



Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino

Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 1632A -

ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Lanfranchi

MATERIA: Meccanica Strutturale. Prof. Curà

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**


MODELLI DI SFORZO:

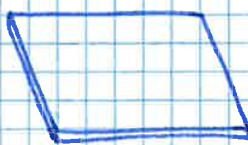
\vec{P} Pressione su un punto

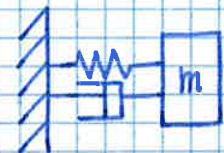
 Carico distribuito

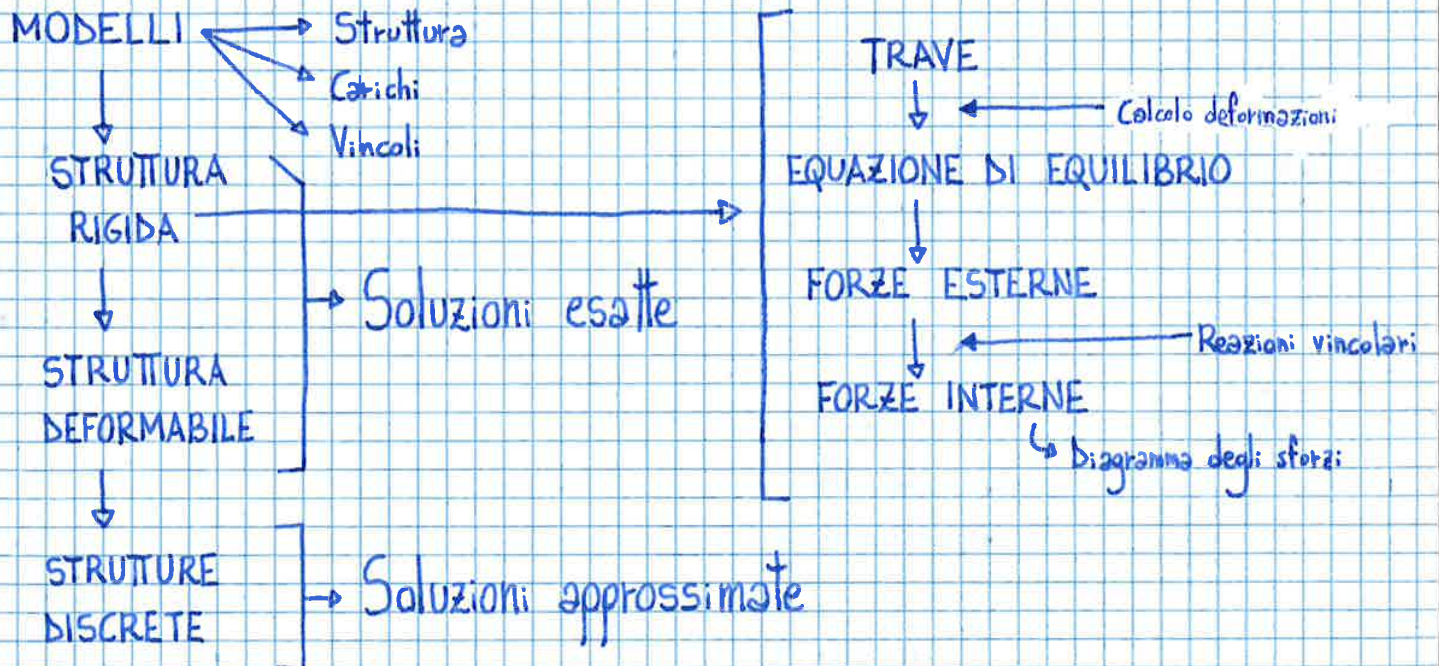
\vec{C} Coppia di forze

MODELLO STRUTTURALE:


 Trave monodimensionale (De Saint-Venant)

 Piastre bidimensionali

Sistemi a parametri concentrati $\xrightarrow{\text{Es.}}$  Sistema massa-molla-smorzatore

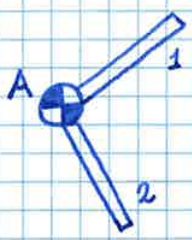


TRAVE ISOSTATICA SEMPLICE:  $n=3$
 $m = 2 + 1 = 3$
A B
 $l = n - m = 0$

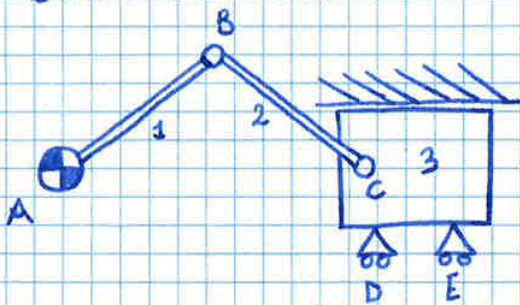
ECCEZIONE:  Formalmente: isostatico ($1+1+1=3$)
 Realmente: labile (si muove)
 Equazioni: iperstatico

Ad "n" coordinate corrispondono altrettante equazioni di equilibrio

ECCEZIONE:

 $n = 3 + 3 = 6$
1 2
 $m = 2$
A
 $l = 1 + 1 = 2$
1 2 $\rightarrow n > m + l$

BIELLA-MANOVELLA:

 $n = 3 + 3 + 3 = 9$
1 2 3
 $m = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$
A B C b E $\rightarrow l = 9 - 8 = 1$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

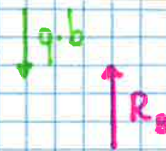
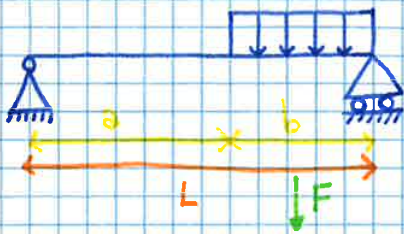
Asse x: $\sum_{i=1}^L F_{xi} = 0$
L \rightarrow Numero forze orizz.

Asse y: $\sum_{j=1}^M F_{yj} = 0$
M \rightarrow Numero forze vert.

Rotazioni: $\sum_{R=1}^N [C_R + F_R \cdot b_R] = 0$
N
Coppie di forze \rightarrow Momenti

Sistema isostatico: $n = m, l = 0 \rightarrow$ Calcolo delle reazioni vincolari

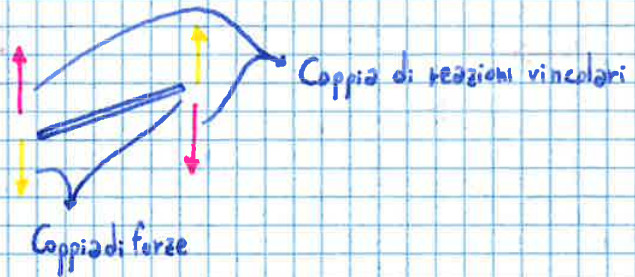
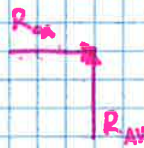
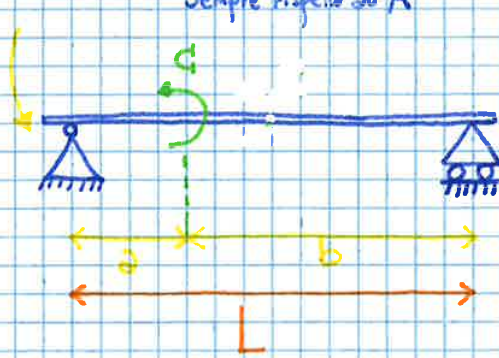
Sistema ipostatico: $n = m + l \rightarrow$ Calcolo delle r.v. e delle equazioni del moto



FORZE: $\rightarrow \oplus R_{A0} = 0$

$\uparrow \oplus R_{VA} + R_B - q \cdot b = 0 \rightarrow R_{VA} = \frac{q \cdot b^2}{2L}$

$\odot \oplus R_B \cdot L - q \cdot b \cdot (a + b/2) = 0 \rightarrow R_B = \frac{q \cdot b}{L} [a + b/2]$
 ← Sempre rispetto ad A

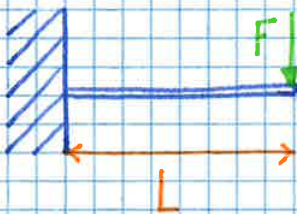


$\rightarrow \oplus R_{A0} = 0$

$\uparrow \oplus R_{AV} + R_B = 0 \rightarrow R_{AV} = G/L$

$\odot \oplus R_B \cdot L + G = 0 \rightarrow R_B = -G/L$

TRAVE A SBALZO O CANTILEVER:



$n = m = 3$
 $l = 0$



$\rightarrow \oplus R_{A0} = 0$

$\uparrow \oplus R_{AV} - F = 0 \rightarrow R_{AV} = F$

$\odot \oplus -F \cdot L + M_v = 0 \rightarrow M_v = F \cdot L$

← Momento di vincolo

Sistema ①: $\oplus \uparrow R_{AV} + R_{CV} - F = 0$

$\oplus \rightarrow R_{AO} + R_{CO} = 0 \rightarrow R_{AO} = -\frac{F \cdot L}{h}$

$\oplus \odot -F \cdot L + R_{CO} \cdot h = 0 \rightarrow R_{CO} = \frac{F \cdot L}{h}$

Sistema ②: $\oplus \uparrow = R_{CV} - R_{BV} = 0 \rightarrow R_{CV} = R_{BV}$

$\oplus \rightarrow R_{CO} - R_{BO} = 0 \rightarrow R_{CO} = R_{BO}$

$\oplus \odot R_{BO} \cdot h - R_{BV} \cdot l = 0 \rightarrow R_{BV} = R_{BO} \cdot \frac{h}{l}$

$R_{AO} = R_{CO} = -\frac{F \cdot L}{h} = R_{BO} \rightarrow R_{BV} = -\frac{F \cdot L}{h} \cdot \frac{h}{l} = -\frac{F \cdot L}{l}$

$R_{CV} = R_{BV} = -\frac{F \cdot L}{l}$

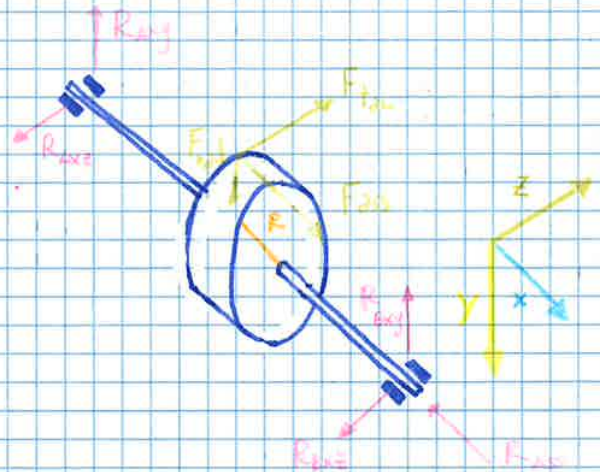
Ricapitolando: $R_{AV} = \frac{F(L+l)}{l}$ $R_{BV} = -\frac{F \cdot L}{l}$ $R_{CV} = -\frac{F \cdot L}{l}$
 $R_{AO} = -\frac{F \cdot L}{h}$ $R_{BO} = \frac{F \cdot L}{h}$ $R_{CO} = \frac{F \cdot L}{h}$

SISTEMA TRIDIMENSIONALE:

$n = 6$

$m \begin{cases} x, y, z \\ \theta_x, \theta_y \end{cases} = 5$

$l = \theta_x = 1$

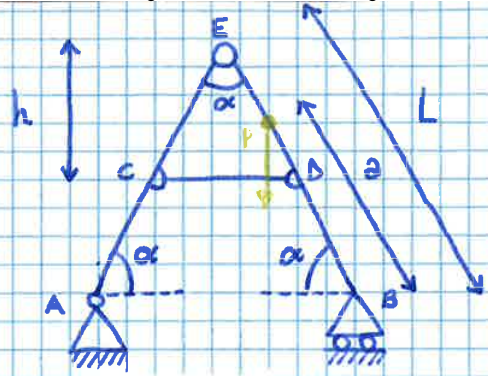


Servono: 5 equazioni di equilibrio
 +
 1 equazione del moto

R_{Axz}
 R_{Axy} } $R_A = \sqrt{R_{Axy}^2 + R_{Axz}^2}$
 R_{Ayz} }
 R_{Bxy} } $R_B = \sqrt{R_{Bxy}^2 + R_{Bxz}^2}$
 R_{Bxz} }
 + $C_{IN} - C_{OUT} = 0 \rightarrow \oplus C_{IN} - F_t \cdot R = 0$
 Uso Pitagora perché l'insieme è radial-simmetrico

ESERCIZIO:

Dimostrare che la seguente struttura è isostatica e calcolarne reazioni vincolari interne ed esterne



Travi: AE, BE, CD → n=3

Vincoli: $\underset{A}{2} + \underset{B}{1} + \underset{C}{2} + \underset{D}{2} + \underset{E}{2} \rightarrow m=9$

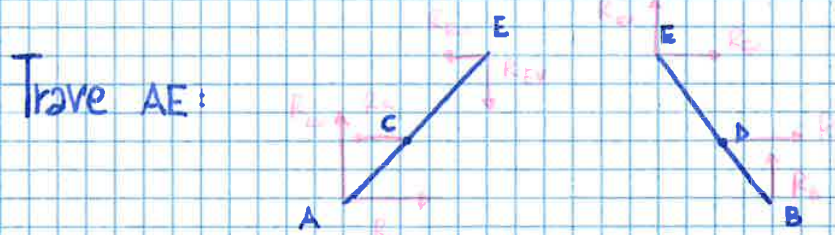
$l = n - m = 0 \rightarrow$ La struttura è isostatica

Asta (tirante):

- ⊕ ↑ Non ci sono reazioni verticali
- ⊕ → $R_c - R_d = 0 \rightarrow R_c = R_d$
- ⊕ ↻ Non ci sono momenti di reazione

Reazioni in A e B:

- ⊕ → $R_{Ao} = 0$
- ⊕ ↑ $R_{Av} - P + R_{Bv} = 0 \rightarrow R_{Av} = \frac{P \cdot a \cdot \cos \alpha}{L}$
- ⊕ ↻ $R_{Bv} L - P(L - a \cdot \cos \alpha) = 0 \rightarrow R_{Bv} = P - \frac{P \cdot a \cdot \cos \alpha}{L}$



Le reazioni in C e D sono opposte rispetto a quelle disegnate sull'asta perché quando "riassiamo" il sistema le reazioni interne devono annullarsi reciprocamente

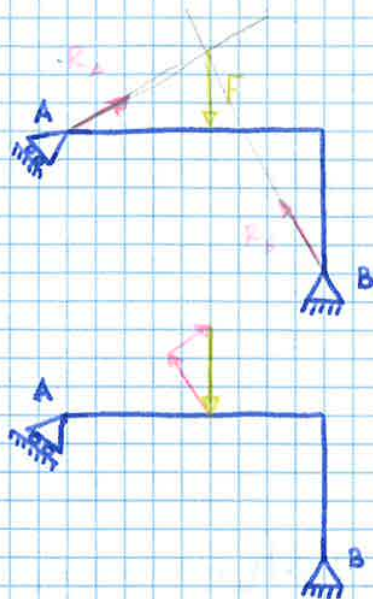
- ⊕ → $R_c - R_{EO} = 0 \rightarrow R_c = R_{EO}, R_{Ao} = 0$
- ⊕ ↑ $R_{Av} - R_{Ev} = 0 \rightarrow R_{Av} = R_{Ev}$
- ⊕ ↻ $R_c \cdot h - R_{Av} \cdot L/2 \rightarrow R_c = \frac{P \cdot a \cdot \cos \alpha}{2h} = R_{EO}$
↳ Rispetto ad E

METODO DELLE TRE FORZE:

Se, su tre forze, conosco modulo, direzione e verso di una e la direzione di un'altra, allora sono tutte e tre univocamente determinate

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE

(Le forze passano per lo stesso punto)

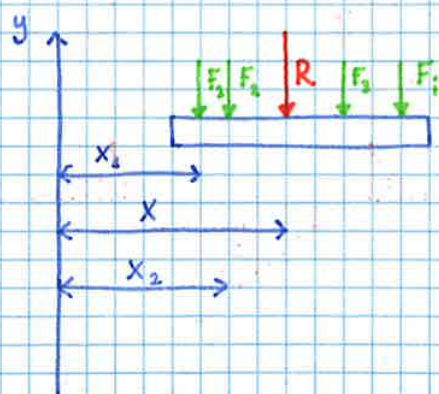


RISULTANTE DI FORZE PARALLELE:

Modulo: $R_i = \sum_{i=1}^N F_i$

Posizione → Equilibrio di momento (cerco un punto rispetto a cui M risultante è = 0)

$$R_x = \sum_{i=1}^N F_i \cdot x_i \quad \rightarrow \quad x = \frac{\sum_{i=1}^N F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^N F_i}$$



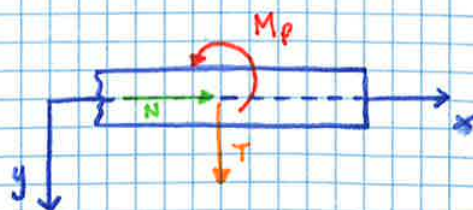
FORZE INTERNE E FORZE ESTERNE:

Solido di De Saint-Venant

- Monodimensionale (la lunghezza è almeno 10 volte lo spigolo)
- 2D → $n=3$ (2 [N], 1 [Nm])
- 3D → $n=6$ (3 [N], 3 [Nm])
- Sforzi = Forze interne
- Equilibrio tra forze interne ed esterne

Convenzioni sulle forze interne:

- Sforzo normale N : applicato nel baricentro, tende ad allungare o comprimere la trave (senso positivo verso l'asse x)



Parte sinistra della trave "spezzata": non ho le reazioni vincolari

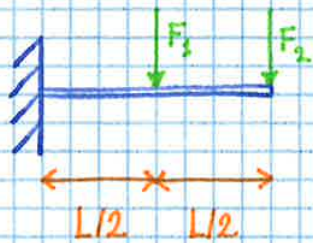
$$N + F_0 = 0 \rightarrow N = -F_0$$

$$T - F_v = 0 \rightarrow T = F_v$$

$$M_f + F_v \cdot x' = 0 \rightarrow M_f = -F_v \cdot x' \quad \left\{ \begin{array}{l} x'=0 \\ x'=L \end{array} \right.$$

Convenzioni dei segni cambiate rispetto alla parte destra (vedi disegno)

IMPORTANTE: $\frac{dM_f}{dx} = T$



$$\begin{aligned} R_0 &= 0 \\ R_v &= F_1 + F_2 \\ M_v &= F_1 \cdot L/2 + F_2 \cdot L \end{aligned}$$

CAMPATE:

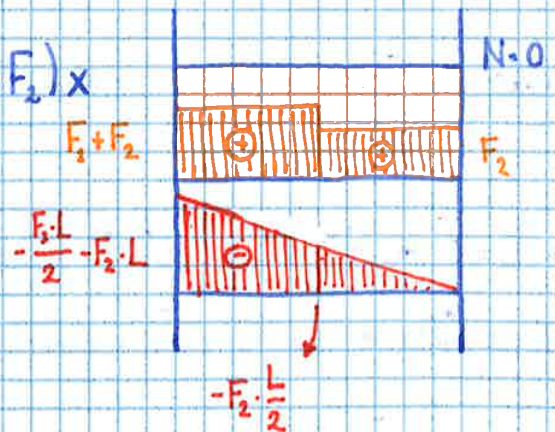
Si definisce campata di una trave quella sua porzione nella quale le condizioni di equilibrio restano le stesse

$$T - R_v = 0 \rightarrow T = F_1 + F_2$$

$$M_f + M_v - R_v \cdot x = 0 \rightarrow M_f = -\frac{F_1 \cdot L}{2} - F_2 \cdot L + (F_1 + F_2) \cdot x$$

$$N = 0$$

$$\begin{aligned} M_f_{x=0} &= -\frac{F_1 \cdot L}{2} - F_2 \cdot L \\ M_f_{x=L/2} &= -\frac{F_2 \cdot L}{2} \end{aligned}$$



$$T - R_v + F_1 = 0 \rightarrow T = F_2$$

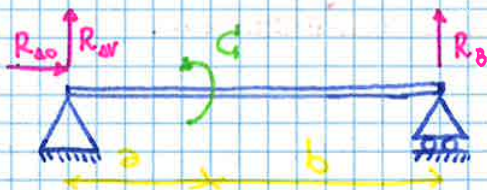
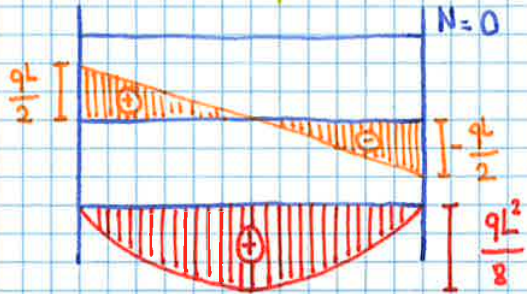
$$M_f + M_v - F_1(x - L/2) - R_v \cdot x = 0 \rightarrow M_f = -\frac{F_1 \cdot L}{2} - F_2 \cdot L - F_1(x - L/2) + x(F_1 + F_2)$$

$$M_f_{x=L/2} = -F_2 \cdot L/2$$

$$M_f_{x=L} = 0$$

$R_{A0} = 0$
 $T - R_{Av} + q \cdot x = 0 \rightarrow T = \frac{qL}{2} - qx \quad (0 \leq x \leq L)$
 $M_f - R_{Av}x + \frac{qx^2}{2} = 0 \rightarrow M_f = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{qx^2}{2} \quad (0 \leq x \leq L)$

0 ≤ x ≤ L (abbiamo una sola composta)

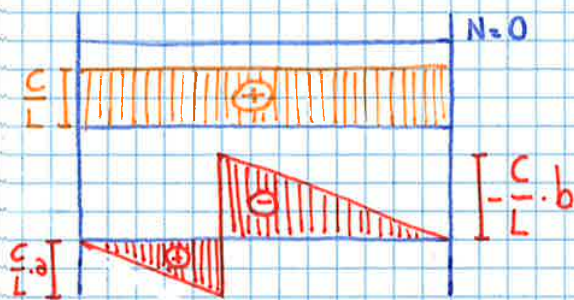


$R_{Av} = C/L$ $R_B = -C/L$ $R_{A0} = 0$

$T = C/L$

$M_f = R_{Av} \cdot x \rightarrow M_f = \frac{C}{L} \cdot x \quad (0 \leq x \leq a)$

Sezione "b":
 $N = 0$
 $T = R_{Av}$
 $M_f + C - R_{Av} \cdot x = 0$
 $\rightarrow M_f = \frac{C}{L} \cdot a - C \quad (a \leq x \leq L)$



TENSIONI E DEFORMAZIONI:

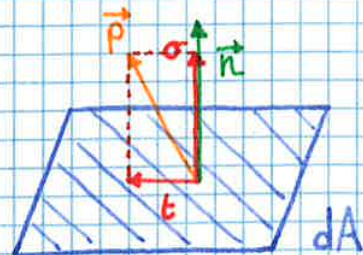
Stress → Pressione (N/mm²)

Modello strutturale

- Materiale
- Legge costitutiva del materiale
- Geometria

$$\vec{p} = \lim_{dA \rightarrow 0} \left(\frac{d\vec{F}}{dA} \right)$$

Forza
 Vettore stress
 Area infinitesimo



Analogamente si ricavano:

Asse y: $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ys}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$

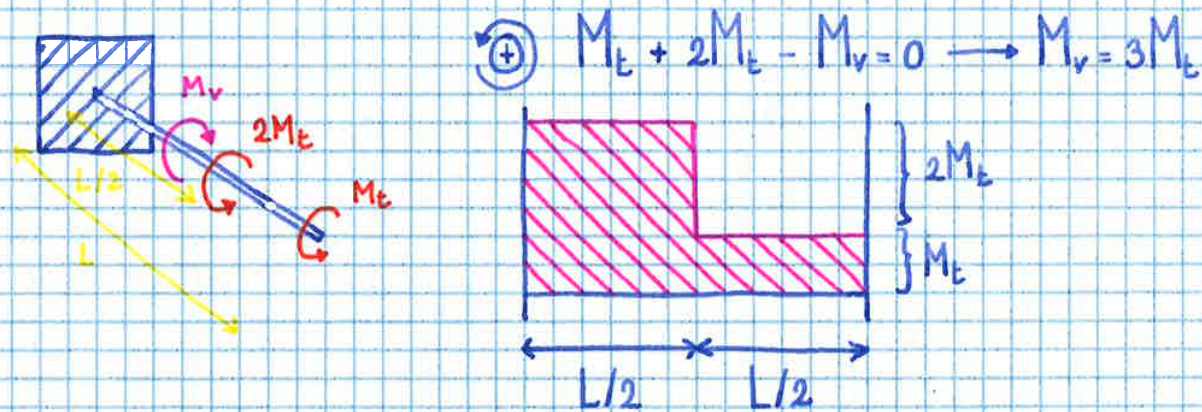
Asse z: $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$

Si passa poi all'equilibrio per le rotazioni:

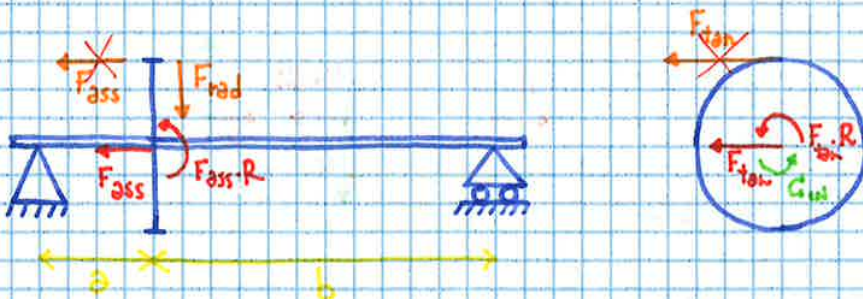
Attorno allo spigolo //z: $\tau_{xy} \underbrace{dy}_{\text{Faccia di giacenza}} \underbrace{dz}_{\text{Braccio di giacenza}} \cdot dx - \tau_{yx} dx dz \cdot dy = 0$

semplificando: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

ESERCIZIO:



ESERCIZIO (ALBERO E RUOTA DENTATA):



⊕ $R_{Ao} = F_{Ass}$

⊕ $R_{Avxy} = \frac{F_{rad} \cdot b}{L} + \frac{M_{ass}}{L}$

⊕ $R_{Avxy} = \frac{F_{rad} \cdot a}{L} - \frac{M_{ass}}{L}$

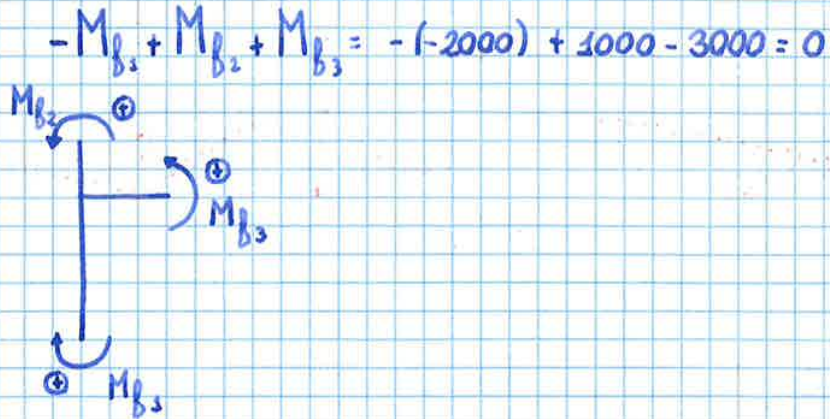
⊕ $M_f = R_{Avxy} \cdot x \quad (0 \leq x \leq a)$

⊕ $M_f = -M_{ass} + R_{Avxy} \cdot x - F_{rad}(x-a) \quad (a \leq x \leq L)$

EQUAZIONE DI EQUILIBRIO AL NODO:

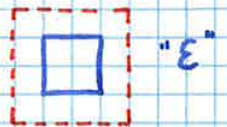
$$\sum_{i=1}^3 M_{B_i} = 0$$

Numero di campate che convergono nel nodo

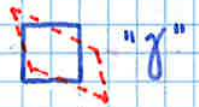


DEFORMAZIONI:

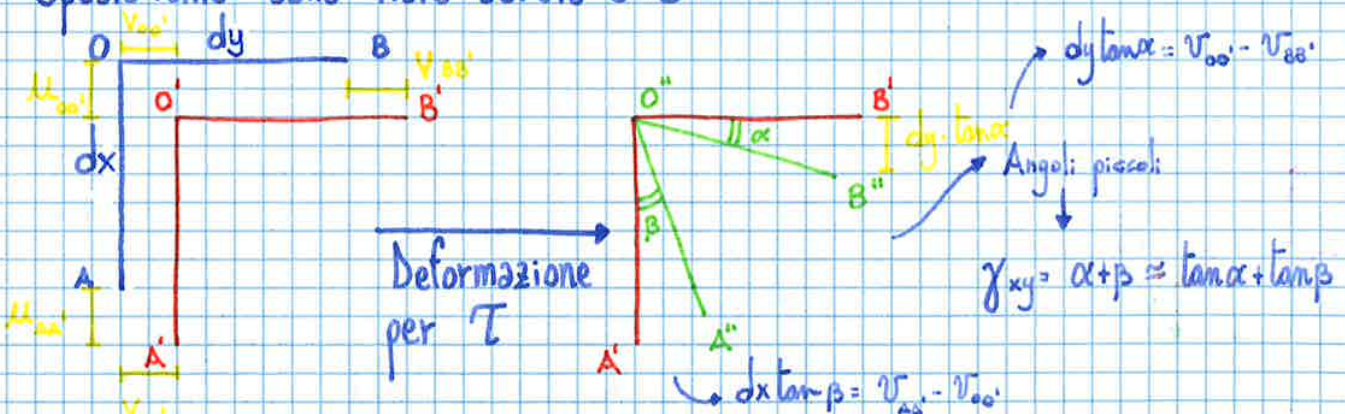
$\sigma \rightarrow$ deformazione di tipo ϵ ; (allungamento o accorciamento)



$\tau \rightarrow$ deformazione di tipo γ_{ij} (deformazione angolare)



"Spostamento" della fibra dovuto a σ :

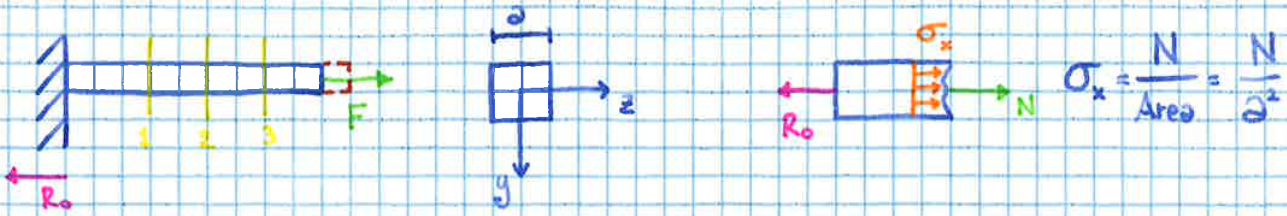


DEFORMAZIONE LUNGO L'ASSE X: $\frac{u_{aa'} - u_{oo'}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x$

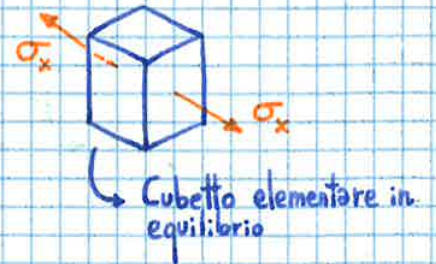
DEFORMAZIONE NEL PIANO XY: $\frac{v_{oo'} - v_{oo'}}{dy} + \frac{v_{aa'} - v_{oo'}}{dx} = \tan \alpha + \tan \beta = \gamma_{xy}$

Legame fra tensioni e deformazioni:

- Geometria della sezione
- Materiale
- Legge costitutiva del materiale



Se immagino di far passare dei piani perpendicolari alla trave e poi applico la forza, essi rimarranno normali alla trave e slitteranno tutti della stessa misura.



Lo sforzo è dato dalla risultante dell'andamento delle tensioni:

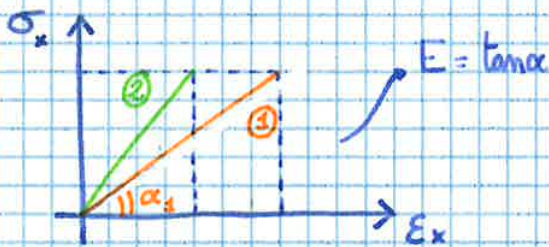
In regime elastico lineare vale la legge di Hooke (proporzionalità diretta tra forza e spostamento)

FORMULA CLASSICA: $F_x = k \cdot \Delta x$

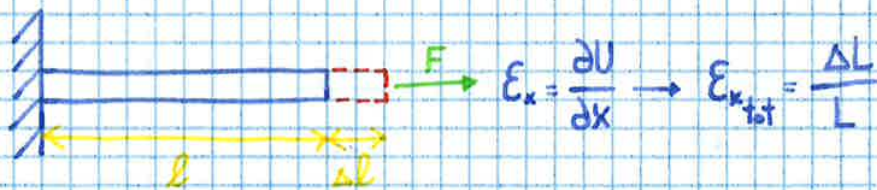
FORMULA PER TENSIONI E DEFORMAZIONI: $\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$

Modulo di Young

$E \approx 210000 \text{ N/mm}^2$ per l'acciaio



Il materiale (3) è più duttile



$$\Delta L = \int_0^L \epsilon_x dx = \int_0^L \frac{\sigma_x}{E} dx = \int_0^L \frac{N}{AE} dx = \frac{N}{AE} \cdot L$$

Con questa sostituzione (sia σ_x che E sono costanti perché il materiale è isotropo) caratterizzo il materiale, altrimenti non potrei trovare la deformazione

Con questa caratterizzo l'elemento poiché compare anche la sezione

GEOMETRIA DELLE AREE:

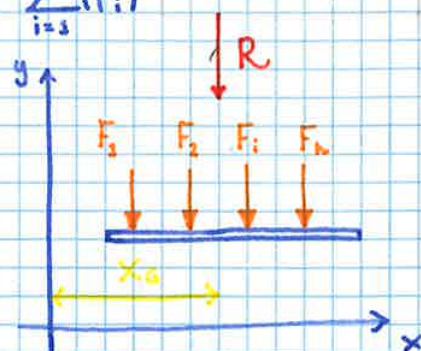
BARICENTRI E MOMENTI STATICI:

Risultante delle forze verticali parallele:

$$X_R = \frac{\sum_{i=1}^N (F_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^N (F_i)}$$

Risultante dei momenti statici: $S_y = \sum_{i=1}^N (m_i \cdot x_i)$

↓
massa
i-esima



ρ costante e materiale isotropo: $m = \rho \int_A dA$

CALCOLO DEI MOMENTI STATICI:

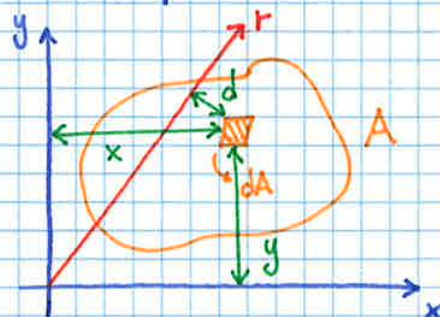
$$S_y = \int_A x \, dA = x_G \cdot A \rightarrow x_G = \frac{S_y}{A}$$

$$S_x = \int_A y \, dA = y_G \cdot A \rightarrow y_G = \frac{S_x}{A}$$

$$S_R = \int_A d \cdot dA = d_G \cdot A \rightarrow d_G = \frac{S_R}{A}$$

↓
Asse generico

↓
distanza dall'asse



Se una sezione ha degli assi di simmetria, il baricentro sta su essi

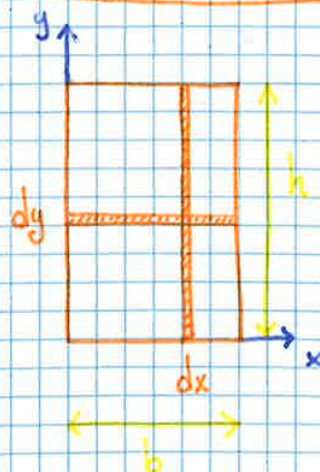
SEZIONE RETTANGOLARE:

$$S_x = \int_A y \, dA = \int_0^h y b \, dy = \left[b \frac{y^2}{2} \right]_0^h = b \cdot \frac{h^2}{2}$$

$$S_y = \int_A x \, dA = \int_0^b x h \, dx = h \cdot \frac{b^2}{2}$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = b \cdot \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{bh} = h/2$$

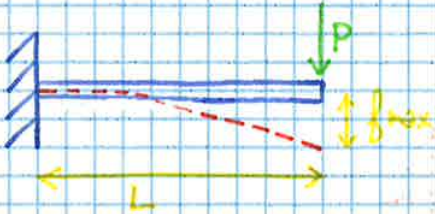
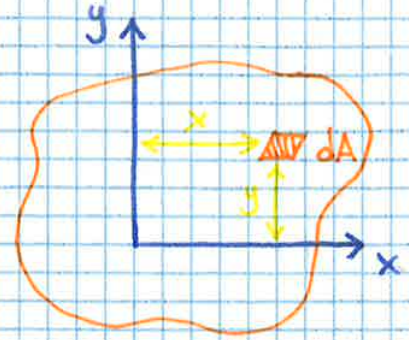
$$x_G = \frac{S_y}{A} = h \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{bh} = b/2$$



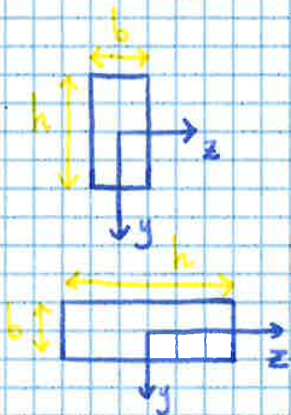
MOMENTO DI INERZIA:

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

$$I_y = \int_A x^2 dA$$



$$f_{max} = \frac{P \cdot L^3}{3EI_z}$$



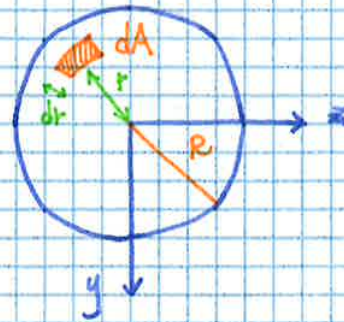
$$I_z = \int_A y^2 dA$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

MOMENTO D'INERZIA POLARE:

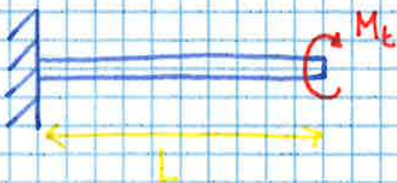
$$I_p = \int_A r^2 dA$$



Per le sezioni circolari:

$$I_p = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2} \leftrightarrow \frac{\pi D^4}{32}$$



$$\Delta\theta = \frac{M_t \cdot L}{G \cdot I_p}$$

Modulo di elasticità tangenziale

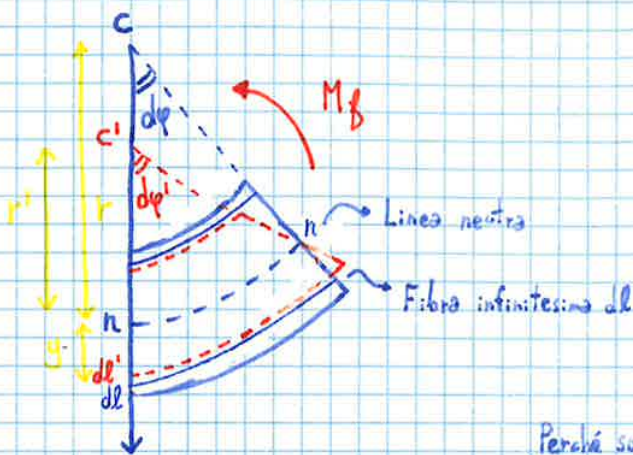
FLESSIONE :

$$dl = (r+y)d\varphi$$

Sia dl' la fibra allungata

$$dl' = (r'+y)d\varphi'$$

Invece $dl_n = r d\varphi = r' d\varphi'$



Perché sono uguali:
(l'espressione linea neutra)

$$\epsilon_x = \frac{\Delta l}{L} = \frac{dl' - dl}{dl} = \frac{(r'+y)d\varphi' - (r+y)d\varphi}{(r+y)d\varphi} = \frac{r'd\varphi' + yd\varphi' - rd\varphi - yd\varphi}{(r+y)d\varphi}$$

$$\epsilon_x = \frac{y(d\varphi' - d\varphi)}{(r+y)d\varphi} = \frac{y}{r+y} \left(\frac{d\varphi'}{d\varphi} - 1 \right)$$

$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = r/r'$

$$\epsilon_x = \frac{ry}{r+y} \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right)$$

Nel caso della trave rettilinea $r \rightarrow \infty$

Quindi: $\epsilon_x = \frac{y}{R}$

$\rightarrow r'$ (raggio di curvatura)

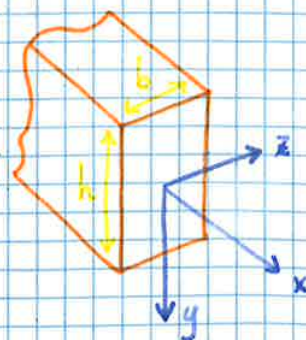
Da cui $\sigma_x = \frac{E}{R} \cdot y$

Per arrivare alla formula con momento flettente e di inerzia occorre svolgere due integrali

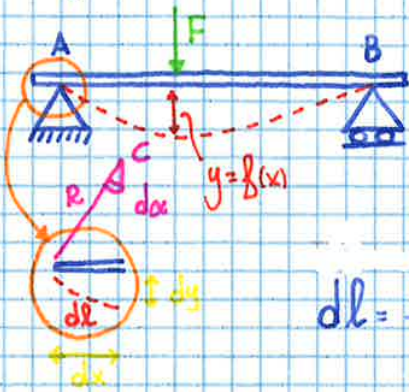
$$\int_A \sigma_x dA = 0 \quad (\text{n}^\circ \text{ fibre tese} = \text{n}^\circ \text{ fibre compresse})$$

\downarrow Tensione

Sostituendo si ottiene $\frac{E}{R} \int_A y dA = 0$



EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELLA LINEA ELASTICA:



$$dl = R d\alpha \rightarrow dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$dl = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{ma } \tan \alpha \approx \alpha \quad \text{poiché } \alpha \text{ è piccolo}$$

$$\frac{d}{dx} \tan \alpha = \frac{d^2 y}{dx^2} = [1 + \tan^2 \alpha] \cdot \frac{d\alpha}{dx} = [1 + \tan^2 \alpha] \cdot \frac{d\alpha}{dl} \cdot \frac{dl}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] \left(-\frac{1}{R}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{R} = \frac{d^2 y / dx^2}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

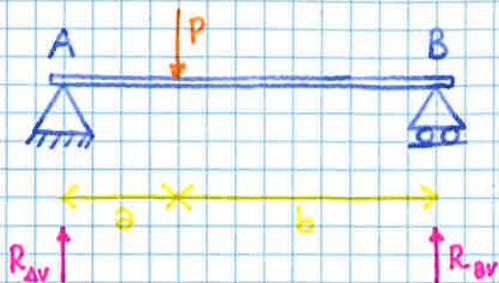
Trascurabile perché \$\alpha\$ è piccolo

$$-\frac{1}{R} = d^2 y / dx^2$$

$$M_a \frac{1}{R} = \frac{M_b}{EI_z}$$

quindi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_b}{EI_z}$$



$$R_{Av} = P \cdot b / L$$

$$R_{Bv} = P \cdot b \cdot x / L - P(x-a)$$

Dai vincoli posso estrarre solo due condizioni: al contorno (sulla freccia) delle quattro necessarie, perché generano solo una reazione vincolare a testa

Campata 1: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{Pb}{EI_2 L} \cdot x$

Campata 2: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{Pb}{EI_2 L} \cdot x + \frac{P(x-a)}{EI_2}$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{Pb}{2EI_2 L} \cdot x^2 + A_1$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{Pb}{2EI_2 L} \cdot x^2 + \frac{P(x-a)^2}{2EI_2} + A_2$$

$$y_1 = -\frac{Pb}{6EI_2 L} x^3 + A_1 x + B_1$$

$$y_2 = -\frac{Pb}{6EI_2 L} x^3 + \frac{P(x-a)^3}{6EI_2} + A_2 x + B_2$$

Condizioni: $y_1 = 0$ per $x=0 \rightarrow B_1 = 0$

$y_2 = 0$ per $x=L$

Per le altre condizioni uso il criterio di congruenza:

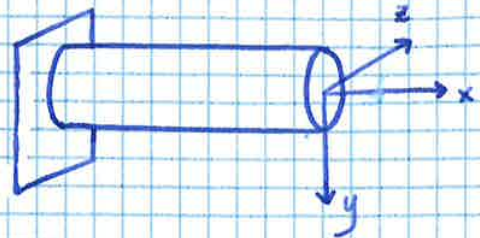
- Momento, rotazione e freccia devono essere uguali all'inizio della seconda campata e all'inizio della prima

Per $x=a$ $\begin{cases} y_1 = y_2 \\ \partial y_1 / \partial x = \partial y_2 / \partial x \end{cases}$

$$\begin{cases} -\frac{Pb}{6EI_2 L} a^3 + A_1 a + B_1 = -\frac{Pb}{6EI_2 L} a^3 + A_2 a + B_2 \\ -\frac{Pb}{2EI_2 L} a^2 + A_1 = -\frac{Pb}{2EI_2 L} a^2 + A_2 \end{cases}$$

TORSIONE:

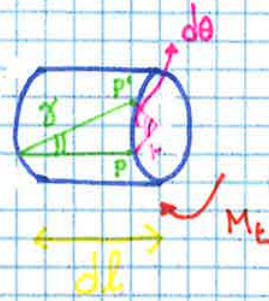
Il risultato delle tensioni τ è un momento torcente



$$M_t = M_x$$

$$\widehat{PP'} = y dl = r d\theta \rightarrow \frac{d\theta}{dl} = \frac{y}{r}$$

Arco di spostamento di P



Siccome vale la legge di Hooke si ha

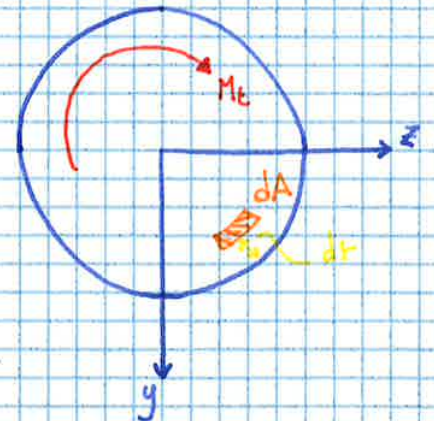
$$\tau = G \cdot \gamma$$

Modulo di elasticità tangenziale
 $\approx 83000 \text{ N/mm}^2$

$$G = E \cdot \frac{1}{2(1+\nu)}$$

Coefficiente di Poisson

$$\begin{cases} d\theta/dl = \gamma/r \\ \tau = G \cdot \gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{d\theta}{dl} = \frac{\tau}{G \cdot r}$$



$$M_t = \int_A \tau \cdot r \, dA = \int_A \frac{d\theta}{dl} G \cdot r \cdot r \, dA =$$

$$\frac{d\theta}{dl} G \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \, dr = \frac{d\theta}{dl} G \cdot 2\pi \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$M_t = \frac{d\theta}{dl} \cdot \frac{G \pi R^4}{2}$$

Immagino che l'area sia data da corone circolari infinitesime (quindi anelli, cerchi)

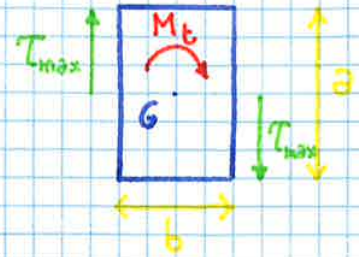
$$\frac{\Delta\theta}{\Delta L} = \frac{M_t}{G I_p}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t}{G I_p} \cdot L$$

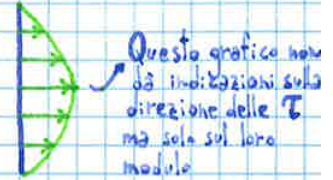
Lunghezza della trave

TORSIONE NEI SOLIDI NON ASSIAL-SIMMETRICI:

Le sezioni infinitesime dx non restano parallele tra loro ma si distorcono, di conseguenza l'andamento delle tensioni non è più lineare



La tensione è massima nella mezzeria del lato più lungo



$$T_{max} = \alpha \cdot \frac{M_t}{ab^2} \quad (\text{approssimato})$$

α dipende da $n = \frac{a}{b}$

$n = 1$ (sez. quadrata) $\rightarrow \alpha = 4,804$

$n \rightarrow \infty \rightarrow \alpha = 3$

$$\Delta\theta = \beta \cdot \frac{M_t}{G\alpha b^3}$$

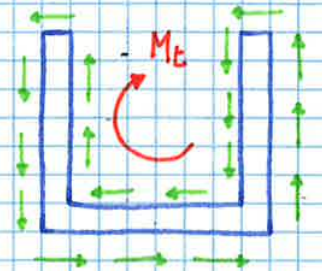
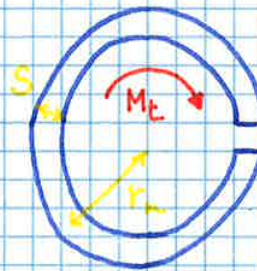
β dipende da $n = \frac{a}{b}$

$n = 1 \rightarrow \beta = 7,114$

$n \rightarrow \infty \rightarrow \beta = 3$

TRAVI A SEZIONI APERTE:

Le tensioni tendono a infinito perché le tensioni si sommano su "cubetti" di spessore molto piccolo



$$\text{ANELLO APERTO: } 3 \cdot \frac{M_t}{2\pi r_m \cdot s^2}$$

SEZIONE A "C":

Equazione di equilibrio lungo x:

$$\int_A (\sigma_x + d\sigma_x) dA - \int_A \sigma_x dA - \tau_{yx} \cdot b \cdot dx = 0$$

$$\int_A d\sigma_x dA = \tau_{yx} \cdot b \cdot dx$$

$$\int_A \frac{dM_z}{I_z} \cdot y dA = \tau_{yx} \cdot b \cdot dx$$

$$\frac{dM_z}{dz} \cdot \frac{1}{b \cdot I_z} \int_A y dA = \tau_{yx} = \tau_{xy}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{T \cdot S_z}{b \cdot I_z} \rightarrow \text{Momento statico attorno a } z$$

SEZIONE RETTANGOLARE:

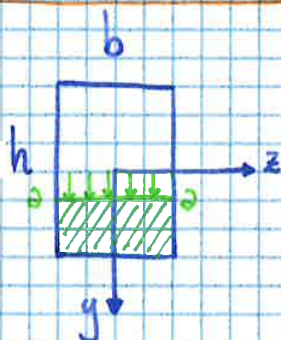
$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{T}{b I_z} \int_A y dA$$

$$= \frac{T}{b I_z} \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y dy$$

$$= \frac{T \cdot 12}{b \cdot bh^3} \cdot \frac{b}{2} \left[\frac{h^2}{4} - y^2 \right]$$

$$y=0 \rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T}{bh}$$



TETRAEDRO DI CAUCHY:

	x	y	z
x	σ_x	τ_{yx}	τ_{zx}
y	τ_{xy}	σ_y	τ_{zy}
z	τ_{xz}	τ_{yz}	σ_z

○ ○ ○ perché uguali a coppie

La posizione di un piano nello spazio è definita dalla sua normale

Per studiare le tensioni: sceglierò un piano tale \vec{p} abbia, rispetto ad esso, solo componente σ

COSENI DIRETTORI:

$$ACB \cdot \cos \hat{n}_x = COB$$

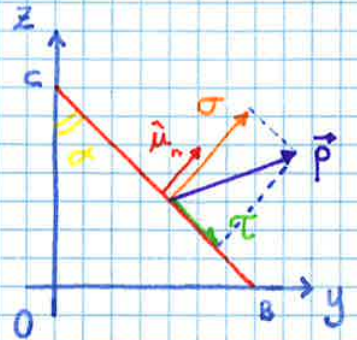
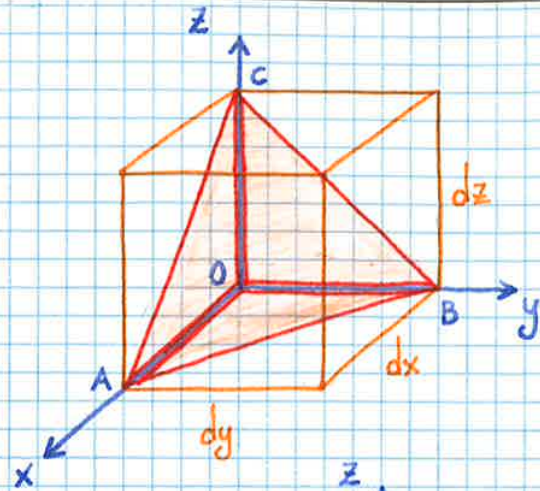
$$ACB \cdot \cos \hat{n}_y = AOC$$

$$ACB \cdot \cos \hat{n}_z = AOB$$

$$\begin{cases} \cos \hat{n}_x = \lambda \\ \cos \hat{n}_y = \mu \\ \cos \hat{n}_z = \nu \end{cases}$$

Faccia ACB

Coseno dell'angolo tra la normale ad ACB e l'asse z



Per mettere in equilibrio il tetraedro scrivo le equazioni di equilibrio lungo gli assi:

$$\vec{x} \rightarrow \sigma_x \cdot COB + \tau_{yx} \cdot AOC + \tau_{zx} \cdot AOB = \rho_x \cdot ACB$$

$$\vec{y} \rightarrow \tau_{yx} \cdot COB + \sigma_y \cdot AOC + \tau_{zy} \cdot AOB = \rho_y \cdot ACB$$

$$\vec{z} \rightarrow \tau_{xz} \cdot COB + \tau_{yz} \cdot AOC + \sigma_z \cdot AOB = \rho_z \cdot ACB$$

$$\sigma_x \cdot \lambda + \tau_{yx} \cdot \mu + \tau_{zx} \cdot \nu = \rho_x$$

Dividendo per ACB:

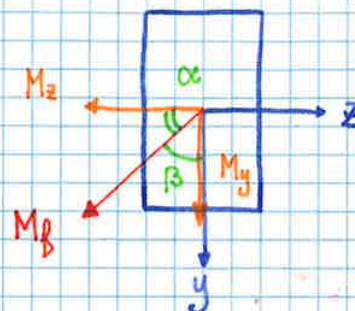
$$\tau_{xy} \cdot \lambda + \sigma_y \cdot \mu + \tau_{zy} \cdot \nu = \rho_y$$

$$\tau_{xz} \cdot \lambda + \tau_{yz} \cdot \mu + \sigma_z \cdot \nu = \rho_z$$

FLESSIONE DEVIATA:

Si ha quando il momento flettente agisce lungo una direzione qualsiasi. Esso si può però ricondurre alla somma di due momenti agenti rispettivamente attorno all'asse y e all'asse z, secondo la relazione:

$$\begin{aligned} M_z &= M_f \cdot \cos\alpha \\ M_y &= M_f \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$



Applicando le formule sul momento flettente ottengo che

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad \text{e} \quad \sigma_x = 0$$

$$M_f \left[\frac{\cos\alpha}{I_z} \cdot y + \frac{\sin\alpha}{I_y} \cdot z \right] = 0$$

Da cui si ricava $\tan\alpha = -\frac{y}{z} \cdot \frac{I_y}{I_z}$ e $\tan\beta = \tan\alpha \cdot \frac{I_z}{I_y}$

CAMBIO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = 0$$

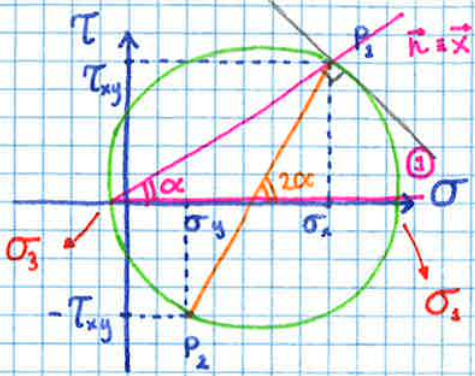
Le tensioni σ le calcolo ponendo il determinante uguale a 0

$$\det | \quad | = 0 \rightarrow \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

Per calcolare gli autovettori sostituisco, una alla volta, σ_1, σ_2 e σ_3 al posto di σ e $\mu_{1,2,3}, \lambda_{1,2,3}, \nu_{1,2,3}$, un indice alla volta, a λ, μ e ν

Siccome gli autovettori sono definiti a meno di una costante aggiungo la condizione di ortogonalità:

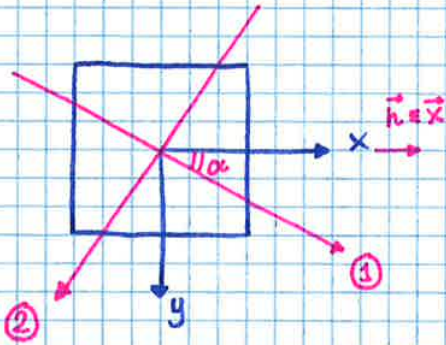
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$



$$P_1(\sigma_x, \tau_{xy}) \quad C = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right)$$

$$P_2(\sigma_y, -\tau_{xy}) \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha \cdot \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \tau_{xy}$$



La normale che passa per P_1 coincide sempre con l'asse x

TRAVE IN TRAZIONE:



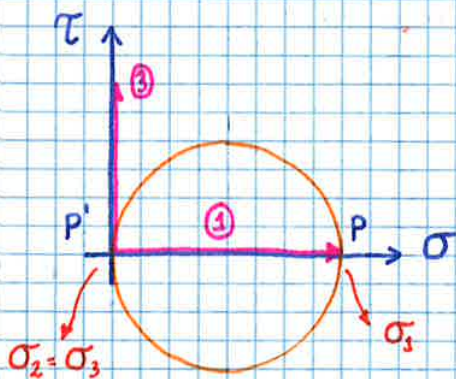
$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

$$\sigma_{b,c} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2} \right)^2}$$

$$\sigma_1 = \sigma_x$$

$$\sigma_2 = \sigma_3$$

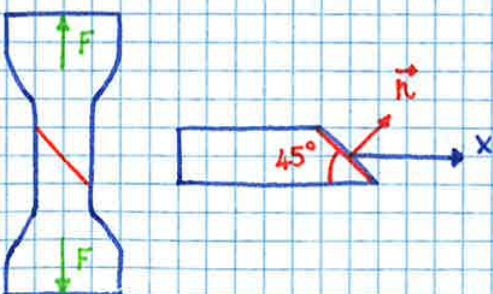
σ_x	0	0
0	0	0
0	0	0



$$P(\sigma_x, 0)$$

$$P'(0, 0)$$

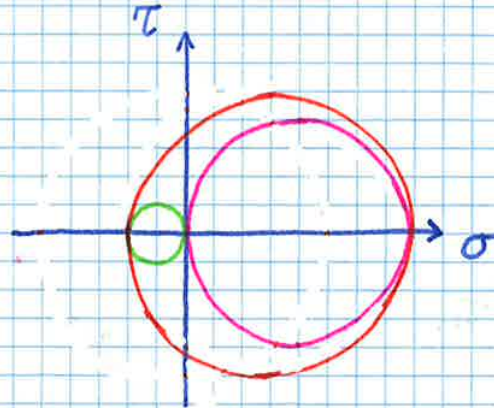
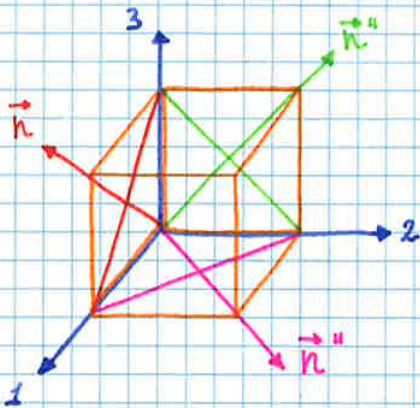
PROVA DI TRAZIONE:



Perché il provino di acciaio legato si rompe a 45° alla prova di trazione?

$$\vec{T} \cdot \vec{n} = \sigma_2 \sin\beta \cos\beta \cdot \vec{AB} - \sigma_3 \cos\beta \sin\beta \cdot \vec{AB}$$

$$T = (\sigma_2 - \sigma_3) \sin\beta \cos\beta$$



IPOTESI DI ROTURA:

Ci permettono di passare da uno stato di tensione massimo tridimensionale ad uno equivalente in una sola dimensione

$$\sigma_{eq} \text{ 1D} \longleftrightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \text{ 3D}$$

- Ci sono tre ipotesi principali:
- Di Galileo
 - Di Tresca
 - Di Von Mises

Ipotesi di Galileo:

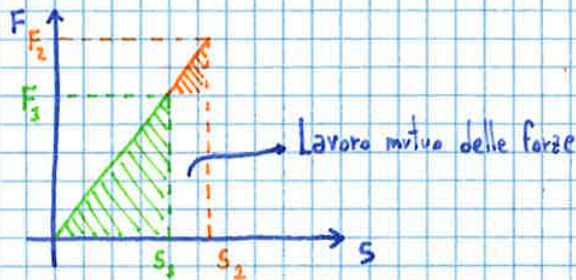
Il materiale si rompe se raggiunga in un punto la tensione principale massima

$$\sigma_{eq} = \sigma_1$$

	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\sigma \neq 0, \tau \neq 0$	$\sigma \neq 0, \tau = 0$	$\sigma = 0, \tau \neq 0$
Galileo	$\sigma_{eq} = \sigma_1$	$\sigma_{eq} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$	$\sigma_{eq} = \sigma$	$\sigma_{eq} = \tau$

Il principio di sovrapposizione degli effetti non vale per i lavori svolti dalle forze (il lavoro totale è inferiore alla somma dei lavori parziali)

TEOREMA DI BETTI:



Se applico due forze F_1 ed F_2 , all'applicazione della seconda è come se la prima compiesse un'altra porzione di lavoro

Per Clapeyron: $L_e = \frac{1}{2} F_1 s_1 + \frac{1}{2} F_2 s_2 + F_1 s_2$

Se inverto F_1 ed F_2 : $L_e = \frac{1}{2} F_2 s_2 + \frac{1}{2} F_1 s_1 + F_2 s_1$

Siccome i lavori sono uguali fra loro: $F_1 \cdot s_2 = F_2 \cdot s_1$

I lavori mutui sono nulli in caso di forze completamente disaccoppiate (es. forze perpendicolari fra loro, forza normale alla sezione e momento torcente...)

Von Mises dichiara che l'energia elastica è scomponibile in due fattori:

$$\int_V \frac{1}{2} \sigma_i \cdot \epsilon_i dV = \Phi = \Phi' + \Phi''$$

Componente statica: Varia il volume dell'oggetto ma non la forma (non le distorsioni)
 Componente deviatorica: Varia solo la forma dell'oggetto (le distorsioni). Responsabile di rottura

Il lavoro mutuo tra Φ' e Φ'' è nullo

Es. mi dà le deformazioni lungo x, y, z dovute a σ_x

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

Legame tensioni-deformazioni in forma matriciale (utile per materiali anisotropi)

	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$\sigma \neq 0, \tau \neq 0$	$\sigma \neq 0, \tau = 0$	$\sigma = 0, \tau \neq 0$
Von Mises	$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\dots}$	$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$	$\sigma_{eq} = \sigma$	$\sigma_{eq} = \sqrt{3}\tau$

INSTABILITÀ ELASTICA:

Si origina in seguito a carichi non perfettamente normali:



$$M_f + P(\delta - y) = 0 \quad (\text{Condizione di stabilità})$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M_f}{EI_z}$$

$$-EI_z \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P \cdot \delta - P \cdot y = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{P}{EI_z} \cdot y = \frac{P}{EI_z} \cdot \delta$$

$$y = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cdot x\right) + B \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cdot x\right) + \delta$$

$$x=0, y=0 \rightarrow 0 = A + \delta \rightarrow A = -\delta$$

$$x=0, \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \rightarrow B = 0$$

$$y = -\delta \cos\sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cdot x + \delta$$

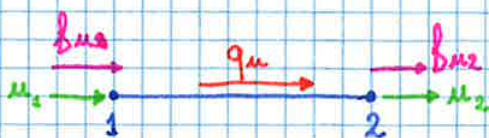
$$x=l \rightarrow y=\delta \rightarrow 0 = -\delta \cos\sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cdot l$$

$$\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cdot l\right) = 0 \rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cdot l = \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi + 2n\pi}{2}$$

La soluzione fondamentale si ha per $n=0 \rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cdot l = \frac{\pi}{2}$

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI_z}{4L^2}$$

ASTA (NEL PIANO):



Carico distribuito (lungo x): Riduco il carico distribuito "q" lungo l'asta a due carichi f_{e1} e f_{e2} ai nodi

Equilibri:
$$\begin{cases} f_{u1} + f_{u2} + q_u \cdot l = 0 \\ f_{u1} + f_{u2} + f_{e1} + f_{e2} = 0 \end{cases} \quad (\text{delle forze})$$

$$q_u \cdot l - f_{e1} - f_{e2} = 0$$

$$\Delta l = \frac{N}{EA} \cdot l \quad (\text{equilibrio allo spostamento})$$

$$N = q_u \cdot x + f_{u2}$$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA} \cdot \int_0^l (q_u \cdot x + f_{u2}) dx$$

$$= \frac{1}{EA} \cdot \frac{q_u \cdot l^2}{2} + \frac{1}{EA} \cdot f_{u2} \cdot l = \frac{1}{EA} \left[\frac{q_u \cdot l^2}{2} + f_{u2} \cdot l \right]$$

Siccome vale anche $N = f_{u1} + f_{e2}$

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{EA} f_{u1} \cdot l + \frac{1}{EA} \cdot f_{e2} \cdot l = \frac{1}{EA} [f_{u1} \cdot l + f_{e2} \cdot l]$$

Uguagliando si ottiene: $f_{e2} = \frac{q_u \cdot l}{2}$

E infine $f_{e1} = f_{e2} = \frac{q_u \cdot l}{2}$

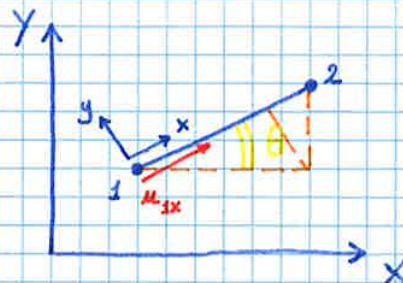
$$f_u(l-x^*) = f_{ez} \cdot l$$

$$f_{ez} = f_u \left(\frac{l-x^*}{l} \right)$$

$$f_{es} = f_u - f_{ez} = f_u \cdot \frac{x^*}{l}$$

MODELLAZIONI DI STRUTTURE:

Vanno considerati il sistema di riferimento globale e quello locale (lungo le direzioni della trave), collegati da una matrice di rotazione



$$\begin{cases} u_{1x} = u_{1x} \cdot \cos\theta + u_{1y} \cdot \sin\theta \\ u_{2x} = u_{2x} \cdot \cos\theta + u_{2y} \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{x,y,z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \end{Bmatrix}$$

↓
[R]

[R] è ortogonale → trasposta ↔ inversa

Nella trave $[k]_{x,y,z} \cdot \{s\}_{x,y,z} = \{f\}_{x,y,z}$

Sostituendo: $[k]_{x,y,z} \cdot [R] \cdot \{s\}_{x,y,z} = [R] \cdot \{f\}_{x,y,z}$

Se moltiplico a destra e a sinistra per $[R]^T (= [R]^{-1})$ ottengo:

$$[R]^T \cdot [k]_{x,y,z} \cdot [R] \cdot \{s\}_{x,y,z} = \{f\}_{x,y,z}$$

$$[k]_{x,y,z} = \{s\}_{x,y,z} = \{f\}_{x,y,z}$$

MATRICE DI RIGIDezza
LUNGO LE DIREZIONI
PRINCIPALI

$$[k]_{x,y,z}^I = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot [R]$$

$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta & -\sin\theta \\ -\cos\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$[k]_{x,y,z}^I = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

Siccome $\theta=0 \rightarrow [k]_{x,y,z}^I = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) Assemblaggio della matrice

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix}$$

I
 II
 III

(Caso di $\theta=45^\circ$)

I contributi degli elementi si inseriscono nella matrice secondo le direzioni degli spostamenti di questi ultimi (es. siccome la trave I ha spostamenti secondo 1,2,3,4, essa riempirà il quadrato avente per lato u_1, u_2, u_3, u_4)