONTANDO LE 2 REAZIONI  $\Rightarrow \sigma_z(M_x) < \sigma_z(M_y)$

GRAFICA MENNE:



$$\sigma_z = - \frac{M_y}{I_y} x$$

n)  $\sigma_z = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow M \Rightarrow M \equiv y$

$M_y > 0$  TENDE LE FIBRE SU  $x = 0$

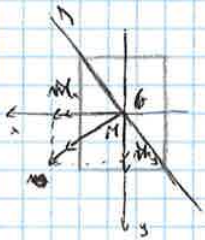
ARRIVIAMO A ~~SOTTOPONERE~~ CHE:

$$\boxed{y = z}$$

• FLESSIONE DEVIATA:

LA FLESSIONE SI DICE DEVIATA SE  $\Delta$  NON COINCIDE CON ASSI CENTRALI

ESEMPLO:



Per la sovrapposizione

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\Delta \perp M$$

EQUAZIONE ASSI:  $y = m_y x$  con  $|m_y| = \left| - \frac{M_x}{M_y} \right|$  COEFF. ANGOLARI ASSI SOLUCIATORI

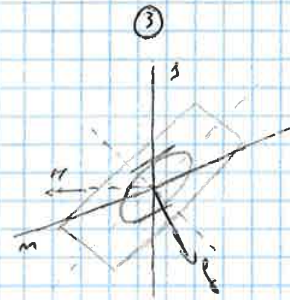
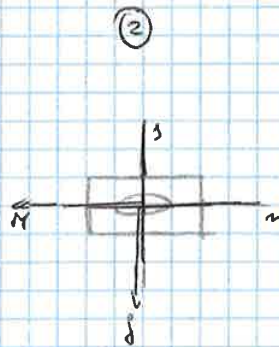
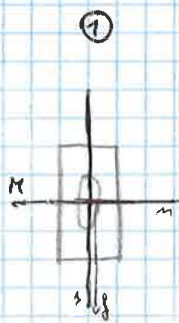
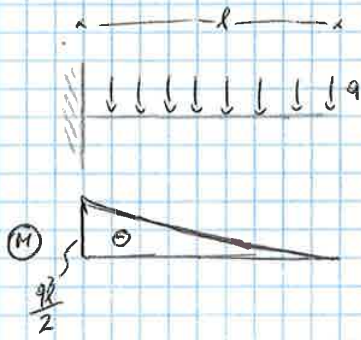
n)  $\sigma_z = 0 \Rightarrow y = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x \Rightarrow m_m = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y}$

$$\boxed{m_y \Leftrightarrow \frac{I_x}{I_y} \Rightarrow I_x = I_y \Rightarrow \text{SEZIONE OROSCOPICA}}$$

LA FLESSIONE È SIMMETRICA.

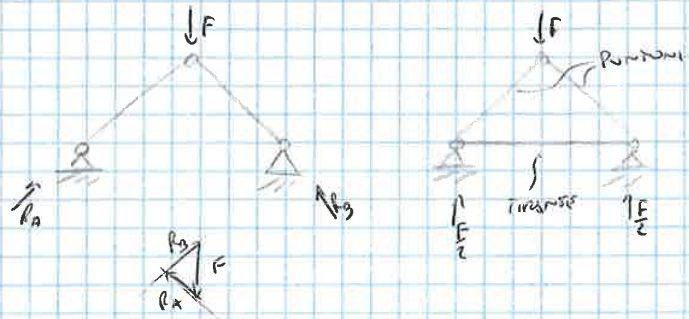
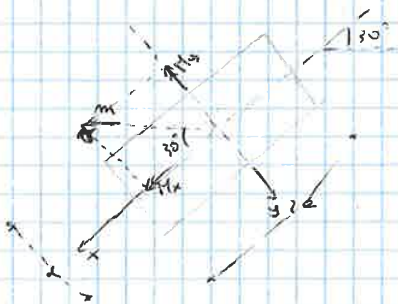
$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow M_x = 0 \\ \rightarrow M_y = 0 \end{array} \right\} \text{FLESSIONE RETTA}$$

MENSOLA SEZIONE DEVIATA RETTANGOLARE SOGGETTA A UNO UNIFORME:



Il  $\neq 3$  ma sbanda nuova direzione in cui esiste una inertia minore.

ALTRO ESEMPIO:



$$I_x = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

$$M_x = m \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} m$$

$$M_y = -m \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} m$$

$$I_x = \frac{(2a)^2}{12} = \frac{a^2}{3}$$

$$I_y = \frac{a(2a)^2}{12} = \frac{2}{3} a^2$$

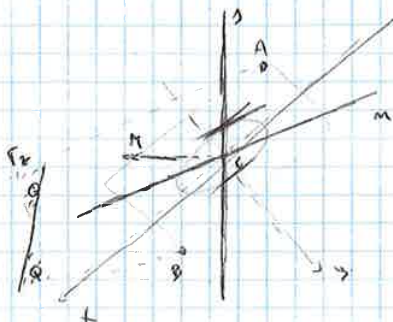
$$A \begin{cases} x_A = -a \\ y_A = -\frac{a}{2} \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x_B = a \\ y_B = \frac{a}{2} \end{cases}$$

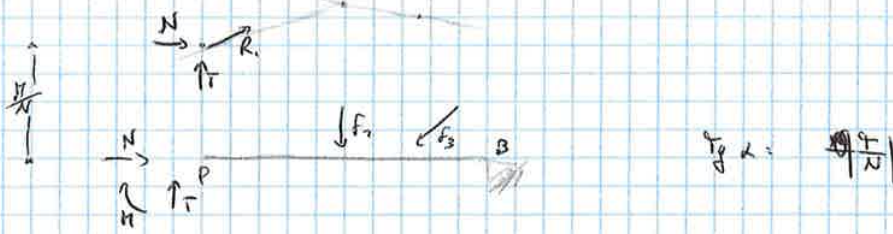
$$I_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{\frac{a^2}{3}} \left( -\frac{a}{2} \right) - \left( -\frac{m}{2} \right) \left( -\frac{a}{2} \right)$$

$$I_A \approx -3,35 \text{ m/e}^2$$

$$I_B \approx 2,35 \text{ m/e}^2$$



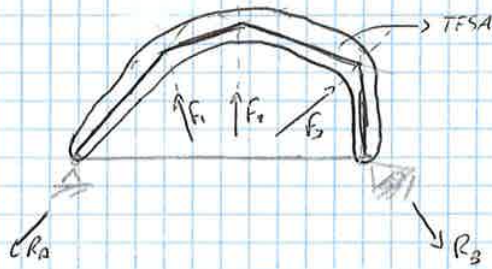




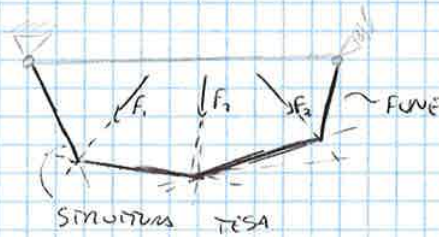
SE L'ASSE DELLA TRAMIA COINCIDE CON LA CURVA DELLE PRESSIONI

$\Rightarrow d=0 \Rightarrow M=0 \Rightarrow$  STRUTTURA SOGGETTA SOLO A  $N(x)$

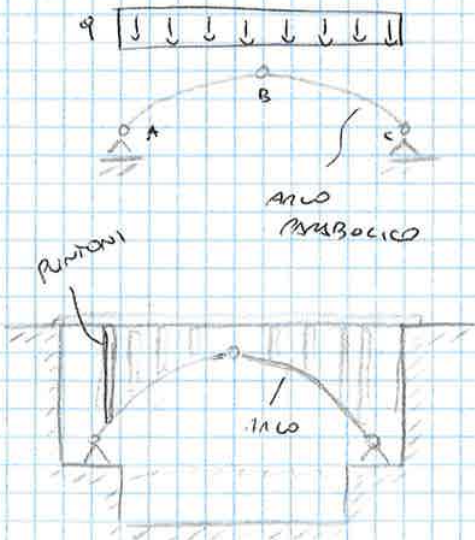
• COSA SUCCEDERÀ SE INVARIAMO TUTTE LE FORZE?



MECCO LA SIMMETRIA:



SE  $q = \text{cost} \Rightarrow M: \text{PARABOLICO} \Rightarrow e = \frac{M}{N}$  PARABOLICO  $\Rightarrow$  C.D.P. PARABOLICA.

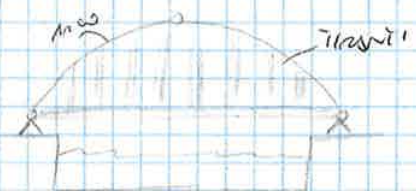


LA C.D.P. È UNA PARABOLA CHE HA PASSANO X L'3 CENTRO.

TALM STRUTTURA HA ASSE  $\equiv$  SIMMETRIA  $\Rightarrow$  QUINDI È SOGGETTA SOLO A N.

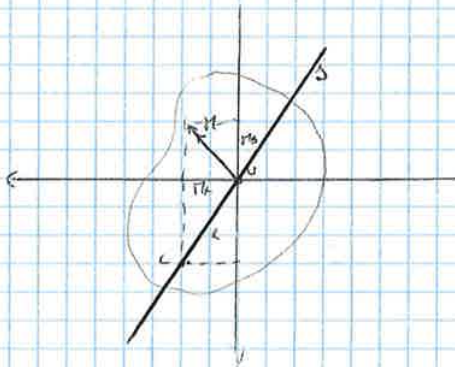
TRALICCI

OPPURE:



COME TROVARE GLI ASSI?

$$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$



→ Δ: CONGIUGATI  $\bar{C}G$

→ ASSE NUOVO:  $\bar{I}_2 = 0$

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = 0$$

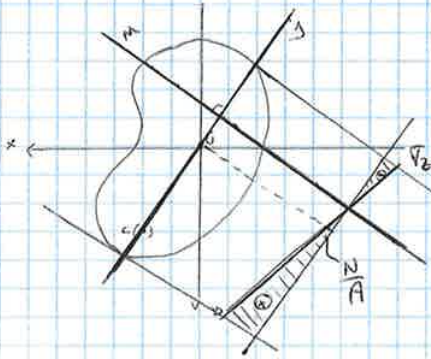
M HA STESSA DIREZIONE CONIUGATA Δ A RISULTO ACCESSIBILE È, MA ONI M NON È PU' BARICENTRO

→  $\beta \perp M$

EQUAZIONE DI M:

$$m) \frac{N}{A} + \frac{N_{yc}}{I_x} y + \frac{N_{xc}}{I_y} x = 0 \Rightarrow \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{y_c y}{\beta_x^2} + \frac{x_c x}{\beta_y^2} \right) = 0$$

DIAGRAMMA DELLE TENSIONI:

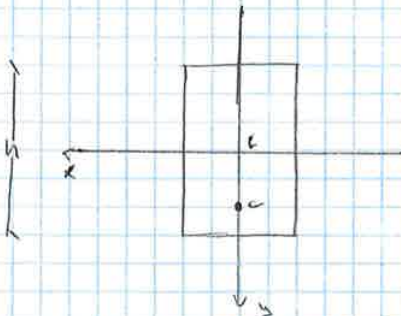


→ DIAGRAMMA DI  $\bar{I}_2$

● CASO DI PRESSOFLESSIONE RETTA IN SEZIONE RETTANGOLARE.

$$\hookrightarrow c(0, y_c) \Rightarrow c \in y \quad y_c > 0$$

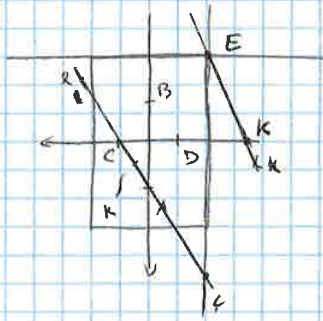
$$\beta_x^2 = \frac{h^2}{12}$$



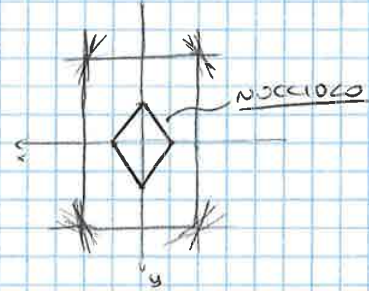
$$m) 1 + \frac{y y_c}{\beta_x^2} = 0 \rightarrow \boxed{y = -\frac{\beta_x^2}{y_c}}$$

3 CASI  $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ USANDO ASSI SEZIONI} \\ M \text{ TANGENTI ASSI SEZIONI} \\ M \text{ SULLI ASSI SEZIONI} \end{array} \right.$

~~ESERCIZIO~~ COMPLICANTE:



HO DIMOSTRATO CHE K  
NOCCIOLO CENTRALE  
DI INERZIA È UN  
ROTTO



$$E \in \alpha, \zeta \Rightarrow A, C \in r \Rightarrow \zeta \equiv AC$$

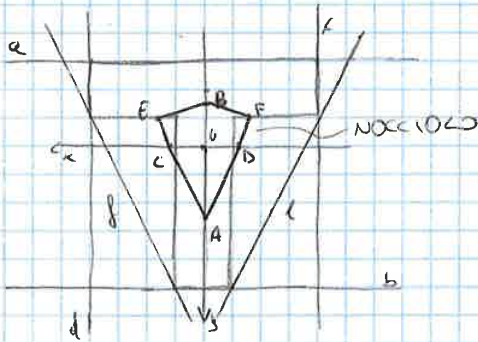
$$K \in r \Rightarrow E \in K$$

ESERCIZIO A CASA 1

CALCOLO NOCCIOLO CENTRALE DI INERZIA RETTA TANGENTE NON SECANTE  
LA SEZIONE:

$$t) \quad Mx + Vy + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_c = M p_y^2 \\ y_c = V p_x^2 \end{cases}$$

$$m) \quad \frac{x_c}{p_y^2} x + \frac{y_c}{p_x^2} y + 1 = 0$$



TRACCIO W RETTE TANGENTI, NON SECANTI, a, b, c, ...  
 È VOTO LA FIGURA CHE RISULTA  
 IL NUMERO DI RETTE È UGUALE AL NUMERO DI  
 VERTICI.

# LAVORO DI DEFORMAZIONE

QUANTO VALE?

$$\frac{dL}{dz} = \int_A \Psi \, dA = \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} \, dA =$$

$$\text{ma } \int_A x \, dA = S_y = 0$$

$$\int_A y \, dA = S_x = 0$$

$$\int_A xy \, dA = I_{xy} = 0$$

$$= \frac{1}{2E} \int_A \left( \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \right)^2 dA =$$

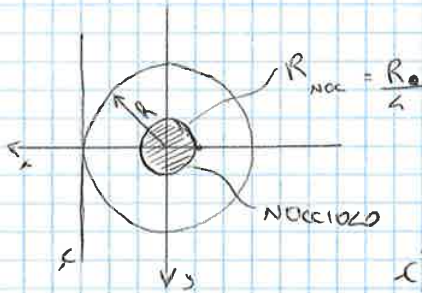
$$= \frac{N^2}{2EA} + \frac{M_x^2}{2EI_x} + \frac{M_y^2}{2EI_y} = \frac{1}{2} N \epsilon + \frac{1}{2} M_x \chi_x + \frac{1}{2} M_y \chi_y$$

VALE LA SOMMAZIONE DEI TRE EFFETTI:

IL LAVORO È LA SOMMA DEI LAVORI.

## ESERCIZIO:

CALCOLO DEL NOCCIOLO.



$$C \begin{cases} x_c = m \rho_y^2 \\ y_c = v \rho_x^2 \end{cases}$$

$$c) \quad m x + v y + 1 = 0$$

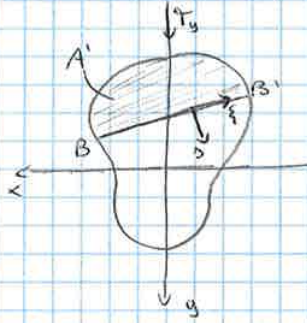
$$c) \quad x = R \Rightarrow \frac{-1}{R} x + 1 = 0 \quad \begin{cases} m = -\frac{1}{R} \\ v = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{COORDINATE} \\ \text{CENTRO DEL} \\ \text{NOCCIOLO} \end{array}$$

$$C \begin{cases} x_c = -\frac{1}{R} \\ y_c = 0 \end{cases}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_c = I_y^c = \frac{\pi R^4 / 4}{\pi R^2} = \frac{R^2}{4}$$

CALCOLO UNA  $A'$  "INTEGRALE"



$\vec{\tau}_{23} \perp \hat{m}$  NEL CONTORNO DI  $A'$

$$q = - \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x}$$

ESCE TUTTO DA  $BB'$

$$\oint_{\partial A'} \vec{\tau}_{23} \cdot \vec{m} \, ds = \int_B^{B'} \tau_{23}(\xi) \, d\xi = - \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x}$$

$$\vec{\tau}_{23} \cdot \overbrace{BB'}^b = \left| - \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x} \right|$$

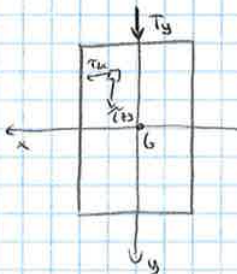
$$\tau_{23} = \left| - \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x b} \right|$$

$$\tau_{23} = \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x b}$$

FORMULA DI SOURAWSKY

↳ PER IL CALCOLO DELLE TENSIONI

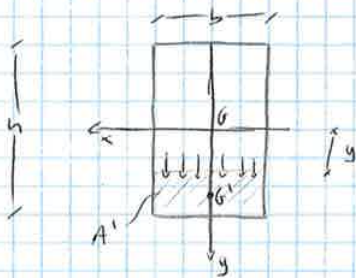
CALCOLO DELLE TENSIONI TANG.



1)  $\tau_{2x}$  SI PUO' TRASCURARE

IL CALCOLO PRINCIPALMENTE QUANDO SI  $\tau_{2y}$

calcolo  $\tau_{2y}$



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$S_x^{A'} = b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h/2 + y}{2} \right) = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$\tau_{2y} = \frac{T_y \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{3 T_y}{2 bh} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)$$

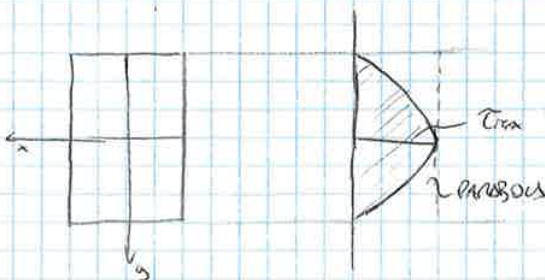
NOTA:

$$q = - \frac{T_y S_x^{A'}}{I_x}$$

→  $q > 0$  FLUSSO USCENTE

$q < 0$  FLUSSO ENTRANTE

TRACCIO IL DIAGONALE:



$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A}$$

RESULTANTE:

$$\tau_{2y} = \frac{2}{3} \tau_{max} h b = T_y$$

$$\frac{T}{A} = \tau_{media}$$

Per CURVYON si sa che:

$$dL_{DEF} = \frac{1}{2} T_y dV_r \quad \Rightarrow \quad \frac{dL_{DEF}}{dz} = \frac{1}{2} T_y \delta_y$$

divisorio per dz

$$\text{ma } \frac{dL_{DEF}}{dz} = \int_A \Psi dA = \int_A \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dA$$

EGUAGLIAMO I SECONDI MEMBRI:

$$\frac{1}{2} T_y \delta_y = \int_A \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dA \quad \text{E' ESPRESSIONE DA RISOLVERE}$$

CALCOLO DI  $\int_A \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dA$ :

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dA &\Rightarrow \frac{g T_y^2}{2} \frac{1}{A^2} b h \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)^2 \frac{dy}{h} \quad \text{se } t = \frac{y}{h} \\ &= \frac{g T_y^2}{2} \frac{1}{b^2 h^2} b h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - t^2)^2 dt \Rightarrow \frac{g T_y^2}{2} \frac{1}{b h} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - 2t^2 + t^4) dt = \\ &= \frac{g T_y^2}{2} \frac{1}{b h} \left[ t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right] \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{g T_y^2}{2} \frac{1}{b h} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \right] = \frac{3g T_y^2}{12bh} \frac{1}{30} = \frac{6}{5} \frac{1}{bh} \end{aligned}$$

NEI' EQUAZIONI SI HA QUINDI:

$$\frac{1}{2} T_y \delta_y = \frac{1}{2G} \frac{6}{5} \frac{T_y^2}{b h} \Rightarrow \delta_y = \frac{6}{5} \frac{T_y}{GA}$$

FORMULE DI RISOLUZIONE

$t_3$ : FATTOR DI TAGLIO  
(FUNZIONE DELLA SEZIONE)

$$E_L = \frac{N}{EA} \quad \chi_x = \frac{M_x}{EI_x}$$

• PROBLEMA ELASTICO LINEARE PER TRAVI RETTILINEE

SOLIDI DEFORMABILI :

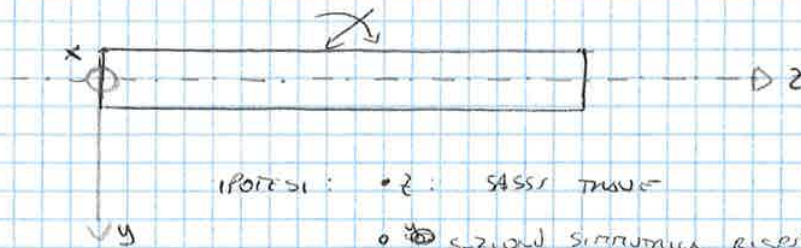
$$\left. \begin{array}{l} \text{CONDIZIONI} \\ \text{CONTORNO} \end{array} \right\} \begin{array}{l} [D]^t \{v\} = -\{F\} \\ [N]^t \{\sigma\} = \{p\} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{CONDIZIONI} \\ \text{CONTORNO} \end{array}} \right\} \text{EQUAZIONI STATICHE}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{CONTORNO} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \{e\} = [D] \{M\} \\ \{M\} = \{M_0\} \end{array} \left. \vphantom{\text{CONTORNO}} \right\} \text{EQUAZIONI CINEMATICHE}$$

$$\{\sigma\} = [H] \{e\} \quad \text{EQUAZIONI COSTITUTIVE}$$

VOGLIAMO ORA ELABORARE UNA TEORIA CHE SIA VALIDA PER LE TRAVI ;  
(PILONE DIMENSIONALI).

IPOTESI E GRANDEZZE :



- IPOTESI :
- z : SASSI TRAVE
  - sezioni simmetriche rispetto a y
  - travi caricate nel piano y, z

FATTE QUESTE 3 IPOTESI SI ARRIVA A DEFINIRE TALI PROBLEMI COME UN PROBLEMA PIANO:

- L'ASSE RIMANE NEL PIANO (y, z) A DEFORMAZIONE AVVENUTA.
- LE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE INTERNA SI RIDUCONO DA 6 A 3.

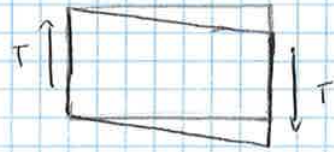
QUINDI SI PASSA DA:  $\{Q\}^t = \{T_x, T_y, N, M_x, M_y, M_z\}$  6. → caratteristiche generali

A:  $\{Q\}^t = \{T_y, N, M_x\}$  3. → possono divenire i principali.

$$\{Q\}^t = \{T, M, N\}$$

• EQUAZIONI COSTITUTIVE:

CORSIO:



$$\gamma_{xy} = t_{xy} \frac{I}{GA}$$



$$\epsilon_z = \frac{N}{EA}$$



$$\chi_x = \frac{M}{EI_x}$$

IN FORZA RESTRICTIVE:

$$\begin{bmatrix} \delta_s \\ \epsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xy}/GA & 0 & 0 \\ 0 & 1/EA & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ M \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{FORZA ESPANSIVA}$$

$$\{q\} = [H]^{-1} \{Q\} \quad \leftarrow \text{FORZA COMPATTA}$$

- LAVORO DI DEFORMAZIONE DEL CORSO:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} \{q\}^t \{q\} \rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2} T \gamma_s + \frac{1}{2} N \epsilon_z + \frac{1}{2} M \chi_x$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \left\{ \frac{1}{2} \left( t_{xy} \frac{T^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EI_x} \right) \right\}$$



SOSTITUENDO I VALORI TROVATI:

$$\begin{cases} \epsilon_y = 0 & \Leftrightarrow v_y(z) = 0 \cos z \\ \epsilon_z = \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} y \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v_0}{\partial z} + p \end{cases}$$

POSSO SOSTITUIRE IL SIMBOLO DI DERIVATA PARZIALE CON QUELLO DI DERIVATA TOTALE  $\Leftrightarrow$  SI CONSIDERA DEFORMAZIONE PUNTO.

COMPONENTI: DUE DEFORMAZIONI PUNTO x PUNTO

$\begin{cases} \epsilon_y = 0 \\ \epsilon_z = \frac{dw_0}{dz} + \frac{dp}{dz} y \\ \gamma_{yz} = \frac{dv_0}{dz} + p \end{cases}$	----->	$\bar{\epsilon}_z$ : DILATAZIONE ASSIALE	CARATTERISTICHE DUE DEFORMAZIONI PER LA TRAVE
	----->	$\bar{\chi}_x$ : CURVATURA FLESSIONALE	
	----->	$\bar{\gamma}_y$ : SCORRIMENTO MEDIO PER TAGLIO	

LAVORO DEFORMAZIONE CONCIO:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \int_A (\bar{\gamma}_z \epsilon_z + \bar{\gamma}_y \epsilon_y + \frac{\tau_{yz} \gamma_{yz}}{1000}) dA$$

DA CUI:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} \left( \bar{\epsilon}_z \int_A \bar{\gamma}_z dA + \bar{\chi}_x \int_A \bar{\gamma}_z y dA + \bar{\gamma}_y \int_A \tau_{yz} dA \right)$$

$$\boxed{\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} T \bar{\gamma}_y + \frac{1}{2} N \bar{\epsilon}_z + \frac{1}{2} M \bar{\chi}_x}$$

CARATTERISTICHE DEFORMAZIONI PER LA TRAVE RETTILINEA.

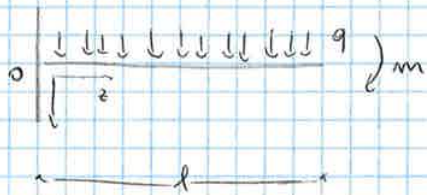
$$\begin{cases} \bar{\gamma}_y(z) = \frac{dv_0}{dz} + p \\ \bar{\epsilon}_z(z) = \frac{dw_0}{dz} \\ \bar{\chi}_x(z) = \frac{dp}{dz} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_y(z) = \frac{dv}{dz} + p \\ \epsilon_z(z) = \frac{dw}{dz} \\ \chi_x(z) = \frac{dp}{dz} \end{cases}$$

VETTORI:  $\{q\}^t = \{\gamma_y, \epsilon_z, \chi_x\}$ ;  $\{m\}^t = \{v, w, p\}$

MATRICE  $\Rightarrow$

$\begin{bmatrix} \gamma_y \\ \epsilon_z \\ \chi_x \end{bmatrix}$	$=$	$\begin{bmatrix} \frac{d}{dz} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dz} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dz} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} v \\ w \\ p \end{bmatrix}$	$\Rightarrow$	$\boxed{\{q\} = [D] \{m\}}$

ESEMPIO:



$$0 < z < l$$

DEVE VALERE CHE  $[L] \{ \eta \} = - \{ F \}$

CONDIZIONI AL CONFINO:

$$z=0 \Rightarrow \{ M \} = \{ M_0 \} \quad \text{CINEMATICO}$$

$$z=l \Rightarrow \{ Q \} = \{ Q_0 \} \quad \text{STATICO}$$

SI ANNUNCIANO TAGLIO E SFORZO N.

RISUMENDO:

FORMULAZIONE FINALE:

$$\begin{cases} [L] \{ \eta \} = - \{ F \} & \Leftrightarrow & 0 < z < l \\ ([H][D]) \{ \eta \} = \{ Q_0 \} & & z = 0, l \\ \{ M \} = \{ M_0 \} & & z = 0, l \end{cases}$$

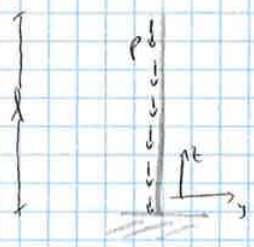
DIAGRAMMI:



$$\begin{cases} w = \left(\frac{F}{EA}\right) z \\ N = F \end{cases}$$



• ESERCIO 2:



$$\begin{cases} \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{P}{EA} \\ w(0) = 0 \\ N(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = \frac{P}{EA} \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2 \\ w(0) = 0 \\ w'(0) = 0 \end{cases}$$

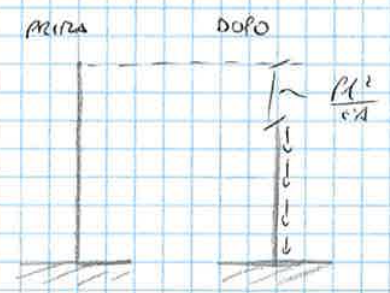
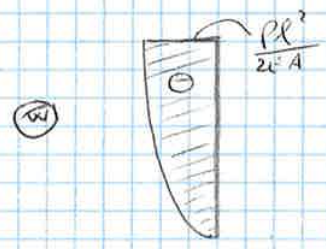
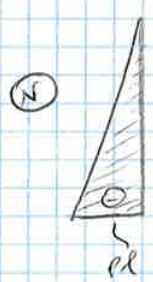
DA CUI W CONDIZIONI AL CONTORNO DAVVISO

$$c_1 = -\frac{Pl}{EA} \quad c_2 = 0$$

QUINDI:

$$w = \frac{P}{EA} \frac{z^2}{2} - \frac{Pl}{EA} z \Rightarrow \begin{cases} w = \left(\frac{P}{EA}\right) \left(\frac{z^2}{2} - z\right) \\ N = -P(l-z) \end{cases}$$

DIAGRAMMI



DALLE CONDIZIONI AL CONFINO SI ARRIVA A SCRIVERE:

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{F}{EI_x} \left( lz - \frac{z^2}{2} \right) \\ \frac{dv}{dz} = l_3 \frac{F}{G \cdot A} + \frac{F}{EI_x} \left( lz - \frac{z^2}{2} \right) \rightarrow \text{1 INCONFINA} \end{cases}$$

POSSO INTEGRARE:

$$v = l_3 \frac{F}{GA} z + \frac{F}{6EI_x} (3lz^2 - z^3) + c_2$$

ESSENDO  $v(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$\begin{cases} \varphi = -\frac{F}{EI_x} \left( lz - \frac{z^2}{2} \right) \\ v(z) = l_3 \frac{F}{G \cdot A} z + \frac{F}{6EI_x} (3lz^2 - z^3) \end{cases}$$

$\underbrace{\quad}_{v'(z)} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{v''(z)}$

RIPORTO DAZZA LA FUNZIONE SPOSTAMENTO:

$v'(z)$ : CONTRIBUTO ALLA DEFORMABILITA' A TAGLIO

$v''(z)$ : CONTRIBUTO DEFORMABILITA' FLESSIONALE.

$$v(z) =$$

DIAGRAMMANDO:



CONTRIBUTO DEL TAGLIO  
 $v'(z)$



CONTRIBUTO DELLA FLESSIONE  
 $v''(z)$

I 2 CONTRIBUTI HANNO LA STESSA IMPORTANZA?

CON FACILE A SAPERLO? VARIAMO LA FRECCIA DI APPLICAZIONE DELLA FORZA E NE CALCOLO IL RAPPORTO

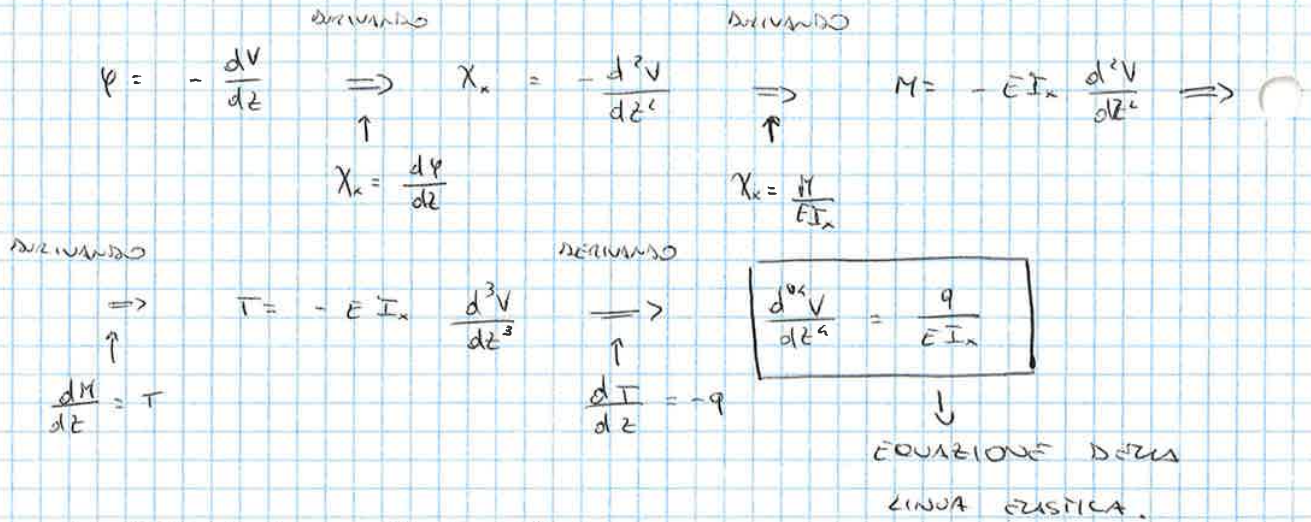
$$v'(l) = l_3 \frac{F}{G \cdot A} l$$

$$v''(l) = \frac{Fl^3}{6EI_x}$$

ESSENDO IL RAPPORTO:

$$\frac{v'(l)}{v''(l)} = \frac{3l_3 EI_x}{GA J_0}$$

• EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA.



• CONDIZIONI AL CONFINO PER L'INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE

$\frac{d^4V}{dz^4} = \frac{q}{EI_x} + \text{CONDIZIONI AL CONFINO.}$

$V(z) =$  LINEA ELASTICA

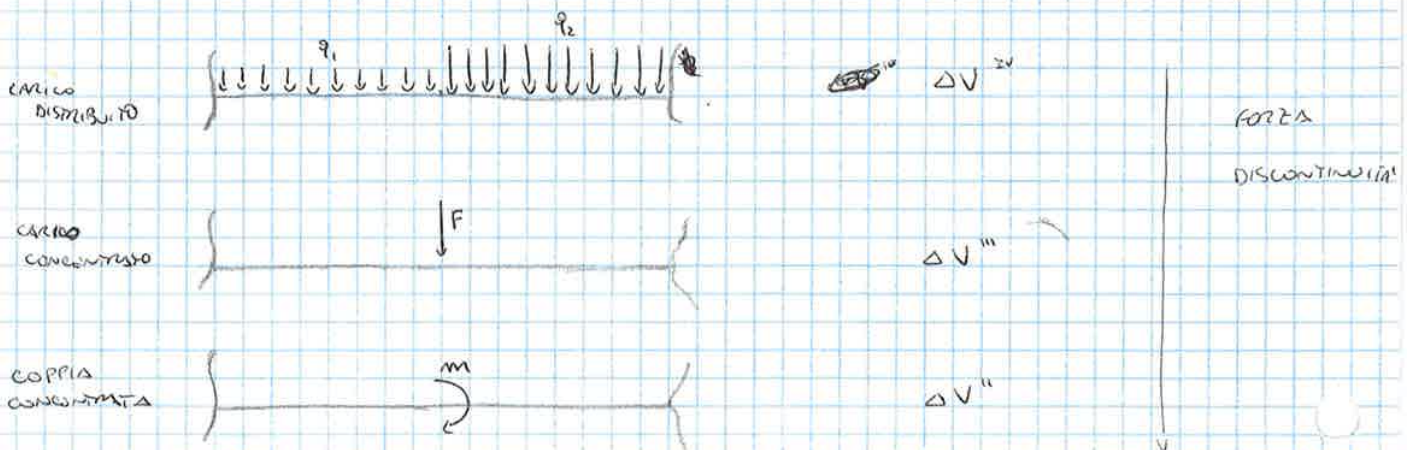
$\hookrightarrow \varphi = -\frac{dV}{dz} \rightarrow M = -EI_x \frac{d^2V}{dz^2} \rightarrow T = -EI_x \frac{d^3V}{dz^3}$

- EQUAZIONE DELLA LINEA ELASTICA.

$\varphi = -\frac{dV}{dz} \Rightarrow$  DOVE  $\varphi$  SI ANNULLA,  $V(z)$  HA UN PUNTO SPAZIOVIZIO.

$M = -EI_x \frac{d^2V}{dz^2} \Rightarrow$  DOVE  $M$  SI ANNULLA,  $V(z)$  HA UN FLESSO.

- DISCONTINUITA'



IMPOSTATO ORA LE CONDIZIONI AL CONFINO PER DETERMINARE  $c_1, c_2, c_3, c_4$ .

CONDIZIONI AL CONFINO:

	CONDIZIONE	DINAMICA	STATICA		
CINQUESTES B	$\left[ \begin{array}{l} V_B = ? \\ \varphi_B = ? \end{array} \right.$	$T_B = ?$	$V_B = 0$	$T_B = ?$	
		$M_B = ?$	$\varphi_B = 0$	$M_B = ?$	
C	$\left[ \begin{array}{l} V_C = ? \\ \varphi_C = ? \end{array} \right.$	$E = ?$	$V_C = 0$	$T_C = ?$	
		$M_C = ?$	$\varphi_C = 0$	$M_C = 0$	

PASSAGGI ANALITICI:

LE CONDIZIONI AL CONFINO TRAVASATE SONO:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_B = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \\ \varphi_B = 0 \Rightarrow v'(0) = 0 \\ V_C = 0 \Rightarrow v(l) = 0 \\ \varphi_C = 0 \Rightarrow v'(l) = 0 \end{array} \right.$$

RESORRIBUENDO

$$v = \frac{q}{EI} \left( \frac{z^4}{24} + c_1 \frac{z^3}{6} + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 z + c_4 \right)$$

APPLICANDO LE CONDIZIONI  $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_4 = 0 \\ c_3 = 0 \\ \frac{q l^3}{24} + c_1 \frac{l^3}{6} + c_2 \frac{l^2}{2} = 0 \\ \frac{q l}{2} + c_1 l + c_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_2 = c_4 = 0 \\ c_1 = -\frac{5}{8} l \\ c_2 = \frac{l^2}{8} \end{array} \right.$$

ORA: (SOLUZIONE)

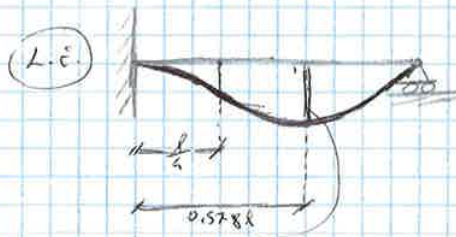
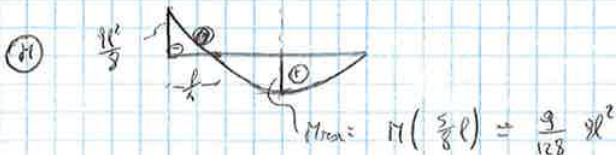
$$T(z) = -EI v'''(z) = -q \left( z - \frac{5}{8} l \right) = \frac{5}{8} q l - \frac{q}{2} z \quad \underline{\underline{TACCO}}$$

$$M(z) = -EI v''(z) = -q \left( \frac{z^2}{2} - \frac{5}{8} l z + \frac{l^2}{8} \right) = -\frac{q}{8} (4z^2 - 5lz + l^2) \quad \underline{\underline{MOMENTO}}$$

$$\varphi(z) = -v'(z) = \frac{q l^2}{2EI} \left( -\frac{1}{3} \left( \frac{z}{l} \right)^3 + \frac{5}{8} \left( \frac{z}{l} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{z}{l} \right) \right) \quad \underline{\underline{ROTAZIONE}}$$

$$v(z) = \frac{q l^4}{8EI} \left( \frac{1}{3} \left( \frac{z}{l} \right)^4 - \frac{5}{6} \left( \frac{z}{l} \right)^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{l} \right)^2 \right) \quad \underline{\underline{LINEA ELASTICA}} \quad \text{(ABBASSAMENTO)}$$

DIAGRAMMI:



DOVE  $M=0$  LA LINEA ELASTICA HA UN PUNTO  
DOVE  $\varphi=0$  LA LINEA ELASTICA HA UN MASSIMO O UN MINIMO

$v_{max} = v(0,578l) = 0,00542 \frac{q l^4}{EI}$

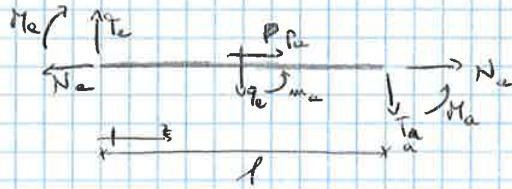
$\varphi=0$  PER  $z=0$   
 $z=0,578l$   
 $z=l, 30l$

METODO SEMPLIFICATO PER RISOLVERE LE IPERSTATICHE:

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI PLV

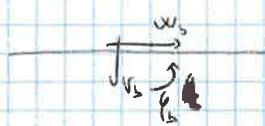
PLV TRAVI RETTILINEE

IPOTESI: a) SISTEMA STATICAMENTE AMMISSIBILE. (EQUILIBRATO)



$$H_p: \begin{cases} \frac{dT_a}{dz} + q_a = 0 \\ \frac{dN_a}{dz} + r_a = 0 \\ \frac{dM_b}{dz} - T_a + m_a = 0 \end{cases}$$

b) SISTEMA CINETICAMENTE AMMISSIBILE



$$H_p: \begin{cases} \delta_b = \frac{dv_b}{dz} + \rho_b \\ \epsilon_b = \frac{dw_b}{dz} \\ \chi_b = \frac{d\rho_b}{dz} \end{cases}$$

DISPOSIZIONI:

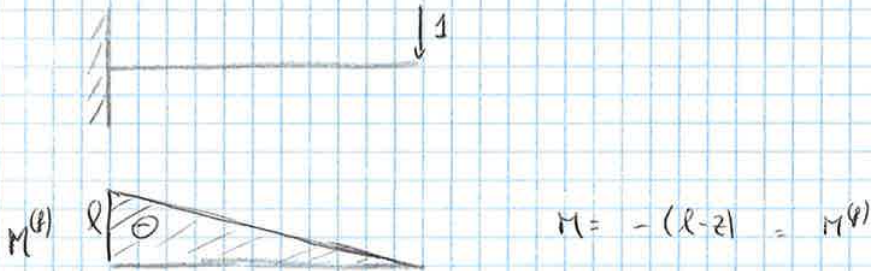
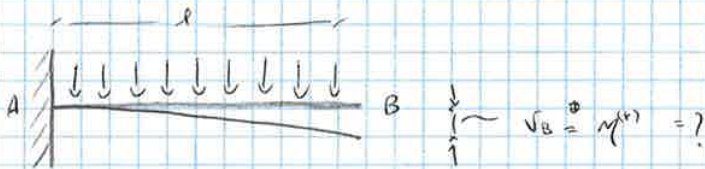
LAVORO:

$$\begin{aligned} L_{v, ext} &= \left[ \{Q_a\}^t \{q_b\} \right]_{z=0}^{z=L} + \int_0^L \{r_a\}^t \{M_b\} dz = \left[ T_a v_b + N_a w_b + M_a \rho_b \right]_{z=L} - \\ & \left[ T_a v_b + N_a w_b + M_a \rho_b \right]_{z=0} + \int_0^L (q_a v_b + p_a w_b + m_a \rho_b) dz \\ L_{v, int} &= \int_0^L \left[ \frac{d}{dz} (T_a v_b + N_a w_b + M_a \rho_b) + (q_a v_b + p_a w_b + m_a \rho_b) \right] dz = \\ & = \int_0^L \left[ \left( \frac{dT_a}{dz} + q_a \right) v_b + \left( \frac{dN_a}{dz} + r_a \right) w_b + \left( \frac{dM_a}{dz} - m_a \right) \rho_b + T_a \frac{dv_b}{dz} + N_a \frac{dw_b}{dz} + M_a \frac{d\rho_b}{dz} \right] dz \\ & = \int_0^L \left[ T_a \underbrace{\left( \frac{dv_b}{dz} + \rho_b \right)}_{\delta_b} + N_a \underbrace{\frac{dw_b}{dz}}_{\epsilon_b} + M_a \underbrace{\frac{d\rho_b}{dz}}_{\chi_b} \right] dz \Rightarrow \int_0^L (T_a \delta_b + N_a \epsilon_b + M_a \chi_b) dz = \\ & = \int_0^L \{Q_a\}^t \{q_b\} dz = L_{v, int} \end{aligned}$$

$L_{v, ext} = L_{v, int}$

~~Si il corpo è RIGIDO  $L_{v, ext} = 0$~~

ESEMPIO:



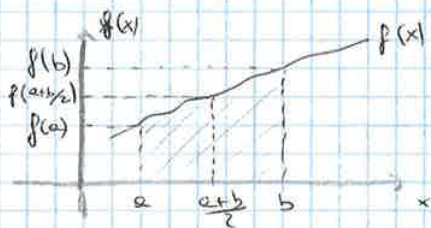
POSSO ORA APPLICARE LA RAGIONE TROVATA IN PRECEDENZA.

$$(1^a) \quad M^{(4)} = \frac{1}{EI} \int_0^x M^{(3)} dz \Rightarrow v_B = \frac{1}{EI} \int_0^l \frac{q}{2}(l-z)^3 dz$$

$$\Rightarrow v_B = \frac{-q}{2EI} \left[ \frac{(l-z)^4}{4} \right]_{z=0}^{z=l} = \frac{ql^4}{8EI} \quad \text{SPOSTAMENTO}$$



PARANTESI DI CALCOLO NUMERICO



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} (b-a)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)]$$

FORMULA DI SIMPSON

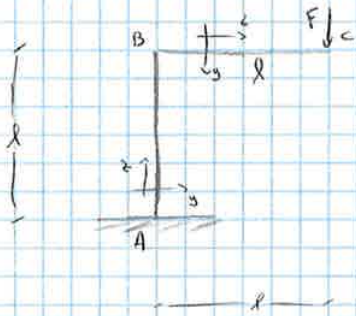
FORMULA DI QUADRATURA DI GRADO 2

TAL FORMULA È UNA STIMA, UN VALORE NON PRECISO. ESSA DÀ RISULTATO ESATTO SOLO QUANDO  $f(x)$  È RETTA, PARABOLA, O CUBICA.

SE  $f(x)$  È DI GRADO  $\leq 3 \Rightarrow$  FORMULA ESATTA.

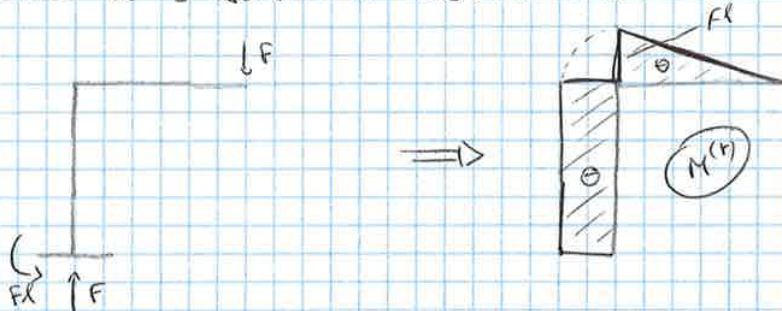


ESERCIZIO:

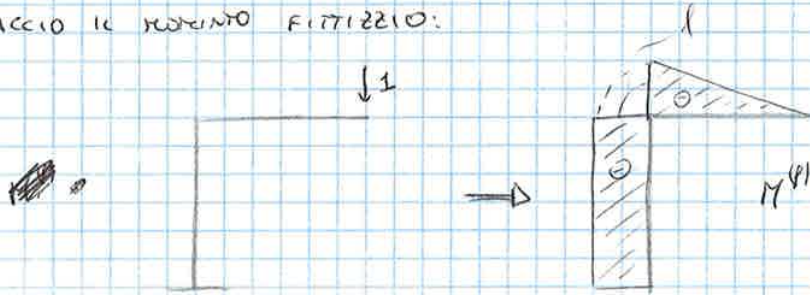


CALCOLARE LO SPOSTAMENTO  
ORIZZONTALE ( $u_c$ ) E VERTICALE ( $v_c$ ) DI C

TRACCIO IL DIAGRAMMA DI MOMENTO REALI.



TRACCIO IL MOMENTO FITTIZIO:



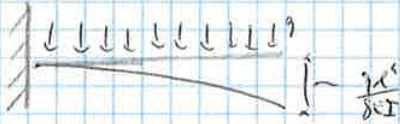
CALCOLO  $v_c$  E  $u_c$

$$v_c = \frac{1}{EI} \left[ \int_A^B M^{(r)} M^{(v)} dx + \int_B^C M^{(r)} M^{(v)} dz \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} \left\{ Fl^2 \cdot l + \frac{l}{6} \left[ (Fl)(-l) + 4 \left( -\frac{Fl}{2} \right) \left( -\frac{l}{2} \right) + 0 \right] \right\} = \frac{1}{EI} \left[ Fl^3 + \frac{l}{6} (Fl^2 + Fl^2) \right] =$$

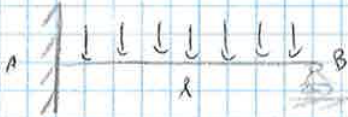
$$= \frac{1}{EI} \left( Fl^3 + \frac{Fl^3}{3} \right) \Rightarrow \boxed{v_c = \frac{4}{3} \frac{Fl^3}{EI}}$$

~~ANZI CALCOLO  $u_c$~~



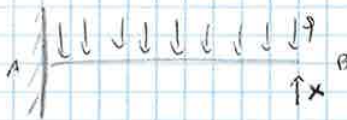
VALORI CALCOLATI IN PRECEDENZA.

GRUPPO AD ESEMPPIO FACI STRUTTURA



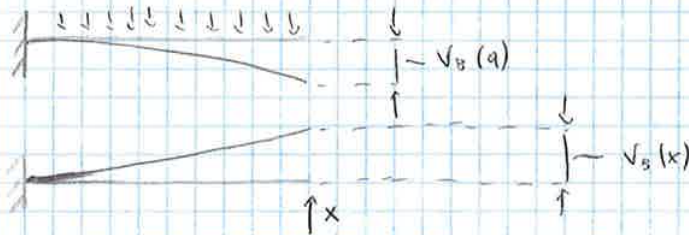
$g = 3$       $v = 4$       $v - g = 1$  VOLTA IPOT.

COSA FACCIAMO? CATTINNO UN VINCULO IN MODO CHE LA STRUTTURA DIVENTA ISOSTATICA:



← IPOT. ISOSTATICA PRINCIPALE (SCELTA DA NOI)

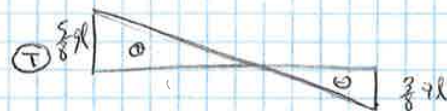
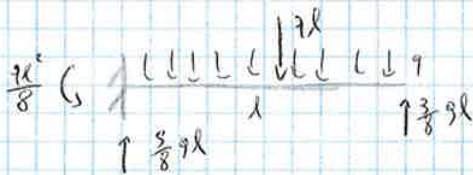
$v_B = v_B(q) + v_B(x) = 0$      per DI CONGRUENZA



ORA CALCOLO  $v_B(q)$  e  $v_B(x)$  e RISOLVO LE EQUAZIONI DI CONGRUENZA

$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{x l^3}{3EI} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{8} ql$

TROVATA LA "x" ADDESSO RISOLVENDO UNA STRUTTURA ISOSTATICA



EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO:

$$\begin{aligned}
 1) & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \tau_{xx} \text{ COSTANTE RISPETTO A } z. \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0 & \Rightarrow \tau_{xy} \text{ COSTANTE RISPETTO A } z. \end{aligned} \right. \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cost.} \\
 2) & \\
 3) & \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 & \Rightarrow 0 = 0 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\tau_z = \dot{\theta}_z$$

$$\tau_z(0) = 0$$

→ FUNZIONANO LE EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO.

~~ora~~ ora BISOGNA DIAGRAMMARE:

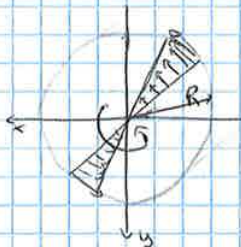
$$\vec{\tau}_z = \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} \quad \vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

$$\vec{\tau}_z \cdot \vec{OP} = -G\dot{\theta}y \cdot x + G\dot{\theta}x \cdot y = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_z \perp \vec{OP}$$

$$\|\vec{\tau}_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = G\dot{\theta} \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = r' = OP$$

$$\|\vec{\tau}_z\| = G\dot{\theta} r$$



→ DIAGRAMMA DELLE  $\tau_z$

momento inerzia polare

$$I_P = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

ci manca ancora le VALORI DI  $\theta$  alle coordinate con opportune condizioni di EQUIVALENZA SULLE BASI.

$$N = \int_A \tau_z \, dA = 0 \Rightarrow N = M_x = M_y = 0$$

$$T_x = \int_A \tau_{zx} \, dA = -G\dot{\theta} \int_A y \, dA = -G\dot{\theta} S_x = 0 \quad (\text{simmetria centrale})$$

$$T_y = \int_A \tau_{zy} \, dA = -G\dot{\theta} \int_A x \, dA = -G\dot{\theta} S_y = 0 \quad (\text{simmetria centrale})$$

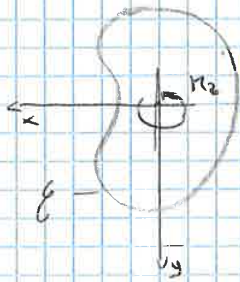
$$M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) \, dA = G\dot{\theta} \int_A \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} \, dA = G\dot{\theta} \int_A r^2 \, dA$$

$$\hookrightarrow M_z = G\dot{\theta} I_P$$

$$\dot{\theta} = \frac{M_z}{G I_P}$$

→  $I_P$  momento di inerzia polare

• TORSIONE IN SEZIONE GENERICA.



LA SOLUZIONE PRECEDENTE NON VA BENE PERCHÉ GENERICA  $\bar{T}_z$  NON È A E.

COME SI FA?

SI IPOTIZZA UNA FORMA ANCORRE:

$$\begin{cases} u = -\rho_0 y \\ v = \rho_0 x \\ w = \theta w(x, y) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \text{INGOBBRIAMENTO (L'ESPRESSIONE NON RIMANE PURA)}$$

ALLA FINE SI OTTIENE TALE RELAZIONE:

$$\nabla^2 w = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

$I_t$ : FATTOR DI INERZIA TORSIONALE.

ANALOGIA IDRODINAMICA.

LE EQUAZIONI SONO ANCHE (  $\tau_{zx} \rightarrow v_x, \tau_{zy} \rightarrow v_y$  )

A QUELLE CHE GOVERNANO IL MOVIMENTO ROTAZIONALE UN FLUIDO IDEALE ALL'INTERNO DI UN TUBO DI SEZIONE UGUALE A QUELLA DEL SOLIDO DI D.S.V.

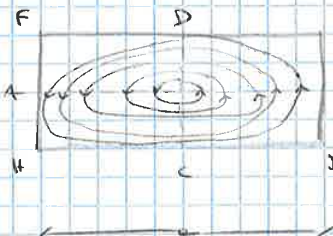
NESSUNA COPERTURA ADDENSANDO I FLUIDI



SEZIONE RETTANGOLARE

$$\alpha = \beta$$

$a > b$



Torzione si fa in  $a > b$

$$\tau_{max} = \alpha \frac{M_z}{ab^2}$$

$$I_t = \beta a b^3$$

$\alpha, \beta$  DIPENDONO DA  $\frac{a}{b}$

Per  $a \gg b, \alpha \rightarrow 3$

$$\beta = \frac{1}{3}$$

$$\tau_{max} = \frac{3 M_z}{ab^2} = \frac{M_z}{\frac{1}{3} ab^2} b = \frac{M_z b}{I_t}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_z b}{I_t}$$

$$\tau_{max}^i = \frac{M_z^i}{I_c^i} b_i \Rightarrow \tau_{max}^i = \frac{M_z}{I_c} b_i$$

SI RAGGIUNGE TENSIONE MASSIMA NEL  
PUNTO PIU' SPESO.

UTILIZZO LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO:

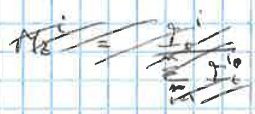
$$M_z = \sum_{i=1}^n M_i^i \Rightarrow G I_c \theta = \sum_{i=1}^n G I_c^i \theta^i$$

COEFF. DI RIPARTIZIONE  
 $M_i G_c \theta^i = \text{costante}$

$$\Rightarrow \cancel{G I_c} \theta = \sum_{i=1}^n \cancel{G \theta^i} \frac{I_c^i}{I_c} \Rightarrow I_c = \sum_{i=1}^n I_c^i$$

$$M_z^i = M_z \frac{I_c^i}{I_c}$$

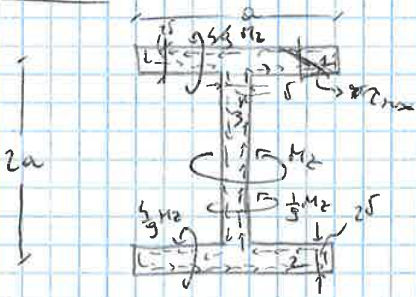
SI PUO' ANCHE SCRIVERE  $\Rightarrow$



$$M_z^i = \left( \frac{I_c^i}{\sum_{i=1}^n I_c^i} \right) M_z$$

TORSION FACTORS

ESEMPIO:



$$I_c = I_c^1 + I_c^2 + I_c^3 = \frac{1}{12} a^3 \cdot 2a + \frac{1}{12} (2a)^3 + \frac{1}{12} 2a \cdot a^3 = \frac{13}{12} a^4$$

$$\Rightarrow I_c = 6 a^4$$

$$M_z^1 = \frac{I_c^1}{I_c} M_z = \frac{1/12 a^4}{13/12 a^4} M_z = \frac{1}{13} M_z$$

$$M_z^2 = M_z - M_z^1 - M_z^3 = \frac{10}{13} M_z$$

DONDE SI REALIZZA LA TENSIONE MASSIMA?

$$\tau_{max} = \tau_{max}^1 = \tau_{max}^2 = \frac{M_z}{6 a^4} \cdot 2a = \frac{M_z}{3 a^3}$$

LA TENSIONE MASSIMA SI REALIZZA ALL'ESTREMITA' DELLA SEZIONE.

OSS:

CASO DI DEFORMAZIONE PER TORSIONE

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} M_z \frac{d\theta}{dz} \quad (\text{CAMPIONE})$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} M_z \theta$$

SE VOGLIAMO CALCOLARE LA DIFORMAZIONE  $\theta$  :

$$\theta = \frac{M_z}{G I_t}$$

Per il calcolo della deformazione  $\theta$  applico il fattore di rigidità torsionale  $I_t$  e applico la formula:

EQUIVALENZA ENERGETICA

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2} M_z \dot{\theta} = \int_A \psi \, dA = \int_A \frac{\tau_{\theta z}}{2G} \, dA = \int_0^l \frac{\tau_{\theta z}}{2G} b(s) \, ds$$

ricavo  $\dot{\theta}$  :

$$\frac{1}{2} M_z \dot{\theta} = \frac{1}{2G} \int_0^l \frac{M_z^2}{4R^2 b} \, ds$$

Bredt

$$\dot{\theta} = \frac{M_z}{4R^2 G} \int_0^l \frac{ds}{b} = \frac{M_z}{G I_t}$$

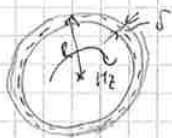
da cui :

$$I_t = \frac{4R^2}{\int_0^l \frac{ds}{b(s)}} = \frac{4R^2 b}{l} = I_t$$

lunghezza circonferenza media.

CONFRONTO SEZIONI APERTE / CHIUSE

Bredt:  $\tau_{max} = \frac{M_z}{2 \cdot \text{Area} \cdot spessore}$



CHIUSO



APERTO

$$(\tau_{max})_c = \frac{M_z}{2\pi R^2 \delta}$$

$$(\tau_{max})_a = \frac{M_z}{I_t} b = \frac{M_z \delta}{\frac{1}{3} 2\pi R \delta^3} = \frac{3M_z}{2\pi R \delta^2}$$

$$(I_t)_c = 2\pi R^3 \delta$$

$$(I_t)_a = \frac{1}{3} 2\pi R \delta^3$$

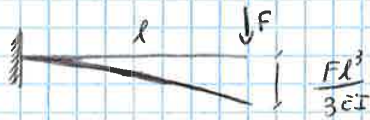
FACCIO IL RAPPORTO

$$\frac{(\tau_{max})_a}{(\tau_{max})_c} = \frac{3M_z}{2\pi R \delta^2} \cdot \frac{2\pi R^3 \delta}{M_z} = 3 \frac{R}{\delta}$$

HANNO UN ORDINE DI MAGNITUDINE DI DIFFERENZA

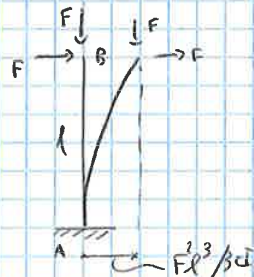
" LE SEZIONI APERTE SONO + SOLLECITATE " TENSIONI + ELEVATE.

2) CARICO DI FONTE :

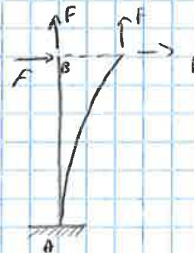


POSSO CALCOLARE CO SPOSTAMENTO  
VERIFICARE CON LE PV

ORA PONGO 2 ESEMPLI :



$$M_A = Fl + \frac{Fl^3}{3EI}$$

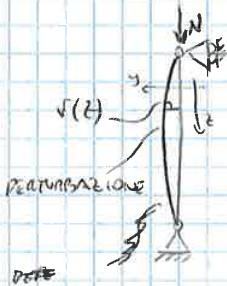


$$M_A = Fl$$

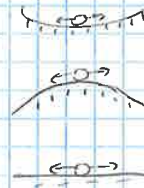
" IN QUESTO CASO NON  
SI CONSIDERANO LE  
CARATTERISTICHE X E Y  
FORZA UNITARIA COLTA  
IN MEGLIO FAVORE "

SE CI ACCANTIAMO DATI DEI PICCOLI SPOSTAMENTI, DOVREMO CONSIDERARE  
MOLTE CARATTERISTICHE CHE MODIFICANO IL MOMENTO.

ANALISI :



- 3 EQUILIBRI → STABILE
- ↳ INSTABILE
- ↳ INDIFFERENTE



A SICUNDA DEL VALORE DEL CARICO N, POSSIAMO AVERE  
TUTTI E 3 I TIPI DI EQUILIBRIO.

|| NATURALMENTE NOI CERCIAMO SEMPRE LA CONDIZIONE PER CUI  
SI HA UN EQUILIBRIO INDIFFERENTE.

• EQUILIBRIO INDIFFERENTE :

$$M_{\text{INSTABILIZZANTE}} = M_i = N \cdot v$$

$$M_{\text{STABILIZZANTE}} = \left( M_s = -EI v'' \right)$$

DEFINIZIONI

$$\chi = \frac{M_s}{EI} = -v''$$

IN ASSUNZA DI INSTABILITA' POSSO VERIFICARE LA PULSATIONE, SENZA PREOCCUPARMI DELLA LUNGHEZZA:



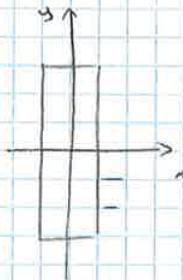
$$\sigma = \frac{N}{A} < \sigma_p \Rightarrow$$

$$N < \sigma_p A$$

IN CASO DI INSTABILITA', COME ABBIAMO VISTO LA CONNESSIONE E' FONDAMENTALE:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

SOPPONENDO IL CASO DI VOLER MIGLIORARE LA STABILITA' DI UNA TRAVATTA RETTOLINEARE D'ACCIAIO, PER FAR CIO' NON CONVIENE MIGLIORARE LA DUREZZA DEL MATERIALI, MA VAZIARE IL MOMENTO D'INERZIA.

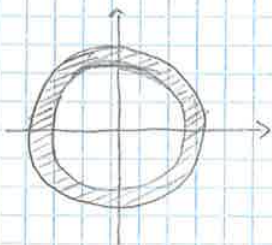


$$I = I_{min} = I_y$$

LA PROVA SI FA CON IL MOMENTO DI INERZIA MINIMO.

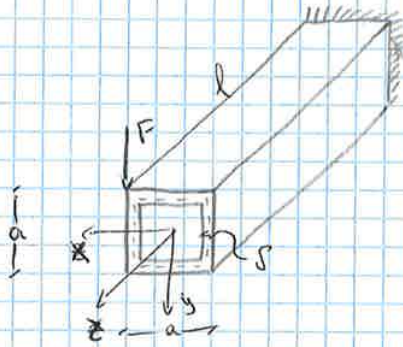
COME DOVRE' PREVEDERE IL MOMENTO DI INERZIA.

A PARITA' DI MATERIALI CONVIENE LA SEZIONE CIRCOLARE CAVA.





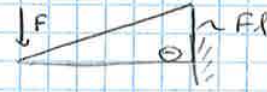
### 3) CENTRO DI TAGLIO :



SOLLECITAZIONI PUSANTI:

~~$M_x$~~ ,  $M_x$ ,  ~~$M_y$~~ ,  ~~$M_z$~~ ,  $T_y$ ,  $M_z$

( $M_x$ )



( $T_y$ )



C'È SEMPRE MOMENTO TORCENTE  $M_z$ ?



"VI È MOMENTO TORCENTE ED IN PRATICA ALLE FORZE PER IL PARALLELO AISSO DI TAGLIO NO!!"

SI HA CHE: "IL MOMENTO TORCENTE È DATO DAL PRODOTTO DELLA FORZA PER LA DISTANZA DELLA RITTA D'AZIONE DELLA FORZA TAGLIANTE E UN PUNTO DETTO "CENTRO DI TAGLIO"."

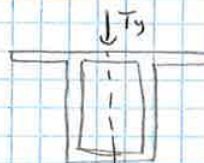
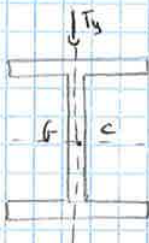
2 CASI: 1) SE LA FORZA TAGLIANTE PASSA PER C  $\Rightarrow M_z = 0$

2) SE LA FORZA TAGLIANTE NON PASSA PER C  $\Rightarrow M_z \neq 0$

COME PER LE FORZE ASSIALI:

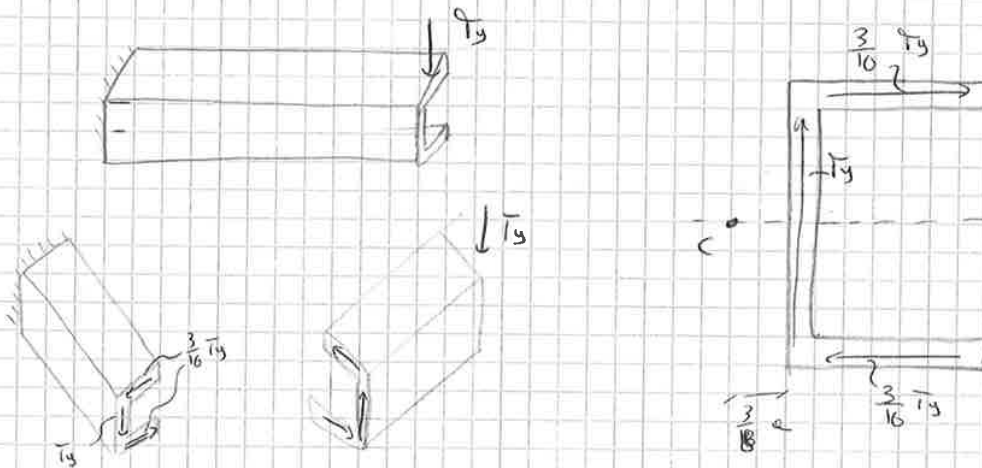
- SE LA FORZA ASSIALE PASSA PER G  $\Rightarrow M_x = M_y = 0$ .

- SE LA FORZA ASSIALE NON PASSA PER G  $\Rightarrow M_x \neq 0$  o  $M_y \neq 0$ .



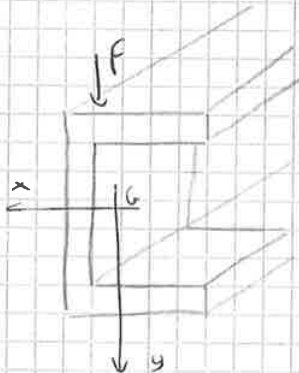
SE C'È ASSI DI SIMMETRIA, C È ASSI DI SIMMETRIA.

55 SPRETO LA TRAVI IN UNA GENERICA SEZIONE.



Solo se  $T_y$  passa per C, la forza di taglio è equilibrata dalle forze di taglio.

AVREMO QUINDI IN GENERALE.



AVREMO UNO SCAMBIO SU TAV  
SISTEMA LE SEGUENTI FORZE.

$$M_x = FL$$

$$T_y = F$$

$$M_z = F \frac{5}{8} a$$

• CALCOLO REAZIONI VINCOLARI IN SISTEMI DI TRAVI ISOSTATICI

(L)

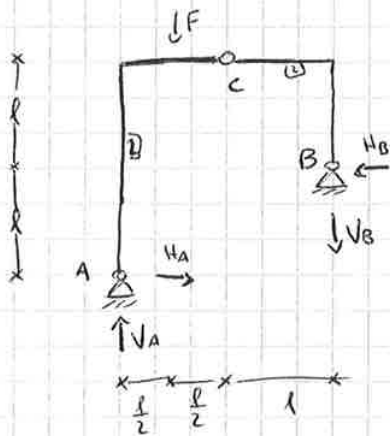
COME SI FA? SI SCRIVONO SEPPURMENTE LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO STATICO.

- } EQUILIBRIO FORZE
- } EQUILIBRIO MOMENTI.

NOTA: AFFINCHÉ UN CORPO, SOGGETTO A FORZE  $\vec{F}$  E MOMENTI  $\vec{M}$ , SIA IN EQUILIBRIO STATICO, DEVE ACCADDERE CHE LA SOMMA DELLE FORZE E LA SOMMA DEI MOMENTI SIA NULLA.

EQUILIBRIO STATICO  $\iff$  
$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \sum_i \vec{M}_i = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO DI CALCOLO DI REAZIONI VINCOLARI.



EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

$\uparrow$ :  $V_A + V_B - F = 0$

$\rightarrow$ :  $H_A + H_B = 0$

$\curvearrowright$ :  $-F \frac{l}{2} + V_B 2l + H_B l = 0$

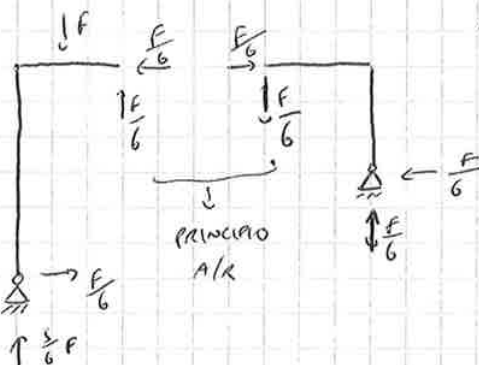
$\curvearrowright$ :  $V_B l + H_B l = 0$   
 EQUAZIONI AUSILIARIE

SVOLGENDO I CALCOLI TROVIAMO:

$$\begin{cases} V_A = \frac{5}{6} F \\ H_A = \frac{F}{6} \\ V_B = \frac{F}{6} \\ H_B = \frac{F}{6} \end{cases}$$

PER TROVARE LE REAZIONI VINCOLARI ALLA CERNIERA C, SVINCOLIAMO E

AD OGGI SVOLGIAMO L'EQUILIBRIO.



4

• GEOMETRIA DELLE AREE:

- 1) INDIVIDUO POSIZIONE BARIUNTRO.
- 2) INDIVIDUO SISTEMA PRINCIPALE DI INERZIA.
- 3) INDIVIDUO SISTEMA CENTRALE DI INERZIA.

FORMULE:

- COORDINATE DEL CENTRO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO BARIUNTRO:

$$\underbrace{x_G = \frac{S_y}{A}} \qquad \underbrace{y_G = \frac{S_x}{A}}$$

- MOMENTI DI INERZIA:

$$\begin{cases} I_x = I_{x_G} + A y_G^2 \\ I_y = I_{y_G} + A x_G^2 \end{cases} \qquad \bullet \ I_{xy} = I_{x_G y_G} + A x_G y_G$$

- SISTEMA CENTRALE:

- 4 CASI:
- 1)  $I_x \neq I_y, I_{xy} = 0 \Rightarrow (x, y)$  SISTEMA CENTRALE UNICO
  - 2)  $I_x \neq I_y, I_{xy} \neq 0 \Rightarrow (\xi, \eta)$  SISTEMA CENTRALE UNICO

TAL SISTEMA È RUOTATO DI  $\theta$  RISPETTO A  $(x, y)$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\left. \begin{matrix} I_\xi \\ I_\eta \end{matrix} \right\} \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4 I_{xy}^2}$$

- 3)  $I_x = I_y, I_{xy} = 0 \Rightarrow$  QUALSIASI SISTEMA BARIUNTRO È CENTRALE  
 $\hookrightarrow$  (SEZIONE GIROSCOPICA)

- 4)  $I_x = I_y, I_{xy} \neq 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} I_\xi = I_x - I_{xy} \\ I_\eta = I_x + I_{xy} \end{cases}$$

6

PER LA LEGGE DI RECIPROCITA' SI HA CHE  $\tau_{nm} = \tau_{mn}$

VOLENDO CALCOLARE LE DIREZIONI PRINCIPALI, COME PER LE DEFORMAZIONI, ANCHE IL DETERMINANTE DEL TENSORE:

$\sigma_1 \rightarrow \vec{m}_1$   
 $\sigma_2 \rightarrow \vec{m}_2$   
 $\sigma_3 \rightarrow \vec{m}_3$

DIREZIONI  
 PRINCIPALI  
 DELLA  
 TENSIONE

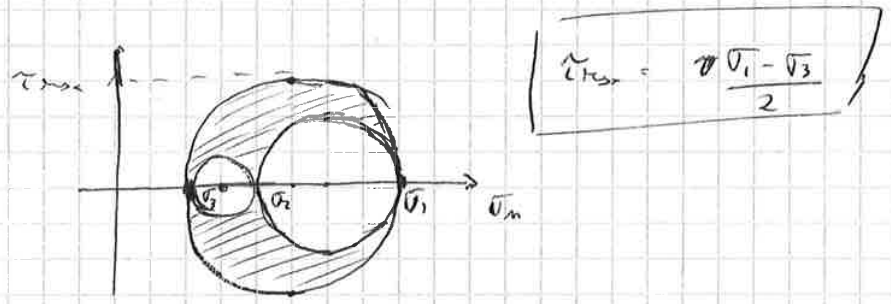
CASI:

- 1)  $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \Rightarrow \vec{m}_1 \perp \vec{m}_2 \perp \vec{m}_3$
- 2)  $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3 \Rightarrow \vec{m}_3$  è AUTOVETTORE
- 3)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow$  VETTORE è AUTOVETTORE

- COME FACCIAMO A QUANTIFICARE LE TENSIONI PRINCIPALI?

CERCHI DI MOHR:

L'ANALISI DELLA TENSIONE TRIDIMENSIONALE, PER LE SCELTE ADEGUATE, SI RIASSUME SUL PIANO TRIDIMENSIONALE 3 CIRCOSFERENZE. TALI CERCHE SONO I CERCHE DI MOHR:



IN QUESTO CORSO, UTILIZZANDO I CERCHE DI MOHR PER RISOLVERE PROBLEMI RIGUARDANTI LO STATO TENSIONALE PIANO,

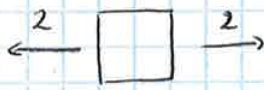
UNO STATO TENSIONALE SI DICE PIANO SE  $\tau_m$  È CONTINUO SULLA NESSO PIANO,

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE A AVERE UNO STATO TENSIONALE PIANO, È CHE SI ANNULLI UNA TENSIONE PRINCIPALE ( $\sigma_3 = 0$ )

3 CASI PER GLI ESERCIZI:

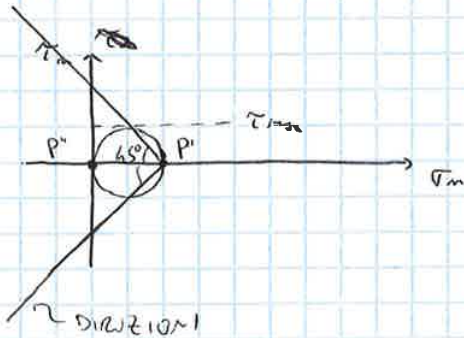
8

1) STATO MONO ASSIALE



$$\sigma_x = 2 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 0$$

$$P' (2, 0) \quad P'' (0, 0)$$



IN QUESTO CASO SI HA SEMPRE  $\theta = 45^\circ$

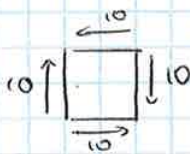
$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\begin{matrix} \hookrightarrow \\ \hookrightarrow \end{matrix} \begin{matrix} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = 2 \end{matrix}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 1$$

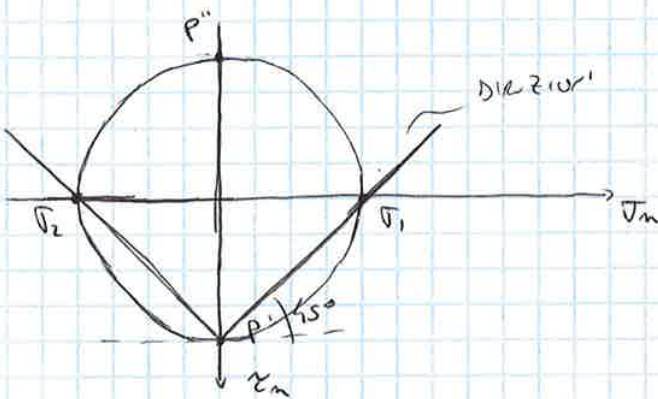
2) STATO PIANO

a) TAGLIO PURO



$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \tau_{xy} = 10$$

$$P' (0, -10) \quad P'' (0, 10)$$



$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

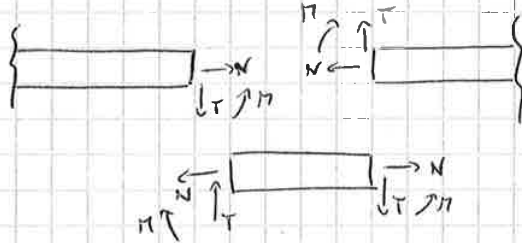
$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} \frac{0+0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{0 + 4(100)}$$

$$\sigma_1 = 10 \quad \sigma_2 = -10$$

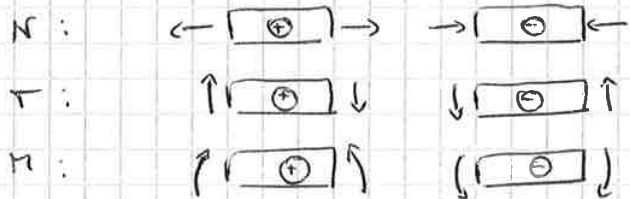
• LE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE

10

ALL'INTERNO DI UN TRAVE POSSIAMO TROVARE 3 TIPI DI SOLLECITAZIONI:  
 SFORNO NORMALE (N), TAGLIO (T), MOMENTO FLESSORIO (M).



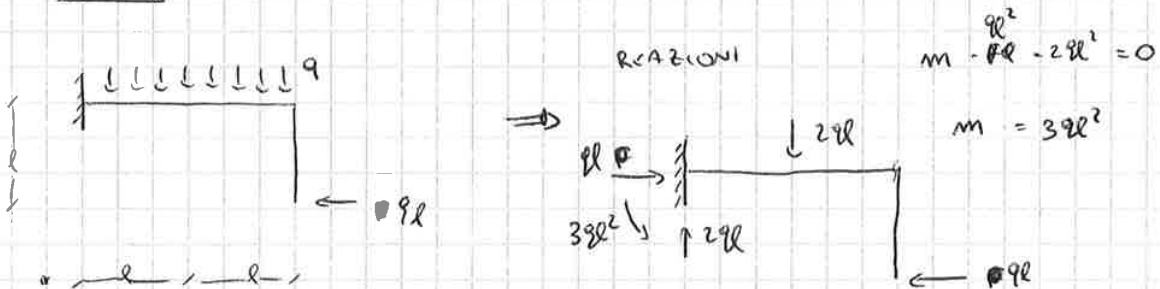
CONVENZIONI SEGNI:



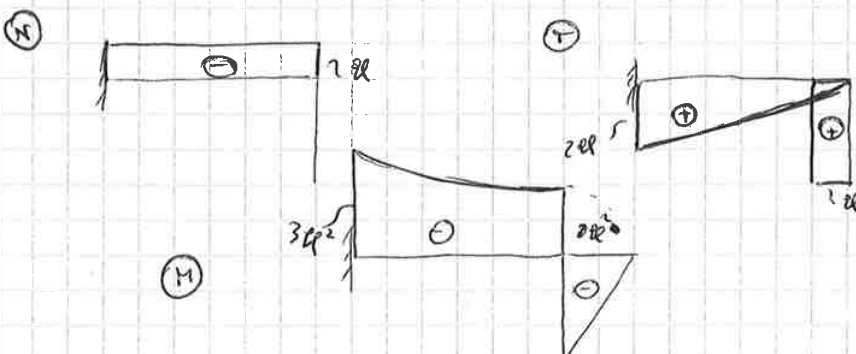
- DIAGRAMMI DELLE CARATTERISTICHE DELLA SOLLECITAZIONE:

3 TIPI DI DIAGRAMMA : N, T, M

ESEMPLO:



DIAGRAMMI



NOTA

CARICHI PUNTIFORMI

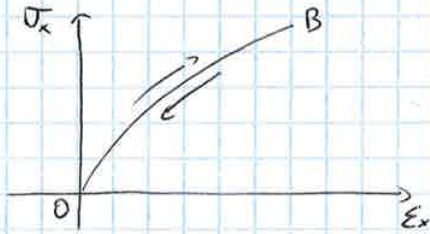
- N = COSTANTE
- T = COSTANTE
- M = VARIA LINEARMENTE

CARICHI DISTRIBUITI

- N = 0
- T = VARIA LINEARMENTE
- M = VARIA SECONDO UNA PARABOLA

I PROCESSI DI CARICA E SCARICA DEI MATERIALI SEGUONO ANDAMENTI DIFFERENTI A SECONDA DEL MATERIALE:

MATERIALE ELASTICO

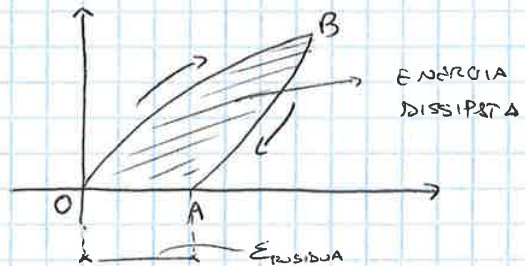


LA TRAIETTORIA DI CARICA COINCIDE CON QUELLA DI SCARICA

↳ NON SI DISSIPA ENERGIA

$$\underbrace{L_0 \rightarrow B \rightarrow 0 = 0}$$

MATERIALE ANELASTICO



LA TRAIETTORIA DI CARICA NON COINCIDE CON QUELLA DI SCARICA

↳ SI DISSIPA ENERGIA

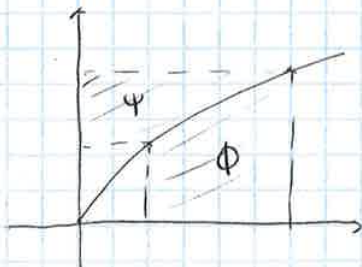
$$\underbrace{L_0 \rightarrow B \rightarrow A \neq 0}$$

CONSIDERANDO IL LAVORO VIRTUALE INFINITESIMO SI HA CHE:

$$d\psi = \{\sigma\}^t \cdot \{\epsilon\} \Rightarrow d\psi + d\phi = \{\sigma\}^t \cdot \{\epsilon\} + \{\sigma\}^t \cdot \{d\epsilon\}$$

ESSENDO  $\phi = \{\sigma\}^t \cdot \{\epsilon\}$  FUNZIONI DI STATO, ANCHE

$\psi$  E' FUNZIONE DI STATO  
 POTENZIALE ELASTICO  
 COMPLEMENTARE  
 ↳  $d\psi$  DIFFERENZIALE ESATTO



$\psi + \phi$  E' IL LAVORO DI DEFORMAZIONE CON TENSIONI COSTANTI

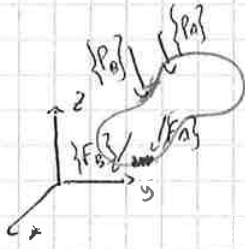
↳ IN QUESTO CASO  $\psi \neq \phi$

↓  
ELASTICITA' NON LINEARE.



(K)

• PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



CONSIDERO UN CORPO QUALSIASI.

- 1) IMPONENDO AL CORPO 2 AZIONI  $\{F_A\}$ ,  $\{P_A\}$ , SI NOTERÀ LA PRESENZA, DOVUTA AD ESSO, DI:

$$\{v_A\}, \{v_B\}, \{E_A\}$$

- 2) IN QUESTO STATO, IMPONIAMO ALTRA 2 AZIONI  $\{F_B\}$ ,  $\{P_B\}$ , LE QUALI A LORO VOLTA PROVOCANNO  $\{v_B\}$ ,  $\{v_B\}$ ,  $\{E_B\}$ .

SI PUÒ ALLORA DIMOSTRARE CHE L'AZIONE FINALE È UGUALE ALLA SOMMA DELLE SINGOLE AZIONI:

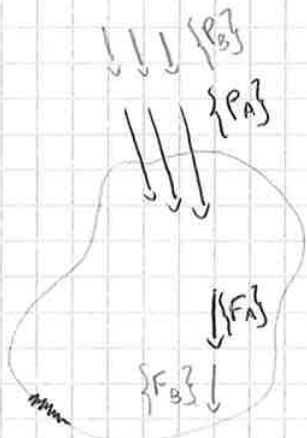
$$\begin{matrix} \{F_A\}, \{P_A\} \\ \{F_B\}, \{P_B\} \end{matrix}$$

⇒

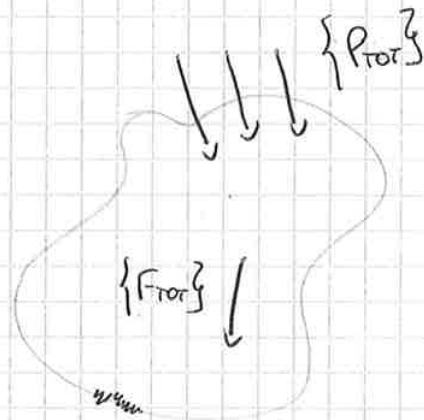
$$\begin{cases} \{v_A\} + \{v_B\} = \{v_{TOT}\} \\ [v_A] + [v_B] = [v_{TOT}] \\ [E_A] + [E_B] = [E_{TOT}] \end{cases}$$

NOTA : TALE PRINCIPIO NON VALE IL CASO DI DEFORMAZIONI

$$L_{AB} \neq L_A + L_B$$

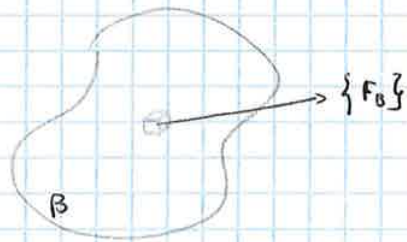
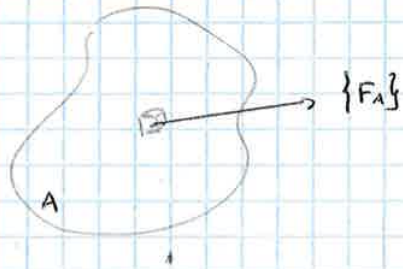


⇒



TEOREMA DI BETTI

SUPPONIAMO DI AVERE 2 STRUTTURE DI MATERIALI ELASTICO, SULLI QUALI AGISCE UNA FORZA  $\{F\}$  DI VALORE:



AVREMO CHE PER CADAUNA IL LAVORO COMPIUTO VALG:

$$L_A = \frac{1}{2} \int_V \{F_A\}^t \{y_A\} dV$$

$$L_B = \frac{1}{2} \int_V \{F_B\}^t \{y_B\} dV$$

NON VALE LA SOVRAPPOSIZIONE:

$$L_{A+B} \neq L_A + L_B$$

$\rightarrow$

$$L_{A+B} = L_A + L_B + (L_{AB})$$

LAVORO MUTUO

LAVORO MUTUO

$$\begin{cases} L_{AB} = \int_V \{F_A\}^t \{y_B\} dV \\ L_{BA} = \int_V \{F_B\}^t \{y_A\} dV \end{cases}$$

LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA SU A PER GLI SPOSTAMENTI DI B

LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA DI B SUGLI SPOSTAMENTI DI A

QUINDI AVREMO:

$$L_{A+B} = L_A + L_B + L_{AB}$$

$$L_{B+A} = L_B + L_A + L_{BA}$$

PER L'IPOTESI DI ELASTICITÀ  $\Rightarrow L_{A+B} = L_{B+A}$

$$L_{A+B} = L_{B+A}$$

$\rightarrow$

EGUAGLIANDO I II MEMBRI

$$\cancel{L_A} + \cancel{L_B} + L_{AB} = \cancel{L_B} + \cancel{L_A} + L_{BA}$$

$$L_{AB} = L_{BA}$$

TESI DI BETTI

UGUAGLIANZA DEI LAVORI MUTUI

SIGNIFICATO FISICO DEL CONCETTO DI ISOTROPIA:

1) SOLO  $E_x \neq 0$

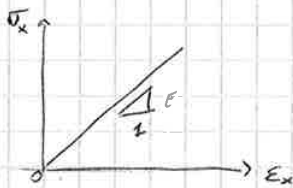
$$E_y = 0 \Rightarrow \sigma_{xy} = 0$$

$$E_z = 0 \Rightarrow \sigma_z = 0$$

$$E_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad E_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\nu E_x \quad E_z = -\nu E_x$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

ESAMINANDO UN CUBETTO



$$\frac{\Delta V}{V} = E_x + E_y + E_z = \left( \frac{1-2\nu}{E} \right) \sigma_x$$

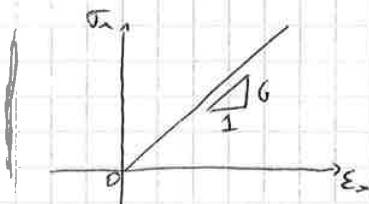
2) SOLO  $\tau_{xy} \neq 0$

↳

$$E_x = E_y = E_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

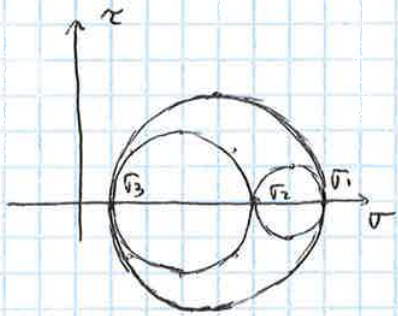
ESAMINANDO IL CUBO:



DIREZIONI PRINCIPALI SONO  
 TENSIONI e DEFORMAZIONI  
 COINCIDENTI.

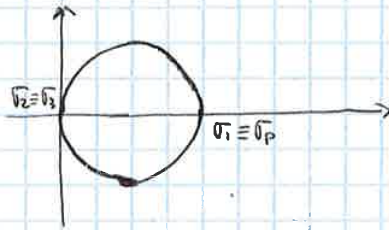
1) CRITERIO DI RANKINE,

ENUNCIATO US TENSIONI ATTUANTI MOHR:



$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq 0$

~~PRINCIPALI~~



$\sigma_2 = \sigma_3 = 0$        $\sigma_1 = \sigma_p$

IPOTIZZATO  $\sigma_{max} < \sigma_p$

RANKINE DICE CHE ~~PRINCIPALI~~  $\sigma_{max} = \sigma_1$  e  $k = \sigma_p$

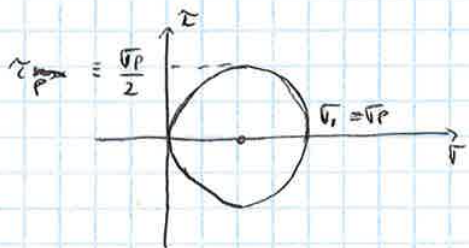
QUINDI  $\sigma_1 < \sigma_p$

IN GENERALE  $\sigma_{eq} = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} < \sigma_p$

2) CRITERIO DI TRESCA

ENUNCIATO: NON SI HA CRISI  $\Leftrightarrow$   $\tau_{max} < \tau_p$

RIFERENDOCI AL CRITERIO DI MOHR:



$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\}$

$\tau_p = \frac{\sigma_p}{2}$

$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} < \frac{\sigma_p}{2}$

$\sigma_{eq} = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\} < \sigma_p$

22

$$\phi^d = \frac{1}{2G} \left( J_2 + \frac{J_1^2}{3} \right) = \frac{1}{6G} (J_1^2 + 3J_2)$$

IN CASO DI CARICO UNIASSIALE, IL VALORE CRITICO VALE ~~STP~~

$$\phi_P^d = \frac{1}{6G} (\sigma_P^2) \rightarrow \text{VALORE CRITICO}$$

QUINDI STATO IN SICUREZZA SU L

$$(J_1^2 + 3J_2) < \sigma_P^2 \quad \text{VON MISES}$$

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{J_1^2 + 3J_2} < \sigma_P$$

SCRITTO IN COMPONENTI:

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = 3\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$

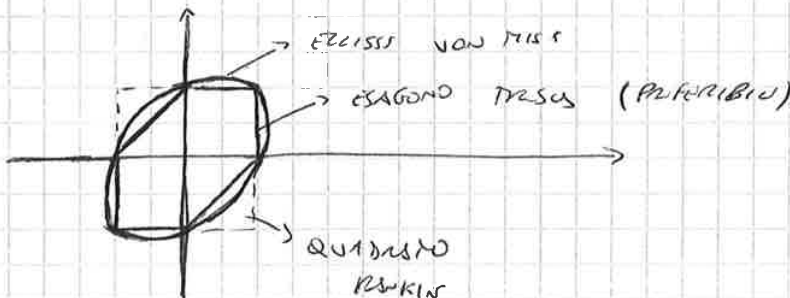
NEL SISTEMA PRINCIPALE  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} < \sigma_P$$

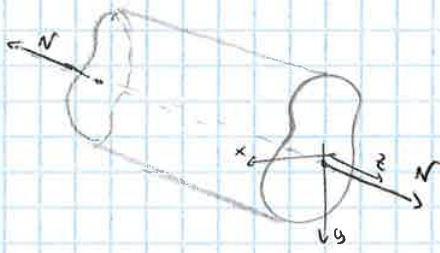
STATO TENSIONALE PIANO:  $\sigma_3 = 0$

$$\sigma_{Eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} < \sigma_P$$

EQUAZIONE PRINCIPALE



1° CASO : SFORZO NORMALE



IN QUESTO CASO ABBIAMO CHE

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0, \sigma_z \neq 0$$

AVVIAMO CHE

$$N = \int_A \sigma_z dA \Rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{N}{A}}$$



~~LE SFORZE~~

IL CAMPO TENSIONALE DONATO NELLO SFORZO NORMALE SI DISTRIBUISCE SU TUTTO IL CORPO

$$\sigma_z = -\frac{N}{A} \text{ (PRESSIONE)}$$

CAMPO TENSIONALE:

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N}{A}}$$

CAMPO DEFORMATIVO:

$$\boxed{\epsilon_z = \frac{N}{EA}}$$

SPOSTAMENTI

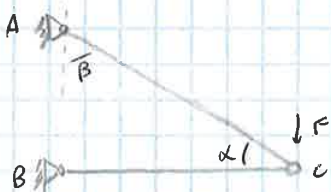
$$\boxed{w(z) = \frac{N}{EA} z}$$

COME SI CALCOLA IL LAVORO PER UNITA' DI LUNGHEZZA?

CLASSE GRON:

$$\frac{dL}{dz} = \frac{1}{2} N \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} N \epsilon_z = \boxed{\frac{N^2}{2EA} = \frac{dL}{dz}} \text{ [LAVORO]}$$

ESEMPIO:



DATI:  $\overline{AB} = 500$      $\sigma_P = 160 \text{ MPa}$      $F = 4 \cdot 10^4 \text{ N}$

$\tan \beta = 2 \Rightarrow \beta = \tan^{-1} 2$      $\overline{BC} = 1000$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = 26,565^\circ$$

EQUILIBRIO NODO C:

$$N_{BC} = N_{AC} \cos \alpha = 16000 \text{ N}$$

$$N_{AC} = F \sin \alpha = 17888,81 \text{ N}$$



$$\sigma_P \Rightarrow \frac{N_{AC}}{A_{AC}} \Rightarrow A_{AC} > \frac{N_{AC}}{\sigma_P} = \boxed{111,8 \text{ mm}^2}$$

ROTAZIONE :

$$M_x = \int_A \sigma_z y \, dA$$

$$\Rightarrow \sigma_z = E \left( - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} y \right)$$

$$M_x = E \left( - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) I_x$$

$- \chi_x =$  CURVATURA FLESSIONALE

$$\chi_x = - \frac{M_x}{E I_x}$$

CURVATURA FLESSIONALE

SAPENDO CHE

$$\epsilon_x = - \chi_x y = \frac{M_x}{E I_x} y = \epsilon_z$$

CAMPO DEFORMATIVO

E RICORDANDOSI CHE

$$\sigma_z = E \epsilon_z$$

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

FORMULA DI NAVIER (CAMPO TENSIONALE)

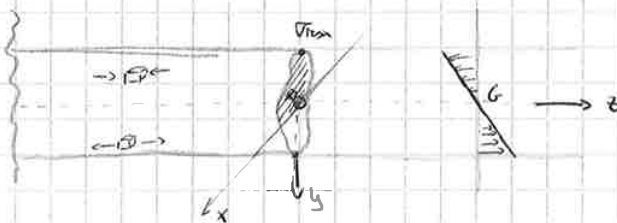
ANALOGAMENTE:

$$\sigma_z = \frac{M_y}{I_y} x$$

LA FORMULA DI NAVIER ESPRIME LO STATO TENSIONALE

COME SI CLASSIFICA?

DIAGRAMMA BIRIANGOLARE



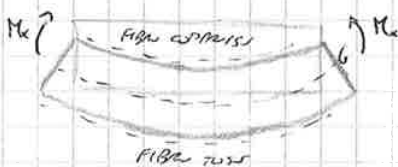
IN G NON VI È TENSIONE, MA PIANO CHE SI ACCONTANA DA G, LA TENSIONE AUMENTA.

STATO DEFORMATIVO

LE FIBRE SUCCESSIVE NON VARIANO IN LUNGHEZZA



G NON SUBISCE SPOSTAMENTI



LO STATO DEFORMATIVO È PLURIASSIALE:

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x}{E I_x} y$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = - \nu \epsilon_z = - \nu \frac{M_x}{E I_x} y$$

• ASSI DELLA FLESSIONE

DURANTE LO STUDIO DI UN PROBLEMA DI FLESSIONE, INTERNO IN GIOCO 3 ASSI:

1) ASSI DI SOLICITAZIONE "D":

INTERSEZIONE TRA PIANO DELLA SOLICITAZIONE E PIANO  $\perp M$

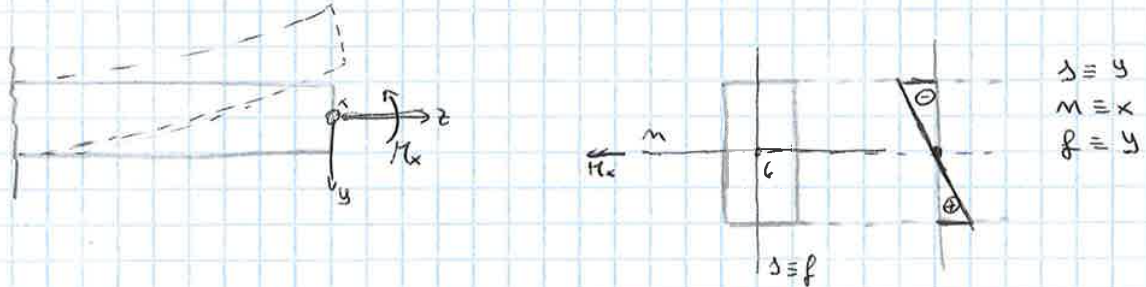
2) ASSI NEUTRI "N":

RETTA CHE IDENTIFICA LE FIBRE CON DEFORMAZIONE NULLA ( $\sigma_z = 0 \quad \epsilon_z = 0$ )

3) ASSI DI FLESSIONE "f"

INTERSEZIONI TRA PIANO SEZIONE E PIANO CONTENUTTI L'ASSI DEFORMAZIONE ODI DSV ( $f \perp n$ )

GRAFICAMENTE:



$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$$

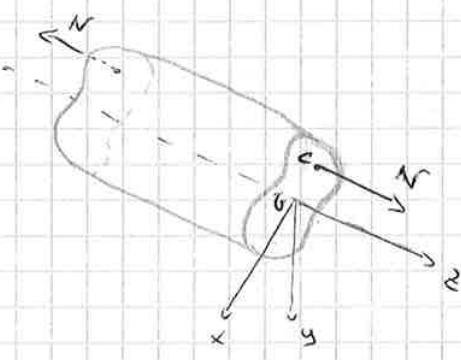
EQUAZIONE DI N:

IN N  $\sigma_z = 0 \Rightarrow \frac{M_x}{I_x} y = 0 \Rightarrow y = 0$  EQUAZIONE DI N



# SFORZO NORMALE ECCENTRICO

SI HA QUESTO FENOMENO QUANDO LA RISULTANTE DEI CARICHI N HA PISTA D'AZIONE PARALLELA, MA NON COINCIDENTE, CON L'ASSE BARICENTRICO



C: CENTRO DI PRESSIONE

il luogo C(z) dei centri di pressione in tutte le sezioni, rappresenta la CURVA DELLA PRESSIONE

COME SI RISOLVE?

ATTRaverso la sovrapposizione degli effetti si ~~trattano~~ <sup>trattano</sup> come di 2 azioni, sforzo normale e flessione. L'equazione è così DIVIDUATA:

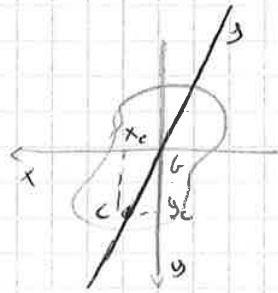
$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

2 CASI:

- 1) N di TRAZIONE : TENSO FLESSIONE
- 2) N di COMPRESSIONI : PRESSOFLESSIONE
- 3) M diritto lungo un ASSI CENTRALE : PRESSOFLESSIONE PURA
- 4) M non diritto lungo un ASSI CENTRALI : PRESSOFLESSIONE DEVIATA.

COME RISOLVIAMO I PROBLEMI?

TENSO N SUL BARICENTRO  
 ↓  
 LO SFORZO NORMALE ECCENTRICO  
 EQUIVALE AD UNO SFORZO NORMALE IN G + MOMENTI FLETTENTI



$$e = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}$$

$$M_x = N y_c$$

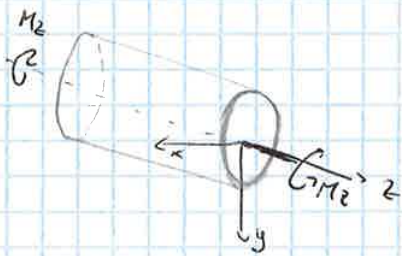
$$M_y = -N x_c$$

# TORSIONE

32

## 1) TORSIONE IN SEZIONI CIRCOLARI

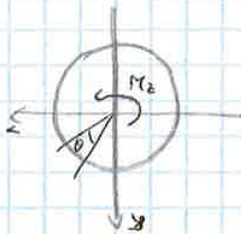
a)



METODO SEMI-INVARS :

PARTO CON UN'IPOTESI E VEDO SE SI VERIFICA

IPOTIZZO UNA ROTAZIONE DELLA SEZIONE ATTORNO A  $z_0$ . TUTTE LE SEZIONI RESTANO PIANE E RUOTANO RIGIDAMENTE ATTORNO A  $z$ .



$\dot{\theta}$  ANGOLO UNITARIO DI TORSIONE

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dz}$$

LA DIAGRAMMA DELLA TORSIONE IN QUESTO CASO E' UN DIAGRAMMA BIRIFANGOLO:

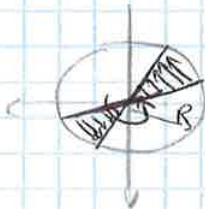


DIAGRAMMA DELLA  $\tau_z$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} \quad I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

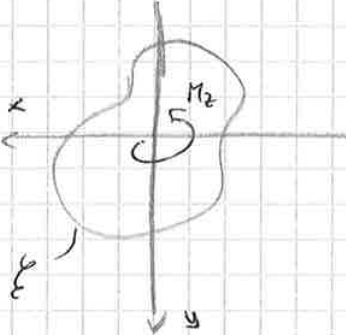
$$\dot{\theta} = \frac{M_z}{G I_p}$$

ESSENDO  $\tau_z = G \dot{\theta} r = \frac{M_z}{I_p} r \Rightarrow \tau_z = \frac{M_z}{I_p} r$

$$\tau_{max} = \tau_z(r=R) = \frac{M_z}{\frac{\pi R^4}{2}} R = \frac{2 M_z}{\pi R^3} = \tau_{max}$$

## 2) TORSIONE IN SEZIONI GENERICHE

ABBIAMO LE SEZIONI IPOTESI DUE SEZIONI CIRCOLARI. L'UNICA COSA CHE  
 CHE QUI LE SEZIONI NON RITORNANO PIANE DA SI INDESSANO.



AVVIZO:

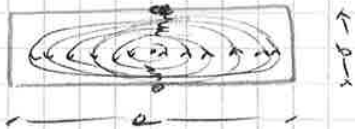
$$\theta = \frac{M_z}{I_p G}$$

$$I_t < I_p$$

↳ FATTORE DI RIGIDITÀ TORSIONALE

ESEMPLO:

SEZIONI RETTANGOLARI:



$\tau_{max}$  SI HA SUI PUNTI MADI DEI  
 LATI + LUNGI

$$\tau_{max} = \alpha \frac{M_z}{ab^3}$$

$$I_t = \beta ab^3$$

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{I_t} b$$

per  $a \gg b$

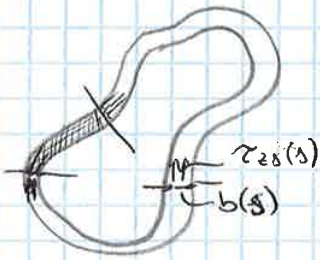
SI HA

$$\alpha = 3$$

$$\beta = \frac{1}{3}$$

b) eliose

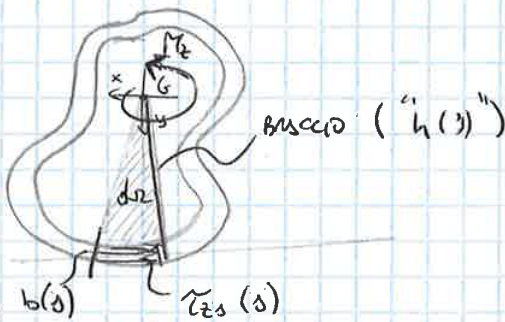
IN QUESTO CASO LA  $\tau$  È MASSIMA NELLE  
SEZIONI + SOTTILI (ANALOGIA IDRODINAMICA)



$b \downarrow \Rightarrow \tau \uparrow$

COME LO DEDUCIAMO? BREDT

BREDT



DALLA 3° LE DI EQUILIBRIO:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

SI DEDUCE CHE IL VETTORE  $\vec{\tau}_z$  HA

DIVERGENZA NULLA:  $\text{div } \vec{\tau}_z = 0$

DAL TEOREMA DELLA DIVERGENZA SI OTTIENE:

$$\int_A \text{div } \vec{\tau}_z \, dA = \oint_{\partial A} \vec{\tau}_z \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

↳ RISULTA NULLO IL FLUSSO  
ATTRAVERSO QUALUNQUE ZONA  
CHIUSA.

CONSIDERANDO ORA UNA PICCOLA SEZIONE ds:

$$\int_{\partial A} h(s) \cdot \tau_{zs}(s) \cdot b(s) \, ds = M_z \quad \text{MA} \quad \tau_{zs}(s) \cdot b(s) = \text{cost.}$$

MOLTIPLICO x DIVIDO  
PER 2

$$\Rightarrow \tau_{zs} \cdot b \int_{\partial A} h(s) \, ds = M_z$$

↑  
⇒

$$2 \tau_{zs} \cdot b \int_{\partial A} \left( \frac{h(s)}{2} \, ds \right) = M_z$$

AREA  
TRIANGOLO

$$2 \tau_{zs} \cdot b \int_{\partial A} ds = M_z$$

$$\text{MA} \int_{\partial A} ds = 2R$$

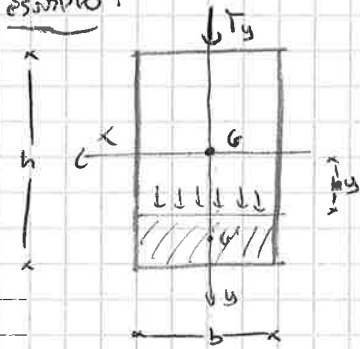
$$\Rightarrow \tau_{zs} = \frac{M_z}{2Rb}$$

FUNZIONE PER QUALSIASI  
SEZIONE SOTTILE CHIUSA

$$I_t = \frac{2R^2 b}{2}$$

DIAGRAMMA?

ESEMPLO:



$\tau_{zy} = ?$

JOHNSONSKY DICHI

$\tau_{zy} = \frac{T_y \cdot S_x'}{I_x \cdot b}$

CI SERVONO DUNQUE  $I_x$  e  $S_x'$

$I_x = \frac{b h^3}{12}$

$S_x' = A' \cdot y_G'$

$A' = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right)$

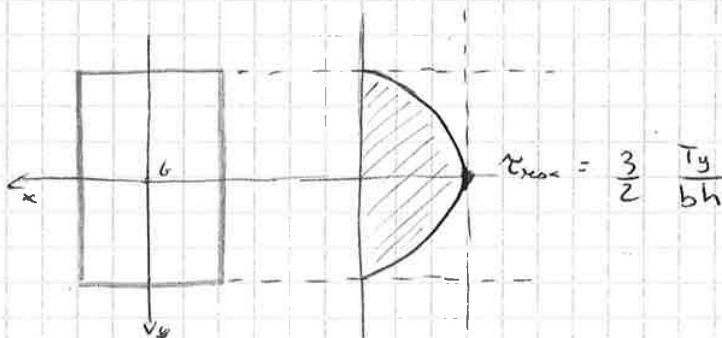
$y_G' = \frac{\frac{h}{2} + y}{2}$

$S_x' = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{\frac{h}{2} + y}{2}\right) = \left(\frac{bh}{2} - by\right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right) =$   
 $= \frac{bh^2}{8} - \frac{bhy}{4} + \frac{by^2}{2} - \frac{by^2}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$

APPLICHO JOHNSONSKY:

$\tau_{zy} = \frac{T_y \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{6 T_y \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{bh^3}$   
 $= \frac{\frac{3}{2} T_y h^2 - 6 T_y y^2}{bh^3} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} - \frac{6 T_y y^2}{bh^3}$   
 $= \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right) = \tau_{zy}$

DIAGRAMMA:



IL TAGLIO MAX

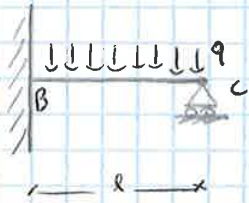
E' SOTTO AL NUC BARICENTRO

CONDIZIONI AL CONFINO PER L'INTEGRAZIONE

(20)

PER RISOLVERE LA STRUTTURA CON LIBERAZIONE DELLA LINEA ELASTICA, BISOGNA INTEGRARE LE EQUAZIONI D'INTEGRAZIONE PORTANDO IN SOLUZIONE LE PARAFRETTI, I QUALI SI DEVONO CALCOLARE PONEENDO DETERMINE CONDIZIONI AL CONFINO.

ESEMPIO:



STRUTTURA A VOLTA IPERSTATICA, A RISOLUZIONE CON EQUAZIONI DELLA LINEA ELASTICA.

$$\frac{d^4 v}{dz^4} = \frac{q}{EI} \xrightarrow{\text{INTEGRA}} \frac{d^3 v}{dz^3} = \frac{q}{EI} (z + c_1) \xrightarrow{\text{INTEGRA}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{q}{EI} \left( \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2 \right) \xrightarrow{\text{INTEGRA}}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dz} = \frac{q}{EI} \left( \frac{z^3}{6} + c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z + c_3 \right) \xrightarrow{\text{INTEGRA}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{q}{EI} \left( \frac{z^4}{24} + c_1 \frac{z^3}{6} + c_2 \frac{z^2}{2} + c_3 z + c_4 \right) \quad \text{SOLUZIONE}$$

COME APPLICARE LE CONDIZIONI AL CONFINO?

ABBIAMO 2 TIPI DI CONDIZIONI: CINEMATICHE & STATICHE

COND. CINEMATICHE

CONDIZIONI STATICHE

$v_B = 0$

$T_B \neq 0$

$\varphi_B = 0$

$M_B \neq 0$

$v_C = 0$

$T_C \neq 0$

$\varphi_C \neq 0$

$M_C = 0$

ARRIVO ORA ALLA SOLUZIONE:

42

$$T(z) = -EI_x v'''(z) = -EI_x \cdot \frac{q}{EI_x} \left( z - \frac{5}{8}l \right) = \boxed{\frac{5}{8}ql - ql}$$

TAGLIO

$$M(z) = -EI_x v''(z) = -EI_x \left( \frac{-q}{EI_x} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{5}{8}lz + \frac{l^2}{8} \right) \right)$$

MOMENTO

$$\varphi(z) = -v'(z) = \frac{q}{EI_x} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{5}{8}l \frac{z^2}{2} + \frac{z^0 l^2}{8} \right)$$

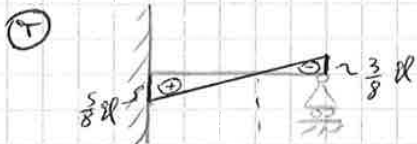
ROTAZIONE

$$v(z) = \frac{q}{EI_x} \left( \frac{z^4}{24} - \frac{5}{8}l \frac{z^3}{6} + \frac{l^2}{8} \frac{z^2}{2} \right)$$

CURVA EASICA  
ABBASSAMENTO

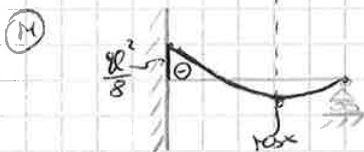
PER TROVARE I VALORI NEI PUNTI BASTA SOSTITUIRE LA COORDINATA z.

DIAGRAMMI:



$$T(0) = \frac{5}{8}ql$$

$$T(l) = \frac{5}{8}ql - ql = -\frac{3}{8}ql$$



$$M(0) = -\frac{ql^2}{8}$$

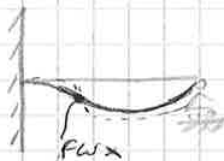
$$M(l) = -\frac{4ql^2}{8} + \frac{5}{8}ql^2 - \frac{ql^2}{8} = 0$$

$$T=0 \Leftrightarrow z = \frac{5}{8}l$$

$$M_{max} \text{ in } \frac{5}{8}l$$

$$\frac{10}{8}ql^2 - \frac{5}{8}ql^2$$

DEFORMATA:



APPLICHO QUA IL PLV :

$$L_{v, ext} = L_{v, int} \Rightarrow \int_0^l M^{(R)} \chi_x^{(v)} dz$$

ESSENDO  $\chi_x = \frac{M^{(R)}}{EI}$  e  $M^{(R)} = M_0 + M_1 x_1$   
 $M^{(P)} = M_1$

$$\Rightarrow \int_0^l M_1 \left( \frac{M_0 + M_1 x_1}{EI} \right) dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^l \frac{M_1 M_0}{EI} dz + \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} x_1 dz$$

EQUAZIONE DI CONGRUENZA

$$v_1 = \underbrace{v_{01}}_{\text{SPOSTAMENTO DOVUTO AI CARICHI REALI}} + \underbrace{v_{11} x_1}_{\text{SPOSTAMENTO DOVUTO AI CARICHI FITTIZI}}$$

COME RISOLVO GLI INTEGRALI ? METODO DI SIMPSON

$$\bullet \int_0^l M_1 M_0 dz = \frac{l}{6} \left[ 2 \left( -\frac{ql^2}{2} \right) + 4 \left( \frac{l}{2} \right) \left( -\frac{ql^2}{8} \right) \right] = -\frac{ql^3}{8}$$

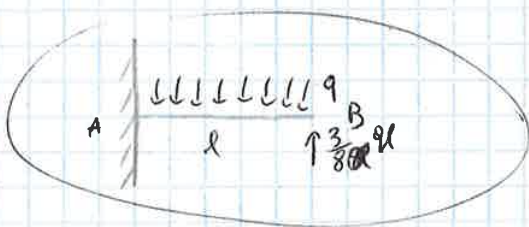
$$\bullet \int_0^l M_1^2 dz = \frac{l}{6} \left[ l^2 + 4 \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right] = \frac{l^3}{3}$$

APPLICHO L'EQUAZIONE :

$$v = -\frac{ql^3}{8} \frac{1}{EI} + \frac{ql^3}{3EI} x_1 = 0 \rightarrow \text{SI IMPONGONO SPOSTAMENTI NULLI}$$

$$x_1 = \frac{3}{8} ql \quad \text{INCOGNITA IPERSTATICA}$$

QUA BASTA RISOLVERE L'ISOSTATICA ASSOCIATA :





# CARICO DI PUNTA

46

DEF: QUALSIASI CARICO NOZZA DI COMPRESSIONE

UN CORPO SOGGETTO A CARICO DI PUNTA TENDON SUPPL A RAGGIUNGERE UN EQUILIBRIO IN BASE ALLA FORZA POSSIBILE ANNI

3 TIPI DI EQUILIBRIO:

1) STABILE



2) INSTABILE



3) INDIFFERENTE



OVVIAMENTE SI CERCA SUPPL DI RAGGIUNGERE LE CONDIZIONI X CUI SI HA EQUILIBRIO INDIFFERENTE.

INTRODUCENDO 2 MOMENTI:

$$M_i \text{ (INSTABILIZZANTE)} = NV$$

$$M_s \text{ (STABILIZZANTE)} = -EI v''$$

DIAMO CHE LA CONDIZIONE X CUI SI HA EQUILIBRIO INDIFFERENTE

E' CHE  $M_i = M_s$

NEGO SPECIFICO:

$$\begin{cases} M_s = M_i & \text{INDIFFERENTE} \\ M_s > M_i & \text{STABILE} \\ M_s < M_i & \text{INSTABILE} \end{cases}$$

QUINDI L'EQUILIBRIO DIPENDE DIRETTAMENTE DAI VALORI DI N, X CUI POSSIAMO USCOPRIRE UN VALORE CRITICO (NCRITICO) CHE SORSA LA SOGLIA.

$$M_s = M_i \Rightarrow NV = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}$$

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{N}{EI} v = 0$$

$$v(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z)$$

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI} \quad N = \frac{EI \alpha^2}{L^2}$$

$$v(0) = 0$$

$$v(L) = 0$$

$$B \sin \alpha L = 0$$

$$\alpha L = n \pi$$

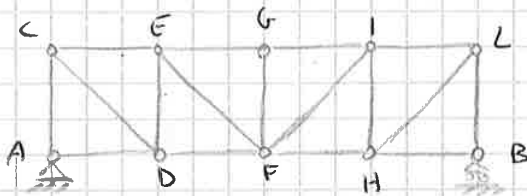
$$\left( \frac{N = EI \alpha^2}{L^2} \right) = \frac{EI n^2 \pi^2}{L^2}$$

TRAVERSARI RETICOLARI.

DEF: INSIEME DI ASTE COLLEGATE TRA LORO TRAMITE CUNTI DI SOGGIORNO SOLICITATI A CARICHI NODALI;

↳ È UNA STRUTTURA ISO STATICA

ESEMPLO:



CONDIZIONE AFFINCHÉ LA TRAVATURA SIA ISO STATICA

$$2a + 3 = 2m$$

↳ ASTE                      ↳ NODI

VERIFICA:  $17 + 3 = 2 \cdot 10$

$20 = 20$  OK!

LA RISOLUZIONE PUÒ AVVENIRE MEDIANTE 2

- METODI:
- 1) METODO DEI NODI
  - 2) METODO DI RITORE

IL METODO DEI NODI CONSISTE DI SCELGERE TUTTI GLI INCENSIBILI AI NODI, IMPOSTANDO NON NULLO SOLO LO SFORZO NORMALE

IL METODO DI RITORE CONSISTE NEL SEZIONARE LA STRUTTURA: SI EFFETTUA UN TAGLIO CHE INTERSECA 3 ASTE, QUORA DI INTRINSECO + ALTRE 2 CHE SI INCROCIANO IN UN PUNTO; POI SI DECOGLIE L'INQUADRO ALLE ROTAZIONI INTORNO A QUEL PUNTO.

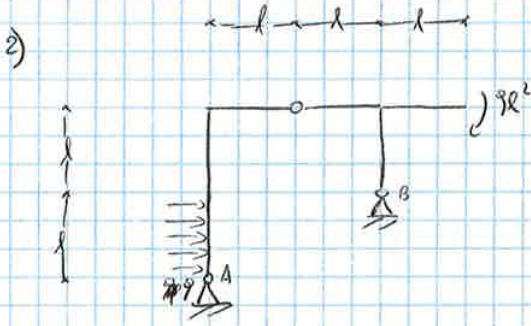
2 TIPI DI ASTE: TIRANTI & PUNTONI

TIRANTI  $\Rightarrow$  TRAVI TESE ED N USCENDE DAL NODO

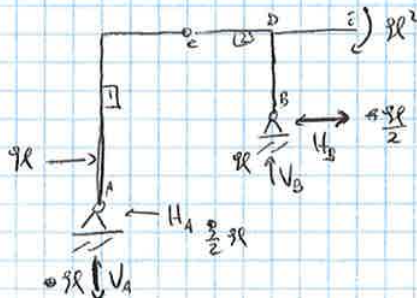
PUNTONI  $\Rightarrow$  TRAVI COMPRESSE ED N ENTRANO NEL NODO

NOTA

NELLE TRAVATURE RETICOLARI È POSSIBILE USARE I TIRANTI NELLE DIAGONALI CHE SONO ASTE + CUNTI E, SE COMPRESSE, VANNO PRESI IN CONSIDERAZIONE.



REAZIONI ESTERNE ED INTERNE



$$\rightarrow qR - H_A - H_B = 0$$

$$\uparrow V_A + V_B = 0$$

$$A) \frac{-qR^2}{2} + V_B \cdot 2l + H_B \cdot l + qR \cdot l = 0$$

$$C) \frac{3qR^2}{2} - H_A \cdot 2l - V_A \cdot l = 0$$

~~$H_A = qR - H_B$~~   
 ~~$V_A = -V_B$~~   
 ~~$V_B = \frac{qR}{2} - qR - H_B \Rightarrow H_B = \frac{qR}{2} + V_A$~~   
 ~~$V_A = \frac{3}{2}qR - 2l(qR - H_B) - l(V_B) = 0$~~

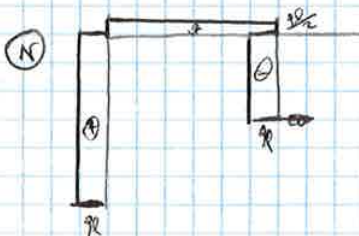
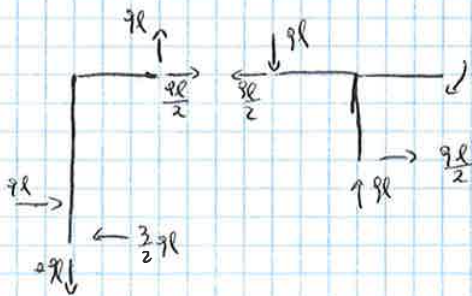
$$H_B = qR - H_A \Rightarrow H_B = -\frac{1}{2}qR$$

$$V_A = -qR$$

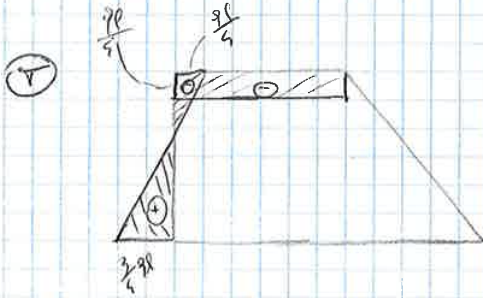
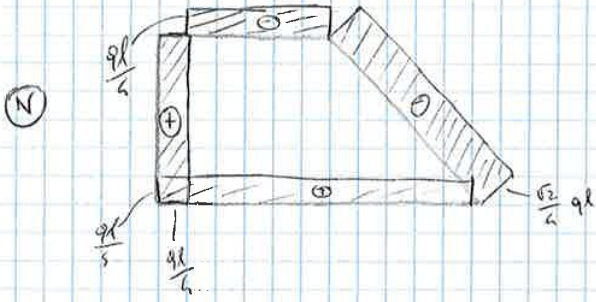
$$V_B = \frac{H_A \cdot 2l + qR \cdot l + \frac{qR^2}{2}}{2} = qR$$

$$H_A = \frac{3}{2}qR + \frac{3}{2}qR$$

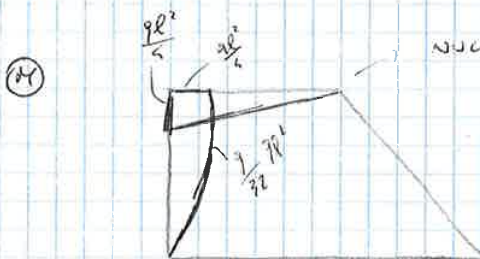
$$\Rightarrow H_A = \frac{3}{2}qR$$



DIAGRAMMI



SULLE BIELLE VI È SOLO  
SPORZO NORMALE



NULLO XKV COMPLESSO