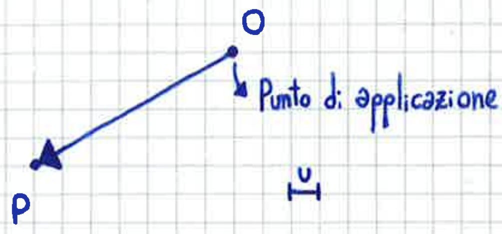
NUMERO: 1631A - ANNO: 2015

A P P U N T I

STUDENTE: Lanfranchi

MATERIA: Geometria. Prof.Cumino

VETTORI:



DEFINIZIONE: Segmento di origine O ed estremo P

PARAMETRI:
- DIREZIONE: Retta cui appartiene il vettore
- VERSO
- LUNGHEZZA o MODULO

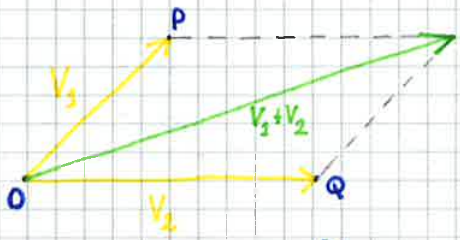
> N.B.: Un vettore di modulo 1 è detto VERSORE

UGUAGLIANZA: Si ha quando direzione, verso e modulo coincidono

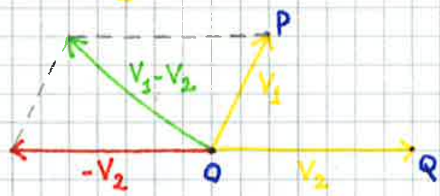
> V = Insieme dei vettori dello spazio euclideo ordinario applicati in O

OPERAZIONI SUI VETTORI:

SOMMA:
1) $\vec{OP} + \vec{OQ} = \vec{OQ} + \vec{OP}$
2) $\vec{OP} + \vec{OO} = \vec{OP}$



SOTTRAZIONE:



Dati $a_1, a_2, a_n \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_n \in V$, si definisce $\vec{u}$ combinazione lineare:

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_n\vec{v}_n$$

DEFINIZIONE: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_n$ sono linearmente dipendenti se $\vec{OO}$ si può scrivere come loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli

$$\boxed{\vec{V}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\vec{V}_2 - \frac{a_3}{a_1}\vec{V}_3}$$

$\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ sono linearmente dipendenti quando complanari

PRODOTTO SCALARE:

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{V} = |\vec{u}|\cdot|\vec{V}|\cdot\cos\alpha}$$

PROPRIETÀ DEL PRODOTTO SCALARE:

1) $\vec{u}\cdot\vec{V} = \vec{V}\cdot\vec{u}$

2) $(k\vec{u})\vec{V} = k(\vec{u}\vec{V}) = \vec{u}(k\vec{V})$, $k \in \mathbb{R}$

3) $(\vec{u}+\vec{V})\cdot\vec{W} = \vec{u}\cdot\vec{W} + \vec{V}\cdot\vec{W}$

PRODOTTO SCALARE IN COMPONENTI:

$\vec{u} = (x, y, z)$

$\vec{V} = (x', y', z')$

$$\vec{u}\cdot\vec{V} = (x\hat{u}_x + y\hat{u}_y + z\hat{u}_z)(x'\hat{u}_x + y'\hat{u}_y + z'\hat{u}_z) =$$

$$x\hat{u}_x x'\hat{u}_x + x\hat{u}_x y'\hat{u}_y + x\hat{u}_x z'\hat{u}_z + y\hat{u}_y x'\hat{u}_x + y\hat{u}_y y'\hat{u}_y + y\hat{u}_y z'\hat{u}_z + z\hat{u}_z x'\hat{u}_x + z\hat{u}_z y'\hat{u}_y + z\hat{u}_z z'\hat{u}_z$$

$$\downarrow$$

$$xx'\hat{u}_x\hat{u}_x + \cancel{xy'\hat{u}_x\hat{u}_y} + \cancel{xz'\hat{u}_x\hat{u}_z} + \cancel{yx'\hat{u}_y\hat{u}_x} + yy'\hat{u}_y\hat{u}_y + \cancel{yz'\hat{u}_y\hat{u}_z} + \cancel{zx'\hat{u}_z\hat{u}_x} + \cancel{zy'\hat{u}_z\hat{u}_y} + zz'\hat{u}_z\hat{u}_z$$

$$\downarrow$$

$$xx'\hat{u}_x\hat{u}_x + yy'\hat{u}_y\hat{u}_y + zz'\hat{u}_z\hat{u}_z = xx' + yy' + zz'$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 76

$|m(-1,1,1)| = 2$

$2 = |m|\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}\cdot|m|$

$|m| = 2/\sqrt{3} \longrightarrow m = \pm 2/\sqrt{3} \longrightarrow \vec{w}_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

$\vec{w}_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

PRODOTTO MISTO DI 3 VETTORI:

Dati $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

$\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}$ si dice prodotto misto

È nullo se i 3 vettori sono linearmente dipendenti

ESEMPIO:

Dati $\vec{u}\,(1,0,1)$
$\vec{v}\,(2,1,1)$
$\vec{w}\,(1,2,0)$

dire se sono linearmente dipendenti

$$\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1(0-1)-2(1-2)+0(1-2)) = -1+2+0 = 1$$

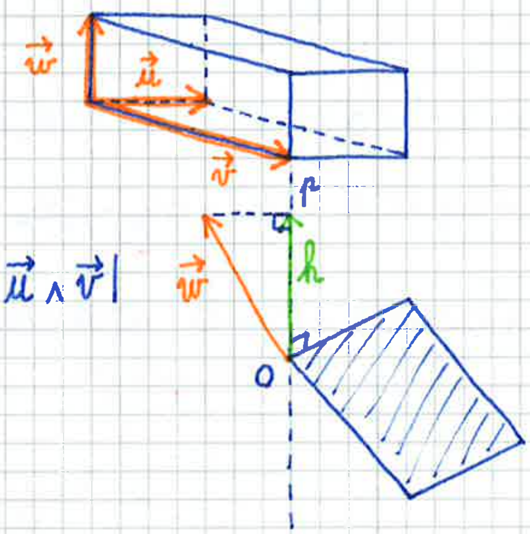
Sono linearmente indipendenti

CALCOLO DEI VOLUMI:

$V = A\cdot h \rightarrow A = |\vec{u}\wedge\vec{v}|$

$h = |\vec{w}\cdot \text{vers}(\vec{u}\wedge\vec{v})|$

$$\cancel{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}\cdot\frac{1}{\cancel{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}}\cdot|\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}| = |\vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v}|$$



ESEMPIO:

Trovare β passante per $P_0(1,1,1)$ e perpendicolare a $\vec{k}(0,0,1)$

$\beta = 0(x-1)+0(y-1)+1(z-1)=0 \longrightarrow \beta: z-1=0$

CASO 2:

Siano $\vec{u}$ e $\vec{v}$ paralleli ad α e $P_0 \in \alpha$

$$\boxed{\alpha: (\vec{OP}-\vec{OP_0})\cdot \vec{u}\wedge\vec{v}=0}$$

CASO 3:

Siano $P_0, P_1, P_2 \in \alpha \longrightarrow \begin{array}{l}\vec{u}=\vec{OP_1}-\vec{OP_0}\\ \vec{v}=\vec{OP_2}-\vec{OP_0}\end{array}$

$$\boxed{\alpha: (\vec{OP}-\vec{OP_0})\cdot \vec{u}\wedge\vec{v}=0}$$

ESEMPIO:

Trovare α passante per $P_0(1,1,1)$, $P_1(0,1,1)$, $P_2(1,0,0)$

$\begin{array}{l}\vec{OP_1}-\vec{OP_0}=(-1,0,0)\\ \vec{OP_2}-\vec{OP_0}=(0,-1,-1)\end{array} \longrightarrow$ Sono linearmente dipendenti?

$\downarrow$

$(0,-1,-1)=k(-1,0,0)$

$\downarrow$

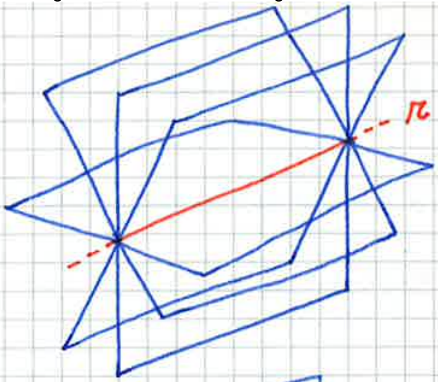
$\begin{cases}0=-k\\-1=0\\-1=0\end{cases}$

$\downarrow$

No (impossibile)

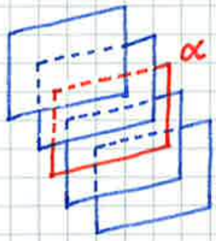
$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1\\ 0-1 & 1-1 & 1-1\\ 1-1 & 0-1 & 0-1\end{vmatrix}=0 \longrightarrow \alpha: -y+z=0$

FASCIO DI PIANI PROPRIO:



Insieme di piani passanti per la medesima retta r (asse del fascio)

FASCIO DI PIANI IMPROPRIO:



Insieme di piani paralleli ad un piano dato

Il fascio proprio di asse r è descritto dall'equazione

$\lambda(ax+by+c)+\mu(dx+ey+f)=0$ con $\lambda,\mu \in \mathbb{R}^0$

e con $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ ex+fy+gz+h=0 \end{cases}$ asse del fascio

Il fascio improprio è descritto dall'equazione

$ax+by+cz+\lambda=0$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO:

Date $r: \begin{cases} x+2y=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=-1+t \end{cases}$

Dire se sono complanari o meno.

Sia $\vec{v}_s \parallel s \rightarrow \vec{v}_s(2,1,1)$

$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-1,1)$

$\rightarrow \vec{v}_r \neq \vec{v}_s \rightarrow$ r e s non sono parallele

$\exists\, P(2t,t,-1+t) \in \pi\,? \rightarrow \begin{cases} 2t+2t=0 \\ t-1+t+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} t=0 \\ t=0 \end{cases} \rightarrow$ Sì $\rightarrow$ r e s sono incidenti

Cerco $H = \alpha \cap t$ con "t" retta per $P_0 \perp \alpha$

$$t \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Longrightarrow \alpha \cap t : a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) + d = 0$$

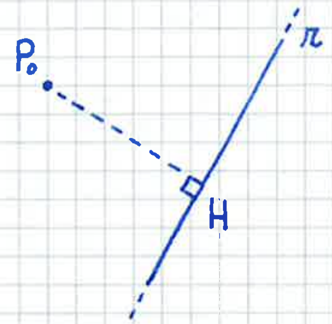
$$t = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d(P_0, H) = \sqrt{\left(x_0 - x_0 + \frac{a(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(y_0 - y_0 + \ldots\right)^2 + \ldots}$$

$$\boxed{d(P_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

DISTANZA PUNTO-RETTA (NELLO SPAZIO):

Sia α passante per P_0 e $\perp r$; cerco $H = \alpha \cap r$ e procedo con calcoli noti



ESEMPIO:

$P_0 = (1, 2, 3)$ $\qquad d = ?$

$r = (1 + t, t, -1 + 2t)$

$\alpha \perp r \longrightarrow \vec{v}_\alpha \perp \alpha \longrightarrow \vec{v}_\alpha = (1, 1, 2)$

$\downarrow$

$\alpha : x + y + 2z + d = 0$

Impongo $P_0 \in \alpha \to d = 9 \to \alpha : x + y + 2z - 9 = 0$

$\alpha \cap r : (1 + t) + t + 2(-1 + 2t) + 9 = 0$

$\downarrow$

$t = 5/3$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 76

Cerco α: Fascio di asse $s \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = \mu \\ z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1+y \\ z = 2 \end{cases}$

$$F: \lambda(x-y-1) + \mu(z-2) = 0$$

$$\vec{V}_F = (\lambda, -\lambda, \mu)$$

$$\vec{V}_M = (0, -1, 1)$$

Vettore della retta r

Impongo $\vec{V}_F \cdot \vec{V}_M = 0$ (Cioé che siano $\perp$)

$(\lambda, -\lambda, \mu) \cdot (0, -1, 1) = 0$

$\lambda + \mu = 0$

$\lambda = -\mu \longrightarrow -x + y + 1 + z - 2 = 0$

Scelgo $P_0(1, 0, 1)$

$$d(r, s) = d(P_0, \alpha) = \frac{|-1+0+1+1-2|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}}$$

ANGOLI:

$0 \leq \hat{u}\vec{v} \leq \pi$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{uv}) \longrightarrow \cos(\widehat{uv}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

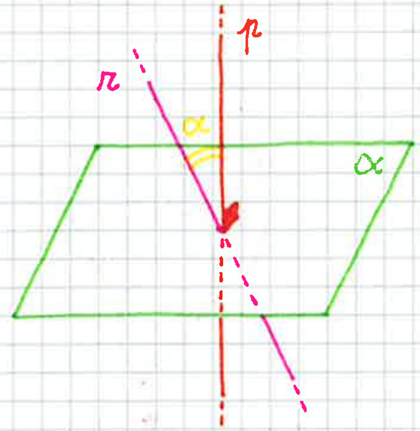
ANGOLO TRA DUE RETTE (ANCHE SGHEMBE):

$\widehat{rs} = \widehat{\vec{V}_r \vec{V}_s}$

$\cos(\widehat{rs})$ è determinato a meno del segno

$$|\cos(\widehat{rs})| = \frac{|\vec{V}_r \cdot \vec{V}_s|}{|\vec{V}_r||\vec{V}_s|}$$

ANGOLO TRA RETTA E PIANO:



Sia la retta $p \perp \alpha$ e passante per $\alpha \cap r$

È noto che $\widehat{r\alpha} = \pi/2 - \widehat{rp}$

dunque $\sin(\widehat{r\alpha}) = |\cos(\widehat{rp})|$

SISTEMI LINEARI:

$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ → Termini noti tutti uguali a 0 ⟶ Sistema lineare omogeneo

$\begin{cases} x-y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$ → Ci sono ∞^1 soluzioni

$\begin{cases} 2y-z=1 \\ x=y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z=2y-1 \\ x=y \end{cases} \rightarrow (y, y, 2y-1)$ → Ci sono ∞^1 soluzioni

SISTEMA LINEARE DI m EQUAZIONI IN n INCOGNITE:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

MATRICE COMPLETA DEL SISTEMA:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{array}\right) = (A|B)$$

RAPPRESENTAZIONE DI UN SISTEMA COME PRODOTTO DI MATRICI:

$$A \cdot X = B$$

Prodotto di ogni riga di "A" per la colonna delle incognite

OBBIETTIVI:
- Metodi di risoluzione dei sistemi lineari
- Prevedere esistenza e "quantità" di soluzioni

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 76

TEOREMA:

Dato un sistema lineare di matrice $(A|B)$, posso ottenere un sistema equivalente eseguendo sulle sue righe operazioni elementari

DIMOSTRAZIONI:

È sufficiente il sistema: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \end{array}\right)$$

scambio R_1 e $R_2 \rightarrow (A'|B') = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \end{array}\right)$

faccio $R_1 \rightarrow kR_1 \rightarrow (A''|B'') = \left(\begin{array}{ccc|c} ka_{11} & ka_{12} & ka_{1n} & kb_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \end{array}\right)$

faccio $R_2 \rightarrow R_2 + kR_1$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n + ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + ka_{1n}x_n = b_2 + kb_1 \end{cases}$

(Siano $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_n$ soluzioni del sistema originale) $\begin{cases} a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + a_{1n}\overline{x}_n = b_1 & \checkmark \text{(Eq. originale 1)} \\ a_{21}\overline{x}_1 + \dots a_{2n}\overline{x}_n + k(a_{11}\overline{x}_1 + \dots a_{1n}\overline{x}_n) = b_2 + kb_1 & \checkmark \text{(Eq. originale 1 + k volte eq. orig. 2)} \end{cases}$

ESEMPIO:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 3 \\ 3x_2 + x_3 = 1 \\ 0 = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Impossibile}$$

Se una matrice ha una riga delle incognite nulla abbinata a un numero diverso da 0, il sistema associato è impossibile

OSSERVAZIONI:

$(A|B) = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_n \end{pmatrix}$, $R_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{1n}, b_1)$

Se $(A|B)$ è a scala, le righe non nulle sono vettori linearmente non dipendenti

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 76

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS:

Riduzione a scala + metodo di sostituzione

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI:

Dato un sistema lineare di matrice $(A|B)$:
- È risolubile se e solo se $\rho(A) = \rho(A|B)$;
- Se è risolubile ha $\infty^{n-\rho}$ soluzioni

ESERCIZIO:

Discutere al variare di $h \in \mathbb{R}$ il sistema $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -h & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1-h & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$

$$R_2 = R_2 - 2R_1 \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+h & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Se $1+h=0 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$ Incompatibile

Se $1+h \neq 0 \rightarrow \rho(A') = \rho(A'|B') = 3 \longrightarrow$ Risolubile con $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni

SISTEMI OMOGENEO ASSOCIATO:

Un sistema si dice omogeneo associato al sistema di partenza se differisce da questo per la colonna dei termini noti nulla

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Soluzioni: $(-x_3, -x_3, x_3), \forall x_3 \in \mathbb{R}$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$$

Soluzioni: $(-x_3, 1-x_3, x_3), \forall x_3 \in \mathbb{R}$

Ma $S_c - S_{om} = (0,1,0) \rightarrow$ Soluzione particolare della matrice completa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 76

$$\boxed{X = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{a} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}}$$

SPAZI VETTORIALI $\mathbb{R}^n$:

Uno spazio $\mathbb{R}^n$ è definito come l'insieme di tutti i vettori colonna (vettori riga) di "n" colonne (righe) al variare dei suoi parametri in $\mathbb{R}$.

Si dice che $W \subseteq \mathbb{R}^n$ è una sottospecie vettoriale di $\mathbb{R}^n$ sè è non vuoto e chiuso rispetto alle operazioni (cioè i risultati delle operazioni fra i vettori contenuti in W gli appartengono ancora)

ES.:

$\mathbb{R}^4$, dato $\vec{v}(1,2,3,4)$ costruisco $W = \{\vec{w} = k\vec{v},\ k \in \mathbb{R}\}$

Verifico che W è chiuso rispetto alla somma:

$\vec{w}_1 = k\vec{v}$
$\vec{w}_2 = m\vec{v}$

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = k\vec{v} + m\vec{v} = (k+m)\vec{v} = k'\vec{v} \in W$$

Verifico che W è chiuso rispetto al prodotto per un numero:

$\vec{w} = k\vec{v}$ quindi, $\forall m \in \mathbb{R}$, $m\vec{w} = m(k\vec{v})$

$$m\vec{w} = (mk)\vec{v} = k'\vec{v} \in W$$

Un altro metodo di verifica è basato sul vettore nullo:

- Mi assicuro che $\vec{0} \in W$ (condizione necessaria ma non sufficiente)

⚠ N.B.: Ciò non vale nel caso di sistema $AX=B$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

DEFINIZIONE: Dato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio, si dice base di V, indicata con B_V, un insieme ordinato di vettori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_n$ che sono:

- generatori di V;
- linearmente indipendenti.

PROBLEMA:

Dato W sottospazio vettoriale, trovarne una base

$$W: \begin{cases} x-2y+2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

1° metodo: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AX=0 \longrightarrow \begin{cases} z=2y \\ x=-2y \end{cases}$ Soluzioni: $\{(-2y, y, 2y)\}, \forall y \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$y(-2,1,2), \forall y \in \mathbb{R}$

Gli altri vettori del sottospazio sono multipli di $(-2,1,2)$

quindi $B_W(-2,1,2)$ è una base di W

anche $B'_W(-4,2,4)$, per esempio, è una base di W

ES.: Soluzioni di $x+z=0$: $\{(-z,y,z)\}, \forall y,z \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

$z(-1,0,1)+y(0,1,0), \forall y,z \in \mathbb{R}$

$B=((-1,0,1),(0,1,0))$

DEFINIZIONE: Si dice dimensione di $W \subseteq \mathbb{R}^n$ [$\dim(W)$] il numero di vettori di una qualsiasi base B_W

Si dice base canonica di $\mathbb{R}^n$ quella formata dai vettori riga della matrice $n \times n$ I_n (matrice identità)

TEOREMA:

Tutte le basi di un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^n$ hanno lo stesso n° di elementi

DIMOSTRAZIONE (PER ASSURDO):

Siano $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_h)$ e $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k)$ due basi di W, con $k > h$.

Allora
$$\vec{v}_1 = a_{11}\vec{w}_1 + a_{12}\vec{w}_2 + a_{1h}\vec{w}_h$$
$$\vec{v}_2 = a_{21}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + a_{2h}\vec{w}_h$$
$$\vec{v}_k = a_{k1}\vec{w}_1 + a_{k2}\vec{w}_2 + a_{kh}\vec{w}_h$$

Per quali b_1, b_2, b_k si ha $b_1\vec{v}_1 + b_2\vec{v}_2 + b_k\vec{v}_k = 0$

$$b_1(a_{11}\vec{w}_1 + \dots + a_{1h}\vec{w}_h) + b_2(a_{21}\vec{w}_1 + \dots + a_{2h}\vec{w}_h) + b_k(a_{k1}\vec{w}_1 + \dots + a_{kh}\vec{w}_h) = 0$$
$$(b_1a_{11} + \dots + b_ka_{k1})\vec{w}_1 + \dots + (b_1a_{1h} + \dots + b_ka_{kh})\vec{w}_h = 0$$

Siccome $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_h$ sono linearmente indipendenti, dunque i coefficienti devono essere tutti nulli

$$AX = 0 \qquad A\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} \\ a_{k2} & \dots & a_{kh} \end{pmatrix} \qquad X\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_k \end{pmatrix}$$

n° soluzioni $= \infty^{k-\rho(A)}$ $\quad \rho(A) = \min(h,k) = h \rightarrow k - \rho(A) > 0$

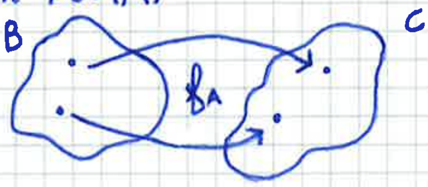
Risultano infinite soluzioni, incompatibili con la linear-indipendenza delle basi

Dunque si deve per forza avere $h = k$

$\boxed{\text{CVD}}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 76

DEFINIZIONE: Si dice nucleo di $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ il sottospazio definito dalle soluzioni di $AX = 0$, indicato con $Ker(A)$



Quando è che $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è iniettiva?

TEOREMA:

f_A è iniettiva se e solo se $Ker(A) = \{\vec{0}\} \in \mathbb{R}^n$

COROLLARIO:

$$\dim Ker(A) = 0 \Longleftrightarrow n - \rho(A) = 0$$

DEFINIZIONE: Si dice $Im\, f$ di $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'insieme di vettori $\vec{w} \in \mathbb{R}^m$ tali che, $\forall\, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $f(\vec{v}) = \vec{w}$

DEFINIZIONE: $f: A \to B$ è suriettiva se $Im\, f = B$

$\forall y \in B,\ \exists\, f^{-1}(y) \in A$

ESEMPIO:

Verificare se $f_M : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associata a $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\dim Im\, f = \rho(M) = 1$ ← Ridotta per colonne

ma f è suriettiva solo se $\dim Im\, f = m\ (3)$

dunque f non è iniettiva

$$\boxed{\dim Ker\, f + \dim Im\, f = n \ (\text{riferito a } \mathbb{R}^n)}$$

TEOREMA:

Date l'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $B_{\mathbb{R}^m}$, esiste un'unica matrice $M \in \mathbb{R}^{m,n}$ tale che $f = f_M$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 76

ESEMPIO:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = (2y, -x)$

Dire se f è invertibile:

$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \rho(M) = 2$ (è il massimo possibile)

$\downarrow$

f invertibile

Calcolare la controimmagine di $(1,1)$:

Cerco $\{(x,y) \mid f(x,y) = (1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{cases} -x = 1 \\ 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

Soluzioni: $\infty^{2-2} = \infty^0 = 1$ $\qquad f^{-1}(1,1) = (-1, 1/2)$

GENERALIZZAZIONE DEGLI SPAZI VETTORIALI:

DEFINIZIONE: Dato un campo numerico $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \dots$) e un insieme non vuoto di elementi (detti vettori) si dice che V è $\mathbb{K}$-spazio vettoriale quando sono definite in V le due operazioni:

- Somma di vettori;
- Prodotto di vettore per $\forall k \in \mathbb{K}$;

che godono delle seguenti proprietà:

1) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V \to \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V \to (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3) $\exists \vec{0} \in V \mid \forall \vec{v} \in V \to \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
4) $\forall \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0}, \exists -\vec{v} \mid \vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
5) $\forall k, \ell \in \mathbb{K}, \forall \vec{v} \in V \to k(\ell \vec{v}) = (k\ell)\vec{v}$
6) $(k + \ell)\vec{v} = k\vec{v} + \ell\vec{v}$
7) $\forall k \in \mathbb{K}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \to k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$U \to (1\ -1\ 0 \mid 0) \to \begin{cases} x = y \\ z = ? \end{cases} \to \begin{matrix} \vec{v}_1 (x, x, 0) \to k(1,1,0) \\ \vec{v}_2 (0, 0, z) \to h(0,0,1) \end{matrix} \quad B_U((1,1,0),(0,0,1))$

$W \to (1\ 0\ 1 \mid 0) \to \begin{cases} x = -z \\ y = ? \end{cases} \to \begin{matrix} \vec{v}_1 (-z, 0, z) \to (-1,0,1)k \\ \vec{v}_2 (0, y, 0) \to (0,1,0)h \end{matrix} \quad B_W((-1,0,1),(0,1,0))$

$U \cap W \{(x,y,z) \mid x - y = 0,\ x + z = 0\} \to \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \to \vec{v}(-z,-z,z) \to k(-1,-1,1)$

$\downarrow$

$B_{U \cap W}(-1,-1,1)$

$U + W = \mathbb{R}^3$ (è una somma di piani)

$2 + 2 = \dim(U+W) + 1$

$\dim(U+W) = 3$

Costruisco una base di $U+W$ che contenga B_W e B_U

$B_{U+W} = ((\underset{\downarrow\, U \cap W}{-1, -1, 1}), (0,0,1), (0,1,0))$

B_W (sopra $-1, 1), (0,0,1), (0,1,0$), B_U (sotto $-1, 1), (0,0$)

Completo $B_{U \cap W}$ a una base di U

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to B_{U \cap W} \\ \to B_U \\ \to B_U \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to B_U$

Completo $B_{U \cap W}$ a una base di W

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to B_{U \cap W} \\ \to B_W \\ \to B_W \end{matrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to B_W$

Se $\dim(U \cap W) = 0$ allora $\dim U + \dim W = \dim(U+W)$
e $U+W$ si definisce SOMMA DIRETTA $(U \oplus W)$

Quale è la matrice M associata ad f rispetto a B_v ?

$$M = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{\cdot}_{f(1)} & \underbrace{\cdot}_{f(x)} & \underbrace{\cdot}_{f(x^2)} \end{pmatrix}$$

$f(1)=0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$
$f(x)=1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$
$f(x^2) = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cambio base in V e W : $B'_v = B'_w = (x, x^2, 1)$

$f(1) = 0 = 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot 1$
$f(x) = 1 = 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 1\cdot 1$
$f(x^2) = 2x = 2\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot 1$

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Che relazione c'è tra $M^{B_vB_w}$ e $M^{B'_vB'_w}$?

In generale $f: V \to W$, date B_v e B_w, è associata a $M^{B_vB_w}$,

cioé $\forall \vec{v} \in V$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} \longrightarrow f(\vec{v}) = M^{B_vB_w}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_n \end{pmatrix} \in W$

Cambio base in V: assumo B'_v

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_n \end{pmatrix} = PX'$

Quindi $MX = Y \longrightarrow M(PX') = Y \longrightarrow (MP)X' = Y$

Se cambio base anche in W diventa

$(MP)X' = PY' \longrightarrow (P^{-1}MP)X' = Y'$

N.B.: Eseguire i prodotti in ordine perché non sono commutativi!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 76

Dato l'endomorfismo $f: V \to V$, con $\dim V = n$, tutte le matrici di f $M_f^{B,B}$ sono legate, al variare di B, dalla relazione

$$\boxed{M_f^{B',B'} = P^{-1} M_f^{B,B} P}$$

PROBLEMA DELLA DIAGONALIZZAZIONE:

ESEMPIO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $M_f = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\exists$ una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di f?

Cerco $\vec{v}(x,y) \mid f(\vec{v}) = k\vec{v}$

Cioé $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2x+3y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2y-kx \\ 2x+3y-ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} (3-k)x+2y=0 \\ 2x+(3-k)y=0 \end{cases}$$

Cerchiamo le soluzioni non banali $((x,y) \neq (0,0))$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3-k & 2 & 0 \\ 2 & 3-k & 0 \end{array}\right)$ Deve essere $\rho(A)<2 \to \det(A)=0$

$$\downarrow$$

$$(3-k)^2-4=0$$

$k^2-6k+5=0$

$(k-5)(k-1)=0 \longrightarrow k=1 \vee k=5$

$k=1 \to A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x=-y \\ 0=0 \end{cases} \to \vec{v}_1(x,-x)$ y libero

$k=5 \to A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x=y \\ 0=0 \end{cases} \to \vec{v}_2(x,x)$, y libero

Autovettori $(x,-x)$ $x\neq 0$, autovalore $k=1$ $\quad \vec{v}_1 = x(1,-1)$

Autovettori (x,x) $x \neq 0$, autovalore $k=5$ $\quad \vec{v}_2 = x(1,1)$

autospazi: V_0 = vettori $\neq 0$ dell'asse z

V_1 = vettori $\neq 0$ del piano xy

$V_0 = \{ \vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0} \} = Ker(f)$

$f: V \to V$ ha autovalore 0 se e solo se $Ker(f) \neq \{\vec{0}\}$

$\dim Ker(f) > 0 \leftrightarrow f$ non iniettiva

$f: V \to V$ endomorfismo

suppongo $k_1 \neq k_2$ autovalori di f

PROPOSIZIONE:

Tutti gli autovettori di V_{k1} sono linearmente indipendenti da quelli di V_{k2}

DIMOSTRAZIONE:

Cerco una relazione tra $\vec{v}_1 \neq \vec{0} \in V_{k1}$ e $\vec{v}_2 \neq 0 \in V_{k2}$

$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{0}$

$f(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) = \vec{0}$

$f(a_1\vec{v}_1) + f(a_2\vec{v}_2) = (\vec{0})$

$a_1k_1\vec{v}_1 + a_2k_2\vec{v}_2 = \vec{0}$

$a_1k_1\vec{v}_1 = 0$

$\downarrow$

$k_1 \neq 0$

$\downarrow$

$a_1 = 0$

$a_2k_2\vec{v}_2 - a_2k_1\vec{v}_2 = \vec{0}$

$a_2(k_2 - k_1)\vec{v}_2 = \vec{0}$

$\downarrow$

$k_2 - k_1 \neq 0$

$\downarrow$

$a_2 \neq 0$

$\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ danno $\vec{0}$ in combinazione lineare solo se moltiplicati per 0, quindi sono indipendenti

Dalla regola di Laplace seguono proprietà di calcolo relative ai determinanti di matrici:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(M) = 4-6 = -2$

$M' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(M') = 6-4 = 2$

$\det(M) = \det(M')$

Per un numero dispari di scambi di colonne o righe il determinante di M cambia segno

$M = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_n \end{pmatrix}$

Per operazioni del tipo $R_i = R_i + kR_j$ il $\det(M)$ non varia (si può ridurre a scala M lasciando intatto $\det(M)$)

ESEMPIO:

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(M) = 0$

Data $S^{n,n}$ ridotta a scala, se le righe non nulle $< n$, $\det(S) = 0$

Se le righe non nulle sono n, $\det(S)$ è dato dal prodotto degli indicatori

$$\boxed{\begin{array}{l} \det(S) = 0 \leftrightarrow \det(M) = 0 \leftrightarrow \rho(M) < n \\ \det(S) \neq 0 \leftrightarrow \det(M) \neq 0 \leftrightarrow \rho(M) = n \end{array}}$$

$$k=-1 \rightarrow M+I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$V_{-1} = \{z, 0, z\}$$

$$\downarrow$$

$$\dim V_{-1} = n - \rho(M+1) = 1$$

$$k=1 \rightarrow M-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{x=z \rightarrow V_1 = \{z, y, z\} \ \forall y, z \in \mathbb{R}$$

$$\downarrow$$

$$\dim V_1 = n - \rho(M-I) = 2$$

Si può diagonalizzare il problema?

Cerco una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori:

$$B = \big((-1,0,1), (1,0,1), (0,1,0)\big)$$

$$\quad\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad\quad \downarrow$$

$$\quad V_{-1} \qquad\ V_1 \qquad\ V_1$$

Osserva che $V_{-1} \cap V_1 = 0 \rightarrow V_{-1} + V_1 = V_{-1} \oplus V_1$

$$\dim(V_{-1} \oplus V_1) = \dim V_{-1} + \dim V_1 = 3 \rightarrow V_{-1} \oplus V_1 = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Cerco } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\quad f(-1,0,1) \quad f(1,0,1) \quad f(0,1,0)$$

$$f(-1,0,1) = -1(-1,0,1) = (1,0,-1) = -1(-1,0,1) + 0(1,0,1) + 0(0,1,0)$$

$$f(1,0,1) = (1,0,1) = 0(-1,0,1) + 1(1,0,1) + 0(0,1,0)$$

$$f(0,1,0) = (0,1,0) = 0(-1,0,1) + 0(1,0,1) + 1(0,1,0)$$

$$\boxed{1 \leq \dim V_k \leq \text{Molteplicità di } k \text{ radice del polinomio}}$$

TEOREMA:

Le matrici ortogonali sono le matrici di passaggio tra basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$

ESEMPIO:

Data $A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

trovare una base ortonormale formata da autovettori e la relativa matrice di passaggio

$$\det(A-kI) = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1-k \end{pmatrix} \longrightarrow (1-k)(k^2-1) \longrightarrow \begin{matrix} k=1 \ (\text{molt. } 1) \\ k=-1 \ (\text{molt. } 2) \end{matrix}$$

$$V_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2z=0 \end{cases} \rightarrow V_{-1}\{(-y,y,0)\},\ \forall y \in \mathbb{R}$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{-x+y=0 \rightarrow V_1\{(x,x,z)\},\ \forall x,z \in \mathbb{R}$$

$$B_{V_{-1}} = (-1,1,0) \rightarrow \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} \text{ (versore)}$$

$$B_{V_1} = \left((1,1,0),(0,0,1)\right) = \left(\frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, (0,0,1)\right) \text{ (versori)}$$

PROPRIETÀ:

Data $S \in \mathbb{R}^{n,n}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ autovalori di S tali che $k_1 \neq k_2$,
$\forall \vec{v}_1 \in V_{k1}$, $v_2 \in V_{k2}$ autovettori, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

ESEMPIO:

Data $S \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ trovare P ortogonale speciale che diagonalizza S

$$\det(S-kI) = \begin{pmatrix} 4-k & 0 & 0 \\ 0 & 3-k & 1 \\ 0 & 1 & 3-k \end{pmatrix} \Rightarrow (4-k)(k^2-6k+8)=0 \longrightarrow \begin{matrix} k=4 \ (\text{molt. } 2) \\ k=1 \ (\text{molt. } 1) \end{matrix}$$

$$k=2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases} \rightarrow V_2\{(0,-z,z)\},\ \forall z \in \mathbb{R}$$

$$k=4 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \{ y=z \rightarrow V_4\{(x,z,z)\},\ \forall x,z \in \mathbb{R}$$

Cerco $B_{\mathbb{R}^3}$ formata da autovettori di modulo 1 ortogonali fra loro

$$B_{V_2} = \left(\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}} \right) \qquad B_{V_4} = \left(\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, (\ ?\ ) \right)$$

Cerco (x,z,z) tale che $(x,z,z) \cdot \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = 0$

$(x,z,z)(1,1,1)=0$

$x+2z=0 \rightarrow$ es. $(-2,1,1) \rightarrow \frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}}$

$$B_{\mathbb{R}^3} = \left(\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, \frac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}} \right)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 76

Segno di $k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2$ = :

- $k_1, k_2 > 0$: $q(x_1, x_2) > 0$ tranne per $x_1 = x_2 = 0$ (definita positiva)
- $k_1, k_2 < 0$: $q(x_1, x_2) < 0$ tranne per $x_1 = x_2 = 0$ (definita negativa)
- $k_1 = 0, k_2 > 0$: $q(x_1, x_2)$ semidefinita positiva
- $k_1 = 0, k_2 < 0$: $q(x_1, x_2)$ semidefinita negativa
- $k_1 < 0, k_2 > 0$: $q(x_1, x_2)$ non definita

ESEMPIO:

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

Diagonalizzo $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 3-k & 1 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix} = k^2 - 6k + 8 \rightarrow \begin{matrix} k=2 \ (\text{molt. } 1) \\ k=4 \ (\text{molt. } 1) \end{matrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_2^2 \rightarrow q \text{ è definita positiva}$$

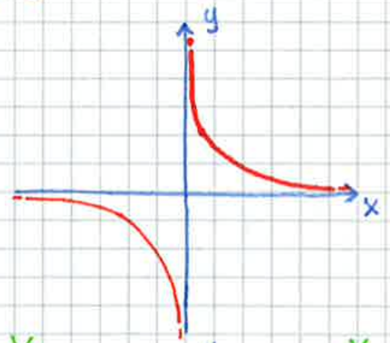
CASO GENERALE:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-k \end{pmatrix} = k^2 - (a_{11} + a_{22})k + \underbrace{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}_{\det(M)}$$

Le radici positive sono pari al numero di variazioni di segno dei coefficienti del polinomio caratteristico ordinato secondo le potenze decrescenti di k.

$$\boxed{q(x_1, \dots x_n) = (x_1, \dots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}}_{M \text{ simmetrica}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

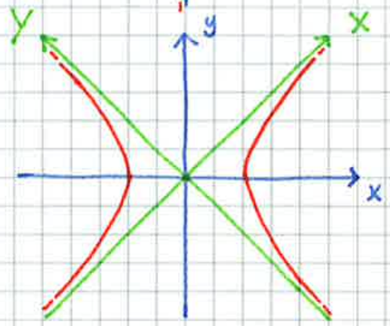
2) Studiare il luogo di punti del piano di equazione $xy=1$:



$q(x,y) = xy$ è la parte quadratica di $xy=1$

Cambio base con P: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y \end{cases}$$



$$q(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{2}}Y\right) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2$$

$$\boxed{\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 = 1 \text{ (Iperbole canonizzata)}}$$

3) Studiare il luogo dei punti di equazione $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$

$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(M - kI) = k^2 - 6k + 8 \rightarrow \begin{matrix} k=2 \\ k=4 \end{matrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Forma canonica di $q(x,y)$: $2X^2 + 4Y^2 = 1$ (Ellisse)

4) Studiare il luogo dei punti di equazione $x^2 + y^2 - 2xy - x - y = 0$

$q(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(M - kI) = \det\begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ -1 & 1-k \end{pmatrix} = k(k-2) \rightarrow \begin{matrix} k=0 \text{ (molt. 1)} \\ k=2 \text{ (molt. 1)} \end{matrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

forma canonica di $q(x,y)$: $2Y^2$

Autospazi: $V_0 = \{(x,x)\}, \forall x \in \mathbb{R}$

$V_2 = \{(x,-x)\}, \forall x \in \mathbb{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 76

QUADRICHE:

Equazioni di secondo grado nello spazio:

$$\boxed{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \ldots + a_{44} = 0}$$

La matrice associata è $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Diagonalizzando si può ottenere uno dei due tipi di c

1) $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \delta$

2) $\alpha x^2 + \beta y^2 = 2\gamma z$, $\alpha x^2 + \beta z^2 = 2\gamma y$, $\alpha y^2 + \beta z^2 = 2\gamma x$

ESEMPIO:

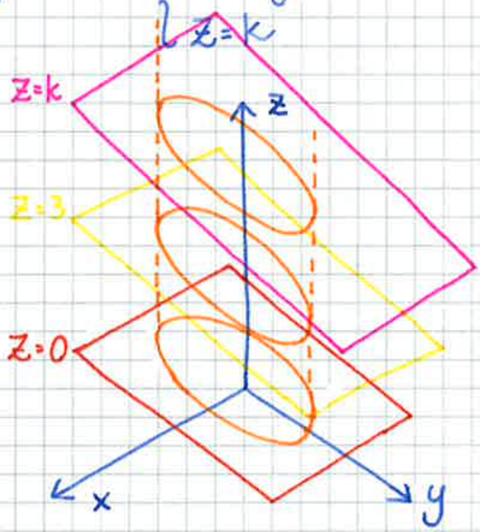
Studiare $S: x^2 + 2y^2 = 1$

- Quadrica degenere del 1° tipo $(\gamma = 0)$

Seziono con piani paralleli ai piani coordinati:

$\alpha \parallel xy \rightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = k \end{cases}$

S è un <u>cilindro ellittico</u>



QUADRICHE NON DEGENERI (IN FORMA CANONICA):

1) $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$

2) $\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$

3) $\alpha x^2 - \beta y^2 - \gamma z^2 = 1$

4) $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = -1$

1) ES.: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

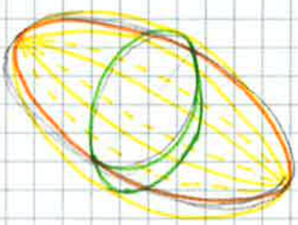
$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = -2 \\ z = \pm 1 \end{cases} \notin \mathbb{R}$

$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 3z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ (Ellisse)

$\begin{cases} x^2 + 3z^2 = -1 \\ y = \pm 1 \end{cases} \notin \mathbb{R}$

$\begin{cases} 2y^2 + 3z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ (Ellisse)

$\begin{cases} 2y^2 + 3z^2 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ (Punti reali $(\pm 1, 0, 0)$)



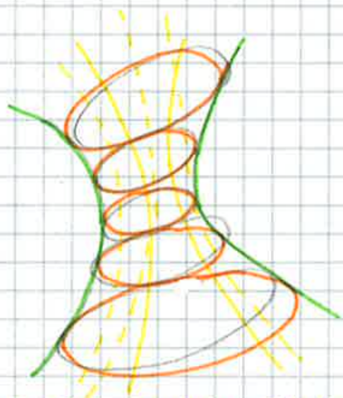
ELLISSOIDE

2) ES.: $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$

$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = \pm 1 \end{cases}$ (Ellissi)

$\begin{cases} 2y^2 - 3z^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ (Iperboli)

$\begin{cases} x^2 - 3z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ (Iperboli)



IPERBOLOIDE A UNA FALDA

SFERA:

$$\boxed{x^2+y^2+z^2=a^2}$$

Equazione della sfera di centro C e raggio R:

$$\boxed{C(x_0,y_0,z_0) \rightarrow S: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2}$$

Riconoscimento di una sfera, data l'equazione:

ES.: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5=0$

Traslazione (completamento del quadrato):

$(x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4+(z^2-6z+9)-9+5=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9 \longrightarrow C(1,2,3)$

$\downarrow$

È una sfera

ESERCIZIO:

Data la sfera $S: x^2+y^2+z^2=4$ e il piano $\pi: x-y=1$

determinare la loro posizione reciproca.

Condizione di tangenza: $d(C_s,\pi)=R_s$

$C_s=(0,0,0)$, $R_s=2$

$d(\pi,0)=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}<2 \rightarrow \pi$ è secante

Trovare centro e raggio della circonferenza $\gamma=S\cap\pi$ e darne una rappresentazione cartesiana

Determinare una sfera di raggio 7 passante per γ:

Cerco $C_s \in p \perp \pi$ e passante per C_γ

$C_\gamma = (1/2, -1/2, 0)$

$R_\gamma^2 = 7/2$

$$p \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$C_s \mid \quad d^2(C_s, C_\gamma) = R_s^2 - R_\gamma^2$$

$\downarrow$

$(t, -t, 0) \quad d^2((t,-t,0),(1/2,-1/2,0)) = 49 - 7/2$

$$(t-1/2)^2 + (-t+1/2)^2 + 0 = 49 - 7/2$$

Si trovano due valori di t che danno i centri delle circonferenze cercate (simmetriche rispetto al piano)

FUNZIONI DA $\mathbb{R}$ A $\mathbb{R}^n$:

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = (1+t, 2t, -t)$

$\qquad t \longrightarrow (1+t, 2t, -t)$ $\quad \Im m(f) =$ retta

DEFINIZIONE: f è continua se e solo se le sue componenti sono continue

$$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \ \forall t \in I,$$

$$x_i(t): I \to \mathbb{R}, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

DEFINIZIONE: $\Im m(f)$ si dice sostegno di f

DEFINIZIONE: $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, continua su $I \subseteq \mathbb{R}$ aperto, si dice curva parametrizzata

DEFINIZIONE: $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice arco di curva chiuso se $\gamma(a) = \gamma(b)$

$\sigma(t) = (-2,0) + (t-\pi)(0,-3) \iff \begin{cases} x = -2 \\ y = -3(t-\pi) \end{cases}$

$\operatorname{Im}\gamma: \; x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 9\cos^2 t \rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ (Ellisse)

DEFINIZIONE: Si dice arco regolare $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ quando
1) γ sia derivabile su tutto I
2) $\gamma'(t) \neq \vec{0}, \; \forall t \in I$

CAMBI DI PARAMETRIZZAZIONE:

$\gamma(t): I \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\delta(u): J \rightarrow \mathbb{R}$ si dicono congruenti quando esiste una fuzione $\phi: J \rightarrow I$ definita da $t = \varphi(u)$ tale che ϕ sia almeno di classe C^1 e che $\varphi'(u) \neq 0, \; \forall u \in J$;

Se inoltre $\varphi'(u) > 0$, γ e δ si dicono equivalenti

PROPRIETÀ: $(\gamma + \delta)' = \gamma' + \delta'$

$(k\gamma)' = k\gamma'$

$(\gamma \cdot \delta)' = \gamma' \delta + \gamma \cdot \delta'$

$t = \varphi(u) \rightarrow \frac{d\gamma}{du} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{du}$

$\frac{d\gamma}{du} \rightarrow \frac{d\delta}{du}$, $\quad \frac{dt}{du} \rightarrow d\varphi$

COROLLARIO:

- Se $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivabile e $|\gamma(t)| = k, \; \forall t \in I \rightarrow \gamma'(t) \perp \gamma(t)$
- Se γ è parametrizzata dall'ascissa curvilinea si ha che $|\gamma'(s)| = 1, \; \forall s \in J$, e viceversa

$$\int_0^t \sqrt{9+1}\, d\tau = \sqrt{10}\, t \longrightarrow t = \frac{s}{\sqrt{10}}$$

$$\downarrow$$

$$\gamma(s) = \left(3\cos\left(\frac{s}{\sqrt{10}}\right), 3\sin\left(\frac{s}{\sqrt{10}}\right), \frac{s}{\sqrt{10}}\right)$$

INTEGRALE CURVILINEO:

Date $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ $\quad Im\gamma \subseteq A$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $dom F = A \subseteq \mathbb{R}^n$

$\forall t \in I$, $F \circ \gamma(t) = F(\gamma(t))$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Integro F lungo $Im\gamma$:

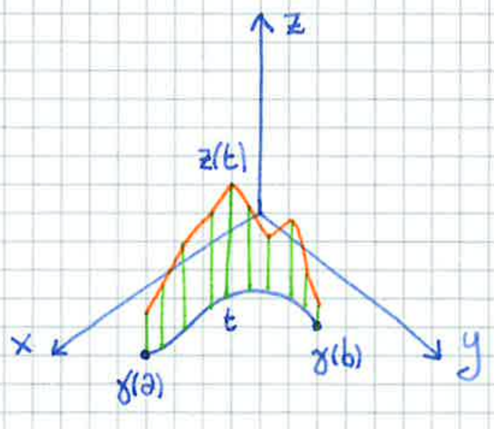
$$\int_\gamma F\, ds = \int_I F(\gamma(\tau)) \cdot |\gamma'(\tau)|\, d\tau$$

ESEMPIO:

$\gamma: I \to \mathbb{R}^2$, $\quad I = [a, b]$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$z(a) = F(\gamma(a))$



$\int_\gamma F\, ds =$ Area di una superficie costruita su una curva

ESEMPIO:

$\gamma(t) = (t, t^2)$, $\quad t = [0, 1]$

$F(x,y) = 3x + \sqrt{y}$ $\quad dom F = \underbrace{\mathbb{R} \times [0; +\infty)}_{\text{Prodotto cartesiano}}$

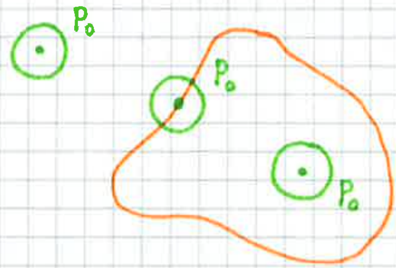
$\gamma'(t) = (1, 2t) \to |\gamma'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$

$F(\gamma(t)) = 3t + \sqrt{t^2} = 4t$

TOPOLOGIA:

Dato $P_0 \in \mathbb{R}^n$, si dice intorno sferico di P_0 di raggio R la regione
$\mathcal{U}(P_0, R) = \{ P \in \mathbb{R}^n \mid d(P, P_0) < R \}$

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $P_0 \in A$ si dice interno ad A se esiste
$\mathcal{U}(P_0, R) \subseteq A$, esterno se $\mathcal{U}(P_0, R) \subseteq \mathbb{R}^n - A$, di frontiera se
$\mathcal{U}(P_0, R)$ è diviso fra i due insiemi



L'insieme di tutti i punti di frontiera di A
dà la frontiera dello stesso

P_0 si dice punto di accumulazione se

Data $f: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, P_0 punto di accumulazione

$$\lim_{P \to P_0} (f(P)) = \ell \in \mathbb{R}$$

ovvero $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tale che se $0 < d(P, P_0) < \varepsilon \to |f(\ell) - \ell| < \delta$

Questo deve avvenire indipendentemente dal percorso con cui
P tende a P_0

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}\right)$$

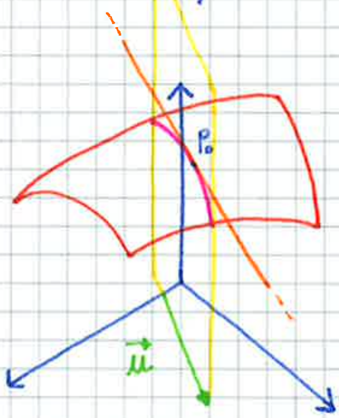
GRADIENTE:

Se in un punto P_0 esistono tutte le derivate parziali, esse si possono "raggruppare" in un vettore gradiente:

$$\nabla_{P_0} f = \text{grad}_{P_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{P_0}$$

Se esiste il gradiente di f in P_0, f è ivi derivabile

∇f è una funzione vettoriale, il valore delle cui componenti dipende dalle derivate parziali corrispondenti



DERIVATE:

Dato $\vec{u}(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $P_0 \in \text{dom} f$

Si ha $\left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0}$ = derivata di f nella direzione $\vec{u}$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(P_0+t\vec{u}) - f(P_0)}{t}\right) \longleftrightarrow \left(\frac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0}$$

Se $\vec{u}$ è un versore si ha una derivata direzionale

Se $\vec{u}$ coincide con il versore di uno degli assi si ha una derivata parziale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 76

TEOREMA:

Considerata $F = f(\gamma(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Se f è differenziabile in $\gamma(t_0)$ e γ è regolare, allora F è derivabile in t_0 e risulta

$$\boxed{F'(t_0) = \nabla_{\gamma(t_0)} f \cdot \gamma'(t_0)}$$

$\to$ Se $F'(t_0) = 0$

$\nabla_{\gamma_0} f \cdot \gamma'(t_0) = 0$

$\downarrow$

$\nabla_{\gamma_0} f \perp \gamma'(t_0)$

ESEMPIO:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Considero la superficie di livello 0 di

$\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2-1=0\} \to$ è una sfera S

Dato $P_0(1,0,0)$

$\nabla_{P_0} f = (2x, 2y, 2z) = (2,0,0) \to \perp$ al piano tangente a S in P_0

$\downarrow$

$\pi: 2(x-1) = 0$

PROPRIETÀ:

$\left(\dfrac{df}{d\vec{u}}\right)_{P_0}$ è massima se $\vec{u}$ ha la stessa direzione e verso di $\nabla_{P_0} f$

è minima se ha stessa direzione e verso opposto di $\nabla_{P_0} f$

TEOREMA:

Se $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ in un intorno di $P_0 \in \mathcal{D}$ è di classe C^1 allora risulta ivi differenziabile

Se gli autovalori di $H_{P_0}f$ sono positivi, P_0 è minimo;
Se gli autovalori di $H_{P_0}f$ sono negativi, P_0 è massimo;
Altrimenti P_0 è punto di sella.

CASI DI SEMIDEFINIZIONE:

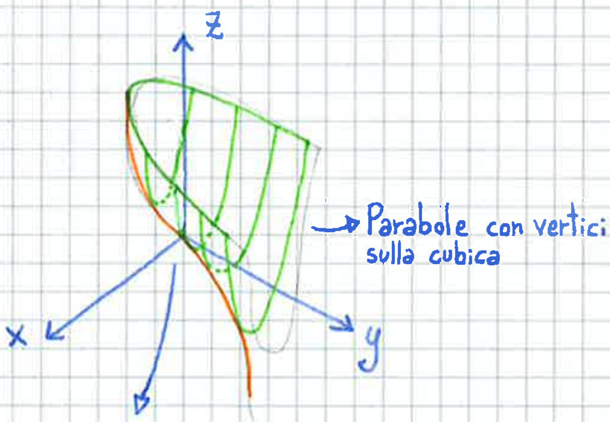
Se uno o più autovalori di $H_{P_0}f$ sono nulli il metodo non è applicabile
Si usano allora metodi alternativi:

SEZIONI PARALLELE:

ES.: $x^2 - y^3 = z$ in $(0,0)$

$\begin{cases} z = x^2 - y^3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$ Parabola

$\begin{cases} z = x^2 - y^3 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -y^3 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow$ Cubica



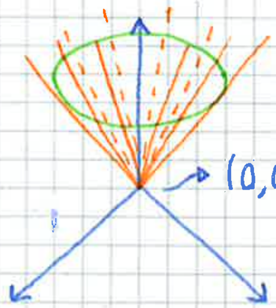
$(0,0,0)$ Non è né massimo, né minimo, né sella

ES.:

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in $P(0,0)$

$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \rightarrow f$ non è differenziabile in $P(0,0)$

Elevamento al quadrato: $\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \rightarrow$ Cono



$\rightarrow (0,0,0)$ è minimo

FUNZIONI A VALORI VETTORIALI:

$F \quad \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se $n=1 \rightarrow$ Variabile reale $\rightarrow$ Curve

Struttura: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, x_n) + \dots + f_m(x_1, x_2, x_n))$
$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$
$\forall i = 1, \dots m \quad f_i : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice componente di F

Funzione approssimante: $G(P) = F(P_0) + J_{P_0}F \cdot (P - P_0)$

$$G(u,v) = (2,-1,2) + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v-1 \end{pmatrix}$$

$$(x,y,z) = (2,-1,2) + (-2u-2+v-1,\ u+1,\ 1/2u+1/2-1/2v+1/2)$$

$$(x,y,z) = (-2u+v-1,\ u,\ 3+1/2u-1/2v)$$

$$G: \begin{cases} x = -2u+v-1 \\ y = u \\ z = 3+1/2u-1/2v \end{cases}$$

$$G: \begin{cases} v = x+2y+1 \\ u = y \\ z = 3+1/2y - \dfrac{(x+2y+1)}{2} \end{cases} \to x \quad y+2z-5=0$$

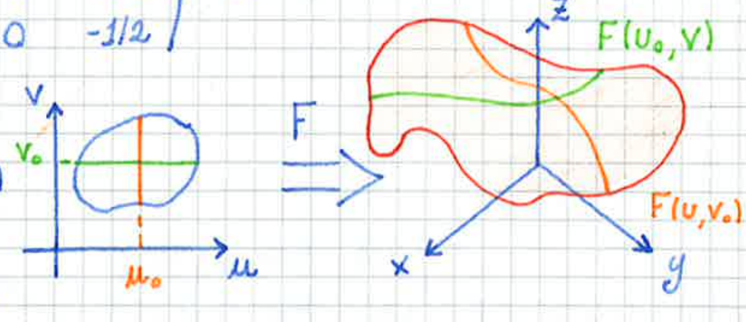
Piano tangente a Imf in $P_0(-1,1)$

$$G(P) - F(P_0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u+1 \\ v-1 \end{pmatrix}$$ → Tutti vettori i al piano tangente dipendono linearmente da $(-2,1,1/2)$ e $(1,0,-1/2)$

Piano tangente: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = 0$

$F(u_0,v) = F|_{\text{segmento } (u_0,v)}$

$F(u,v_0) = F|_{\text{segmento } (u,v_0)}$



ESEMPIO:

$F(u,v) = (u^2+v,\ u,\ \sqrt{6-u^2-v^2}),\quad (u_0,v_0) = (-1,1)$

$v_0 = 1 \to F(u,1) = (u^2+1,\ u,\ \sqrt{5-u^2})$

$F'(u) = (2u,\ 1,\ -u/\sqrt{5-u^2}) \to F'_u(-1,1) = (-2,1,1/2)$

$u_0 = -1 \to F(-1,v) = (1+v,\ -1,\ \sqrt{5-v^2})$

$F'(v) = (\ \ ,\ 0,\ -v/\sqrt{5-v^2}) \to F'_v(-1,1) = (1,0,-1/2)$

Un'altra curva generica coordinata è $\begin{cases} x = t\cos\theta_0 \\ y = t\sin\theta_0 \\ z = t \end{cases} \to$ Retta per $(0,0,0)$

$$J_F = \begin{pmatrix} \cos\theta & -t\sin\theta \\ \sin\theta & t\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $t = 0 \to \rho(J) = 1, \forall\theta \to F$ non è differenziabile in $(0,0,0)$

ESEMPIO:

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid F(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta), \underbrace{\rho \geq 0 \wedge \theta \subseteq [0,2\pi)}_{\downarrow}$$

$$\mathcal{D}_F = [0,+\infty) \times [0,2\pi)$$

$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ (Coordinate cartesiane)

$$J(F) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$